

TOPOLOGIE - SOMMERSEMESTER 2012

STEFAN FRIEDL

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	2
1. Grundlegende Definitionen	4
1.1. Metrische Räume	4
1.2. Mengentheoretische Begriffe	5
1.3. Definition eines topologischen Raums und Beispiele	6
1.4. Stetige Abbildungen	10
1.5. Basis einer Topologie	11
1.6. Die Teilraumtopologie	15
1.7. Die disjunkte Vereinigung und das Produkt von topologischen Räumen	17
1.8. Abgeschlossene Mengen	19
2. Kompakte topologische Räume	22
2.1. Definition von Kompaktheit und Beispiele	22
2.2. Aussagen über kompakte topologische Räume	24
3. Quotientenräume	28
3.1. Äquivalenzrelationen	28
3.2. Die Quotiententopologie	31
3.3. Beispiele: Zylinder, Torus, das Möbius Band und die Kleinsche Flasche	33
3.4. Beispiele: Flächen von höherem Geschlecht	36
3.5. Das Verkleben von topologischen Räumen	38
4. Mannigfaltigkeiten	39
4.1. Definition und Beispiele	39
4.2. Untermannigfaltigkeiten	41
5. Gruppenoperationen	43
5.1. Definition und Beispiele	43
5.2. Gruppenoperationen auf Mannigfaltigkeiten	45
6. Zusammenhängende topologische Räume	48
7. Die Fundamentalgruppe	52
7.1. Homotopieklassen von Wegen	53
7.2. Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes	58
8. Kategorien	63
8.1. Definition und Beispiele	63
8.2. Homotope Abbildungen	65

8.3.	Funktoren	67
8.4.	Die Fundamentalgruppe als Funktor	69
9.	Fundamentalgruppen und Überlagerungen	71
9.1.	Überlagerungen	71
9.2.	Das Hochheben von Wegen	75
9.3.	Das Hochheben von Homotopien	78
9.4.	Gruppenoperationen und Fundamentalgruppen	83
9.5.	Überlagerungstheorie	87
9.6.	Einschub: Die Quotientengruppe	96
9.7.	Die Decktransformationsgruppe	97
9.8.	Einschub: Galoistheorie	102
10.	Homotopieäquivalente Räume	104
11.	Der Satz von Seifert–van Kampen I	109
11.1.	Das freie Produkt von Gruppen	109
11.2.	Formulierung des Satzes von Seifert–van Kampen I	111
11.3.	Graphen	117
11.4.	Flächen	120
12.	Der Satz von Seifert–van Kampen II	122
12.1.	Präsentationen von Gruppen	122
12.2.	Das amalgamierte Produkt von Gruppen	127
12.3.	Der allgemeine Satz von Seifert–van Kampen	129
13.	Ein Abstecher in die Knotentheorie	134
13.1.	Definitionen	134
13.2.	Die Wirtinger-Präsentation	136
13.3.	Weiterführende Sätze der Knotentheorie	142
14.	Höhere Homotopiegruppen	145
14.1.	Definition von den höheren Homotopiegruppen	145
14.2.	Eigenschaften von den höheren Homotopiegruppen	149
14.3.	Homotopiegruppen von Sphären	153
14.4.	Ein Beispiel für die Bestimmung von höheren Homotopiegruppen	156
15.	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	157
16.	Die Poincaré Vermutung	160

LITERATUR

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skriptum. Das Skriptum orientiert sich nicht an einem Buch. Als begleitende und weiterführende Literatur bieten sich eventuell folgende Bücher an:

Croom: *Basic concepts of algebraic topology*,

Hatcher: *Algebraic topology*,

Jänich: *Topologie*,

Lück: *Algebraische Topologie*,

Munkres: *Topology*,

Stöcker und Zieschang, *Algebraische Topologie - Eine Einführung*.

Das Buch von Hatcher kann mithilfe des folgenden Links von der Webseite des Autoren runtergeladen werden:

<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>

1. GRUNDLEGENDE DEFINITIONEN

1.1. **Metrische Räume.** Wir haben die metrischen Räume schon in Analysis II behandelt. Wir erinnern noch einmal kurz an die Definition:

Definition. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X , d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y), \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (2) für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie})$$

- (3) für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Wir nennen $d(x, y)$ den *Abstand von x zu y* .

Das vielleicht wichtigste Beispiel eines metrischen Raumes ist gegeben durch $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik, d.h. mit der Metrik, welche definiert ist durch

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Wenn wir nichts anderes schreiben, dann betrachten wir \mathbb{R}^n als metrischen Raum bezüglich der euklidischen Metrik.

Definition. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Wir sagen f ist *stetig*, wenn gilt ¹

$$\forall_{x \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in B_\delta(y)} d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Diese Definition der Stetigkeit ist eine Verallgemeinerung der ‘ $\varepsilon - \delta$ ’-Definition von Stetigkeit für Funktionen auf \mathbb{R} .

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (1) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass

$$B_r(x) := \{y \in U \mid d(x, y) < r\} \subset U.$$

¹Wenn nichts anderes angegeben ist, dann wird die Metrik immer mit d bezeichnet, d.h. ‘Sei X ein metrischer Raum’ ist kurz für ‘Sei (X, d) ein metrischer Raum’.

(2) Wir sagen $A \subset X$ ist *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Mithilfe der Definitionen kann man leicht folgendes Lemma beweisen.

Lemma 1.1. *Es sei X ein metrischer Raum. Dann gilt*

- (1) \emptyset und X sind offen,
- (2) der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist wiederum offen, d.h. es gilt

$$U_1, \dots, U_k \text{ offen} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \text{ ist offen,}$$

- (3) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wiederum offen, d.h. es gilt

$$U_i, i \in I \text{ offen} \Rightarrow \cup_{i \in I} U_i \text{ ist offen.}$$

Mit der Definition von offenen Mengen können wir nun folgenden Satz formulieren:

Satz 1.2. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Dann gilt:*

- f ist stetig
- \Leftrightarrow für jede offene Menge U in Y ist $f^{-1}(U)$ offen in X
- \Leftrightarrow für jede abgeschlossene Menge A in Y ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .

Dieser Satz wurde als Satz 2.5 in Analysis II formuliert. Der Beweis war eine Übungsaufgabe in Analysis II, und ist jetzt wiederum eine (weiterhin sehr sinnvolle) Übungsaufgabe.

Die Formulierung von Stetigkeit mit offenen Mengen macht das Beweisen vieler Aussagen deutlich leichter. Beispielsweise läßt sich folgendes Lemma jetzt ganz einfach beweisen:

Lemma 1.3. *Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, dann ist auch $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig.*

Beweis. Es gilt

$$U \subset Z \text{ ist offen} \Rightarrow \begin{array}{l} f^{-1}(U) \subset Y \text{ ist offen} \\ \text{da } f \text{ stetig} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} g^{-1}(f^{-1}(U)) \subset X \text{ ist offen} \\ \text{da } g \text{ stetig.} \end{array}$$

□

1.2. Mengentheoretische Begriffe. Bevor wir die topologischen Räume einführen erinnern wir an ein paar grundlegende Definitionen und Aussagen aus der Mengentheorie:

- (1) Wir bezeichnen mit \emptyset die leere Menge.
- (2) Es sei X eine Menge. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(X)$ die *Potenzmenge von X* , d.h. die Menge aller Teilmengen von X .

- (3) Es seien
- X
- und
- Y
- Mengen, dann bezeichnen wir mit

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

die Menge aller angeordneter Paare.

- (4) Es sei X eine Menge. Eine Familie $A_i, i \in I$ von Teilmengen von X besteht aus einer Indexmenge I (z.B. $I = \{1, \dots, k\}$ oder $I = \mathbb{Z}$), und einer Teilmenge $A_i \subset X$ für jedes $i \in I$.
- (5) Es sei nun $A_i, i \in I$ eine Familie von Teilmengen von X , dann gilt

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i &= \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) \text{ und} \\ X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i &= \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i). \end{aligned}$$

Diese Aussagen werden manchmal die ‘de Morgansche Gesetze’ genannt.

- (6) Es seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen, wir sagen A und B sind *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$.
- (7) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, dann gilt:

$$\begin{aligned} U &= f(f^{-1}(U)) && \text{für jede Teilmenge } U \subset Y \\ U &\subset f^{-1}(f(U)) && \text{für jede Teilmenge } U \subset X \\ f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) && \text{für Teilmengen } U_i \in Y, i \in I \\ f(\bigcup_{i \in I} U_i) &= \bigcup_{i \in I} f(U_i) && \text{für Teilmengen } U_i \in X, i \in I. \end{aligned}$$

1.3. Definition eines topologischen Raums und Beispiele. Wir haben in Satz 1.2 gesehen, dass wir für den Begriff der Stetigkeit benötigen wir also nicht die Metrik, sondern nur den Begriff von offenen Mengen. Dies ist die grundlegende Idee hinter dem Begriff des topologischen Raumes.

Definition. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{T}) wobei X eine Menge ist und \mathcal{T} eine *Topologie auf X* , d.h. \mathcal{T} ist eine Menge von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

(T1)

$$\emptyset, X \in \mathcal{T},$$

(T2)

$$U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{T},$$

(T3)

$$U_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}.$$

Eine Menge in \mathcal{T} nennen wir *offen*. Wir sagen $A \subset X$ ist *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel. (a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir betrachten

$$\mathcal{T} := \left\{ U \subset X \mid \begin{array}{l} \text{für jedes } x \in U \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0, \\ \text{so dass } B_\varepsilon(x) \subset U \end{array} \right\}$$

nach Lemma 1.1 eine Topologie auf der Menge X . In diesem Fall ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen (bzw. abgeschlossen), wenn U offen (bzw. abgeschlossen) im Sinne von metrischen Räumen ist.

Wenn X ein metrischer Raum ist, dann betrachten wir X auch als topologischen Raum bezüglich der obigen Topologie. Wir bezeichnen diese Topologie als die *Standardtopologie* auf dem metrischen Raum X .

- (b) Ein wichtiger Spezialfall von (a) ist der Fall $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik. Wir betrachten dann \mathbb{R}^n als topologischen Raum wie in (a). In diesem Fall ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen (bzw. abgeschlossen), wenn U offen (bzw. abgeschlossen) im Sinne von Analysis II ist.

Wir bezeichnen \mathcal{T} als die Standardtopologie auf \mathbb{R}^n . Wenn nichts anderes angegeben ist, dann betrachten wir \mathbb{R}^n als topologischen Raum bezüglich der Standardtopologie.

- (c) Sei X eine beliebige Menge, dann ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X . Wir bezeichnen diese Topologie auf X als die *triviale Topologie*.
- (d) Sei X eine beliebige Menge und \mathcal{T} die Menge aller Untermengen von X . Dann ist \mathcal{T} eine Topologie auf X . Diese Topologie wird auch die *diskrete* Topologie auf X genannt.
- (e) Sei $X = \mathbb{R}$ und es sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ wie folgt definiert:

$$U \in \mathcal{T} :\Leftrightarrow \text{es gibt } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \text{ so dass } U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \\ \text{oder } U = \emptyset.$$

Dann ist \mathcal{T} eine Topologie auf $X = \mathbb{R}$.

- (f) Es sei \mathbb{K} ein Körper (z.B. $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathbb{F}_p$, d.h. der Körper mit p Elementen, wobei p eine Primzahl ist). Wir betrachten

$$X = \mathbb{K}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}.$$

Für eine Familie $\mathcal{F} = \{f_i(x, y)\}_{i \in I}$ von Polynomen definieren wir

$$V(\mathcal{F}) := \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid f_i(x, y) = 0 \text{ für alle } i \in I\}.$$

Wir definieren nun $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ wie folgt:

$$U \in \mathcal{T} :\Leftrightarrow \text{es gibt eine Familie } \mathcal{F} = \{f_i(x, y)\}_{i \in I} \text{ von} \\ \text{Polynomen, so dass } U = \mathbb{K}^2 \setminus V(\mathcal{F})$$

Dann ist \mathcal{T} eine Topologie auf $X = \mathbb{K}^2$ (siehe Übungsblatt 1). Diese Topologie wird die *Zariski-Topologie auf \mathbb{K}^2* genannt, und ist ein zentrales Objekt der ‘algebraischen Geometrie’.

Definition. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $x \in X$.

- (1) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von x* , falls es eine offene Menge V gibt, so dass $x \in V \subset U$.
- (2) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offene Umgebung von x* , falls U offen ist mit $x \in U$.

Auf Übungsblatt 1 werden wir folgendes Lemma beweisen:

Lemma 1.4. *Es sei X ein topologischer Raum und $U \subset X$. Dann gilt*

*U ist offen \Leftrightarrow zu jedem $x \in U$ gibt es eine offene Umgebung V ,
welche in U enthalten ist.*

Definition. Ein topologischer Raum heißt *Hausdorff*, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ disjunkte Umgebungen U von x und V von y gibt.

Es folgt leicht aus den Definitionen, dass ein topologischer Raum *Hausdorff* ist, genau dann, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ disjunkte *offene* Umgebungen U von x und V von y gibt.

Beispiel. Wir überprüfen nun ob die obigen Beispiele Hausdorff sind:

- (a,b) In Analysis II haben wir schon gezeigt, dass der einem metrischen Raum zugeordnete topologische Raum Hausdorff ist.
Zur Erinnerung, wenn X ein metrischer Raum ist und $x \neq y$, dann setzen wir $r := d(x, y)$. Es folgt aus der Dreiecksungleichung, dass $B_{\frac{r}{2}}(x)$ und $B_{\frac{r}{2}}(y)$ disjunkt sind.
- (c) Es sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ die triviale Topologie. Wenn X mindestens zwei Elemente enthält, dann ist (X, \mathcal{T}) nicht Hausdorff.²
- (d) Es sei X eine beliebige Menge und \mathcal{T} die diskrete Topologie auf X . Diese Topologie ist Hausdorff, in der Tat, für gegebene $x \neq y$ können wir $U = \{x\}$ und $V = \{y\}$ wählen.
- (e) Diese Topologie auf \mathbb{R} ist nicht Hausdorff, denn die Schnittmenge von zwei nichtleeren offenen Mengen in (X, \mathcal{T}) ist nichtleer, es gibt also keine disjunkten nichtleeren offene Teilmengen in (X, \mathcal{T}) .
- (f) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann ist die Zariski-Topologie nicht Hausdorff. Der Grund liegt darin, dass nichtleere offene Mengen in der Zariski-Topologie immer vom Typ ‘ganz \mathbb{R}^2 minus eine höchstens ein-dimensionale Teilmenge’ ist, und sich daher zwei nichtleere offene Mengen in der Zariski-Topologie immer schneiden. Eine

²Warum ist dies der Fall, und warum der Zusatz ‘wenn X mindestens zwei Elemente enthält’?

mathematisch saubere Ausarbeitung dieses Arguments erfordert allerdings einen gewissen Aufwand.

Definition. Es sei X eine Menge und es seien \mathcal{S} und \mathcal{T} zwei Topologien auf X . Wir sagen \mathcal{S} ist *feiner* als \mathcal{T} , wenn $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, umgekehrt sagen wir, dass \mathcal{S} *größer* als \mathcal{T} ist, wenn $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Beispiel. (1) Wir betrachten $X = \mathbb{R}^n$. Es sei \mathcal{S} die Standardtopologie auf X und es sei $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$. Dann ist \mathcal{S} feiner als \mathcal{T} , und \mathcal{T} ist dementsprechend größer als \mathcal{S} .

(2) Etwas vereinfacht gesprochen ist eine Topologie \mathcal{S} also feiner als eine Topologie \mathcal{T} , wenn ‘ \mathcal{S} mehr offene Mengen als \mathcal{T} besitzt’.

In Übungsblatt 1 werden wir folgendes Lemma beweisen:

Lemma 1.5. *Es sei X eine Menge und es seien \mathcal{S} und \mathcal{T} zwei Topologien auf X . Wir betrachten die Abbildung $f: (X, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$, welche gegeben ist durch die Identitätsabbildung, d.h. $f(x) = x$. Dann ist diese Abbildung stetig, genau dann, wenn \mathcal{S} feiner als \mathcal{T} ist.*

Wir beschließen dieses Kapitel mit zwei weiteren Beispiel von topologischen Räumen, welche uns in den kommenden Wochen begleiten werden.

Beispiel. (Gerade mit zwei Nullen) Wir betrachten die Menge

$$X := \mathbb{R} \cup \{*\},$$

d.h. X besteht aus \mathbb{R} und einem weiteren Punkt $*$. Wir sagen $U \subset X$ ist offen wenn gilt:

- (1) zu jedem Punkt $x \in U \cap \mathbb{R}$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$,
- (2) wenn $* \in U$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \subset U$.

In Übungsblatt 1 werden wir sehen, dass dies in der Tat eine Topologie auf X definiert.

Beispiel. (Gerade mit einem Punkt im Unendlichen) Wir betrachten die Menge

$$Y := \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

d.h. Y besteht aus \mathbb{R} und einem weiteren Punkt ∞ . Wir sagen $U \subset Y$ ist offen, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) zu jedem Punkt $x \in U \cap \mathbb{R}$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$,
- (2) wenn $\infty \in U$, dann gibt es ein $C > 0$, so dass $(-\infty, -C) \cup (C, \infty) \subset U$.

In Übungsblatt 1 werden wir wiederum sehen, dass dies in der Tat eine Topologie auf Y definiert.

1.4. Stetige Abbildungen.

Definition. Es seien X und Y topologischen Räume³ und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen f ist *stetig*, wenn gilt:

$$U \subset Y \text{ offen} \Rightarrow f^{-1}(U) \subset X \text{ offen.}$$

Beispiel. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Dann folgt aus Satz 1.19, dass f stetig ist als Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann, wenn f stetig ist als Abbildung zwischen den entsprechenden topologischen Räumen.

Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 1.6. *Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, dann ist auch $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig.*

Der Beweis dieses Lemma ist wort-wörtlich der Gleiche, wie der Beweis von Lemma 1.3.

Definition. Es seien X und Y topologischen Räume und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen f ist ein *Homöomorphismus*, wenn f folgende drei Eigenschaften besitzt:

- (1) f ist stetig,
- (2) f ist bijektiv,
- (3) $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ist stetig.

Die 3. Bedingung ist in der Tat notwendig, denn es gibt stetige, bijektiven Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen, welche jedoch kein Homöomorphismus sind. Eine Quelle von solchen Abbildungen ist beispielsweise Lemma 1.5.

Definition. Es seien X und Y topologische Räume. Wir sagen X und Y sind *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt.

Es seien X und Y homöomorphe topologische Räume. Dann gibt also einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$, d.h. eine bijektive Abbildung, so dass gilt

$$U \subset X \text{ ist offen} \Leftrightarrow f(U) \subset Y \text{ ist offen.}$$

Wenn X eine Eigenschaft besitzt, welche nur mit dem Begriff der offenen Mengen ausgedrückt werden kann, dann hat Y offensichtlich ebenfalls diese Eigenschaft. Beispielsweise ist X ein Hausdorff-Raum, genau dann, wenn Y ein Hausdorff-Raum ist.

³Wenn wir schreiben ‘es sei X ein topologischer Raum’, dann meinen wir das X eine Menge ist mit einer Topologie. Im Normalfall erwähnen wir die Topologie nicht in der Notation. Diese Konvention ist gang und gäbe in der Mathematik, beispielsweise schreiben wir in Linearer Algebra, ‘sei V ein Vektorraum’, wenn wir wirklich schreiben müssten, ‘sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum.’

1.5. Basis einer Topologie. Es sei X eine Menge und es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X . Wir sagen \mathcal{B} besitzt die *Basiseigenschaft*, wenn gilt:

- (B1) Zu jedem $x \in X$ existiert ein $i \in I$, so dass $x \in B_i$.
- (B2) Es seien $i, j \in I$ und es sei $x \in B_i \cap B_j$. Dann existiert ein $k \in I$, so dass $x \in B_k$ und $B_k \subset B_i \cap B_j$.

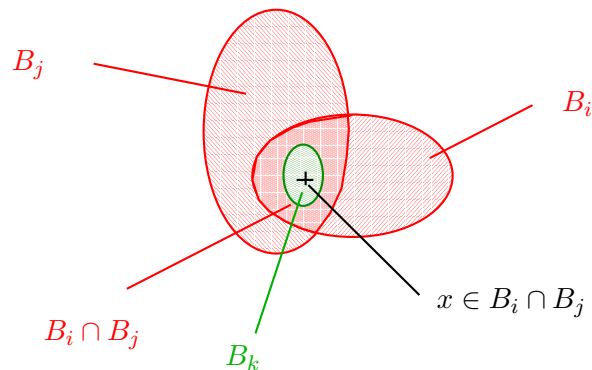


ABBILDUNG 1. Schematisches Bild für die Basiseigenschaft (B2).

Beispiel. Es sei X ein metrischer Raum und es sei \mathcal{B} die Menge aller offenen Bälle in X , d.h.

$$\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X \text{ und } \varepsilon > 0\},$$

dann besitzt \mathcal{B} die Basiseigenschaft.

Lemma 1.7. *Es sei X eine Menge und es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X , welche die Basiseigenschaft besitzt. Wir definieren*

$$\mathcal{T} := \{V \subset X \mid \text{zu jedem } x \in V \text{ gibt es ein } i \in I, \text{ so dass } x \in B_i \subset V\}.$$

Dann ist \mathcal{T} eine Topologie auf X .

Wir nennen \mathcal{T} die *von \mathcal{B} erzeugte Topologie auf X* . Umgekehrt, sagen wir, dass \mathcal{B} eine *Basis der Topologie \mathcal{T}* ist.

Beweis. Wir zeigen nun, dass die Axiome (T1), (T2) und (T3) gelten.

- (T1) Nach (B1) gibt es zu jedem $x \in X$ ein $i \in I$ mit $x \in B_i$. Es folgt, dass $X = \cup_{i \in I} B_i$. Es folgt also, dass $X \in \mathcal{T}$. Zudem ist $\emptyset \in \mathcal{T}$, nachdem die Vereinigung von null Mengen, die Nullmenge ist.

(T2) Wir müssen zeigen, dass wenn $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}$, dann ist auch $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{T}$.

Wir betrachten zuerst den Fall von zwei Mengen in \mathcal{T} . Es seien also $U, V \in \mathcal{T}$. Wir wollen zeigen, dass $U \cap V \in \mathcal{T}$ ist. Es sei also $x \in U \cap V$. Nachdem U und V offen sind, gibt es also $i, j \in I$, so dass $x \in B_i \subset U$ und $x \in B_j \subset V$. Nach Eigenschaft (B2) von \mathcal{B} existiert ein $k \in I$, so dass $x \in B_k$ und $B_k \subset B_i \cap B_j$. Insbesondere gilt dann auch, dass $x \in B_k \subset U \cap V$. Also ist $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Es seien nun $U_1 \cap \dots \cap U_k$ offene Mengen. Dann gilt

$$U_1 \cap \dots \cap U_k = (U_1 \cap \dots \cap U_{k-1}) \cap U_k,$$

und wir können mithilfe des vorherigen Falles und mithilfe von Induktion nach der Anzahl der Mengen in \mathcal{T} zeigen, dass $U_1 \cap \dots \cap U_k$ ebenfalls in \mathcal{T} liegt.

(T3) Es sei also $U_j, j \in J$ eine Familie von Mengen in \mathcal{T} . Wir müssen zeigen, dass

$$\bigcup_{j \in J} U_j$$

offen ist. Es sei also $x \in \bigcup_{j \in J} U_j$. Dann gibt es insbesondere ein $k \in J$, so dass $x \in U_k$. Nachdem $U_j \in \mathcal{T}$ gibt es ein $i \in I$, so dass $x \in B_i \subset U_j$. Dann gilt aber auch, dass

$$x \in B_i \subset U_k \subset \bigcup_{j \in J} U_j.$$

□

Beispiel. Es sei X ein metrischer Raum und \mathcal{B} die Menge aller offenen Bälle in X , d.h.

$$\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X \text{ und } \varepsilon > 0\}.$$

dann ist \mathcal{B} eine Basis der Standardtopologie auf X .

Lemma 1.8. *Es sei X eine Menge, es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X , und es sei \mathcal{T} die von \mathcal{B} erzeugte Topologie auf X . Dann gilt*

$$V \subset X \text{ ist offen} \iff V \text{ ist die Vereinigung von beliebig} \\ \text{bezüglich } \mathcal{T} \quad \quad \quad \text{vielen Mengen in } \mathcal{B}.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $V = \bigcup_{j \in J} B_j$ die Vereinigung von Mengen in \mathcal{B} ist. Nachdem die Mengen in \mathcal{B} offen bezüglich \mathcal{T} sind, und nachdem \mathcal{T} eine Topologie, folgt auch, dass $V \in \mathcal{T}$.

Nehmen wir nun an, dass $V \subset X$ offen ist bezüglich \mathcal{T} . Für jedes $x \in V$ existiert dann, per Definition, ein $i_x \in I$, so dass $x \in B_{i_x} \subset V$. Dann folgt aber, dass

$$V = \bigcup_{x \in V} \{x\} \subset \bigcup_{x \in V} B_{i_x} \subset V,$$

d.h. $V = \cup_{x \in V} B_x$. □

Korollar 1.9. *Es sei X eine Menge, es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X , und es sei \mathcal{T} die von \mathcal{B} erzeugte Topologie auf X . Es sei \mathcal{T}' eine beliebige Topologie auf X , bezüglich derer die Mengen $B_i, i \in I$ offen sind. Dann ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.*

Die von $\{B_i\}_{i \in I}$ erzeugte Topologie auf X ist also die größte Topologie auf X , bezüglich derer alle $B_i, i \in I$ offen sind.

Beweis. Es sei X eine Menge, es sei $\{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X , und es sei \mathcal{T} die von $\{B_i\}_{i \in I}$ erzeugte Topologie auf X . Es sei \mathcal{T}' eine beliebige Topologie auf X , bezüglich derer die Mengen $B_i, i \in I$ offen sind.

Es sei $U \subset \mathcal{T}$. Aus Lemma 1.8 folgt, dass

$$V = \cup_{j \in J} B_j \text{ mit } J \subset I.$$

Die Mengen $B_j, j \in J$ liegen nach Voraussetzung in \mathcal{T}' . Aus (T3) folgt dann auch, dass $V \in \mathcal{T}'$. Insbesondere gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. □

Basen von Topologien können erstaunlich praktisch sein, beispielsweise besagt folgendes Lemma, dass es genügt die Stetigkeitseigenschaft einer Abbildung zwischen topologischen Räumen für offene Mengen in einer Basis zu überprüfen:

Lemma 1.10. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Basis für die Topologie von Y . Dann gilt*

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \text{für jedes } i \in I \text{ ist } f^{-1}(B_i) \text{ offen in } X.$$

Beweis. Die Richtung \Rightarrow ist offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass für jedes $i \in I$ das Urbild $f^{-1}(B_i)$ offen in X ist. Wir wollen zeigen, dass f stetig ist. Es sei also $U \subset Y$ eine offene Teilmenge. Nach Lemma 1.8 gibt es ein $J \subset I$, so dass

$$U = \cup_{j \in J} B_j.$$

Dann gilt

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\cup_{j \in J} B_j) = \cup_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(B_j)$ offen in X für jedes $j \in J$. Also ist $f^{-1}(U)$ die Vereinigung von offenen Teilmengen von X , also wiederum offen. □

Beispiel. Es sei G eine Gruppe. Es sei

$$\mathcal{B} = \left\{ U \subset G \mid \begin{array}{l} \text{es gibt eine normale Untergruppe } H \subset G \\ \text{von endlichem Index und } g \in G, \text{ so dass } gH = U \end{array} \right\}$$

Dann kann man zeigen, dass \mathcal{B} die Basiseigenschaft besitzt.⁴ Die durch \mathcal{B} induzierte Topologie auf G wird die *pro-endliche* Topologie von G genannt. Die pro-endliche Topologie spielt eine wichtige Rolle in der Theorie unendlicher Gruppen.

Es seien nun G und H Gruppen, welche wir als topologische Räume bezüglich der pro-endlichen Topologie betrachten. Dann gilt:

- (1) Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ h &\mapsto hg \end{aligned}$$

stetig.

- (2) Jeder Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow H$ ist eine stetige Abbildung.

Die beiden Aussagen kann man mithilfe von Lemma 1.10 beweisen. Dies wird in Übungsblatt 2 ausgeführt.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma.

Lemma 1.11. *Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und \mathcal{C} eine Familie von offenen Mengen in (X, \mathcal{T}) mit folgender Eigenschaft:*

Zu jeder offenen Menge U und zu jedem $x \in U$ gibt es ein $C \in \mathcal{C}$, so dass $x \in C \subset U$.

Dann ist \mathcal{C} eine Basis für die Topologie \mathcal{T} von X .

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass \mathcal{C} die Basiseigenschaft erfüllt:

- (B1) Wenden wir die Eigenschaft von \mathcal{C} auf $U = X$ an, dann erhalten wir sofort, dass es zu jedem $x \in X$ ein $C \in \mathcal{C}$ gibt, so dass $x \in C$.
- (B2) Es sei nun $x \in C_1 \cap C_2$, wobei $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Nachdem C_1 und C_2 offen sind, ist auch $U = C_1 \cap C_2$ offen. Wir wenden die definierende Eigenschaft von \mathcal{C} auf $U = C_1 \cap C_2$ an, und erhalten ein $C \in \mathcal{C}$, so dass $x \in C \subset C_1 \cap C_2$.

Wir bezeichnen nun mit \mathcal{S} die Topologie auf X , welche von \mathcal{C} erzeugt wird. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Nachdem alle Mengen in \mathcal{C} offen bezüglich \mathcal{T} sind, folgt per Definition und aus Lemma 1.8, dass $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Sei nun $U \in \mathcal{T}$. Wir wollen zeigen, dass $U \in \mathcal{S}$. Sei also $x \in U$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $C \in \mathcal{C}$, so dass $x \in C \subset U$. Also folgt per Definition, dass $U \in \mathcal{S}$. \square

Beispiel. Es sei $X = \mathbb{R}^2$ und

$$\mathcal{C} := \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

⁴Es ist eine nette Aufgabe sich zu überlegen, warum dies der Fall ist.

Dann kann man sich leicht davon überzeugen, dass \mathcal{C} die gewünschte Eigenschaft in Lemma 1.11 besitzt, und daher eine Basis für die Standardtopologie auf \mathbb{R}^2 bildet.

1.6. Die Teilraumtopologie. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir betrachten dann

$$\mathcal{S} := \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

In Übungsblatt 2 werden wir sehen, dass \mathcal{S} eine Topologie auf A definiert. Wir nennen \mathcal{S} die *Teilraumtopologie* oder die von X *induzierte Topologie* auf A . Man beachte, dass eine Teilmenge U offen in A ist, genau dann, wenn es eine Menge $V \subset X$ gibt, welche offen in X ist, so dass $U = A \cap V$.

Konvention. Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge ist, dann betrachten wir A immer mit der durch \mathbb{R}^n induzierten Topologie.

Beispiel. Es sei

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2) \text{ und } y = 0\}.$$

Dann ist

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1) \text{ und } y = 0\}$$

offen in A , denn

$$U = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}}_{\text{offen in } \mathbb{R}^2} \cap A.$$

Lemma 1.12. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Es sei \mathcal{B} eine Basis für die Topologie von X . Dann ist*

$$\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis für die Topologie von A .

Beweis. Wir beweisen das Lemma mithilfe von Lemma 1.11. Es sei also $U \subset A$ eine offene Menge in A und $x \in U$. Nach Voraussetzung existiert eine offene Menge $V \subset X$ in X mit $U = V \cap A$. Nachdem \mathcal{B} eine Basis für die Topologie von X ist, existiert ein $B \in \mathcal{B}$, so dass $x \in B \subset V$. Dann folgt aber auch, dass $x \in B \cap A \subset V \cap A = U$. Es folgt aus Lemma 1.11, dass

$$\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis für die Topologie von A ist. □

Beispiel. Wir betrachten

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Eine Basis für die Topologie auf \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$\mathcal{B} := \{B_r(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } r > 0\}.$$

Die Schnittmengen von offenen Bällen in \mathbb{R}^2 mit S^1 sind ‘offene Intervalle’ auf S^1 . Genauer gesagt, es ist

$$\{B \cap S^1 \mid B \in \mathcal{B}\} = \{\varphi((a, b)) \mid a < b \in \mathbb{R}\} =: \mathcal{C}$$

Nach Lemma 1.12 ist also \mathcal{C} eine Basis der Topologie auf S^1 .

Wir betrachten jetzt wieder die ‘Gerade mit einem Punkt im Unendlichen’, d.h.

$$X := \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass eine Basis der Topologie von X gegeben ist durch

$$\mathcal{D} := \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, C) \cup \{\infty\} \cup (D, \infty) \mid C, D \in \mathbb{R}\}.$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi(2 \arctan(x)), & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \\ (-1, 0), & \text{wenn } x = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich eine Bijektion. Man sieht auch leicht, dass

$$U \in \mathcal{D} \Leftrightarrow f(U) \in \mathcal{C}.$$

Es folgt nun aus Lemma 1.10, dass die Abbildung f ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist X homöomorph zu S^1 .⁵

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma.

Lemma 1.13. *Es sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X . Dann gilt:*

- (1) *Die Inklusionsabbildung $i: A \rightarrow X$ stetig.*

⁵Es sei $Y := \mathbb{R} \cup \{*\}$ die ‘Gerade mit zwei Nullen’. Wir können dann ganz analog folgende Abbildungen betrachten

$$\begin{aligned} Y &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi(2 \arctan(x)), & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \\ (-1, 0), & \text{wenn } x = *. \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist eine gute Übungsaufgabe sich zu überlegen, ob diese Abbildung stetig bzw. ein Homöomorphismus ist.

- (2) *Die Einschränkung einer stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ auf A ist ebenfalls stetig.*

Beweis. (1) Wir betrachten die Inklusionsabbildung $i: A \rightarrow X$. Es sei $U \subset X$ offen. Dann ist $i^{-1}(U) = U \cap A$, aber $U \cap A$ ist per Definition offen in A . Also ist i stetig.

- (2) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Die Einschränkung auf A ist die Verknüpfung der stetigen Abbildungen $i: A \rightarrow X$ und $f: X \rightarrow Y$. Also ist nach Satz 1.6 die Einschränkung von f auf A ebenfalls stetig. □

1.7. Die disjunkte Vereinigung und das Produkt von topologischen Räumen. Wir beginnen mit der disjunkten Vereinigung von topologischen Räumen. Es sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Wir bezeichnen mit

$$\sqcup_{i \in I} X_i$$

die disjunkte Vereinigung von den $\{X_i\}_{i \in I}$. Dann ist

$$\{U \subset \sqcup_{i \in I} X_i \mid \text{für alle } i \in I \text{ ist } U \cap X_i \text{ offen in } X_i\}$$

eine Topologie auf $\sqcup_{i \in I} X_i$. Wenn wir nichts anderes schreiben, dann betrachten wir die disjunkte Vereinigung von topologischen Räumen als topologischen Raum bezüglich dieser Topologie.

Wir wenden uns nun dem Produkt von topologischen Räumen zu.

Lemma 1.14. *Es seien X und Y topologische Räume. Dann besitzt*

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}$$

die Basiseigenschaft.

Beweis. Wir beweisen nun, dass \mathcal{B} die Basiseigenschaft besitzt:

- (1) Es ist $X \times Y \in \mathcal{B}$, also gibt es zu jedem $(x, y) \in X \times Y$ eine Teilmenge in \mathcal{B} , welche (x, y) enthält. \mathcal{B} erfüllt also Basiseigenschaft (B1).
 (2) Es seien nun $U_1 \times V_1$ und $U_2 \times V_2$ aus \mathcal{B} , dann gilt

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}.$$

Insbesondere erfüllt also \mathcal{B} auch Basiseigenschaft (B2). □

Definition. Es seien X und Y topologische Räume. Es sei

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}.$$

Die *Produkttopologie auf $X \times Y$* ist die von \mathcal{B} erzeugte Topologie auf $X \times Y$.

Beispiel. Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist dann die Topologie, welche von ‘offenen Quadern’ erzeugt wird. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies gerade die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

Konvention. Im Folgenden, wenn X und Y topologische Räume sind, dann verstehen wir $X \times Y$ immer mit der Produkttopologie.

Lemma 1.15. *Es sei \mathcal{B} eine Basis für den topologischen Raum X und es sei \mathcal{C} eine Basis für den topologischen Raum Y . Dann ist*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ und } C \in \mathcal{C}\}$$

eine Basis für $X \times Y$.

Beweis. Wir beweisen das Lemma mithilfe von Lemma 1.11. Sei also $W \subset X \times Y$ eine offene Menge und $(x, y) \in W$. Nach Definition der Produkttopologie existieren offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$, so dass $(x, y) \in U \times V$ und $U \times V \subset W$.

Nachdem \mathcal{B} eine Basis für X ist, folgt, dass es $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset U$ gibt. Ganz analog zeigt man, dass es $C \in \mathcal{C}$ mit $y \in C \subset V$ gibt. Es folgt, dass

$$(x, y) \in B \times C \subset U \times V \subset W.$$

Es folgt also aus Lemma 1.11, dass

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ und } C \in \mathcal{C}\}$$

eine Basis für $X \times Y$ ist. □

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir sagen f ist *offen*, wenn das Bild jeder offenen Menge in X offen in Y ist. D.h

$$f \text{ ist offen} \iff (f(U) \text{ ist offen in } Y \text{ für alle } U \subset X \text{ offen.})$$

Wir können nun folgendes Lemma formulieren und beweisen.

Lemma 1.16. *Es seien X und Y topologische Räume. Dann sind die Projektionsabbildungen*

$$\begin{array}{ccc} p: X \times Y & \rightarrow & X \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} q: X \times Y & \rightarrow & Y \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

stetig und offen.

Beweis. Wir zeigen nur, dass p stetig ist. Es sei also $U \subset X$ offen. Dann ist

$$p^{-1}(U) = U \times Y,$$

also offen in $X \times Y$. □

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 1.17. *Es seien A, X und Y topologische Räume und es seien $f: A \rightarrow X$ und $g: A \rightarrow Y$ Abbildungen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} h: A &\rightarrow X \times Y \\ a &\mapsto (f(a), g(a)) \end{aligned} \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \begin{aligned} f: A &\rightarrow X \text{ ist stetig, und} \\ g: A &\rightarrow Y \text{ ist stetig.} \end{aligned}$$

Der Satz besagt also, dass eine Abbildung $f: A \rightarrow X \times Y$ stetig ist, genau dann, wenn die beiden ‘Koordinaten-Abbildungen’ von f stetig sind.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass h stetig ist. Wir bezeichnen mit $p: X \times Y \rightarrow X$ und $q: X \times Y \rightarrow Y$ die Projektionsabbildungen, welche nach Lemma 3.2 stetig sind. Es gilt $f = p \circ h$ und $g = q \circ h$, beide Abbildungen sind also Verknüpfungen von stetigen Abbildungen, insbesondere stetig nach Satz 1.6.

Wir nehmen nun an, dass f und g stetig sind. Nach Lemma 1.10 genügt es zu zeigen, dass für alle offenen Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U \times V)$ offen in A ist. Seien nun also $U \subset X$ und $V \subset Y$ offene Mengen. Dann gilt ⁶

$$h^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V).$$

Nach Voraussetzung sind $g^{-1}(U)$ und $h^{-1}(V)$ offen, also ist auch $f^{-1}(U \times V)$ offen. \square

1.8. Abgeschlossene Mengen. Es sei X ein topologischer Raum. Zur Erinnerung, wir sagen $A \subset X$ ist *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Satz 1.18. *Es sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:*

- (1) \emptyset und X sind abgeschlossen,
- (2) der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wiederum abgeschlossen, d.h. es gilt

$$A_i, i \in I \text{ abgeschlossen} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \text{ ist abgeschlossen,}$$

- (3) die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist wiederum abgeschlossen, d.h. es gilt

$$A_1, \dots, A_k \text{ abgeschlossen} \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_k \text{ ist abgeschlossen.}$$

Beweis. (1) Nach Axiom (T1) sind X und \emptyset offen, es folgt sofort, dass \emptyset und X abgeschlossen sind.

⁶Es ist eine gute Übung sich zu überlegen, warum $h^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$ für beliebige Teilmengen $A \subset X$ und $B \subset Y$.

- (2) Es sei nun $A_i, i \in I$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen, dann gilt

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\text{offen}},$$

dies ist also die Vereinigung von offenen Mengen, daher offen nach Axiom (T3) einer Topologie. Es folgt, dass $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen ist.

- (3) Es seien nun A_1, \dots, A_k abgeschlossene Mengen, dann gilt

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcap_{i=1}^k \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\text{offen}},$$

dies also ist der Schnitt von endlich vielen offenen Mengen, daher offen nach Axiom (T2) einer Topologie. Es folgt, dass $\bigcup_{i=1}^k A_i$ abgeschlossen ist.

□

Der folgende Satz erlaubt es uns, Stetigkeit mithilfe von abgeschlossenen Mengen zu studieren.

Satz 1.19. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Dann gilt:*

- f ist stetig*
 \Leftrightarrow *für jede abgeschlossene Menge A in Y ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .*

Dieser Satz wurde als Satz 2.5 in Analysis II formuliert. Der Beweis war eine Übungsaufgabe in Analysis II, und ist jetzt wiederum eine (weiterhin sehr sinnvolle) Übungsaufgabe.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

- (1) Der *Abschluss* oder die *abgeschlossene Hülle* \overline{A} von A ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Mengen in X , die A enthalten.
- (2) Das *Innere* A° ist die Vereinigung aller offenen Mengen von X , die in A enthalten sind.

Es folgt sofort aus Satz 1.18, dass der Abschluss \overline{A} eine abgeschlossene Menge in X ist, und es folgt aus Axiom (T3) einer Topologie, dass das Innere A° eine offene Menge in X ist.

Bemerkung. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

- (1) Der Abschluss \overline{A} ist die ‘kleinste abgeschlossene’ Menge, die die ursprüngliche Menge enthält. Das Wort ‘kleinste’ in diesem Zusammenhang ist natürlich etwas gefährlich. Ganz allgemein, wenn P eine Eigenschaft für Teilmengen von X ist (z.B. die Eigenschaft, A zu enthalten und abgeschlossen zu sein), dann sagen wir, dass eine Teilmenge $A \subset X$ die ‘kleinste’ Menge ist, welche P erfüllt, wenn folgende zwei Aussagen gelten:

- (a) A besitzt Eigenschaft P ,
- (b) wenn B eine weitere abgeschlossene Menge ist, welche P erfüllt, dann ist $A \subset B$.

Wenn wir also sagen, dass $A \subset X$ die ‘kleinste’ Menge ist, welche P erfüllt, dann behaupten wir implizit, dass eine solche Menge auch existiert. Beispielsweise macht es keinen Sinn von ‘der kleinsten offenen Teilmenge von \mathbb{R} , welche $[0, 1]$ enthält’ zu reden.

- (2) Ganz analog, kann man A° als die ‘größte offene’ Menge betrachten, welche in der ursprünglichen Menge A enthalten ist.

Es sei X eine Menge und es seien A und B Teilmengen von X . Wir sagen A *schneidet* B , wenn $A \cap B \neq \emptyset$. Mit dieser Sprechweise können wir jetzt folgenden Satz formulieren.

Satz 1.20. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \text{jede offene Umgebung von } x \text{ schneidet } A.$$

Beweis. Die Aussage des Satzes ist äquivalent zur Aussage

$$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \text{es existiert eine Umgebung } U \text{ von } x, \text{ welche } A \text{ nicht schneidet.}$$

Wir werden jetzt diese Aussage beweisen.

Nehmen wir zuerst an, dass $x \notin \overline{A}$. Dann ist $U := X \setminus \overline{A}$ eine offene Menge, welche x enthält, aber A nicht schneidet.

Wir nehmen nun an, es existiert eine offene Umgebung U von x , welche A nicht schneidet. Wir betrachten die abgeschlossene Menge $B := X \setminus U$. Dann gilt $\overline{A} \subset B$ per Definition von \overline{A} . Andererseits ist $x \notin B$, also folgt, dass $x \notin \overline{A}$. \square

Beispiel. (1) Der Abschluss von $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist $[a, b]$.

- (2) Wir betrachten $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, dann ist $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. In der Tat, denn sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und U eine Umgebung von x . Per Definition von offenen Mengen in \mathbb{R} existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Aber solch ein Intervall enthält immer einen (sogar unendlich viele) rationale Zahlen.

- (3) Es sei $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$ die ‘Gerade mit zwei Nullen’. Jede offene Umgebung von $\{*\}$ enthält dann eine Teilmenge der Form $(-\varepsilon, 0) \cup \{*\} \cup (0, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$. Man zeigt nun leicht mithilfe von Satz 1.20, dass

$$\overline{(-1, 1)} = [0, 1] \cup \{*\}.$$

2. KOMPAKTE TOPOLOGISCHE RÄUME

In Analysis II Kapitel 3.1 hatten wir schon den Begriff von kompakten Teilmengen für metrische Räume eingeführt. Die Definition kann man problemlos auf topologische Räume verallgemeinern. Viele von den Sätzen, welche wir in Analysis II schon bewiesen hatten, gelten ganz analog für kompakte topologische Räume.

2.1. Definition von Kompaktheit und Beispiele.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Eine *offene Überdeckung* von X ist eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Teilmengen von X , so dass

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Beispiel. Wir betrachten $X = (0, 1]$ mit der Teilraumtopologie induziert von \mathbb{R} . Für $i \in \mathbb{N}$ betrachten wir zudem

$$U_n := \left(\frac{1}{n}, 1\right].$$

Die Mengen $U_n, n \in \mathbb{N}$ sind offen in X , und $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von X .

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen X *ist kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ gibt, so dass

$$X \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Anders ausgedrückt, X heißt kompakt wenn man für *jede* offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X endlich viele U_i 's finden kann, so dass diese schon X überdecken.

Beispiel. Betrachten wir obiges Beispiel, dann sehen wir, dass $(0, 1]$ *nicht* kompakt ist. In der Tat, wenn wir

$$U_n := \left(\frac{1}{n}, 1\right],$$

setzen, dann ist $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $(0, 1]$, aber $(0, 1]$ kann nicht durch endlich viele dieser Mengen $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ überdeckt werden. In der Tat, wenn wir nur endliche viele $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ betrachten, dann ist

$$\frac{1}{\max\{i_1, \dots, i_k\}} \notin U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k},$$

aber

$$\frac{1}{\max\{i_1, \dots, i_k\}} \in (0, 1].$$

Beispiel. (1) Es sei X eine beliebige Menge und es sei $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ die triviale Topologie auf X . Dann ist X offensichtlich kompakt.

(2) Wir betrachten

$$X := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Wir behaupten, dass X kompakt ist. Sei also $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X .

- (a) Nachdem $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert insbesondere ein $i \in I$, so dass $0 \in U_i$.
- (b) Nachdem U_i offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_i$.
- (c) Nachdem $\varepsilon > 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N} \in (0, \varepsilon)$.
- (d) Dann gilt aber auch, dass $\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon)$ für alle $n \geq N$. Insbesondere enthält U_i alle Punkte $\frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \dots$.
- (e) Nachdem $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung ist, existiert zu jedem $n \in \{1, \dots, N-1\}$ ein $i_n \in I$, so dass $\frac{1}{n} \in U_{i_n}$.

Es folgt nun, dass $X \subset U_i \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{N-1}}$.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Wir sagen A ist kompakt, wenn A , betrachtet als topologischer Raum bezüglich der Teilraumtopologie, kompakt ist.

Bemerkung. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Aus der Definition der Teilraumtopologie folgt sofort folgende Aussage:

$$A \text{ ist kompakt} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{für alle Familien offenen Mengen } \{U_i\}_{i \in I} \text{ in } X \text{ gilt:} \\ A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow A \subset U_{i_1}, \dots, U_{i_k} \\ \text{für endlich viele } i_1, \dots, i_k \text{ in } I. \end{array}$$

Diese Formulierung ist näher an der Formulierung, welche wir in Analysis II eingeführt hatten.

In Analysis II (siehe Satz 3.5) hatten wir den sehr beliebten Satz von Heine–Borel bewiesen:

Satz 2.1. Satz von Heine–Borel *Es sei A eine Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann gilt:*⁷

A ist kompakt $\Leftrightarrow A$ ist beschränkt und abgeschlossen in \mathbb{R}^n .

Es folgt beispielsweise, dass

$$\begin{aligned} D^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}, \text{ und} \\ S^n &:= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}, \end{aligned}$$

kompakt sind.

Bemerkung. (1) Wir haben in Analysis II auch gesehen, dass die analoge Aussage für beliebige metrische Räume *nicht gilt*. Genauer gesagt, es gibt metrische Räume, so dass beschränkte und abgeschlossene nicht notwendigerweise kompakt sind.

(2) Der Satz von Heine–Borel hilft uns bei allgemeinen topologischen Räumen erst recht nicht weiter, nachdem der Begriff ‘beschränkt’ in einem topologischen Raum keinen Sinn macht.

2.2. Aussagen über kompakte topologische Räume. Mithilfe des folgenden Satzes erhalten wir weitere Beispiele von kompakten Mengen:

Satz 2.2. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist auch A kompakt.*

Für metrische Räume ist dies gerade Satz 3.3 aus der Analysis II. Der Beweis ist fast identisch.

Beweis. Es sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Per Definition der Teilraumtopologie gibt es offene Mengen $V_i, i \in I$ in X , so dass $U_i = V_i \cap A$ für alle $i \in I$.

Nachdem A abgeschlossen ist, folgt, dass $X \setminus A$ offen ist. Insbesondere ist

$$(X \setminus A) \cup \{V_i\}_{i \in I}$$

eine offene Überdeckung von X . Nachdem X kompakt ist, gibt es i_1, \dots, i_k , so dass

$$X \subset (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}.$$

⁷Zur Erinnerung: eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt *beschränkt*, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass

$$d(x, y) \leq C \text{ für alle } x, y \in A.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
 A &= A \cap X \\
 &= A \cap ((X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}) \\
 &= \underbrace{(A \cap (X \setminus A))}_{=\emptyset} \cup (A \cap V_{i_1}) \cup \dots \cup (A \cap V_{i_k}) \\
 &= U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.
 \end{aligned}$$

□

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn $U \subset X$ offen ist, dann ist $f(U) \subset Y$ nicht notwendigerweise offen, und wenn $A \subset X$ abgeschlossen ist, dann ist $f(A) \subset Y$ nicht notwendigerweise abgeschlossen.⁸

Wenn $f: X \rightarrow Y$ zudem eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen ist, dann ist das Bild einer beschränkten Menge nicht notwendigerweise beschränkt.

In Hinblick auf diese Beispiele, und in Hinblick auf den Satz von Heine-Borel ist folgender Satz etwas überraschend.

Satz 2.3. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn X kompakt ist, dann ist auch $f(X)$ kompakt.*

Bemerkung. (1) Für metrische Räume ist dies Satz 3.3 aus der Analysis II. Der Beweis ist wiederum fast identisch.

(2) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn $A \subset X$ kompakt ist, dann ist auch $f(A)$ kompakt. Dies folgt indem man Satz 2.3 auf $f|_A$ anwendet.

Beweis. Sei also $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Wir müssen zeigen, dass $f(X)$ in der Vereinigung von endlich vielen U_i 's enthalten ist.

Man beachte, dass

$$X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}(\{U_i\}_{i \in I}) = \cup_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

⁸Was sind wohl Beispiele dafür?

⁹ Nachdem f stetig sind die Urbilder von den U_i ebenfalls offen, insbesondere ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Nachdem X kompakt ist, existieren Indizes i_1, \dots, i_k , so dass

$$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k}).$$

Dann gilt aber auch, dass

$$\begin{aligned} f(X) &= f(f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k})) \\ &= f(f^{-1}(U_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_{i_k})) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}. \end{aligned}$$

□

Das folgende Korollar ist eine Verallgemeinerung von Satz 8.2 aus Analysis I und von Satz 3.7 aus Analysis II.

Korollar 2.4. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum. Es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann ist f beschränkt, und f nimmt ein Minimum und ein Maximum an, d.h. es existieren $x_0, x_1 \in X$, so dass*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Nachdem X kompakt und f stetig ist, folgt aus Satz 2.3, dass das Bild $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt ist. Aus dem Satz von Heine-Borel folgt, dass $f(X) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen ist. Da $f(X)$ beschränkt ist, existiert insbesondere $y_0 := \inf(f(X))$. Nachdem $f(X)$ abgeschlossen ist, gilt $y_0 \in f(X)$. Es existiert also ein $x_0 \in X$, so dass $f(x_0) = y_0 = \inf(f(X))$. Dann gilt aber für alle $x \in X$, dass

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Die Existenz von x_1 zeigt man ganz analog. □

Der Satz von Heine-Borel besagt insbesondere, dass eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^n abgeschlossen in \mathbb{R}^n ist.

Diese Aussage gilt im allgemeinen nicht für topologische Räume, d.h. eine kompakte Teilmenge eines topologischen Raumes X ist nicht notwendigerweise abgeschlossen in X .

⁹Zur Erinnerung: Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine beliebige Abbildung zwischen Mengen und es sei $U \subset Y$ eine Teilmenge. Dann gilt

$$f(f^{-1}(U)) = U.$$

Andererseits gilt für eine beliebige Teilmenge $U \subset X$, dass

$$U \subset f^{-1}(f(U)),$$

aber in diesem Falle gilt i.a. nicht, dass $U = f^{-1}(f(U))$. Betrachten wir z.B. die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, dann ist $f^{-1}(f(2)) = \pm 2$. Aber es gilt natürlich, dass $f^{-1}(f(X)) = X$.

Es sei beispielsweise X eine beliebige Menge X mit mindestens zwei Elementen und \mathcal{T} die triviale Topologie auf X , d.h. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Es sei nun $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq X$. Dann ist die Teilraumtopologie von A gegeben durch $\{\emptyset, A\}$, d.h. die Teilraumtopologie auf A ist die triviale Topologie. Insbesondere ist A kompakt. Andererseits ist A keine geschlossene Teilmenge von X .

Der folgende Satz besagt, dass im Gegenzug kompakte Teilmengen von *Hausdorff-Räumen* abgeschlossen sind.

Satz 2.5. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Wenn X ein Hausdorff-Raum ist, dann ist A abgeschlossen in X .*

Der Beweis des Satzes ähnelt dem Beweis von Satz 3.4 aus der Analysis II.

Beweis. Es sei X ein topologischer Raum, welcher Hausdorff ist. Es sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Wir wollen zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Nach Lemma 1.4 genügt es folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Es sei $x \in X \setminus A$. Dann existiert eine Umgebung U von x , welche in $X \setminus A$ enthalten ist.

Es sei $y \in A$ beliebig. Wir wenden die Hausdorff-Eigenschaft auf x und y an, und erhalten offene disjunkte Umgebungen U_y von y und V_y von x . Offensichtlich ist

$$A = \cup_{y \in A} \{y\} \subset \cup_{y \in A} (U_y \cap A) \subset A.$$

Es folgt, also dass $\{U_y \cap A\}_{y \in A}$ eine offene Überdeckung von A ist. Nachdem A kompakt ist, gibt es y_1, \dots, y_k , so dass

$$A = \cup_{i=1}^k (U_{y_i} \cap A).$$

Wir betrachten nun

$$U := \cup_{i=1}^k U_{y_i} \text{ und } V := \cap_{i=1}^k V_{y_i}.$$

Dann ist V eine offene Umgebung von x . Wir wollen zeigen, dass $V \cap A = \emptyset$. Nachdem $A \subset U$ genügt es zu zeigen, dass $V \cap U = \emptyset$. Sei also $x \in U$. Dann existiert ein $i \in \{1, \dots, k\}$, so dass $x \in U_{y_i}$. Dann folgt aber, dass $x \notin V_{y_i}$, insbesondere liegt x nicht in der Schnittmenge $V = \cap_{i=1}^k V_{y_i}$. Wir haben damit die Behauptung bewiesen. \square

Wir hatten schon mehrmals gesehen, dass eine bijektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen nicht notwendigerweise ein Homöomorphismus ist. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} [0, 2\pi) &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus

Mithilfe des vorherigen Satzes können wir jedoch jetzt folgenden Satz beweisen, welcher uns später das Leben mehrmals erleichtern wird.

Satz 2.6. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine bijektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn X kompakt ist, und wenn Y Hausdorff ist, dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine bijektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, wobei X kompakt und Y Hausdorff ist. Wir wollen zeigen, dass f ein Homöomorphismus. Es verbleibt zu zeigen, dass $f^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig ist. Nach Satz 1.19 genügt es folgende Aussage zu zeigen:

$$A \subset X \text{ ist abgeschlossen} \Rightarrow ((f^{-1})^{-1})(A) \subset Y \text{ ist abgeschlossen.}$$

Wir können die Aussage auf der rechten Seite auch noch vereinfachen, nachdem $((f^{-1})^{-1})(A) = f(A)$. Sei also $A \subset X$ abgeschlossen. Nachdem X kompakt ist, folgt aus Satz 2.2, dass A kompakt ist. Satz 2.3 besagt nun, dass $f(A)$ kompakt ist. Nachdem Y Hausdorff ist, erhalten wir aus Satz 2.5, dass $f(A)$ abgeschlossen in Y ist. \square

3. QUOTIENTENRÄUME

3.1. Äquivalenzrelationen. Es sei X eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* auf X ist eine Teilmenge $M \subset X \times X$, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned} & (x, x) \in M, \\ (x, y) \in M & \Rightarrow (y, x) \in M, \quad (\text{Symmetrie}) \\ (x, y) \in M \text{ und } (y, z) \in M & \Rightarrow (x, z) \in M \quad (\text{Transitivität}). \end{aligned}$$

Wir schreiben im Folgenden

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x, y) \in M,$$

und wir sagen x und y sind *äquivalent*. Mithilfe dieser Notation können wir die obigen definierenden Eigenschaften wie folgt umformulieren: \sim ist eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A , wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt

$$\begin{aligned} & x \sim x \\ x \sim y & \Rightarrow y \sim x \\ x \sim y \text{ und } y \sim z & \Rightarrow x \sim z. \end{aligned}$$

Beispiel. (a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}.$$

- (b) Es sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine normale Untergruppe. Wir betrachten dann

$$g \sim h \Leftrightarrow gh^{-1} \in H.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung von Beispiel (a).

- (c) Für $P, Q \in S^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ definieren wir

$$P \sim Q \Leftrightarrow P = Q \text{ oder } P = -Q.$$

- (d) Für $x, y \in D^2 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ definieren wir

$$P \sim Q \Leftrightarrow \begin{array}{l} P = Q \text{ oder} \\ P \text{ und } Q \text{ liegen beide auf } S^1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}. \end{array}$$

- (e) Es sei X eine Menge und $A \subset X$ eine Teilmenge, wir definieren dann

$$P \sim Q \Leftrightarrow \begin{array}{l} P = Q \text{ oder} \\ P \text{ und } Q \text{ liegen beide in } A. \end{array}$$

In allen Fällen kann man leicht nachprüfen, dass \sim in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Eine *Äquivalenzklasse* ist eine Teilmenge $Y \subset X$, so dass gilt

- (1) für alle $y, y' \in Y$ gilt: $y \sim y'$,
- (2) wenn $z \sim y$ für ein $y \in Y$, dann gilt auch $z \in Y$,

Anders ausgedrückt, eine Äquivalenzklasse von X ist eine Teilmenge Y , so dass je zwei Elemente äquivalent sind, und welches jedes Element von X enthält, welches zu einem Element in Y äquivalent ist.

In Analysis III haben wir folgendes (elementare) Lemma bewiesen:

Lemma 3.1. *Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Dann ist X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist, d.h.*

- (i) *jedes $x \in X$ liegt in einer Äquivalenzklasse,*
- (ii) *wenn A und B Äquivalenzklassen sind, dann gilt entweder $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$.*

Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Wir bezeichnen dann mit X/\sim die Menge der Äquivalenzklassen. Wenn $x \in X$, dann bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von x ¹⁰ normalerweise mit $[x] \in X/\sim$ oder $\bar{x} \in X/\sim$.

¹⁰Die Äquivalenzklasse von x ist die nach Lemma 3.1 eindeutig bestimmte Äquivalenzklasse von X , welche x enthält. Man sieht leicht, dass

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Beispiel. (a) In Beispiel (a) ist jede Äquivalenzklassen von der Form

$$t + \mathbb{Z} := \{t + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$. Zudem gilt $s + \mathbb{Z} = t + \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $s - t \in \mathbb{Z}$.

(b) In Beispiel (b) ist jede Äquivalenzklassen von der Form

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

wobei $g \in G$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird normalerweise mit G/H bezeichnet und besitzt auf kanonische Weise wiederum eine Gruppenstruktur. Die Gruppenstruktur ist so definiert, dass die Projektionsabbildung $G \rightarrow G/H$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) In Beispiel (c) ist jede Äquivalenzklassen von der Form

$$\{P, -P\}$$

wobei $P \in S^2$.

(d) In Beispiel (d) ist jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < 1$ eine Äquivalenzklasse, und alle Punkte in $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ bilden eine Äquivalenzklasse. Es ist also

$$X / \sim = \bigcup_{\substack{(x, y) \text{ mit} \\ x^2 + y^2 < 1}} \{(x, y)\} \cup \{S^1\} \subset P(D^2).$$

(e) In Beispiel (e) ist jeder Punkt $x \in X \setminus A$ eine Äquivalenzklasse, und A bildet eine Äquivalenzklasse. Es ist also

$$X / \sim = \bigcup_{x \in X \setminus A} \{x\} \cup A \subset P(X).$$

Anders ausgedrückt, es ist

$$X / \sim = \{U \in P(X) \mid U = \{x\} \text{ für ein } x \in X \setminus A \text{ oder } U = A\}.$$

Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen oft auch mit X/A .

Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Wir bezeichnen die Abbildung

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X / \sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

als die *Projektionsabbildung* oder *Projektion*.

3.2. Die Quotiententopologie. Es sei nun (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Wir werden nun eine Topologie auf der Menge X/\sim der Äquivalenzklassen einführen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $p: X \rightarrow X/\sim$ die Projektionsabbildung. Wir betrachten

$$\mathcal{S} := \{U \subset X/\sim \mid p^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}.$$

Dann kann man leicht überprüfen, dass \mathcal{S} eine Topologie auf X/\sim definiert. (Siehe Übungsblatt 3.) Diese Topologie wird die *Quotiententopologie* genannt. Wir betrachten im Folgenden X/\sim durchgehend als topologischen Raum bezüglich der Quotiententopologie.

Aus der Definition der Quotiententopologie folgt sofort folgendes Lemma:

Lemma 3.2. *Es sei X ein topologischer Raum und es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

*ist stetig.*¹¹

Die Tatsache, dass die Projektionsabbildung $X \rightarrow X/\sim$ stetig ist, ist natürlich nicht überraschend, wir haben die Topologie auf X/\sim genauso gewählt, dass die Projektion $X \rightarrow X/\sim$ stetig ist. Folgendes Lemma folgt leicht aus den Definitionen, der Beweis bleibt als freiwillige Übungsaufgabe überlassen.

Lemma 3.3. *Es sei X ein topologischer Raum und es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Wir bezeichnen mit p die Projektion $X \rightarrow X/\sim$. Es sei \mathcal{B} eine Basis der Topologie auf X , dann ist*

$$p(\mathcal{B}) = \{p(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis der Topologie auf X/\sim .

¹¹Anmerkung am 25.4.2012: in der vorherigen Version des Skripts hatte ich geschrieben, dass p zudem offen ist, d.h. dass das Bild einer offenen Menge wiederum offen ist. Dies ist im Allgemeinen aber nicht der Fall. Betrachten wir beispielsweise

$$X := \mathbb{R} \text{ und } x \sim y :\Leftrightarrow \begin{array}{l} x = y \text{ oder} \\ x, y \in [-2, 2] \end{array} .$$

Dann ist $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ nicht offen. In der Tat, betrachten wir die offene Teilmenge $U = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, dann wollen wir zeigen, dass $p(U) \subset \mathbb{R}/\sim$ nicht offen ist. Eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}/\sim$ ist offen, genau dann, wenn $p^{-1}(V) \subset \mathbb{R}$ offen ist. In unserem Fall ist allerdings $p^{-1}(p(U)) = [-2, 2]$, und diese Menge ist nicht offen in \mathbb{R} .

Lemma 3.4. *Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(y)$, wenn $x \sim y$. Dann existiert genau eine Abbildung $g: X/\sim \rightarrow Y$, so dass $f = g \circ p$, d.h. so dass das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X/\sim \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & Y. \end{array}$$

Wenn f stetig ist, dann ist zudem auch g stetig.

Wir bezeichnen die Abbildung $g: X/\sim \rightarrow Y$ manchmal als die *induzierte Abbildung*.

Beweis. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(y)$, wenn $x \sim y$. Es sei nun a ein Element in X/\sim . Dann existiert ein $x \in X$ mit $a = [x]$. Wir setzen

$$g(a) := f(x).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl von x ab, nachdem $f(x) = f(y)$, wenn immer $x \sim y$. Diese Abbildung $g: X/\sim \rightarrow Y$ hat dann offensichtlich die Eigenschaft, dass $f = g \circ p$. Nachdem die Projektion $X \rightarrow X/\sim$ surjektiv ist, ist die Abbildung g auch eindeutig bestimmt.

Nehmen wir nun an, dass f stetig ist. Wir wollen zeigen, dass g stetig ist. Sei also $U \subset Y$ offen. Wir müssen zeigen, dass $g^{-1}(U) \subset X/\sim$ offen ist. Per Definition der Quotiententopologie müssen wir also zeigen, dass $p^{-1}(g^{-1}(U))$ offen in X ist. Es ist aber

$$p^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ p)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

offen, nachdem f stetig ist. □

Beispiel. Wir betrachten noch einmal Beispiel (a). Zur Erinnerung, für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \sim y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}.$$

Auf Übungsblatt 3 werden wir sehen, dass \mathbb{R}/\sim kompakt ist. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)). \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich, dass $f(x) = f(y)$, wenn immer $x \sim y$. Nach Lemma 3.4 existiert daher genau eine Abbildung $g: \mathbb{R}/\sim \rightarrow S^1$, mit der Eigenschaft, dass $g([x]) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass g bijektiv ist.

Nachdem \mathbb{R}/\sim kompakt ist, und nachdem S^1 Hausdorff ist, folgt nun aus Satz 2.6, dass φ ein Homöomorphismus ist.

Beispiel. Zum Abschluß betrachten wir noch Beispiel (d). Zur Erinnerung, für $x, y \in D^2 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ haben wir definiert, dass

$$P \sim Q :\Leftrightarrow \begin{array}{l} P = Q \text{ oder} \\ P \text{ und } Q \text{ liegen beide auf } S^1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}. \end{array}$$

Wir betrachten zuerst die stetige Abbildung

$$\begin{array}{l} \varphi: D^2 \rightarrow S^2 \\ (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \mapsto (\cos(\varphi) \cdot \sin(\pi r), \sin(\varphi) \cdot \sin(\pi r), \cos(\pi r)). \\ r \in [0, 1] \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi] \end{array}$$

Man kann sich leicht vergewissern, dass diese Abbildung in der Tat wohl definiert ist, d.h. dass der Ausdruck auf der rechten Seite nicht von der Wahl der Polarkoordinaten (r, ϕ) für einen Punkt $(x, y) \in D^2$ abhängt, und dass der Punkt auf der rechten Seite in der Tat in S^2 liegt.

Es gilt zudem, dass $\varphi(x, y) = (0, 0, 1)$ für alle Punkte mit $r = 1$, d.h. für alle Punkte (x, y) in $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Es folgt also, dass $f(P) = f(Q)$ für alle Punkte $P, Q \in D^2$ mit $P \sim Q$. Nach Lemma 3.4 existiert daher genau eine Abbildung $g: \mathbb{R}/\sim \rightarrow S^1$, mit der Eigenschaft, dass $g([P]) = \varphi(P)$ für alle $P \in D^2$. Man kann sich problemlos davon überzeugen, dass g bijektiv ist.

Der topologische Raum D^2 ist kompakt. Aus Satz 2.3 folgt dann auch, dass D^2/\sim kompakt. Nachdem S^2 zudem Hausdorff ist, folgt nun aus Satz 2.6, dass φ ein Homöomorphismus ist.

3.3. Beispiele: Zylinder, Torus, das Möbius Band und die Kleinsche Flasche. (A) Wir betrachten $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation

$$P \sim Q :\Leftrightarrow \begin{array}{l} P = Q \text{ oder} \\ P = (x, 1) \text{ und } Q = (x, 0) \text{ für ein } x \in [0, 1]. \end{array}$$

Der Quotientenraum X/\sim entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir die ‘obere Kante mit der unteren Kante verkleben’. Die Abbildung 2 veranschaulicht diese Operation und suggeriert, dass der Quotientenraum X/\sim ein Zylinder ist.

Wir können diese Aussage auch leicht beweisen. Wir betrachten zuerst die stetige surjektive Abbildung

$$\begin{array}{l} \varphi: X = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times S^1 \\ (x, y) \mapsto (x, \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)). \end{array}$$

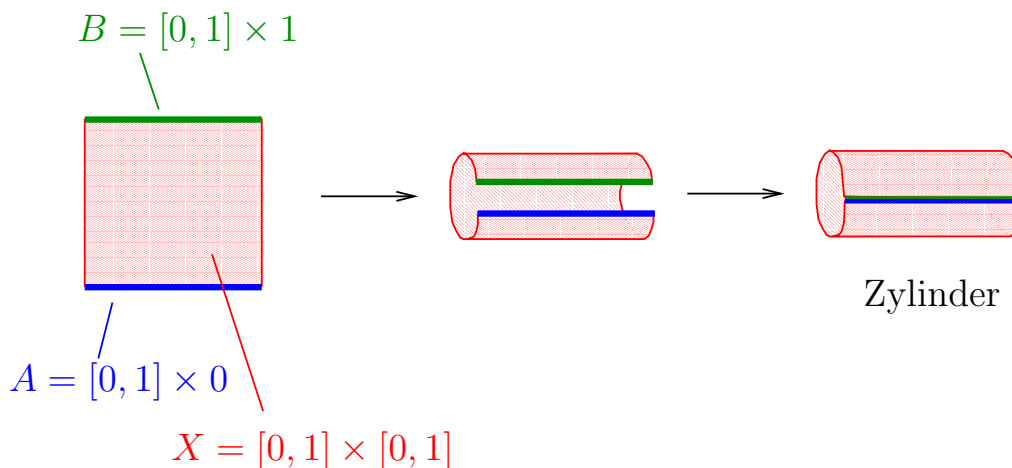


ABBILDUNG 2. Verkleben von zwei Seiten eines Quadrats ergibt einen Zylinder.

Nachdem $\varphi(a) = \varphi(b)$ für alle $a \sim b$ induziert φ eine Abbildung $\psi: X/\sim \rightarrow [0, 1] \times S^1$. Diese Abbildung ist stetig und (wie man leicht sieht), bijektiv. Nachdem X/\sim kompakt ist und nachdem $[0, 1] \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$ Hausdorff ist, folgt wiederum aus Satz 2.6, dass ψ ein Homöomorphismus ist, d.h. X/\sim ist in der Tat homöomorph zu einem Zylinder.

(B) Wir betrachten jetzt wiederum $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ aber dieses Mal mit der Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned}
 P \sim Q : \Leftrightarrow & P = Q \text{ oder} \\
 & P = (x, 1) \text{ und } Q = (x, 0) \text{ für ein } x \in [0, 1], \text{ oder} \\
 & P = (0, y) \text{ und } Q = (1, y) \text{ für ein } y \in [0, 1], \text{ oder} \\
 & P = (0, 0) \text{ und } Q = (1, 1) \text{ oder} \\
 & P = (1, 0) \text{ und } Q = (0, 1).
 \end{aligned}$$

Der Quotientenraum X/\sim entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir die ‘obere Kante mit der unteren Kante verkleben’ und die ‘linke Kante mit der rechten Kante verkleben’. Die Abbildung 3 veranschaulicht diese Operation und suggeriert, dass der Quotientenraum X/\sim ein Torus ist.

In Übungsblatt 4 werden wir sehen, dass X in der Tat homöomorph ist zum topologischen Raum $S^1 \times S^1$. Hierbei besitzt $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ die Standardtopologie eines Teilraumes von \mathbb{R}^2 , und wir betrachten dann $S^1 \times S^1$ als topologischen Raum bezüglich der Produkttopologie.

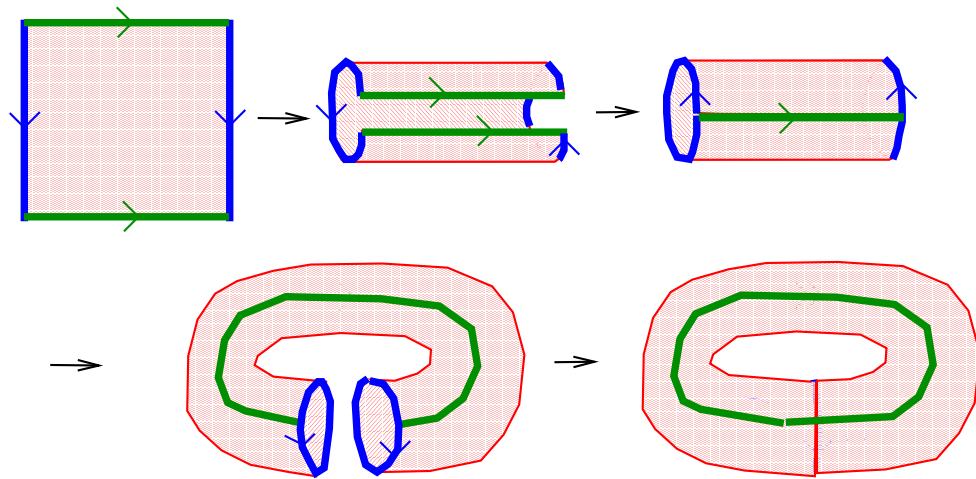


ABBILDUNG 3. Verkleben von den gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats ergibt einen Torus.

(C) Wir betrachten jetzt $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ aber dieses Mal mit der Äquivalenzrelation

$$P \sim Q \Leftrightarrow P = Q \text{ oder } P = (0, y) \text{ und } Q = (1, 1 - y) \text{ für ein } y \in [0, 1].$$

Der Quotientenraum X/\sim entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir die ‘linke Kante nach einer Verdrillung mit der rechten Kante verkleben’. Den topologischen Raum X/\sim nennen wir das *Möbiusband*. Die Abbildung 4 veranschaulicht diese Operation.

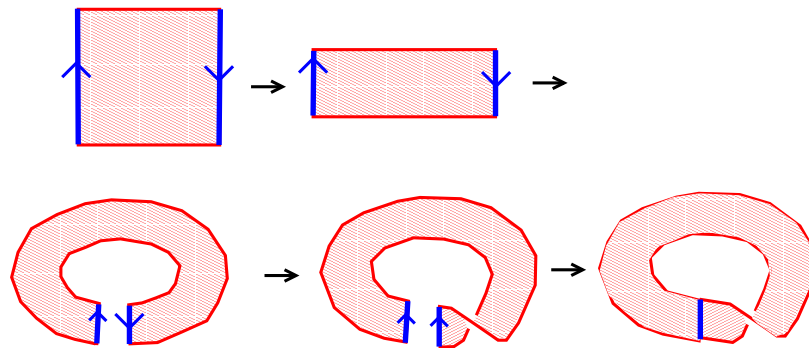


ABBILDUNG 4. Das Möbiusband.

(D) Wir betrachten jetzt wiederum $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ aber dieses Mal mit der Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned}
 P \sim Q : \Leftrightarrow & P = Q, \text{ oder} \\
 & P = (x, 1) \text{ und } Q = (x, 0) \text{ für ein } x \in [0, 1], \text{ oder} \\
 & P = (0, y) \text{ und } Q = (1, 1 - y) \text{ für ein } y \in [0, 1], \text{ oder} \\
 & P = (0, 0) \text{ und } Q = (1, 0), \text{ oder} \\
 & P = (1, 0) \text{ und } Q = (1, 1).
 \end{aligned}$$

Der Quotientenraum X/\sim entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir die ‘obere Kante mit der unteren Kante verkleben’ und die ‘linke Kante nach einer Verdrillung mit der rechten Kante verkleben’. Den topologischen Raum X/\sim nennen wir die *Kleinsche Flasche*. Die Abbildung 5 veranschaulicht diese Operation.

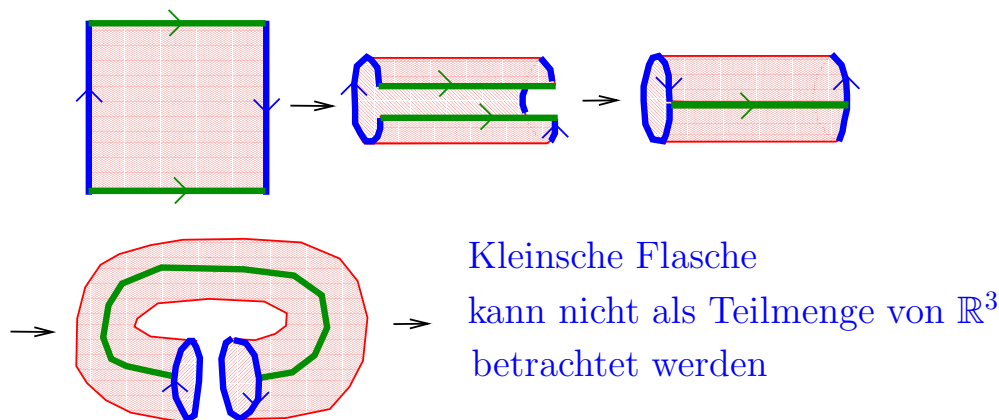


ABBILDUNG 5. Die Kleinsche Flasche.

3.4. Beispiele: Flächen von höherem Geschlecht. Betrachten wir jetzt ein reguläres Oktagon X wie in Abbildung 6. Wie in den vorherigen Beispielen wählen wir jetzt eine Äquivalenzrelation, welche immer zwei Kanten, welche durch genau eine Kante getrennt sind, mit ‘entgegengesetzter Orientierung’ äquivalent sind.

Der topologische Raum X/\sim den wir dadurch erhalten ist anschaulich die Fläche von Geschlecht 2. Dies kann man wie folgt sehen: wir betrachten in X zuerst die rechte obere Hälfte, wir identifizieren dann jeweils zwei Kanten, und erhalten einen ‘Torus minus eine Scheibe’. (Siehe die untere Hälfte von Abbildung 6). Wir erhalten jetzt X/\sim indem wir zwei solche ‘Torus minus eine Scheibe’ am Rand verkleben.

Diese halb-mathematische Diskussion motiviert jetzt folgende Definition:

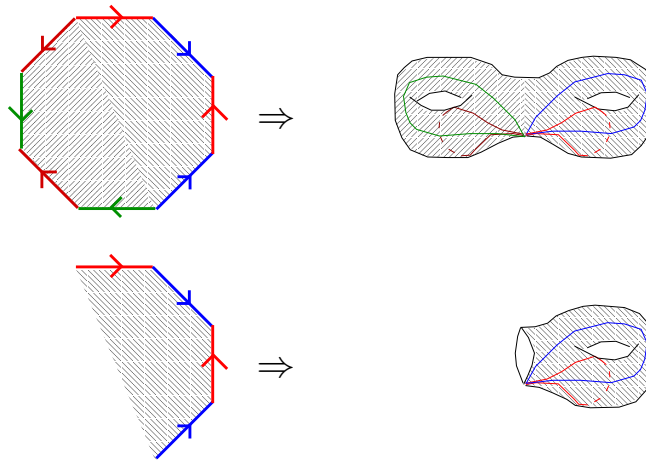


ABBILDUNG 6. Die Fläche von Geschlecht 2.

Definition. Es sei $g \geq 1$. Wir betrachten $X := D^2$ mit der Äquivalenzrelation¹²

$$re^{2\pi i\varphi} \sim se^{2\pi i\psi} \Leftrightarrow \begin{aligned} &re^{2\pi i\varphi} = se^{2\pi i\psi}, \text{ oder} \\ &r = s = 1 \ \& \ \text{es gibt } k \in \mathbb{N}, \text{ s. d. } \frac{k}{4g} + \varphi \equiv \frac{k+3}{4g} - \psi \pmod{1}, \text{ oder} \\ &r = s = 1 \ \& \ \text{es gibt } k, l \in \mathbb{N}, \text{ s. d. } \varphi = \frac{k}{4g} \text{ und } \psi = \frac{l}{4g}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen dann X/\sim als *geschlossene Fläche von Geschlecht g* , oder manchmal auch kurz als *Fläche von Geschlecht g* .

In Abbildung 6 illustrieren wir den Fall für $g = 1$ und $g = 2$. Man

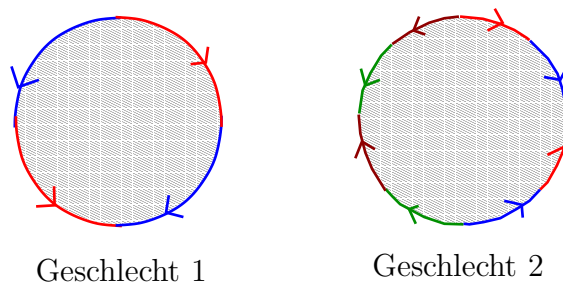


ABBILDUNG 7. Die Fläche von Geschlecht 1 und 2.

kann sich nun davon überzeugen, dass wir im Fall $g = 1$ einen Raum erhalten, welcher homöomorph zum Torus ist.

¹²Wir fassen hier D^2 als Teilmenge von \mathbb{C} auf.

3.5. Das Verkleben von topologischen Räumen. ¹³

Es sei X ein topologischer Raum und $f: A \rightarrow B$ eine Homöomorphismus zwischen Teilmengen von X . Wir betrachten dann folgende Äquivalenzrelation ¹⁴ auf X :

$$\begin{aligned} x &= y, \text{ oder} \\ x \sim y &:\Leftrightarrow x \in A \text{ und } y = f(x), \text{ oder} \\ & y \in A \text{ und } x = f(y). \end{aligned}$$

In dem Quotientenraum X/\sim entsprechen also $a \in A$ und $f(a)$ dem gleichen Punkt. Wir sagen X/\sim geht durch Verkleben von A und B aus X hervor. Wir sagen auch, dass wir in X/\sim die Teilmengen A und B identifizieren. Anstatt X/\sim schreiben wir auch X/f .

Beispiel. Wir betrachten $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ und

$$\begin{aligned} f: A = [0, 1] \times 0 &\mapsto B = [0, 1] \times 1 \\ (x, 0) &\mapsto (x, 1). \end{aligned}$$

Der Quotientenraum X/f entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir die ‘obere Kante’ mit der ‘unteren Kante’ verkleben. Dieses Beispiel ist also identisch zum Zylinder im vorherigen Kapitel.

Das folgende Beispiel ist deutlich interessanter.

Beispiel. Es sei $P \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$, wir setzen dann

$$\begin{aligned} B_r(P) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, P) < r\} \\ S_r(P) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, P) = r\}. \end{aligned}$$

Es sei nun $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$S = [0, 2n + 1] \times [-1, 1] \setminus \cup_{i=1}^{2n} B_{\frac{1}{2}}(i, 0)$$

mit der Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned} &P = Q \text{ oder} \\ P \sim Q &:\Leftrightarrow P = (x, 1) \text{ und } Q = (x, -1) \text{ für ein } x \in [0, 2n + 1] \\ &P = (0, y) \text{ und } Q = (2n + 1, y) \text{ für ein } y \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Wir setzen $Y := S/\sim$. Anschaulich gesprochen ist Y ein Torus mit $2n$ Löchern. Wir betrachten dann

$$\begin{aligned} X &:= Y \sqcup S^1 \times [0, 1] \times \{1\} \sqcup S^1 \times [0, 1] \times \{n\} \\ A &:= \cup_{i=1}^{2n} S^1_{\frac{1}{2}}(i, 0) \\ B &:= \cup_{i=1}^n S^1 \times \{0\} \times \{i\} \cup \cup_{i=1}^n S^1 \times \{1\} \times \{i\} \end{aligned}$$

¹³Dieses Kapitel hatten wir in der Vorlesung nicht behandelt.

¹⁴Es ist eine gute Übungsaufgabe sich davon zu überzeugen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf X ist.

und

$$f: A \rightarrow B$$

$$(i + \frac{1}{2} \cos \varphi, \frac{1}{2} \sin \varphi) \mapsto \begin{cases} (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \times \{0\} \times \{j\}, & \text{wenn } i = 2j - 1 \\ (\cos(-\varphi), \sin(-\varphi)) \times \{1\} \times \{j\}, & \text{wenn } i = 2j. \end{cases}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Definition von f nicht von der Wahl von φ abhängt, und dass $f: A \rightarrow B$ in der Tat ein Homöomorphismus ist.

Man kann nun zeigen, dass X/f homöomorph ist zur Fläche von Geschlecht n .

Bildlich gesprochen erhalten wir also X/f wie folgt:

- (1) Wir betrachten den Torus und stechen $2n$ Scheiben aus und erhalten eine Fläche X mit $2n$ Randkreise.
- (2) An die $2n$ Randkreise kleben wir n Zylinder und erhalten eine geschlossene Fläche.

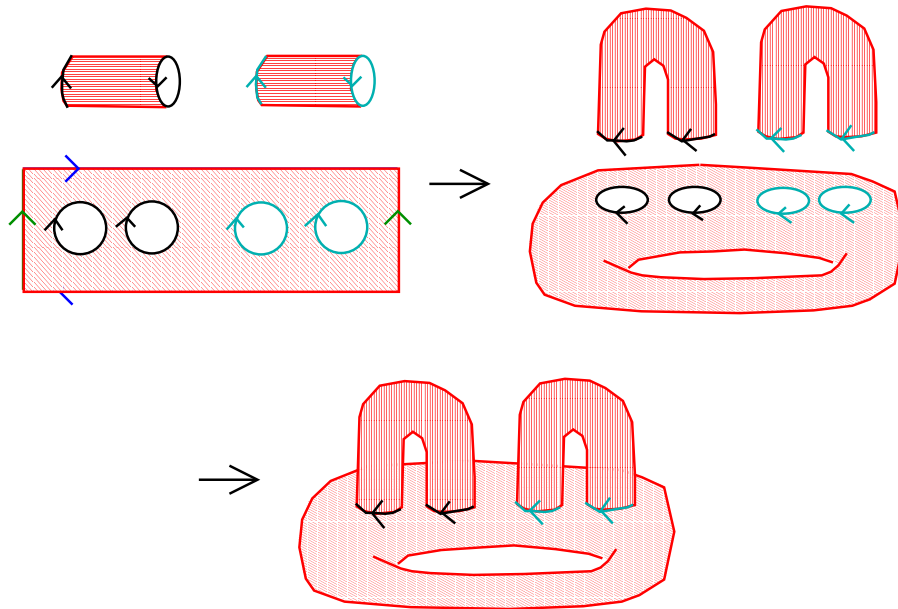


ABBILDUNG 8. Konstruktion einer Fläche von Geschlecht 3.

Dieses Bild ist in Abbildung 8 illustriert für den Fall $n = 2$.

4. MANNIGFALTIGKEITEN

4.1. Definition und Beispiele.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Eine n -dimensionale Karte für X ist ein Homöomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n .
- (2) Wir sagen X ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn X ein Hausdorff-Raum¹⁵ ist und wenn es zu jedem $x \in X$ eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $x \in U$ gibt.

Beispiel. Jede offene Teilmenge X von \mathbb{R}^n ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, nachdem die Identitätsabbildung eine Karte für alle Punkte in X ist.

Beispiel. (1) Wir bezeichnen mit $M(n \times k, \mathbb{R})$ die Menge aller reellen $n \times k$ -Matrizen. Auf $M(n \times k, \mathbb{R})$ können wir verschiedene Metriken betrachten, beispielsweise

$$d_1 : M(n \times k, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$A \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k |a_{ij}| \text{ und}$$

$$d_2 : M(n \times k, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$A \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k a_{ij}^2} \text{ und}$$

$$d_3 : M(n \times k, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$A \mapsto \max\{|a_{ij}| \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}\}$$

In Übungsblatt 2 haben wir gesehen, dass d_1 und d_2 die gleiche Topologie definieren. Ganz analog kann man auch zeigen, dass d_3 die gleiche Topologie wie d_1 und d_2 definiert. (In der Tat kann man sogar zeigen, dass alle Metriken auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum die gleiche Topologie definieren.) Wir können also jetzt $M(n \times k, \mathbb{R})$ eindeutig als topologischen Raum betrachten.

Die Abbildung

$$M(n \times k, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$$

$$(a_{ij}) \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1k}, a_{21}, \dots, a_{2k}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nk})$$

ist eine bijektive Isometrie¹⁶ zwischen $(M(n \times k, \mathbb{R}), d_2)$ und $(\mathbb{R}^{nk}, \text{euklidische Metrik})$. Insbesondere ist diese Abbildung ein Homöomorphismus. Dies zeigt, dass $M(n \times k, \mathbb{R})$ eine nk -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

¹⁵Wir fordern in der Definition auch, dass X ein Hausdorff-Raum ist, den diese folgt nicht aus der Existenz von Karten. In der Tat, betrachten wir X , die Gerade mit 2 Nullen, dann gibt es zu jedem Punkt eine Karte, aber X ist nicht Hausdorff.

¹⁶Eine Abbildung $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ zwischen metrischen Räumen heißt Isometrie, wenn $e(f(a), f(b)) = d(a, b)$ für alle $a, b \in X$.

- (2) Es folgt leicht aus den Definitionen, dass jede offene Teilmenge einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit wiederum eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Daraus folgt beispielsweise, dass

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

eine n^2 -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Beispiel. (1) In Kapitel 3.3 hatten wir unter anderem den Torus, die Kleinsche Flasche und die Flächen von Geschlecht g eingeführt. Man kann direkt mithilfe der Definitionen zeigen, dass dies 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind. Wir werden dies für die Kleinsche Flasche in Übungsblatt 4 nachweisen.

- (2) Wir nennen 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten im Folgenden oft auch Flächen.

4.2. Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir sagen $A \subset X$ ist eine k -dimensionale *Untermannigfaltigkeit von X* , wenn es zu jedem $a \in A$ eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ für X gibt, mit $a \in U$ und so dass

$$\Phi(U \cap A) = E_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^k\}.$$

Bemerkung. Es sei A eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X . Wenn wir A als topologischen Raum bezüglich der Teilraumtopologie auffassen, dann folgt aus den Definitionen sofort, dass A auch eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit im Sinne von Analysis II und III ist insbesondere eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^n im obigen Sinne. Dies folgt sofort aus den Definitionen, man vergleiche auch Abbildung 9 mit der Abbildung auf Seite 101 vom Analysis III Skript.

Wir können also die Resultate und Beispiele aus Analysis II und III übernehmen. Ein besonders hilfreiches Ergebnis aus der Analysis II ist der Satz vom regulären Wert, an den wir jetzt erinnern.

Zur Erinnerung, wenn $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^∞ -Abbildung ist, dann haben wir in Analysis II folgende Definitionen eingeführt:

- (1) ein Punkt $x \in U$ heißt *regulärer Punkt von f* , wenn das Differential $Df(x)$ den Rank k besitzt.

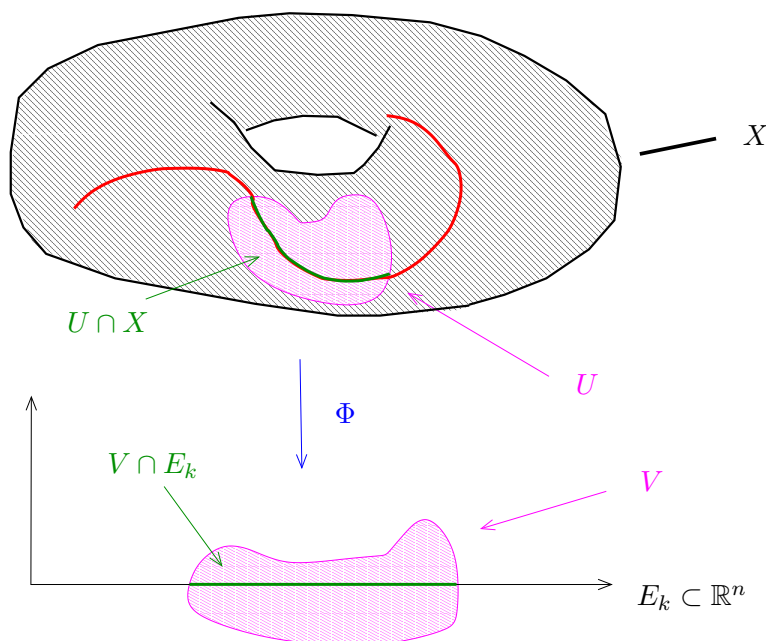


ABBILDUNG 9. Schematisches Bild einer Karte für eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

- (2) ein $z \in \mathbb{R}$ heißt *regulärer Wert von f* , wenn alle Punkte in $f^{-1}(z)$ regulär sind.

Ein Punkt (bzw. Wert), welcher nicht regulär ist, wird *singulär* genannt. Ein $z \in \mathbb{R}$ ist also ein regulärer Wert, wenn z *nicht* das Bild eines singulären Punktes ist. Wir zitieren zum Abschluß noch Satz 8.5 aus der Analysis II.

Satz 4.1. (Satz vom regulären Wert) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Abbildung und $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist $M := f^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

Beispielsweise ist für die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

das Differential gegeben durch

$$D_{(x_1, \dots, x_{n+1})} f = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}).$$

Diese hat den Rang eins für alle Punkte in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, d.h. jeder Punkt in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist ein regulärer Punkt. Es folgt, dass jeder Wert in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein regulärer Wert ist. Wir sehen also, dass

$$S^n := f^{-1}(1) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+1} ist.

5. GRUPPENOPERATIONEN

5.1. **Definition und Beispiele.** Es sei X eine Menge und G eine Gruppe. Eine *Operation* von G auf X ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} e \cdot x &= x, && \text{für alle } x \in X, \\ g \cdot (h \cdot x) &= (gh) \cdot x, && \text{für alle } x \in X \text{ und } g, h \in G. \end{aligned}$$

Wenn X ein topologischer Raum ist, dann sagen wir zudem, dass die Operation *stetig* ist, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

stetig ist. Man sieht leicht, dass wenn G stetig auf X operiert, dann ist für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

sogar ein Homöomorphismus.

Beispiel. (a) $X = \mathbb{R}^n$ und $G = \mathbb{Z}^n$ mit der stetigen Operation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((z_1, \dots, z_n), (x_1, \dots, x_n)) &\mapsto (z_1 + x_1, \dots, z_n + x_n). \end{aligned}$$

(b) Es sei $X = (0, \infty)$ und $G = \mathbb{Z}$. Wir wählen ein $\lambda > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ (n, x) &\mapsto \lambda^n x \end{aligned}$$

eine stetige Operation.

(c) $X = S^n$ und $G = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2$ mit der stetigen Operation

$$\begin{aligned} \{\pm 1\} \times S^n &\rightarrow S^n \\ (\varepsilon, (x_1, \dots, x_{n+1})) &\mapsto (\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_{n+1}). \end{aligned}$$

(d) Wir betrachten

$$X = S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

und $G = \mathbb{Z}/p$. Es seien $q \in \mathbb{Z}$, dann definiert

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/p \times S^3 &\rightarrow S^3 \\ (k + p\mathbb{Z}, (z_1, z_2)) &\mapsto (e^{2\pi k/p} z_1, e^{2\pi kq/p} z_2) \end{aligned}$$

eine stetige Operation von \mathbb{Z}/p auf S^3 .

- (e) $X = \mathbb{C}$ und $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit der stetigen Operation

$$\begin{aligned} S^1 \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto zw. \end{aligned}$$

- (f) Zum Abschluss betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (g, x) &\mapsto g + x \end{aligned}$$

In allen Beispielen kann man sich leicht davon überzeugen, dass dies in der Tat stetige Operationen sind.

Folgendes Lemma folgt leicht aus den Definitionen und wird in den Übungen bewiesen.

Lemma 5.1. *Es sei X eine Menge und G eine Gruppe, welche auf X operiert. Dann ist*

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{es existiert ein } g \in G, \text{ sodass } g \cdot x = y$$

eine Äquivalenzrelation auf X .

Es sei X eine Menge und G eine Gruppe, welche auf X operiert. Wir bezeichnen mit \sim die Äquivalenzrelation aus Lemma 5.1. Wir definieren dann

$$X/G := X/\sim.$$

Beispiel. (a) Betrachten wir die stetige und diskrete Operation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((z_1, \dots, z_n), (x_1, \dots, x_n)) &\mapsto (z_1 + x_1, \dots, z_n + x_n), \end{aligned}$$

dann werden wir in den Übungen folgende Aussage beweisen:

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \text{ ist homöomorph zu } (S^1)^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-Mal}}.$$

- (b) Es sei $\lambda > 1$ und betrachten wir die stetige und diskrete Operation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ (n, x) &\mapsto \lambda^n x, \end{aligned}$$

dann ist

$$(0, \infty)/\mathbb{Z} \text{ homöomorph zu } S^1.$$

In der Tat, die Abbildung

$$\begin{aligned} f: (0, \infty) &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i \frac{\ln(t)}{\ln(\lambda)}} \end{aligned}$$

induziert einen Homöomorphismus $(0, \infty)/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$.

- (f) Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Topologie auf \mathbb{R}/\mathbb{Q} die triviale Topologie ist.

Wir beweisen noch folgendes Lemma.

Lemma 5.2. *Es sei G eine Gruppe, welche stetig auf einem topologischen Raum X operiert. Dann ist die Abbildung $X \rightarrow X/G$ stetig und offen.*

Beweis. Aus Lemma 3.2¹⁷ wissen wir schon, dass die Abbildung $p: X \rightarrow X/G$ stetig ist. Wir wollen nun zeigen, dass p offen ist. Es sei also $U \subset X$ offen. Wir müssen zeigen, dass $p(U)$ offen in X/G ist, d.h. wir müssen zeigen, dass $p^{-1}(p(U))$ offen in X ist. Es folgt aus den Definitionen, dass

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU.$$

Nachdem G stetig operiert, ist die Multiplikationsabbildung $x \mapsto gx$ ein Homöomorphismus (siehe Übungsblatt 4), also ist gU offen in X . Es folgt, dass $p^{-1}(p(U))$ als Vereinigung von offenen Mengen, wiederum offen in X ist. \square

5.2. Gruppenoperationen auf Mannigfaltigkeiten. Es sei nun X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, welche auf X stetig operiert. Ist dann X/G notwendigerweise eine Mannigfaltigkeit? Wir haben oben gesehen, dass dies in den Beispielen (a) und (b) in der Tat der Fall ist. Andererseits ist dies in Beispiel (f) nicht der Fall, denn \mathbb{R}/\mathbb{Q} besitzt die triviale Topologie ist aber eine überabzählbare Menge.

Wir brauchen also ein Kriterium für Gruppenoperationen um schließen zu können, das ein Quotient X/G einer Mannigfaltigkeit wiederum eine Mannigfaltigkeit ist.

Definition. Es G eine Gruppe, welche auf einem topologischen Raum X operiert. Wir sagen, G operiert *diskret*, wenn es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt, so dass

$$U \cap gU \neq \emptyset \text{ für alle } g \neq e.$$

Beispiel. (a) Die Operation von $G = \mathbb{Z}^n$ auf $X = \mathbb{R}^n$ ist diskret, in der Tat, für beliebiges $x = (x_1, \dots, x_n)$ hat

$$U := \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n\}$$

die gewünschte Eigenschaft.

¹⁷Anmerkung am 25.4.2012: Das Lemma 3.2 war in der ersten Version fehlerhaft formuliert.

- (b) Das Beispiel der Operation von $G = \mathbb{Z}$ auf $X = (0, \infty)$ ist ebenfalls diskret, für jedes $x \in (0, \infty)$ hat $U = (\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x, x\sqrt{\lambda})$ die gewünschte Eigenschaft.
- (c) Die Operation von $G = \mathbb{Z}/2$ auf $X = S^n$ ist diskret, für jedes x hat eine geeignet gewählt offene Halbkugel die geforderte Eigenschaft.
- (d) Mit etwas mehr Aufwand sieht man, dass die Operation von \mathbb{Z}/p auf S^3 , welche von einem Parameter q abhängt, genau dann diskret ist, wenn p und q teilerfremd sind. Alle Operationen in den Beispielen im vorherigen Kapitel sind diskret.
- (e) Die Operation von S^1 auf \mathbb{C} ist nicht diskret, nachdem es zu $x = 0 \in \mathbb{C}$ keine solche offene Umgebung U gibt.
- (f) Die folgende Operation der Gruppe \mathbb{Q} auf dem topologischen Raum \mathbb{R} ist nicht diskret, wie man sich leicht überzeugen kann.
- (g) Eine Operation ist *frei*, wenn $gx = x$ für ein $x \in X$ impliziert, dass $g = e$. Eine diskrete Operation ist auch frei.

Satz 5.3. *Es sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, welche auf X diskret und stetig operiert. Dann ist auch X/G eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $p: X \rightarrow X/G$ die kanonische Projektion. Es sei $y \in X/G$. Wir wählen ein $x \in X$ mit $p(x) = y$.

- (1) Nachdem G diskret operiert existiert eine offene Umgebung U von x , so dass

$$U \cap gU \neq \emptyset \text{ für alle } g \neq e.$$

Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass die Einschränkung von $p: X \rightarrow X/G$ auf U injektiv ist.¹⁸

- (2) Nachdem X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist existiert zudem eine Karte $\Phi: V \rightarrow W$ um x .

Indem wir U und V durch $U \cap V$ ersetzen können, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $U = V$. Nach Lemma 5.2 gilt für $A \subset X$:

$$A \subset X \text{ ist offen} \Leftrightarrow p(A) \subset X/G \text{ ist offen.}$$

Dies bedeutet, dass die Einschränkung von $p: X \rightarrow X/G$ auf $p: U \rightarrow p(U) \subset X/G$ ein Homöomorphismus ist. Es folgt, dass

$$p(U) \xrightarrow{p^{-1}} U \xrightarrow{\Phi} W$$

eine Karte für X/G um y ist. Wir haben damit bewiesen, dass X/G eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. \square

¹⁸Es ist eine gute Übung sich zu überlegen, dass dies in der Tat der Fall ist.

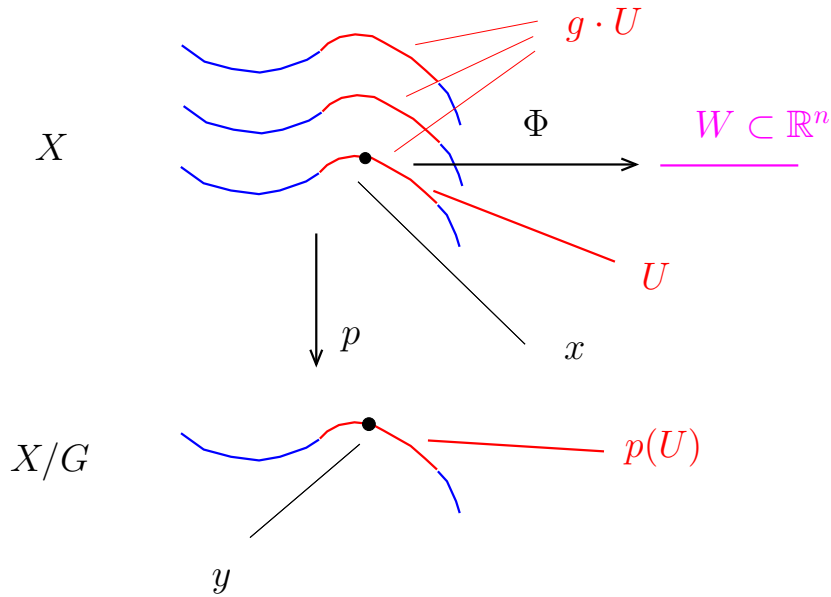


ABBILDUNG 10. Schematische Skizze für den Beweis von Satz 5.3.

Wir betrachten noch einmal die Beispiele aus dem vorherigen Kapitel:

Beispiel. (a) Betrachten wir die stetige und diskrete Operation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((z_1, \dots, z_n), (x_1, \dots, x_n)) &\mapsto (z_1 + x_1, \dots, z_n + x_n), \end{aligned}$$

dann werden wir in den Übungen folgende Aussage beweisen:

$$\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \text{ ist homöomorph zu } (S^1)^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-Mal}}.$$

(b) Es sei $\lambda > 0$ und betrachten wir die stetige und diskrete Operation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ (n, x) &\mapsto \lambda^n x, \end{aligned}$$

dann ist

$$(0, \infty) / \mathbb{Z} \text{ homöomorph zu } S^1.$$

(c) Wir betrachten die stetige und diskrete Operation

$$\begin{aligned} \{\pm 1\} \times S^n &\rightarrow S^n \\ (\varepsilon, (x_1, \dots, x_{n+1})) &\mapsto (\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_{n+1}). \end{aligned}$$

Der Quotientenraum $S^n/\{\pm 1\}$ ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Diese Mannigfaltigkeit wird mit $\mathbb{R}P^n$ bezeichnet und wird der *n -dimensionale reelle projektive Raum* genannt.

(a) Für $n = 2$ ist $\mathbb{R}P^2$ insbesondere 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, also eine Fläche. Wir werden in Übungsblatt 4 noch eine weitere Beschreibung von $\mathbb{R}P^2$ betrachten.

(b) Der topologische Raum $\mathbb{R}P^n$ ist homöomorph zu

$$(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \text{ wobei } v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

der Menge aller Geraden in \mathbb{R}^{n+1} , zusammen mit der Quotiententopologie.

(d) Wir betrachten

$$X = S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

und $G = \mathbb{Z}/p$. Es sei $q \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(p, q) = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/p \times S^3 &\rightarrow S^3 \\ (k + p\mathbb{Z}, (z_1, z_2)) &\mapsto (e^{2\pi k/p} z_1, e^{2\pi q k/p} z_2) \end{aligned}$$

eine stetige diskrete Operation von \mathbb{Z}/n . Wir bezeichnen mit $L(p, q)$ die 3-dimensionale Quotientenmannigfaltigkeit. Die Mannigfaltigkeiten $L(p, q)$ werden als *Linsenmannigfaltigkeiten* bezeichnet.

6. ZUSAMMENHÄNGENDE TOPOLOGISCHE RÄUME

Definition. (1) Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen X ist *zusammenhängend*, wenn gilt:

$$M = U \cup V, \text{ wobei } U, V \text{ offene disjunkte Teilmengen von } X \Rightarrow U = X \text{ oder } V = X.$$

(2) Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Wir sagen A ist *zusammenhängend*, wenn A bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Bemerkung. Es sei X ein topologischer Raum X .

(1) X ist per Definition *nicht zusammenhängend*, wenn es disjunkte offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $X = U \cup V$ gibt, so dass $U \neq X$ und $V \neq X$.

(2) Es folgt sofort aus den Definitionen, dass X *zusammenhängend* ist, genau dann, wenn gilt:

$$X = U \cup V, \text{ wobei } U, V \text{ abgeschlossene disjunkte Teilmengen von } X \Rightarrow U = \emptyset \text{ oder } V = \emptyset.$$

Beispiel. Betrachten wir

$$A = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R},$$

dann ist A nicht zusammenhängend. In der Tat, betrachten wir zuerst $U = [0, 1] \subset A$. Dann ist U offen in A , nachdem

$$U = [0, 1] = \underbrace{\left(-1, \frac{3}{2}\right)}_{\text{offen in } \mathbb{R}} \cap A.$$

Genauso zeigt man, dass $V = [2, 3]$ offen in A ist. Wir können also A schreiben als die Vereinigung der disjunkten offenen Mengen U und V .

Es ist also relativ leicht zu zeigen, dass ein gegebener topologischer Raum *nicht* zusammenhängend ist, wir müssen nur zwei geeignete offene Mengen finden. Dagegen ist es deutlich schwieriger explizit zu zeigen, dass ein topologischer Raum in der Tat zusammenhängend ist. Folgendes Lemma hatten wir in Analysis III, Übungsblatt 12 bewiesen:

Lemma 6.1. *Jedes Intervall (offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt) in \mathbb{R} ist zusammenhängend.*

Beweisskizze. Wir werden nur beweisen, dass das Intervall $[0, 1]$ zusammenhängend ist. Die anderen Fälle kann man ähnlich beweisen.

Es seien U, V offene disjunkte Mengen von $[0, 1]$ mit $U \cup V = [0, 1]$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $0 \in U$. Wir betrachten dann

$$A := \{t \in [0, 1] \mid [0, t] \subset U\}.$$

Diese Menge ist nichtleer da sie $t = 0$ enthält und beschränkt, es macht also Sinn, dass Supremum $T := \sup A$ zu betrachten. Wir müssen zeigen, dass $T = 1$ und $T \in U$.

Nehmen wir zuerst an, dass $T \notin U$. Dann ist $T \in V$, und es folgt aus der Offenheit von V , dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass auch $(T - \varepsilon, T + \varepsilon) \cap [0, 1]$ in V liegt. Dann gilt insbesondere, dass $(T - \varepsilon, T + \varepsilon) \cap A = \emptyset$, d.h. $\sup A \leq T - \varepsilon$. Wir haben damit einen Widerspruch erhalten.

Wir wissen also jetzt, dass $T \in U$. Aus der Offenheit von U folgt, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $(T - \varepsilon, T + \varepsilon) \cap [0, 1] \subset U$. Also ist $[0, T + \varepsilon] \cap [0, 1] \subset U$. Im Hinblick auf die Definition von T ist dies nur möglich, wenn $T = 1$. \square

Folgendes Lemma kann man als Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes betrachten.¹⁹

¹⁹Warum?

Lemma 6.2. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn X zusammenhängend ist, dann ist auch $f(X) \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, wobei X zusammenhängend ist. Es sei $f(Y) = U \sqcup V$ eine disjunkte Zerlegung von $f(Y)$ in offene Mengen. Dann gilt

$$X = f^{-1}(f(Y)) = f^{-1}(U \sqcup V) = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V).$$

Nachdem f stetig ist, ist dies eine disjunkte Zerlegung von X in zwei offene Teilmengen. Nachdem X zusammenhängend ist, gilt entweder $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$. Dann gilt aber auch, dass entweder $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$, d.h. $f(Y)$ ist zusammenhängend. \square

Es gibt auch noch einen weiteren Begriff des Zusammenhangs, welcher auf den ersten Blick anschaulicher ist:

- Definition.*
- (1) Es sei X ein topologischer Raum und es seien $x, y \in A$. Ein *Weg von x nach y* ist eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.²⁰
 - (2) Wir sagen ein topologischer Raum X ist *wegzusammenhängend*, wenn es zu allen $x, y \in X$ einen Weg von x nach y gibt.

- Beispiel.*
- (1) Der topologische Raum \mathbb{R}^n ist wegzusammenhängend. In der Tat, denn sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeben, dann ist $\gamma(t) := tx + (1-t)y$ mit $t \in [0, 1]$ ein Weg von x nach y .
 - (2) Man kann auch ganz explizit zeigen, dass

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend sind.

Wir sehen also in den Beispielen, dass es oft sehr einfach ist nachzuweisen, dass ein gegebener topologischer Raum wegzusammenhängend ist. Mithilfe des folgenden Lemmas erhalten wir jetzt auch eine praktikable Methode um zu zeigen, dass ein gegebener topologischer Raum zusammenhängend ist.

Lemma 6.3. *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, dann ist X auch zusammenhängend.*

Beweis. Es sei also X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Nehmen wir an, dass X nicht zusammenhängend ist. Dann existiert eine disjunkte Zerlegung $X = U \cup V$ in zwei offene nichtleere Teilmengen. Es sei nun $x \in U$ und $y \in V$. Nachdem X wegzusammenhängend ist

²⁰Manchmal bezeichnen wir auch eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ auf einem beliebigen kompakten Intervall als Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$.

existiert ein Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Dann ist $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung von dem Intervall $[0, 1]$ in zwei offene, nichtleere Teilmengen. Dies ist aber nach Lemma 6.2 nicht möglich. \square

Wir können jetzt folgendes Korollar beweisen:

Korollar 6.4. *Die topologischen Räume \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 sind nicht homöomorph.*

In Analysis II und III hatte ich schon mehrmals erwähnt, dass es eine surjektive stetige Abbildung ²¹ $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ('space filling curve') gibt. Man kann also nicht einfach sagen, dass \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 nicht homöomorph sind, weil ' \mathbb{R}^2 größer als \mathbb{R} ' ist.

Beweis. Nehmen wir an es gibt einen Homöomorphismus $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es sei $P \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Dann sind auch $\mathbb{R} \setminus \{P\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(P)\}$ homöomorph. Andererseits ist $\mathbb{R} \setminus \{P\} = (-\infty, P) \cup (P, \infty)$ nicht zusammenhängend²², während man leicht nachweisen kann, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(P)\} \cong S^1 \times (0, \infty)$ wegzusammenhängend, insbesondere nach Lemma 6.3 zusammenhängend, ist. Wir erhalten also einen Widerspruch. \square

Es stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung von Lemma 6.3 gilt. Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt. Wir betrachten

$$X := \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0, \pi]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(D.h. X besteht aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ für $x \in (0, \pi]$, zusammen mit einem Intervall auf der y -Achse.) In den Übungen werden wir sehen, dass X zusammenhängend ist, aber nicht wegzusammenhängend.

Glücklicherweise gilt die Umkehrung von Lemma 6.3 für 'weniger exotische' topologische Räume. Der folgende Satz wurde in Analysis III auf Übungsblatt 12 für Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n bewiesen.

Satz 6.5. *Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$M \text{ ist zusammenhängend} \Leftrightarrow M \text{ ist wegzusammenhängend.}$$

Beweisskizze. Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Richtung ' \Leftarrow ' ist die Aussage von Lemma 6.3. Nehmen wir nun an, dass M zusammenhängend ist. Sei nun $x \in M$. Wir wollen zeigen, dass es von

²¹Siehe:

http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve

²²Warum?

x ausgehend einen Weg zu jedem $y \in M$ gibt. Anders ausgedrückt, wir wollen mithilfe des Zusammenhangs von M zeigen, dass die Menge

$$U := \{y \in M \mid \text{es gibt einen Weg von } x \text{ and } y\}.$$

schon ganz M ist. Wir betrachten auch die Menge

$$V := \{y \in M \mid \text{es gibt keinen Weg von } x \text{ and } y\}.$$

Es ist offensichtlich, dass U und V disjunkt sind, und dass U nichtleer ist, da U den Punkt x enthält. Wenn wir nun noch wüßten, dass U und V offen sind, dann würde sofort aus dem Zusammenhang von M folgen, dass $U = M$.

Wir müssen also noch zeigen, dass U und V in der Tat offen sind. Dies kann man zeigen mithilfe von Karten und der Tatsache, dass jeder Punkt in \mathbb{R}^n eine wegzusammenhängende offene Umgebung (z.B. eine offene Kugel) besitzt. Dies werden wir in Übungsblatt 5 ausführen. \square

Es sei X ein topologischer Raum und es seien $x, y \in X$. Wir schreiben

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{es gibt einen Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass \sim in der Tat eine Äquivalenzrelation ist. Wir nennen die Äquivalenzklassen von \sim die *Komponenten von X* . Wir bezeichnen die Menge der Komponenten von X im Folgenden mit $\pi_0(X)$.

Für eine endliche Menge M bezeichnen wir mit $|M|$ oder $\#M$ die Anzahl der Elemente.

- Beispiel.*
- (1) Es sei $X = \mathbb{R}^n$, dann ist X wegzusammenhängend, also besteht X aus genau einer Komponente.
 - (2) Es gilt $|\pi_0(X)| = 1$ genau dann, wenn X wegzusammenhängend ist.
 - (3) Für $Y = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ sind die Komponenten gerade durch $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ gegeben. Insbesondere gilt $|\pi_0(Y)| = 2$.
 - (4) Für $Z = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}$ ist jeder Punkt eine eigene Komponente, also gilt $|\pi_0(Z)| = n$.

7. DIE FUNDAMENTALGRUPPE

Wir haben in den ersten Kapiteln viele topologische Räume eingeführt. Ein grundlegendes Problem der Topologie ist Methoden zu finden, mit deren Hilfe man feststellen kann, ob zwei gegebene topologische Räume homöomorph sind oder nicht.

Bis jetzt haben wir nur sehr wenige Methoden um zu zeigen, dass manche topologische Räume nicht homöomorph sind. Wir wissen, dass

wenn X und Y homöomorph sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} X \text{ kompakt} &\Leftrightarrow Y \text{ kompakt} \\ X \text{ Hausdorff} &\Leftrightarrow Y \text{ Hausdorff} \\ X \text{ zusammenhängend} &\Leftrightarrow Y \text{ zusammenhängend} \\ X \text{ wegzusammenhängend} &\Leftrightarrow Y \text{ wegzusammenhängend} \\ \pi_0(X) &\cong \pi_0(Y). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Sphäre S^2 und den Torus. Beide topologische Räume sind kompakt, Hausdorff und zusammenhängend. Andererseits erscheint es offensichtlich, dass die Sphäre und der Torus nicht homöomorph sind. Um einen mathematisch sauberen Beweis zu formulieren, welcher unsere Intuition bestätigt, werden wir im Folgenden die ‘Fundamentalgruppe’ eines topologischen Raumes einführen.

7.1. Homotopieklassen von Wegen. Zur Erinnerung, ein Weg in einem topologischen Raum ist eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. Wir nennen $\gamma(a)$ den *Anfangspunkt von γ* und wir nennen $\gamma(b)$ den *Endpunkt von γ* . Wir sagen auch γ ist ein *Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$* .

Wir werden öfters folgendes Lemma verwenden, welches uns erlaubt Wege ‘aneinander zu kleben’:

Lemma 7.1. *Es seien $f: [a, b] \rightarrow X$ und $g: [b, c] \rightarrow X$ Wege mit $f(b) = g(b)$. Dann ist auch*

$$\begin{aligned} [a, c] &\rightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} f(t), & \text{wenn } t \in [a, b] \\ g(t), & \text{wenn } t \in (b, c]. \end{cases} \end{aligned}$$

stetig, d.h. ein Weg.

Wir werden das Lemma auf Übungsblatt 5 beweisen. Im Folgenden betrachten wir Wege durchgehend als auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert, außer wir geben explizit ein anderes Intervall an.

Definition. Es seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege in einem topologischen Raum, mit gleichem Anfangspunkt P und gleichem Endpunkt Q . Eine *Homotopie zwischen den Wegen f_0 und f_1* ist eine stetige Abbildung

$$\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

so dass

$$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t) \text{ und } \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t) \text{ für alle } t \in [0, 1],$$

und so dass

$$\Gamma(0, s) = P \text{ und } \Gamma(1, s) = Q \text{ für alle } s \in [0, 1].$$

Wenn eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 existiert, dann sagen wir, dass γ_0 und γ_1 *weg-homotop* sind, und wir schreiben $\gamma_0 \simeq \gamma_1$.

Eine Homotopie von zwei Wegen besteht also aus einer stetigen Familie von Wegen $\{\Gamma(-, s)\}_{s \in [0,1]}$ von P nach Q , welche zwischen den Wegen γ_0 und γ_1 interpoliert. Dies wird auch in Abbildung 11 illustriert.

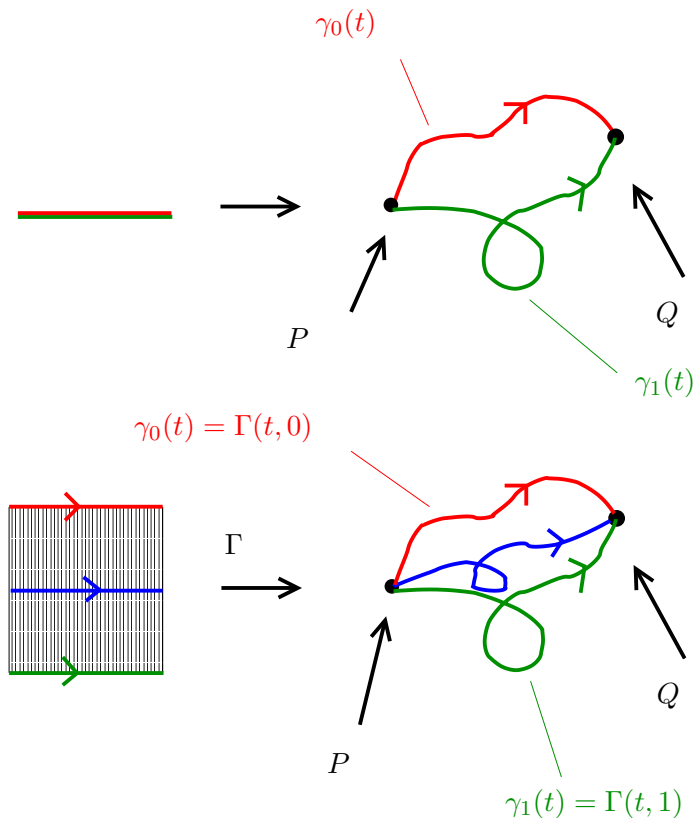


ABBILDUNG 11. Schematisches Bild einer Homotopie Γ zwischen γ_0 und γ_1 von P nach Q .

Beispiel. (1) Es seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege in \mathbb{R}^n mit gleichem Anfangs- und Endpunkten. Dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, s) &\mapsto \gamma_0(t)(1 - s) + \gamma_1(t)s \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 .

(2) Es sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Wir betrachten die Wege

$$p : [0, 1] \rightarrow X \quad \text{und} \quad q : [0, 1] \rightarrow X \\ t \mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t)) \quad \text{und} \quad t \mapsto (\cos(\pi t), -\sin(\pi t))$$

von $(0, 1)$ nach $(0, -1)$. Es scheint so, als wären p und q nicht homotop. Dies ist in der Tat der Fall, für den Beweis dieser Aussage werden wir allerdings noch mehrere Wochen benötigen.

Lemma 7.2. *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $x, y \in X$. Dann ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege von x nach y .*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass Homotopie die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation besitzt. Es seien $\alpha, \beta, \gamma: [0, 1] \rightarrow X$ Wege von x nach y .

- (1) $\Gamma(t, s) := \gamma(s)$ definiert eine Homotopie zwischen γ und γ .
- (2) Es sei Γ eine Homotopie von α nach β , dann definiert

$$\Gamma'(t, s) := \Gamma(t, 1 - s)$$

eine Homotopie von β nach α .

- (3) Es sei Γ eine Homotopie von α nach β und Δ eine Homotopie von β nach γ , dann ist

$$[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \Gamma(t, 2s), & \text{wenn } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \Delta(t, 2s - 1), & \text{wenn } s \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

eine Homotopie von α nach γ . (Dass diese Abbildung stetig ist kann man wie in Lemma 7.1 leicht nachweisen.)

□

Es sei $f: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg, wir bezeichnen dann mit $[f]$ die Äquivalenzklasse von f bezüglich der Äquivalenzrelation, welche durch Homotopie von Wegen definiert ist. Wir nennen dann $[f]$ auch die Homotopieklasse von f .

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit $f(1) = g(0)$. Wir definieren dann das *Produkt von f und g* als den Weg $f * g$, welcher gegeben ist durch

$$[0, 1] \rightarrow X$$

$$t \mapsto \begin{cases} f(2t), & \text{wenn } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2t - 1), & \text{wenn } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Es folgt aus Lemma 7.1, dass diese Abbildung in der Tat stetig ist.

Bemerkung. Anschaulich gesprochen ist also $f * g$ der Weg, bei dem wir zuerst entlang f und danach entlang g laufen. Damit dies weiterhin auf dem ‘Zeitintervall’ $[0, 1]$ passiert, müssen wir entlang f und g mit ‘doppelter Geschwindigkeit’ laufen.

Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 5 bewiesen.

Lemma 7.3. *Es seien $f, f' : [0, 1] \rightarrow X$ und $g, g' : [0, 1] \rightarrow X$ homotope Wege mit $f(1) = f'(1) = g(0) = g'(0)$, dann ist der Weg $f * g$ homotop zum Weg $f' * g'$.*

Es seien nun $[f], [g]$ zwei Äquivalenzklassen von Wegen auf X mit $f(1) = g(0)$. Wir definieren dann das *Produkt der Äquivalenzklassen $[f]$ und $[g]$* als

$$[f] * [g] := [f * g].$$

Nach Lemma 7.3 hängt diese Definition nicht von der Wahl der Repräsentanten f und g der Äquivalenzklassen ab.

Der folgende Satz besagt nun, dass das Produkt von Äquivalenzklassen viele Eigenschaften besitzt, welche wir von Gruppen her kennen.

Satz 7.4. *Es seien $f, g, h : [0, 1] \rightarrow X$ Wege. Dann gilt:*

- (1) *Wenn $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$, dann gilt*²³

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h].$$

- (2) *Für $x \in X$ bezeichnen wir mit e_x den durch $e_x(t) := x$ definierten konstanten Weg. Dann gilt*

$$[e_{f(0)} * f] = [f] = [f * e_{f(1)}].$$

- (3) *Wir bezeichnen mit \bar{f} den durch $\bar{f}(t) := f(1 - t)$ definierten Weg, dann gilt*

$$[f * \bar{f}] = [e_{f(0)}] \text{ und } [\bar{f} * f] = [e_{f(1)}].$$

Beweis. Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis des Satzes beginnen, machen wir zwei Vorbemerkungen. Es sei dazu $\Phi : Y \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Aus den Definitionen folgen sofort folgende Behauptungen.

- (i) Wenn $P : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie für zwei Wege $p, q : [0, 1] \rightarrow Y$ ist, dann ist $\Phi \circ P : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Z$ eine Homotopie zwischen den Wegen $\Phi \circ p, \Phi \circ q : [0, 1] \rightarrow Z$.
- (ii) Es seien $p, q : [0, 1] \rightarrow Y$ zwei Wege mit $p(1) = q(0)$, dann gilt

$$(\Phi \circ p) * (\Phi \circ q) = \Phi \circ (p * q).$$

²³Anders ausgedrückt, die Wege $f * (g * h)$ und $(f * g) * h$ sind homotop. Man beachte, dass diese Wege im Allgemeinen nicht gleich sind, nachdem beispielsweise $(f * (g * h))(\frac{1}{2}) = f(1)$ und $((f * g) * h)(\frac{1}{2}) = g(1)$.

- (iii) Es seien $p, q: [0, 1] \rightarrow Y := [a, b]$ Wege mit $p(0) = q(0) = a$ und $p(1) = q(1) = b$, dann sind p, q homotop als Wege in $Y = [a, b]$.

In der Tat, eine Homotopie ist gegeben durch

$$P: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow [a, b]$$

$$(t, s) \mapsto p(t) \cdot s + q(t) \cdot (1 - s).$$

Wir wenden uns dem eigentlichen Beweis des Satzes zu. Es seien dazu $f, g, h: [0, 1] \rightarrow X$ Wege.

- (2) Wir betrachten

$$p: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{und} \quad q: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$t \mapsto t \quad \text{und} \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2t - 1, & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann gilt $f = f \circ p$ und $e_{f(0)} * f = f \circ q$. Nachdem die Wege $p, q: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nach (iii) homotop, folgt aus (i), dass auch $f = f \circ p$ und $e_{f(0)} * f = f \circ q$ homotop sind. Wir haben damit bewiesen, dass $[e_{f(0)} * f] = [f]$. Die Behauptung, dass $[f] = [f * e_{f(1)}]$ wird ganz ähnlich bewiesen.

- (3) Wir betrachten

$$p: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{und} \quad q: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$t \mapsto 0 \quad \text{und} \quad t \mapsto \begin{cases} 2t, & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2t, & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann gilt $e_{f(0)} = f \circ p$ und $f * \bar{f} = f \circ q$. Nachdem die Wege $p, q: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nach (iii) homotop sind, folgt aus (i), dass auch $e_{f(0)} = f \circ p$ und $f * \bar{f} = f \circ q$ homotop sind. Wir haben damit bewiesen, dass $[e_{f(0)}] = [f * \bar{f}]$. Die Behauptung, dass $[e_{f(1)}] = [\bar{f} * f]$ wird ganz ähnlich bewiesen.

- (1) Wir nehmen nun an, dass $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi: [0, 3] \rightarrow X$$

$$t \mapsto \begin{cases} f(t), & \text{für } t \in [0, 1], \\ g(t - 1), & \text{für } t \in (1, 2], \\ h(t - 2), & \text{für } t \in (2, 3]. \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist diese Abbildung stetig. Wir betrachten zudem

$$p: [0, 1] \rightarrow [0, 3] \quad \text{und} \quad p: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$$

$$t \mapsto \begin{cases} 2t, & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 4t - 1, & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad \text{und} \quad t \mapsto \begin{cases} 4t, & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2t + 1, & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann gilt $f * (g * h) = \Phi \circ p$ und $(f * g) * h = \Phi \circ q$. Nachdem die Wege $p, q: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$ nach (iii) homotop sind, folgt aus (i),

dass auch $f * (g * h) = \Phi \circ p$ und $(f * g) * h = \Phi \circ q$ homotop sind. Wir haben damit bewiesen, dass $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$.

□

Es sei $f: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg in einem topologischen Raum und es sei $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Wir sagen, dass der Weg $f \circ \varphi: [0, 1] \rightarrow X$ aus f durch die Parametertransformation φ hervorgeht. In dem Beweis von Satz 7.4 haben wir implizit folgende Aussage bewiesen:

Lemma 7.5. *Es sei $f: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg in einem topologischen Raum und es sei $g: [0, 1] \rightarrow X$ ein weiterer Weg, welcher aus f durch eine Parametertransformation hervorgeht. Dann sind f und g homotop.*

7.2. Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. In Satz 7.4 haben wir gesehen, dass das Produkt von Wegen viele Eigenschaften einer Gruppe besitzt. Allerdings bilden die Homotopieklassen von Wegen keine Gruppe, weil im Allgemeinen ihr Produkt nicht definiert ist. Wir beheben das Problem, in dem wir uns von nun an auf Schleifen konzentrieren.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Eine *Schleife* in (X, x_0) ist ein Weg $f: [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = f(1) = x_0$, d.h. x_0 ist sowohl der Anfangs- als auch der Endpunkt von f .

Satz 7.6. *Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Wir betrachten*

$$\pi_1(X, x_0) := \{\text{Homotopieklassen von Schleifen in } (X, x_0)\}$$

*zusammen mit der Produktabbildung $(f, g) \mapsto f * g$. Dann ist dies eine Gruppe.*

Beweis. Es ist offensichtlich, dass das Produkt von je zwei Schleifen in (X, x_0) definiert ist. Das Produkt von Wegen definiert nach Lemma 7.3 also in der Tat eine Abbildung $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Nach Satz 7.4 (1) erfüllt diese Produktabbildung das Assoziativitätsgesetz. Das triviale Element ist nach Satz 7.4 (2) gegeben durch die Homotopieklasse der konstanten Schleife $[e_{x_0}]$. Zudem ist das Inverse der Homotopieklasse einer Schleife $f: [0, 1] \rightarrow X$ in x_0 nach Satz 7.4 (3) gegeben durch die durch $\bar{f}(t) := f(1 - t)$ definierte Schleife. □

Definition. Wir nennen $\pi_1(X, x_0)$ die *Fundamentalgruppe von X bezüglich des Basispunktes x_0* . Für $f, g \in \pi_1(X, x_0)$ schreiben wir oft fg anstatt $f * g$.

Beispiel. (1) Wir betrachten $X = \mathbb{R}^n$. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig und es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Schleife in (\mathbb{R}^n, x_0) . Dann ist

$$\begin{aligned} [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, s) &\mapsto f(t) \cdot (1 - s) + x_0 \cdot s \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen den Schleifen f und e_{x_0} . Es folgt also, dass $\pi_1(X, x_0) = 0$.²⁴

(2) Wir sagen $X \subset \mathbb{R}^n$ ist *sternförmig*, wenn es ein $x \in X$ gibt, so dass für alle $y \in X$ die Strecke $xt + y(1 - t), t \in [0, 1]$ in X liegt. Beispielsweise sind offene und geschlossene Kugeln und offene und geschlossene Quader sternförmig. Genau der gleiche Beweis wie in (1) zeigt, dass die Fundamentalgruppe für jedes sternförmige Gebiet trivial ist.

Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Wir sagen eine Schleife f in (X, x_0) ist *null-homotop*, wenn $f \simeq e_{x_0}$. Anders ausgedrückt, f ist null-homotop, wenn f homotop ist zur konstanten Schleife. Es folgt direkt aus den Definitionen, dass $\pi_1(X, x_0)$ die triviale Gruppe ist (d.h. nur aus dem trivialen Element besteht), genau dann, wenn jede Schleife in (X, x_0) null-homotop ist.

Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 6 bewiesen:

Lemma 7.7. *Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Es sei $\varphi: S^1 \rightarrow X$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(1) = x_0$. Wir definieren $f(t) := \varphi(e^{2\pi it})$. Dann gilt: die Schleife f in x_0 ist null-homotop genau dann, wenn es eine stetige Abbildung $\Phi: D^2 \rightarrow X$ gibt, so dass $\Phi|_{S^1} = \varphi$.*

Wir haben die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes X bezüglich eines Basispunktes x_0 eingeführt. Wir werden im Folgenden sehen, dass es oft keinen großen Unterschied macht, welchen Basispunkt man wählt.

Satz 7.8. *Es X ein topologischer Raum und es seien $x_0, x_1 \in X$, welche durch einen Weg $p: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 verbunden sind. Dann ist*

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [f] &\mapsto [p * f * \bar{p}] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

²⁴Wenn $\pi_1(X, x_0)$ die triviale Gruppe ist, dann schreiben wir normalerweise $\pi_1(X, x_0) = 0$. Diese Notation hat sich eingebürgert, obwohl sie nicht ganz logisch ist: wir verwenden die multiplikative Notation für die Gruppenoperation auf der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$, und es wäre daher logischer $\pi_1(X, x_0) = 1$ zu schreiben, wenn die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist.

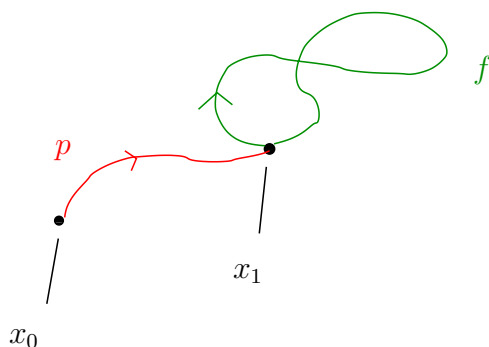


ABBILDUNG 12. Schematische Skizze für Satz 7.8.

Beweis. Es X ein topologischer Raum und es seien $x_0, x_1 \in X$, welche durch einen Weg $p: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 verbunden sind. Es sei f eine Schleife in (X, x_1) . Dann ist $p * f * \bar{p}$ offensichtlich eine Schleife in (X, x_0) . Aus Lemma 7.3 und Satz 7.4 folgt, dass die Homotopieklasse von $p * f * \bar{p}$ nur von der Wahl der Homotopieklasse von f abhängt, d.h.

$$\begin{aligned} \Phi: \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [f] &\mapsto [p * f * \bar{p}] \end{aligned}$$

ist eine wohl-definierte Abbildung. Für zwei Schleifen f, g in (X, x_1) gilt zudem, dass

$$\begin{aligned} \Phi([f]) * \Phi([g]) &= [p * f * \bar{p}] * [p * g * \bar{p}] \\ &= [p * f * \underbrace{\bar{p} * p}_{\simeq e_{x_1}} * g * \bar{p}] \\ &= [p * f * e_{x_1} * g * \bar{p}] \\ &= [p * (f * g) * \bar{p}] = \Phi([f * g]). \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

In der Tat ist Φ sogar ein Gruppenisomorphismus, nachdem eine Umkehrabbildung gegeben ist durch ²⁵

$$\begin{aligned} \Psi: \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [f] &\mapsto [\bar{p} * f * p]. \end{aligned}$$

□

Wir erhalten folgendes Korollar:

²⁵Warum ist $\Phi \circ \Psi$ die Identität auf $\pi_1(X, x_0)$ und $\Psi \circ \Phi$ die Identität auf $\pi_1(X, x_1)$?

Korollar 7.9. *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und es seien $x_0, x_1 \in X$. Dann gilt*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

Wenn X ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist, dann besagt das Korollar, dass der Isomorphietyp der Fundamentalgruppe nicht von der Wahl des Basispunktes abhängt. Wir bezeichnen dann manchmal mit $\pi_1(X)$ den Isomorphietyp der Fundamentalgruppe.

Definition. Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, wenn $\pi_1(X) = \{0\}$ ²⁶, dann sagen wir, dass X *einfach zusammenhängend* ist.

Folgendes Lemma werden wir in den Übungen beweisen:

Lemma 7.10. *Es sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Es seien $P, Q \in X$. Dann sind alle Wege von P nach Q homotop zueinander.*

Wir haben schon gesehen, dass \mathbb{R}^n einfach zusammenhängend ist. Der gleiche Beweis zeigt auch, dass jede offene oder geschlossene Kugel in \mathbb{R}^n einfach zusammenhängend ist. Die folgende Aussage ist schon etwas interessanter:

Satz 7.11. *Es sei $n \geq 2$, dann ist S^n einfach zusammenhängend.*

*Beweis.*²⁷ Es sei $x_0 \neq (\pm 1, 0, \dots, 0) \in S^n$ ein Basispunkt. Wir betrachten

$$N := (0, \dots, 0, 1), S := (0, \dots, 0, -1) \text{ und } U := S^n \setminus N, V := S^n \setminus S.$$

Dann sind U und V homöomorph zu einer offenen n -Kugel, also einfach zusammenhängend.

Wir sagen eine Schleife $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^n$ in x_0 hat *Komplexität* k , wenn es

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1,$$

gibt so dass gilt:

²⁶Nachdem X ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist es egal, welchen Basispunkt wir betrachten.

²⁷Hier ist ein ganz kurzer "Beweis": Es sei $x_0 \in S^n$ und $f: [0, 1] \rightarrow S^n$ eine Schleife in x_0 . Wir müssen zeigen, dass f null-homotop ist. Nachdem $n \geq 2$ und nachdem $[0, 1]$ ein-dimensional ist, existiert ein Punkt $P \in S^n$, welcher nicht im Bild von f liegt. Dann ist $S^n \setminus \{P\}$ homöomorph zu einer offenen Kugel. Nachdem jede offene Kugel einfach zusammenhängend ist, können wir in der Kugel eine Homotopie von f zu e_{x_0} finden. Es folgt, dass f null-homotop in der Kugel, also auch null-homotop in S^n ist.

Dummerweise hat der Beweis einen Fehler. Wo ist wohl der Fehler?

- (1) für jedes $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ist $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U$ oder $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V$,
- (2) für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ ist $\gamma(t_i) \neq S$ und $\gamma(t_i) \neq N$.

Behauptung. Zu jeder Schleife γ in x_0 gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass γ Komplexität k besitzt.

Es sei $\{U_i\}_{i \in I}$ die Menge der Komponenten von $f^{-1}(U) \subset [0, 1]$ und es sei $\{V_j\}_{j \in J}$ die Menge der Komponenten von $f^{-1}(V) \subset [0, 1]$. Es ist also

$$\{U_i\}_{i \in I} \cup \{V_j\}_{j \in J}$$

eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Nachdem $[0, 1]$ kompakt ist, gibt es endliche viele Indizes i_1, \dots, i_r und j_1, \dots, j_s , so dass

$$[0, 1] = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \cup V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_s}.$$

Es gibt daher

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1,$$

so dass gilt:

- (1) Für jedes $l \in \{1, \dots, k-1\}$ liegt $[t_l, t_{l+1}]$ in einer der offenen Mengen $U_{i_1}, \dots, U_{i_r}, V_{j_1}, \dots, V_{j_s}$.
- (2) Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ ist $\gamma(t_i) \neq S$ und $\gamma(t_i) \neq N$.

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

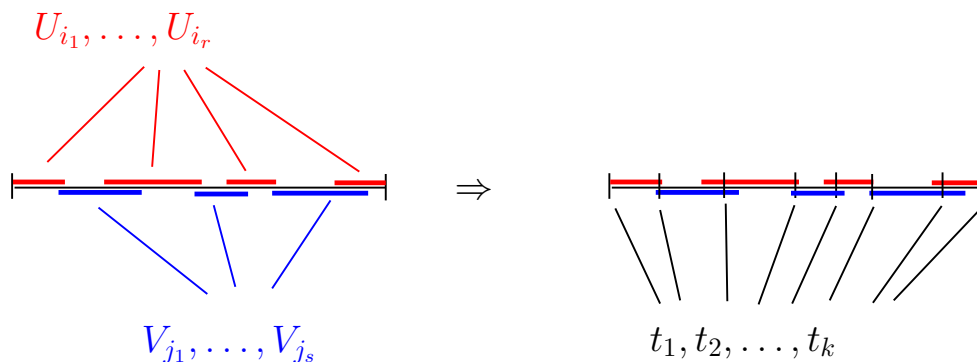


ABBILDUNG 13. Bestimmung der t_1, \dots, t_k .

Wir können jetzt den Satz beweisen:

Behauptung. Es sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^n$ eine Schleife in (S^n, x_0) . Dann ist γ null-homotop.

Wir beweisen die Behauptung mithilfe von Induktion nach der Komplexität von γ . Wenn die Komplexität eins beträgt, dann gilt $\gamma([0, 1]) \subset U$, aber nachdem U einfach zusammenhängend ist, folgt, dass γ null-homotop ist.

Es sei nun $k > 1$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset U$. Nachdem U einfach zusammenhängend ist folgt aus Lemma 7.10, dass alle Wege von $\gamma(t_{k-1})$ nach $\gamma(t_k)$ homotop sind. Wir können also nach Übungsblatt 6 den Weg $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ durch einen dazu homotopen Weg ersetzen, welcher N nicht trifft. Der neue Weg liegt also für $t \in [t_{k-2}, t_k]$ in V . Dies zeigt, dass γ homotop ist zu einer Schleife der Komplexität $k - 1$. Eine solche Schleife ist jedoch null-homotop nach Induktionsvoraussetzung, also ist auch γ null-homotop. \square

Die Motivation für die Fundamentalgruppe war, dass uns diese ermöglichen soll, topologische Räume zu unterscheiden. Es ist also etwas enttäuschend, dass alle unsere bisherigen Beispiele einfach zusammenhängend sind. Andererseits erscheint es ziemlich offensichtlich, dass die Schleife

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

nicht null-homotop ist. Es besteht also Hoffnung, dass $\pi_1(S^1) \neq 0$. Der Beweis dieser Aussage ist allerdings nicht trivial, und wird erst im übernächsten Kapitel erfolgen.

8. KATEGORIEN

8.1. Definition und Beispiele.

Definition. Eine Kategorie C besteht aus folgenden Daten:

- (1) Einer Klasse $\text{Ob}(C)$ von mathematischen Objekten, welche die *Objekte der Kategorie* genannt werden,
- (2) zu jedem Paar (X, Y) von Objekten gibt es eine Menge $\text{Mor}(X, Y)$,
- (3) zu je drei Objekten X, Y und Z gibt es eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) &\rightarrow \text{Mor}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind:

- (K1) (Assoziativität): Es seien $f \in \text{Mor}(W, X), g \in \text{Mor}(X, Y)$ und $h \in \text{Mor}(Y, Z)$, dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

(K2) (Identität): Zu jedem Objekt X gibt es einen Morphismus $\text{id}_X \in \text{Mor}(X, X)$ mit der Eigenschaft, dass gilt

$$\begin{aligned} \text{id}_X \circ f &= f \quad \text{für alle } f \in \text{Mor}(Z, X), \text{ und} \\ f \circ \text{id}_X &= f \quad \text{für alle } f \in \text{Mor}(X, Y). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, Z)$ wird, wie die Notation schon suggeriert, die *Verknüpfungsabbildung* genannt.

Beispiel. (a) Wir nennen die Kategorie C mit

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C) &:= \text{alle Mengen,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \text{alle Abbildungen von } X \text{ nach } Y, \end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die *Kategorie aller Mengen*.

(b) Wir nennen die Kategorie C mit

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C) &:= \text{alle Mengen,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \begin{cases} \text{id}_X, & \text{wenn } X = Y \\ \emptyset, & \text{wenn } X \neq Y. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Verknüpfungsabbildung muss nur definiert werden, wenn $X = Y = Z$, und in diesem Fall definieren wir $\text{id}_X \circ \text{id}_X := \text{id}_X$. Man kann sich nun leicht davon vergewissern, dass dies eine Kategorie definiert.

(c) Es sei \mathbb{K} ein Körper. Wir nennen die Kategorie C mit

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C) &:= \text{alle } \mathbb{K}\text{-Vektorräume,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y) = \text{alle Homomorphismen von } X \text{ nach } Y, \end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Homomorphismen die *Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume*.

(d) Wir nennen die Kategorie C mit

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C) &:= \text{alle Gruppen,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \text{Hom}(X, Y) = \text{alle Gruppenhomomorphismen von } X \text{ nach } Y, \end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Gruppenhomomorphismen die *Kategorie der Gruppen*.

(e) Wir nennen die Kategorie C mit

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C) &:= \text{alle topologischen Räume,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= C(X, Y) := \text{alle stetigen Abbildungen von } X \text{ nach } Y, \end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die *Kategorie der topologischen Räume*.

- (f) Ein *punktierter topologischer Raum* ist ein Paar (X, x_0) , wobei X ein topologischer Raum ist und $x_0 \in X$. Wir nennen die Kategorie C mit

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C) &:= \text{alle punktierten topologischen R\u00e4ume,} \\ \text{Mor}((X, x_0), (Y, y_0)) &:= \text{alle stetigen Abbildungen } f \text{ von } X \text{ nach } Y \\ &\quad \text{mit } f(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

mit der \u00fcblichen Verkn\u00fcpfung von Abbildungen die *Kategorie der punktierten topologischen R\u00e4ume*.

Es gibt allerdings auch ‘exotischere Beispiele’.

- (g) Es sei G eine beliebige Gruppe. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C) &:= \{\text{eine Menge mit einem einzigen Element } *\}, \\ \text{Mor}(*, *) &:= G. \end{aligned}$$

Wir definieren dann

$$\begin{aligned} \text{Mor}(*, *) \times \text{Mor}(*, *) &\rightarrow \text{Mor}(*, *) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f := gf \end{aligned}$$

mittels der Gruppenstruktur auf $\text{Mor}(*, *) = G$. Die Axiome einer Kategorie folgen dann aus den Gruppenaxiomen von G .

Der Name ‘Morphismen’ suggeriert, dass es sich bei Morphismen um Abbildungen handelt. Dies ist aber nicht notwendigerweise der Fall, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden.

8.2. Homotope Abbildungen. In diesem Kapitel werden wir eine Kategorie einf\u00fchren, bei denen die Morphismen nicht mehr Abbildungen sind. Wir brauchen dazu allerdings noch ein paar Definitionen.

Definition. Es seien $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen R\u00e4umen. Eine *Homotopie zwischen den stetigen Abbildungen f_0 und f_1* ist eine stetige Abbildung

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

so dass

$$F(x, 0) = f_0(x) \text{ und } F(x, 1) = f_1(x) \text{ f\u00fcr alle } x \in X.$$

Wenn eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 existiert, dann sagen wir, dass f_0 und f_1 *homotop* sind und wir schreiben $f_0 \simeq f_1$.

Bemerkung. Es seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege in einem topologischen Raum, mit gleichem Anfangspunkt P und gleichem Endpunkt Q . In Kapitel 7.1 hatten wir gesagt, dass γ_0 und γ_1 *homotope Wege* sind, wenn es eine stetige Abbildung $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt, so dass

(i)

$$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t) \text{ und } \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t) \text{ für alle } t \in [0, 1],$$

(ii)

$$\Gamma(0, s) = P \text{ und } \Gamma(1, s) = Q \text{ für alle } s \in [0, 1].$$

Wenn wir nun sagen, dass γ_0 und γ_1 *homotope Abbildungen* sind, dann verlangen wir nur die Existenz einer Abbildung, welche (i), aber nicht notwendigerweise (ii) erfüllt. Wie wir in Übungsblatt 6 sehen werden, macht dies einen großen Unterschied. Normalerweise ist es vom Kontext her offensichtlich, mit welcher Definition von Homotopie wir arbeiten.

Beispiel. Alle stetigen Abbildungen von einem topologischen Raum X nach \mathbb{R}^n sind homotop. In der Tat, seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen, dann ist eine Homotopie definiert durch

$$\begin{aligned} H: X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto f(x)(1-t) + g(x)t. \end{aligned}$$

In Lemma 7.2 hatten wir gezeigt, dass die Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege von x nach y bildet. Ganz analog zeigt man folgendes Lemma:

Lemma 8.1. *Es seien X und Y topologische Räume. Die Homotopie von Abbildungen bildet eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y .*

Wir bezeichnen im Folgenden mit $[f]$ die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$, und wir bezeichnen $[X, Y]$ die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen von X nach Y . Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 6 bewiesen.

Lemma 8.2. *Es seien X, Y und Z topologische Räume. Es seien $f, f': X \rightarrow Y$ und $g, g': Y \rightarrow Z$ homotope stetige Abbildungen, dann ist auch $f \circ g$ homotop zu $f' \circ g'$.*

Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C) &:= \text{alle topologischen Räume,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= [X, Y] \end{aligned}$$

mit der Verknüpfung

$$\begin{aligned} \text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) &\rightarrow \text{Mor}(X, Z) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f \circ g] \end{aligned}$$

eine Kategorie bildet.

8.3. **Funktoren.**

Definition. Es seien C und D Kategorien. Ein *kovarianter Funktor* $F : C \rightarrow D$ besteht aus einer Abbildung

$$F : \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$$

und für alle $X, Y \in C$ gibt es zudem eine Abbildung

$$\text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}(F(X), F(Y)),$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind

- (F1) $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \text{Ob}(C)$,
- (F2) für $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$ und $\psi \in \text{Mor}(Y, Z)$, gilt

$$F(\psi \circ \phi) = F(\psi) \circ F(\phi).$$

Beispiel. (1) Es sei C die Kategorie der reellen Vektorräume und es sei W ein Vektorraum, dann ist

$$\begin{aligned} F : \text{Ob}(C) &\rightarrow \text{Ob}(C) \\ V &\mapsto \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V), \end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Mor}(U, V) &\mapsto \text{Mor}(F(U), F(V)) \\ (\phi : U \rightarrow V) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \text{Hom}(W, U) & \rightarrow & \text{Hom}(W, V) \\ & f \mapsto & \phi \circ f \end{array} \right) \end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor.²⁸ Wir können dies wie folgt illustrieren:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Z \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Hom}(W, X) & \xrightarrow{F(\phi)} & \text{Hom}(W, Y) & \xrightarrow{F(\psi)} & \text{Hom}(W, Z) \end{array}$$

(2) Es sei V die Kategorie der reellen Vektorräume und es sei G die Kategorie der Gruppen, dann ist

$$\begin{aligned} F : \text{Ob}(V) &\rightarrow \text{Ob}(G) \\ U &\mapsto U \text{ aufgefasst als abelsche Gruppe} \\ &\quad \text{bzgl. der Addition,} \end{aligned}$$

²⁸In der Tat, denn sei $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$ und $\psi \in \text{Mor}(Y, Z)$ und es sei $f \in \text{hom}(W, X)$, dann gilt

$$F(\psi \circ \phi)(f) = (\psi \circ \phi)(f) = \psi(\phi \circ f) = \psi \circ F(\phi)(f) = F(\psi)(F(\phi)(f)) = (F(\psi) \circ F(\phi))(f).$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Mor}(U, V) &\mapsto \text{Mor}(F(U), F(V)) \\ \phi &\mapsto \phi \end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor.

Definition. Es seien C und D Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $F : C \rightarrow D$ besteht aus einer Abbildung

$$F : \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$$

für alle $X, Y \in C$ gibt es zudem eine Abbildung

$$\text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}(F(Y), F(X))$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind

- (F1) $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \text{Ob}(C)$,
 (F2) für $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$ und $\psi \in \text{Mor}(Y, Z)$, gilt

$$F(\psi \circ \phi) = F(\phi) \circ F(\psi).$$

Der Unterschied zur Definition eines kovarianten Funktors liegt darin, dass sich die Reihenfolge von $F(\psi)$ und $F(\phi)$ umgedreht hat. Dies erscheint sehr unnatürlich auf den ersten Blick, dies kommt aber durchaus desöfteren vor, wie wir jetzt in den Beispielen sehen werden.

Beispiel. (1) Es sei C die Kategorie der reellen Vektorräume. Dann ist

$$\begin{aligned} F : \text{Ob}(C) &\rightarrow \text{Ob}(C) \\ V &\mapsto V^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) := \text{Dualraum von } V, \end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Mor}(U, V) &\mapsto \text{Mor}(V^*, U^*) \\ (\phi : U \rightarrow V) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \text{Hom}(V, \mathbb{R}) & \rightarrow & \text{Hom}(U, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f \circ \phi \end{array} \right) \end{aligned}$$

ein kontravarianter Funktor.²⁹ Für einen Homomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ bezeichnen wir mit $\varphi^* : V^* \rightarrow U^*$ die oben definierte duale Abbildung. Die Axiome eines kontravarianten Funktors besagen dann, dass

$$\begin{aligned} \text{id}^* &= \text{id} \\ (\psi \circ \phi)^* &= \phi^* \circ \psi^*. \end{aligned}$$

²⁹In der Tat, denn sei $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$ und $\psi \in \text{Mor}(Y, Z)$ und es sei $f \in \text{hom}(Z, W)$, dann gilt

$$F(\psi \circ \phi)(f) = f \circ (\psi \circ \phi) = (f \circ \psi) \circ \phi = F(\psi)(f) \circ \phi = F(\phi)(F(\psi)(f)) = (F(\phi) \circ F(\psi))(f).$$

- (2) Es sei C die Kategorie der reellen Vektorräume und es sei W ein Vektorraum, dann ist

$$F : \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(C) \\ V \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W),$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\text{Mor}(U, V) \mapsto \text{Mor}(F(V), F(U)) \\ (\phi: U \rightarrow V) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \text{Hom}(V, W) & \rightarrow & \text{Hom}(U, W) \\ & f \mapsto & f \circ \phi \end{array} \right)$$

ein kontravarianter Funktor. Wir können dies wie folgt illustrieren:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Z \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Hom}(X, W) & \xleftarrow{F(\phi)} & \text{Hom}(Y, W) & \xleftarrow{F(\psi)} & \text{Hom}(Z, W) \end{array}$$

- (3) Es sei T die Kategorie der topologischen Räume und es sei V die Kategorie der reellen Vektorräume, dann ist

$$F : \text{Ob}(T) \rightarrow \text{Ob}(V) \\ X \mapsto C(X, \mathbb{R}) := \text{stetige reell-wertige Funktionen auf } X,$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\text{Mor}(X, Y) \mapsto \text{Mor}(C(Y), C(X)) \\ (\phi: X \rightarrow Y) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} C(Y) & \rightarrow & C(X) \\ & f \mapsto & f \circ \phi \end{array} \right)$$

ein kontravarianter Funktor.

8.4. Die Fundamentalgruppe als Funktor. Jetzt nach dem langen Ausflug in die Kategorientheorie kehren wir zurück zu den Fundamentalgruppen.

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und es sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Es sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ eine Schleife im Punkt x_0 , dann ist $\gamma \circ f: [0, 1] \rightarrow Y$ eine Schleife im Punkt $f(x_0)$. Aus dem Beweis von Satz 7.4 (i) und (ii) folgt, dass

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

eine wohl-definierte Abbildung ist, d.h. $f_*([\gamma])$ ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Homotopieklasse von Schleifen, und dass

f_* ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir nennen f_* die von f induzierte Abbildung. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}, \quad \text{für alle punktierten Paare } (X, x_0),$$

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*, \quad \begin{array}{l} \text{für alle stetigen Abbildungen } f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \\ \text{und } g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0). \end{array}$$

Wir können diese Beobachtungen auch wie folgt in einem Satz zusammenfassen:

Satz 8.3. *Es sei T die Kategorie der punktierten topologischen Räumen und G die Kategorie der Gruppen. Dann ist*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob}(T) & \rightarrow & \text{Ob}(G) \\ (X, x_0) & \mapsto & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} C((X, x_0), (Y, y_0)) & \rightarrow & \text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0)) \\ f & \mapsto & f_* \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

Bemerkung. Die *algebraische Topologie* als Spezialgebiet der Topologie beschäftigt sich mit den Funktoren von der Kategorie der (punktierten) topologischen Räumen in die Kategorie der Gruppen oder Vektorräume. Wichtige Beispiele sind:

- (1) Die Fundamentalgruppe,
- (2) die höheren Homotopiegruppen,
- (3) die Homologiegruppen, und die
- (4) Kohomologiegruppen.

Die ersten 3 Funktoren sind kovariant, der letzte Funktor ist kontravariant.

Folgenden Satz werden wir in Übungsblatt 7 beweisen:

Satz 8.4. *Es seien A und B topologische Räume und $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$. Wir betrachten*

$$\begin{array}{ccc} f: A \rightarrow A \times B & \text{und} & g: B \rightarrow A \times B \\ a \mapsto (a, b_0) & & b \mapsto (a_0, b). \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, a_0) \times \pi_1(B, b_0) & \rightarrow & \pi_1(A \times B, (a_0, b_0)) \\ (x, y) & \rightarrow & f_*(x) \cdot g_*(y) \end{array}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Kurz gesagt, die Fundamentalgruppe des Produktes zweier topologischer Räume ist das Produkt der Fundamentalgruppen.

9. FUNDAMENTALGRUPPEN UND ÜBERLAGERUNGEN

Wir haben jetzt die Theorie der Fundamentalgruppen entwickelt. Dummerweise fehlt uns noch der Beweis, dass es überhaupt einen topologischen Raum mit nichttrivialer Fundamentalgruppe gibt. Wir werden jetzt verschiedene Fundamentalgruppen mithilfe von Überlagerungstheorie bestimmen.

9.1. Überlagerungen.

Definition. Es $p: X \rightarrow B$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.

- (1) Wir sagen $U \subset B$ ist *gleichmäßig überlagert*, wenn $p^{-1}(U)$ die Vereinigung von disjunkten offenen Teilmengen $\{V_i\}_{i \in I}$ ist, mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung von p auf jede Teilmenge V_i ein Homöomorphismus ist.
- (2) Wir sagen f ist eine *Überlagerung*, wenn es zu jedem $x \in B$ eine offene Umgebung U gibt, welche gleichmäßig überlagert ist.

Wir betrachten jetzt mehrere Beispiele von Überlagerungen, manche davon haben wir auch schon früher gesehen

- (a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z} &\mapsto \mathbb{R}^n \\ (v, k) &\mapsto v \end{aligned}$$

ist eine Überlagerung. In der Tat, jede Teilmenge von \mathbb{R}^n ist gleichmäßig überlagert.

- (b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ \varphi &\mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

ist eine Überlagerung. In der Tat, sei $P = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \in S^1$, wir betrachten dann

$$U := \{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \mid \alpha \in (\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2})\}.$$

Dann ist

$$p^{-1}(U) := \underbrace{\cup_{i \in \mathbb{Z}} (\varphi - \frac{\pi}{2} + i, \varphi + \frac{\pi}{2} + i)}_{=: V_i},$$

und für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung von p auf $V_i \rightarrow U$ ein Homöomorphismus.

(c) Wir betrachten

$$H := \{(r \cos(t), r \sin(t), t) \mid r \in (1, 2) \text{ und } t \in \mathbb{R}\}$$

$$R := \{(r \cos(t), r \sin(t)) \mid r \in (1, 2) \text{ und } t \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} p: H &\rightarrow B \\ (r \cos(t), r \sin(t), t) &\mapsto (r \cos(t), r \sin(t)) \end{aligned}$$

eine Überlagerung. Diese wird in Abbildung 14 illustriert. Der Beweis ist ähnlich wie in Beispiel (b).

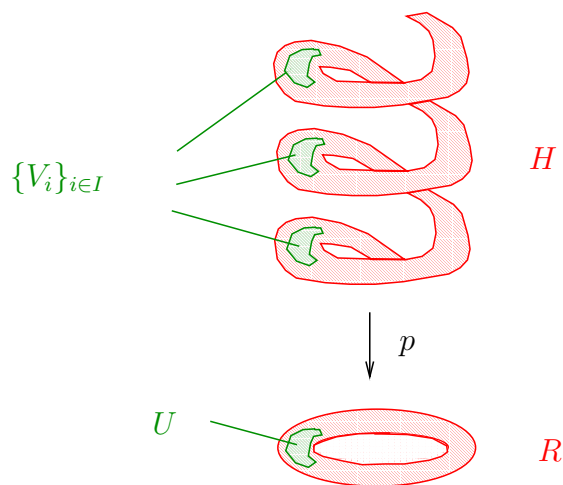


ABBILDUNG 14. Schematisches Bild der Überlagerung $p: H \rightarrow R$.

(d) Die Abbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \\ x &\mapsto x + \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

ist eine Überlagerung. In der Tat, denn sei

$$[x] = [(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n.$$

Wir betrachten

$$W := \{(y_1, \dots, y_n) \mid |y_i - x_i| < \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}^n$$

und wir setzen $V := p(W)$. Dann ist V eine offene Umgebung von $[x]$, nachdem p eine offene Abbildung ist (siehe Lemma 5.2).

Dann ist

$$p^{-1}(W) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} (W + i),$$

und für jedes i ist die Einschränkung von p auf $W + i \subset \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus.

- (e) In Übungsblatt 7 werden wir sehen, dass für jedes n die Abbildung³⁰

$$\begin{aligned} p: S^n &\rightarrow \mathbb{R}P^n = S^n/x \sim -x \\ x &\mapsto \{x, -x\} \end{aligned}$$

eine Überlagerung ist.

- (f) Wir betrachten \mathbb{R}^2 und es sei

$$\mathcal{B} := \{(a, b) \times y \mid a, b, y \in \mathbb{R}\}.$$

(D.h. die Mengen in \mathcal{B} bestehen aus offenen Intervallen in den Geraden $\mathbb{R} \times y$, $y \in \mathbb{R}$.) Dann besitzt \mathcal{B} die Basiseigenschaft und wir betrachten in diesem Beispiel die von \mathcal{B} erzeugte Topologie \mathbb{R} auf \mathbb{R}^2 . Dann werden wir in den Übungen sehen, dass

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) &\rightarrow (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie}) \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

eine Überlagerung ist.

In Übungsblatt 7 werden wir folgendes Lemma beweisen:

Lemma 9.1. *Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung, wobei B ein zusammenhängender topologischer Raum ist. Nehmen wir an, es gibt ein $b \in B$, so dass $p^{-1}(b)$ eine endliche Menge von Punkten ist, dann gilt*³¹

$$\#p^{-1}(b) = \#p^{-1}(c) \text{ für alle } b, c \in B.$$

Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung eines zusammenhängenden topologischen Raums ist. Wenn es ein $x \in B$ gibt, so dass $p^{-1}(x)$ eine Menge von n Punkten ist, dann sagen wir, dass p eine n -fache Überlagerung von B ist. Es folgt aus Lemma 9.1, dass diese Definition nicht von der Wahl von x abhängt.

Beispiel. Wir betrachten $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ als Teilmenge von \mathbb{C} , dann ist

$$\begin{aligned} p: S^1 &\rightarrow S^1 \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

³⁰Wenn wir schreiben $S^n/x \sim -x$, dann meinen wir wirklich die kleinste Äquivalenzrelation auf S^n für die gilt $x \sim -x$ für alle $x \in S^n$.

³¹Für eine endliche Menge M bezeichnen wir hierbei mit $\#M$ die Anzahl der Elemente.

eine n -fache Überlagerung. In der Tat, denn sei $z = e^{2\pi i\varphi} \in S^1$ gegeben, dann hat

$$U := \{e^{2\pi i\psi} \mid \psi \in (\varphi - \frac{1}{2}, \varphi + \frac{1}{2})\}$$

die gewünschte Eigenschaft. In der Tat, denn dann ist

$$p^{-1}(U) = \cup_{j=1}^k \underbrace{\{e^{2\pi i\psi} \mid \psi \in (\frac{1}{n}(\varphi - \frac{1}{2}) + \frac{k}{n}, \frac{1}{n}(\varphi + \frac{1}{2}) + \frac{k}{n})\}}_{=:V_j},$$

und die Einschränkung von p auf jede Menge V_j ist ein Homöomorphismus.

Ein besonders wichtiges Beispiel für Überlagerungen ist durch diskrete Gruppenoperationen gegeben. Wir fassen dies in einem Lemma zusammen:

Lemma 9.2. *Es sei X ein topologischer Raum zusammen mit einer diskreten stetigen Operation durch eine Gruppe G . Dann ist die kanonische Projektion $p: X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung.*

Dieses Lemma impliziert insbesondere, dass die Beispiele (d) und (e) Überlagerungen sind. Man kann es auch verwenden, um zu zeigen, dass die Beispiele (b) und (c) Überlagerungen sind.

Beweis. ³² Es G eine Gruppe, welche diskret auf einem topologischen Raum X operiert. Es sei nun $[x] \in X/G$. Nachdem die Gruppenoperation diskret ist, gibt es eine offene Umgebung V von $x \in X$, so dass

$$V \cap gV = \emptyset \text{ für alle } g \neq e.$$

Wir setzen $U := p(V)$. Dann ist $p^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von den offenen Teilmengen ³³ $gV, g \in G$. Die Abbildung p , eingeschränkt auf eine Teilmenge gV , ist eine stetige, bijektive³⁴ Abbildung $gV \rightarrow U$, welche nach Lemma 5.2 zudem offen ist. Die Abbildung ist daher ein Homöomorphismus. Wir sehen also, dass U gleichmäßig überlagert ist. Wir haben damit bewiesen, dass die kanonische Projektion $p: X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung ist. \square

Wir sagen eine Abbildung $f: X \rightarrow B$ zwischen topologischen Räumen ist ein *lokaler Homöomorphismus*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt, so dass die Einschränkung von f auf U ein Homöomorphismus ist.

³²Beim durcharbeiten des Beweises kann es hilfreich sein beispielsweise Beispiel (d) im Hinterkopf zu behalten.

³³Warum folgt aus $V \cap gV = \emptyset$ für alle $g \neq e$, dass $gV \cap hV = \emptyset$ für alle $g \neq h$.

³⁴Warum ist die Abbildung bijektiv?

Folgender Satz wird in Übungsblatt 7 bewiesen:

Satz 9.3. *Es sei $f: X \rightarrow A$ eine Überlagerung. Dann gilt:*

- (1) *f ist ein lokaler Homöomorphismus,*
- (2) *für jedes $U \subset A$ ist die Einschränkung von p auf $p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine Überlagerung.*
- (3) *Es sei $g: Y \rightarrow B$ eine weitere Überlagerungen. Dann ist*

$$\begin{aligned} f \times g: X \times Y &\rightarrow A \times B \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

eine Überlagerung.

Die Tatsache, dass eine Überlagerung $p: X \rightarrow B$ ein lokaler Homöomorphismus ist besagt insbesondere, dass jeder Punkt in X eine Umgebung hat, welche homöomorph zu der Umgebung eines Punktes in B ist. Aus den Definitionen folgt nun leicht folgendes Lemma:

Lemma 9.4. *Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit B , dann ist auch X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

9.2. Das Hochheben von Wegen.

Definition. Es sei $p: X \rightarrow B$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und es sei $f: [a, b] \rightarrow B$ ein Weg. Es sei $x \in X$ ein Punkt mit $p(x) = f(a)$. Eine Weg $g: [a, b] \rightarrow X$ heißt eine *Hochhebung* von f zum Anfangspunkt x , wenn $g(a) = x$ und wenn $p \circ g = f$, d.h. wenn das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Beispiel. (1) Wir betrachten

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f: [0, b] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(2t), \sin(-2t)), \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} g: [0, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto -2t \end{aligned}$$

eine Hochhebung von f zum Anfangspunkt 0. Wenn $b = \pi$, dann ist f eine Schleife in $(S^1, 1)$, aber die Hochhebung ist keine Schleife in $(\mathbb{R}, 0)$.

- (2) In Abbildung 15 illustrieren wir das Hochheben eines Weges in der Überlagerung $p: H \rightarrow R$, welche wir im vorherigen Kapitel studiert hatten.

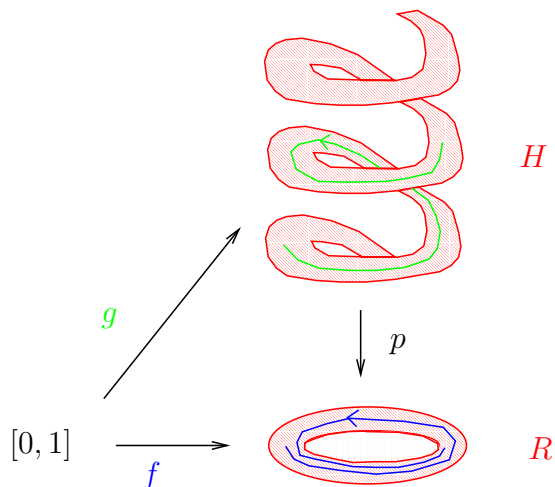


ABBILDUNG 15. Schematisches Bild einer Hochhebung eines Weges.

Satz 9.5. (Existenz- und Eindeutigkeitsatz für das Hochheben von Wegen) *Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung. Es sei $f: [0, 1] \rightarrow B$ ein Weg. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ mit $p(x) := f(0)$ genau eine Hochhebung $g: [0, 1] \rightarrow X$ mit Anfangspunkt x .*

Beweis. Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung, es sei $f: [0, 1] \rightarrow B$ ein Weg und es sei $x \in X$ mit $p(x) := f(0)$.

(Existenz). Wir zeigen zuerst die Existenz einer Hochhebung von f zum Anfangspunkt x . Wir betrachten

$$T := \left\{ s \in [0, 1] \mid \begin{array}{l} \text{es gibt eine Hochhebung von } f|_{[0,s]} \\ \text{zum Anfangspunkt } x \end{array} \right\}$$

Man beachte, dass T nichtleer ist, da 0 die gewünschte Eigenschaft besitzt. Wir setzen $t := \sup(T)$. Wir wollen zeigen, dass $t = 1$, und dass $t \in T$. Es genügt zu zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $[t, t + \varepsilon) \cap [0, 1]$ noch in T liegt.

Wir betrachten $b := f(t)$ und wir bezeichnen mit $g: [0, t) \rightarrow X$ die Hochhebung von f zum Anfangspunkt x . Nachdem p eine Überlagerung ist existiert eine offene Umgebung U von $b \in B$, welche gleichmäßig überlagert ist. Zur Erinnerung, dies bedeutet, dass $p^{-1}(U)$ die Vereinigung von disjunkten offenen Teilmengen $\{V_i\}_{i \in I}$ ist, mit der

Eigenschaft, dass die Einschränkung von p auf jede Teilmenge V_i ein Homöomorphismus ist.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass $t > 0$. Nachdem U offen ist, und nachdem f stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f((t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [0, 1]) \subset U$ und $(t-\varepsilon, t] \subset [0, 1]$. Es gibt nun genau ein $i \in I$, so dass $g(t-\frac{\varepsilon}{2}) \in V_i$. Wir bezeichnen mit $p_i: V_i \rightarrow U$ den Homöomorphismus, der durch die Einschränkung von p auf V_i gegeben ist.

Wir betrachten nun

$$h: [0, t + \varepsilon) \cap [0, 1] \rightarrow X$$

$$s \mapsto \begin{cases} g(s), & \text{wenn } s \in [0, t - \frac{\varepsilon}{2}], \\ p_i^{-1}(f(s)), & \text{wenn } s \in (t - \frac{\varepsilon}{2}, t + \varepsilon) \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Mithilfe von Lemma 7.1 sieht man nun leicht, dass dies in der Tat eine Hochhebung von f ist.

Wir betrachten nun noch den Fall, dass $t = 0$. Der Beweis ist ganz ähnlich zum Fall $t > 0$. Nachdem U offen ist, und nachdem f stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f([0, \varepsilon)) \subset U$. Es gibt nun genau ein $i \in I$, so dass $x \in V_i$. Wir bezeichnen mit $p_i: V_i \rightarrow U$ den Homöomorphismus, der durch die Einschränkung von p auf V_i gegeben ist. Wir betrachten nun

$$h: [0, t + \varepsilon) \cap [0, 1] \rightarrow X$$

$$s \mapsto p_i^{-1}(f(s)).$$

Dies ist eine Hochhebung von f .

(Eindeutigkeit) Der Beweis der Eindeutigkeit der Hochhebung ist ähnlich zum Beweis der Existenz. Nehmen wir also an, es seien $g, h: [0, 1] \rightarrow X$ Hochhebungen von f zum Anfangspunkt x . Wir betrachten

$$T := \{s \in [0, 1] \mid g(t) = h(t) \text{ für alle } t \in [0, s]\}.$$

Man beachte, dass $0 \in T$, d.h. T ist nichtleer. Wir setzen $t := \sup(T)$. Wir wollen zeigen, dass $t = 1$, und dass $t \in T$. Es genügt wiederum zu zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $[t, t + \varepsilon) \cap [0, 1]$ noch in T liegt.

Wir betrachten $b := f(t)$. Nachdem p eine Überlagerung ist existiert eine offene Umgebung U von $b \in B$, welche gleichmäßig überlagert.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass $t > 0$. Nachdem U offen ist, und nachdem f stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f((t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [0, 1]) \subset U$ und $(t-\varepsilon, t] \subset [0, 1]$. Es gibt nun genau ein $i \in I$, so dass $g(t-\frac{\varepsilon}{2}) \in V_i$. Wir bezeichnen mit $p_i: V_i \rightarrow U$ den Homöomorphismus, der durch die Einschränkung von p auf V_i gegeben ist.

Nachdem $g(t-\frac{\varepsilon}{2}) = h(t-\frac{\varepsilon}{2})$ folgt, dass auch $h(t-\frac{\varepsilon}{2}) \in V_i$. Dann folgt aber auch, dass $g(s) \in V_i$ und $h(s) \in V_i$ für alle $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap I$.

Es folgt aus den Definitionen, dass

$$g(s) = p_i^{-1}(f(s)) \text{ und } h(s) = p_i^{-1}(f(s))$$

für alle $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap [0, 1]$. D.h. $[t, t + \varepsilon) \cap [0, 1]$ liegt auch in T .

Der Fall, $t = 0$ wird ganz analog bewiesen. Wir überlassen diesen Fall als freiwillige Übungsaufgabe. \square

9.3. Das Hochheben von Homotopien. Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass sich Wege immer hochheben lassen. In diesem Kapitel wollen wir der Frage nachgehen, ob die Hochhebungen von homotopen Wegen auch weiterhin homotop sind.

Wir erweitern dazu den Begriff einer Hochhebung im Folgenden etwas.

Definition. Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung und es sei $f: Y \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Eine stetige Abbildung $\tilde{f}: Y \rightarrow X$ heißt eine *Hochhebung von f* , wenn $p \circ \tilde{f} = f$, d.h. wenn das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Satz 9.6. *Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung und $f: Y \times [0, 1] \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Es sei $\tilde{f}: Y \times 0 \rightarrow X$ eine Hochhebung von $f|_{Y \times 0}$. Es sei*

$$\tilde{f}: Y \times [0, 1] \rightarrow X$$

die eindeutig bestimmte Abbildung die gegeben ist in dem wir für jedes $y \in Y$ den Weg $t \mapsto f(y, t)$ zum Anfangspunkt $\tilde{f}(y)$ hochheben. Dann ist die Abbildung $\tilde{f}: Y \times [0, 1] \rightarrow X$ stetig.

Bevor wir Satz 9.6 beweisen formulieren wir noch folgendes Lemma, welches ganz ähnlich wie Lemma 6.2 bewiesen wird.

Lemma 9.7. *Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung, es sei $U \subset B$ eine gleichmäßig überlagerte offene Menge. Es ist also $p^{-1}(U)$ die Vereinigung von disjunkten offenen Teilmengen $\{V_i\}_{i \in I}$ ist, mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung von p auf jede Teilmenge V_i ein Homöomorphismus ist. Es sei $f: Y \rightarrow U \subset B$ eine stetige Abbildung und es sei $\tilde{f}: Y \rightarrow p^{-1}(U) \subset X$ eine Hochhebung von f . Wenn Y zusammenhängend ist, dann gibt es ein $i \in I$, so dass $\tilde{f}(Y) \subset V_i$.*

Wir können jetzt Satz 9.6 beweisen.

Beweis von Satz 9.6. Wir beginnen mit folgenden Definitionen:

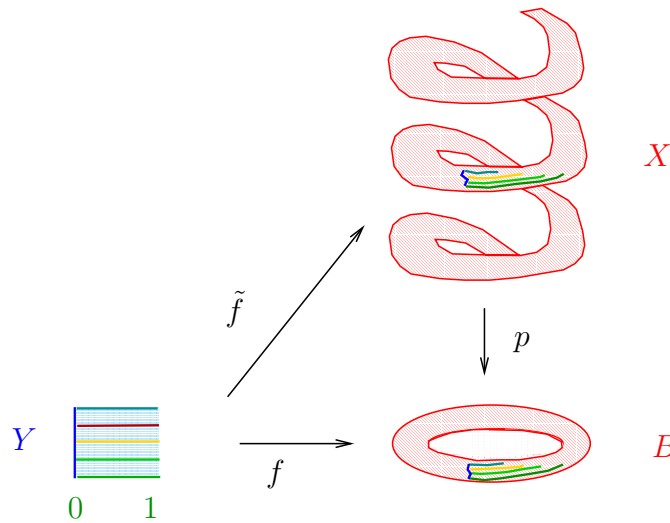


ABBILDUNG 16. Schematisches Bild für die Hochhebung einer Homotopie.

- (1) Eine *gute Menge* $U \times I$ besteht aus einer Menge $U \subset Y$ und einem offenen Intervall ³⁵ $I \subset [0, 1]$, so dass $f(U, I)$ in einer gleichmäßig überlagerten Teilmenge von B liegt.
- (2) Wir sagen eine gute Menge $U \times I$ ist *sehr gut*, wenn es ein $t \in I$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} U &\rightarrow X \\ x &\mapsto \tilde{f}(x, t) \end{aligned}$$

stetig ist.

- (3) Es sei $y \in Y$ und $t \in [0, 1]$. Eine (*sehr*) *gute Umgebung* $U \times I$ ist eine (sehr) gute Menge $U \times I$ mit $y \in U$ und $t \in I$.

Es folgt leicht³⁶ aus der Stetigkeit von f und der Überlagerungseigenschaft von $p : X \rightarrow B$, dass jeder Punkt (y, t) eine gute Umgebung besitzt.

Behauptung. Es sei $U \subset Y$ offen und $I \subset [0, 1]$ ein offenes Intervall, so dass $U \times I$ sehr gut ist. Dann ist \tilde{f} stetig auf ganz $U \times I$.

Es sei $U \subset Y$ offen und $I \subset [0, 1]$ ein Intervall, so dass $U \times I$ gut ist, d.h. es gibt ein $t \in T$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} U &\rightarrow X \\ y &\mapsto \tilde{f}(y, t) \end{aligned}$$

³⁵Wir sagen $A \subset [0, 1]$ ist ein offenes Intervall, wenn A ein Intervall ist, und wenn A offen bezüglich der Teilraumtopologie von $[0, 1]$ ist. D.h. $A = (a, b)$, oder $A = [0, a)$ oder $A = (b, 1]$ oder $A = [0, 1]$ für $a, b \in [0, 1]$.

³⁶Warum folgt dies?

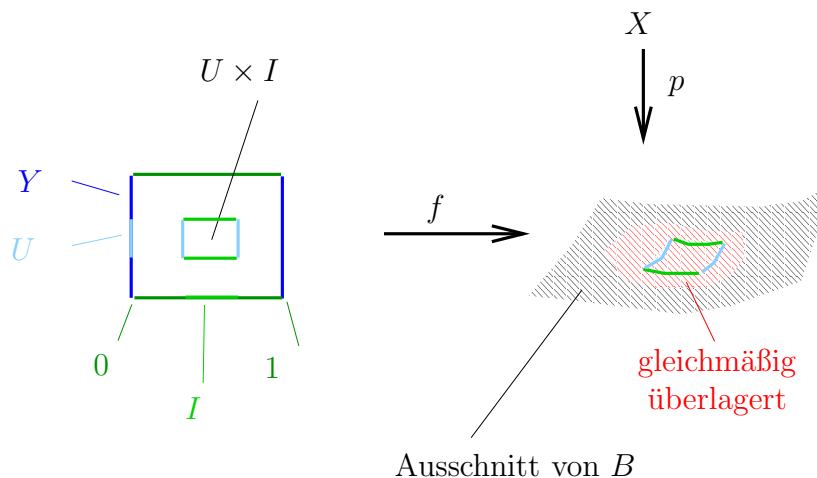


ABBILDUNG 17. Schematisches Bild einer guten Umgebung.

stetig ist.

Es genügt die Aussage für die Zusammenhangskomponenten von U zu zeigen. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass U selber schon zusammenhängend ist.

Nach Voraussetzung existiert eine gleichmäßig überlagerte Teilmenge $W \subset X$, so dass $f(U \times I) \subset W$. Nachdem $U \times I$ zusammenhängend ist, können wir auch o.B.d.A. annehmen, dass W zusammenhängend ist. Nachdem W gleichmäßig überlagert ist, ist $p^{-1}(W)$ die Vereinigung von disjunkten offenen Teilmengen $\{V_i\}_{i \in I}$, mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung von p auf jede Teilmenge V_i ein Homöomorphismus ist.

Wir wählen nun ein $y \in U$. Es sei $i \in I$, so dass $\tilde{f}(y, t) \in V_i$. Wir werden jetzt zeigen, dass $\tilde{f}(U \times I) \subset V_i$. In der Tat, nachdem W zusammenhängend ist und nachdem $z \mapsto \tilde{f}(z, t)$ stetig auf U ist, folgt aus Lemma 9.7, dass $\tilde{f}(z, t) \in V_i$ für alle $z \in U$. Nachdem zudem für jedes $z \in W$ die Abbildung $s \mapsto \tilde{f}(z, s)$ auf dem Intervall I stetig ist, folgt ebenfalls aus Lemma 9.7, dass $\tilde{f}(z, s) \in V_i$ für alle $z \in U$ und alle $s \in I$.

Wir bezeichnen mit $p_i: V_i \rightarrow W$ den Homöomorphismus, der durch die Einschränkung von p auf V_i gegeben ist. Nachdem $\tilde{f}(U \times I) \subset V_i$ folgt, dass auf $U \times I$ die Abbildung \tilde{f} gegeben ist durch $\tilde{f} = p_i^{-1} \circ f$. Insbesondere ist \tilde{f} stetig auf ganz $U \times I$. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Es sei $y \in Y$. Wir betrachten

$T_y := \{t \in [0, 1] \mid \text{es gibt eine sehr gute Umgebung } U \times I \text{ von } (y, t)\}$.

Aus der vorherigen Behauptung folgt, dass \tilde{f} auf jeder sehr guten Umgebung stetig ist. Es genügt nun also zu zeigen, dass $T_y = [0, 1]$ für alle $y \in Y$. Denn dann besitzt jeder Punkt (y, t) eine Umgebung, auf der \tilde{f} stetig ist.³⁷

Sei also $y \in Y$. Wir schreiben $T := T_y$. Nachdem $[0, 1]$ zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen, dass $T \neq \emptyset$, dass T offen ist, und dass T abgeschlossen ist.

- (1) Nachdem \tilde{f} auf $Y \times 0$ stetig ist, und nachdem $(t, 0)$ eine gute Umgebung besitzt, folgt dass $0 \in T$.
- (2) Es ist offensichtlich, dass T offen ist. In der Tat, denn ist $U \times I$ eine sehr gute Umgebung von (y, t) , dann gibt es auch ein $\varepsilon > 0$, so dass $U \times I$ eine sehr gute Umgebung für alle (y, s) mit $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ ist.
- (3) Es verbleibt zu zeigen, dass T auch abgeschlossen ist. Sei also $t \in \overline{T}$. Wie oben schon angemerkt, existiert eine gute Umgebung $U \times I$ von (y, t) . Nachdem $t \in \overline{T}$ existiert ein $s \in T \cap I$. Nachdem $s \in T$ folgt aus der obigen Behauptung, dass es eine offene Menge V gibt, so dass

$$\begin{aligned} V &\mapsto X \\ x &\mapsto \tilde{f}(s, x) \end{aligned}$$

stetig ist. Dann ist aber $(U \cap V) \times I$ eine sehr gute Umgebung von (y, t) .

□

Korollar 9.8. *Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung und es seien $f, g: [0, 1] \rightarrow B$ zwei homotope Wege. Es seien $\tilde{f}, \tilde{g}: [0, 1] \rightarrow X$ zwei Hochhebungen mit dem gleichen Anfangspunkt. Dann besitzen \tilde{f} und \tilde{g} den gleichen Endpunkt und sie sind homotope Wege.*

Beweis. Wir schreiben $P := f(0) = g(0)$ und $Q := f(1) = g(1)$. Wir bezeichnen mit $\tilde{P} := \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ den gemeinsamen Anfangspunkt der Hochhebungen und wir schreiben $\tilde{Q} := \tilde{f}(1)$. Es sei

$$\begin{aligned} H: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow B \\ (t, s) &\mapsto H(t, s) \end{aligned}$$

³⁷Wir verwenden also implizit folgende Aussage: Es sei $X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung mit der Eigenschaft, dass $f|_{U_i}$ stetig ist für alle $i \in I$. Dann ist auch f stetig. Warum gilt diese Aussage?

eine Homotopie zwischen den Wegen f und g . Zur Erinnerung, H ist also eine stetige Abbildung so dass

$$H(t, 0) = f(t) \text{ und } H(t, 1) = g(t) \text{ f\"ur alle } t \in [0, 1],$$

und so dass

$$H(0, s) = P \text{ und } H(1, s) = Q \text{ f\"ur alle } s \in [0, 1].$$

Auf $0 \times [0, 1]$ betrachten wir die Hochhebung \tilde{H} von H , welche gegeben ist durch $\tilde{H}(0, s) = \overline{P}$. Zudem bezeichnen wir mit $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ die eindeutig bestimmte Abbildung, welche gegeben ist in dem wir f\"ur jedes $s \in [0, 1]$ den Weg $t \mapsto \tilde{H}(t, s)$ mit dem Anfangspunkt \tilde{P} hochheben. Nach Satz 9.6 ist \tilde{H} stetig.

Zudem folgt aus der Eindeutigkeit der Hochhebung von Wegen, dass

$$\tilde{H}(t, 0) = \tilde{f}(t) \text{ und } \tilde{H}(t, 1) = \tilde{g}(t) \text{ f\"ur alle } t \in [0, 1],$$

F\"ur jedes $s \in [0, 1]$ gilt $p(\tilde{H}(1, s)) = Q$. Da \tilde{H} stetig ist, erhalten wir also eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow p^{-1}(Q) \subset X \\ s &\mapsto \tilde{H}(1, s). \end{aligned}$$

Nachdem $[0, 1]$ zusammenh\"angend ist folgt aus Lemma 9.7, angewandt auf eine gleichm\"a\ssig \u00berlagerte Umgebung U von Q , dass $\tilde{H}(1, s) = \tilde{Q}$ f\"ur alle $s \in [0, 1]$. Insbesondere gilt, $\tilde{f}(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{Q} = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{g}(1)$. Es folgt also, dass \tilde{H} eine Homotopie zwischen den Wegen \tilde{f} und \tilde{g} ist. \square

Es $p: X \rightarrow B$ eine Abbildung zwischen topologischen R\"aumen und es sei $x \in X$ und $b \in B$. Wir sagen $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ ist *eine \u00berlagerung von punktierten topologischen R\"aumen*, wenn $p: X \rightarrow B$ eine \u00berlagerung ist, und wenn $p(x_0) = b_0$.

Korollar 9.9. *Es sei $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine \u00berlagerung von punktierten topologischen R\"aumen. Dann ist*

$$p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$$

eine injektive Abbildung.

Beweis. Es sei $g \in \pi_1(X, x_0)$ mit $p_*(g) = e$. Wir repr\"asentieren g durch eine Schleife f in (X, x_0) . Dann ist $p(f)$ eine Schleife in (B, b_0) , welche null-homotop ist, d.h. der Weg $p(f)$ ist homotop zur konstanten Schleife e_{b_0} .

Offensichtlich ist f eine Hochhebung von $p(f)$ mit Anfangspunkt x_0 und e_{x_0} ist eine Hochhebung von e_{b_0} mit Anfangspunkt x_0 . Nach

Korollar 9.8 ist dann der Weg f auch homotop zum Weg e_{x_0} , d.h. f ist null-homotop, und $g \in \pi_1(X, x_0)$ ist trivial. \square

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma, welches in den Übungen bewiesen wird.

Lemma 9.10. *Es sei $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen.*

- (1) *Es sei f eine Schleife in (B, b_0) . Wir bezeichnen mit \tilde{f} die Hochhebung von f zum Anfangspunkt x_0 . Dann gilt: \tilde{f} ist eine Schleife in (X, x_0) , genau dann, wenn $[f] \in p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$.*
- (2) *Wir nehmen nun an, dass X einfach zusammenhängend ist. Es seien f, g Schleifen in (B, b_0) und es seien \tilde{f}, \tilde{g} die Hochhebungen von f, g zum Anfangspunkt x_0 . Dann gilt: f und g sind homotope Wege, genau dann, wenn $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

9.4. Gruppenoperationen und Fundamentalgruppen.

Satz 9.11. *Es sei X ein wegzusammenhängender und einfach zusammenhängender topologischer Raum. Es sei G eine Gruppe, welche auf X diskret operiert, dann ist $\pi_1(X/G) \cong G$.*

Beweis. ³⁸ Wir wählen ein $x \in X$. Wir bezeichnen mit $p: X \rightarrow X/G$ die kanonische Projektionsabbildung. Nach Lemma 9.2 ist diese Abbildung eine Überlagerung. Wir betrachten folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: G &\mapsto \pi_1(X/G, [x]) \\ g &\mapsto [p(\text{Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } gx)]. \end{aligned}$$

Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Diese Abbildung ist wohl-definiert und ein Gruppenisomorphismus.

- (1) Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung wohl-definiert ist. Es sei also $g \in G$. Nachdem X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg von x nach gx . Es sei nun f ein beliebiger Weg in X von x nach gx . Nachdem $p(x) = [x] = [gx] = p(gx)$ ist also $p(f)$ eine Schleife in $(X/G, [x])$. Es sei nun f' ein weiterer Weg in X von x nach gx . Nachdem X einfach zusammenhängend ist, folgt aus Lemma 7.10, dass die Wege f und f' homotop in X sind. Indem wir diese Homotopie mithilfe von p auf X/G projizieren, sehen wir, dass $p(f)$ und $p(f')$ homotope Schleifen. Dies zeigt, dass die Abbildung wohl-definiert ist.

³⁸Es ist vielleicht hilfreich den Beweis zuerst für das Beispiel der Operation von \mathbb{Z}^n auf \mathbb{R}^n durchzulesen.

- (2) Wir zeigen nun, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Es seien also $g, h \in G$ und es seien k, l Wege von x nach gx beziehungsweise von x nach hx . Dann ist gl ein Weg von gx nach ghx und $k * gl$ ist ein Weg von x nach ghx . Es folgt, dass

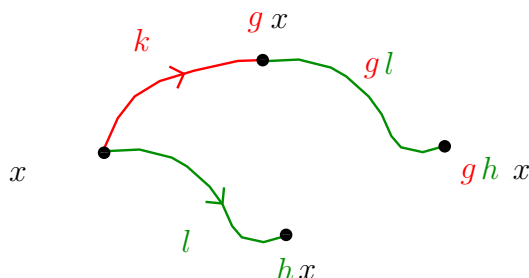


ABBILDUNG 18. Schematisches Bild für den Beweis, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

$$\begin{aligned} \Phi(gh) &= [p(k * gl)] = [p(k) * p(gl)] = [p(k) * p(l)] \\ &= [p(k)] \cdot [p(l)] \\ &= \Phi(g) \cdot \Phi(h). \end{aligned}$$

Bevor wir fortfahren erinnern wir daran, dass nach Lemma 9.2 die Projektionsabbildung $p : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung ist. Wir können also die Ergebnisse aus diesem Kapitel auf p anwenden.

- (3) Wir beweisen nun, dass Φ surjektiv ist. Wir wählen ein beliebiges Element $a \in \pi_1(X/G, [x])$ und repräsentieren es durch eine Schleife f in $(X/G, [x])$. Nach Satz 9.5 existiert eine Hochhebung $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow X$ vom Weg f mit Anfangspunkt x . Dann gilt aber offensichtlich, dass $p(\tilde{f}) = f$. Insbesondere gilt für den Endpunkt von \tilde{f} , dass $p(\tilde{f}(1)) = [x]$, es folgt also, dass $\tilde{f}(1) = gx$ für ein $g \in G$. Wir haben also bewiesen, dass

$$\Phi(g) = [p(\text{Weg von } x \text{ nach } gx)] = [p(\tilde{f})] = [f] = a.$$

- (4) Wir zeigen nun zum Schluß, dass Φ injektiv ist. Es sei also $h \in G$ mit $\Phi(h) = e$. Es sei f ein Weg in X von x nach hx . Der Weg $p(f)$ ist eine Schleife in $(X/G, [x])$, welche null-homotop ist, d.h. $p(f)$ ist homotop zur konstanten Schleife $e_{[x]}$ in $(X/G, [x])$.

Eine Hochhebung von $p(f)$ ist natürlich durch f gegeben, und eine Hochhebung von $e_{[x]}$ ist offensichtlich durch e_x gegeben. Nach Korollar 9.8 haben diese denselben Endpunkt, es folgt also, dass $hx = x$, d.h. $h \in G$ ist trivial. Wir haben also damit bewiesen, dass Φ injektiv ist.

□

Wir wenden jetzt Satz 9.11 auf die Beispiele aus Kapitel 5 an, und erhalten folgendes Korollar:

Korollar 9.12.

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1) &= \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \\ \pi_1(n\text{-Torus}) &= \pi_1(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \cong \mathbb{Z}^n \\ \pi_1(\mathbb{R}P^n) &= \pi_1(S^n/\{\pm \text{id}\}) \cong \mathbb{Z}/2 \\ \pi_1(L(p, q)) &= \pi_1(S^3/\mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p. \end{aligned}$$

Wir haben also jetzt endlich bewiesen, dass es topologische Räume mit nichttrivialen Fundamentalgruppen gibt. Insbesondere sehen wir, dass S^2 nicht homöomorph zum Torus ist und wir sehen, dass die Räume $L(p, q)$ nicht homöomorph zur Sphäre S^3 sind.

Betrachten wir den Torus etwas genauer. Zur Erinnerung, der Torus ist definiert als ³⁹

$$T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = [0, 1] \times [0, 1]/(x, 0) \sim (x, 1) \text{ und } (0, y) \sim (1, y).$$

Aus dem Beweis von Satz 9.11 folgt, es gibt einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \pi_1(T, \{0, 0\}) \text{ wobei} \\ \Phi((1, 0)) &= x := \left[\begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]/\sim \\ t \mapsto (0, t) \end{array} \right] \text{ und} \\ \Phi((0, 1)) &= y := \left[\begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]/\sim \\ t \mapsto (t, 0) \end{array} \right] \end{aligned}$$

In der mehr anschaulichen Darstellung des Torus in Abbildung 19 entsprechen diese Schleifen der ‘Longitude’ und dem ‘Meridian’.

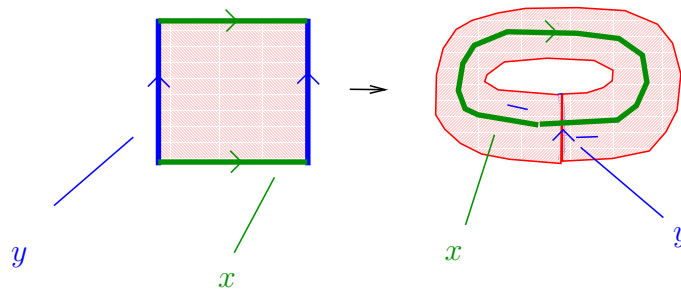


ABBILDUNG 19. Die zwei nicht-trivialen Schleifen auf dem Torus, welche die Fundamentalgruppe erzeugen.

³⁹Wenn wir hier das Gleichheitszeichen verwenden, dann ist das etwas großzügig. Es gibt einen kanonischen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und $T[0, 1] \times [0, 1]/\sim$, mithilfe dessen wir die beiden Räume identifizieren.

Wir betrachten jetzt auch noch $\mathbb{R}P^2 = S^2/x \sim -x$ und bezeichnen mit $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ die Projektion. Wir schreiben $Q := (1, 0, 0)$. Wir betrachten den folgenden Weg in S^2 :

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow S^2 \\ t &\mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0). \end{aligned}$$

Dies ist ein Weg von Q nach $-Q$. Insbesondere folgt aus dem Beweis von Satz 9.11, dass die Äquivalenzklasse von $p(f)$ genau das nicht-triviale Element von $\pi_1(\mathbb{R}P^2, p(Q))$ ist. Nachdem $\pi_1(\mathbb{R}P^2, p(Q)) \cong \mathbb{Z}/2$ besitzt $p(f)$ die Ordnung 2. Dies kann man auch ganz explizit sehen. Es ist

$$\begin{aligned} [p(f)][p(f)] &= [p(f) * p(f)] = [p(f) * p(-f)] \\ &= \left[p \left(\underbrace{\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow S^2 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) \end{aligned}}_{=:g} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Schleife g in (S^2, P) ist null-homotop (dies folgt aus der Berechnung von $\pi_1(S^2) = 0$, oder ganz explizit aus Lemma 7.7). Dann folgt aber auch, dass $p(f)$ null-homotop ist.

Wir sehen auch, dass S^1 nicht homöomorph zu der Scheibe D^2 ist, nachdem die Fundamentalgruppen nicht isomorph sind. Wir werden jetzt zeigen, dass wir noch stärkere Aussagen treffen können, wenn wir Fundamentalgruppen ‘nicht nur als Gruppen’ sondern als Funktoren betrachten.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Teilraum. Wir sagen A ist ein *Retrakt von X* , wenn es eine Retraktion $r : X \rightarrow A$ gibt, d.h. eine stetige Abbildung mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$.

Beispiel. (1) Jeder Punkt in \mathbb{R}^n ist ein Retrakt von \mathbb{R}^n .

(2) S^1 ist ein Retrakt von $D^2 \setminus \{0, 0\}$, in der Tat, die Abbildung

$$\begin{aligned} D^2 \setminus \{0, 0\} &\rightarrow S^1 \\ z &\mapsto \frac{z}{|z|} \end{aligned}$$

ist eine Retraktion. (Hierbei betrachten wir D^2 als Teilmenge von \mathbb{C} .)

(3) Die Menge S^1 ist kein Retrakt von D^2 . In der Tat, nehmen wir an, es gäbe eine Retraktion $r : D^2 \rightarrow S^1$. Wir bezeichnen mit $i : S^1 \rightarrow D^2$ die Inklusionsabbildung. Wir betrachten dann S^1 und D^2 mit dem Basispunkt 1 und betrachten dann folgendes

Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(D^2, 1) & \\
 i_* \nearrow & & \searrow r_* \\
 \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{(r \circ i)_*} & \pi_1(S^1, 1)
 \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert nachdem aus der Funktorialität der Fundamentalgruppen folgt, dass $r_* \circ i_* = (r \circ i)_*$. Nachdem r eine Retraktion ist, folgt, dass $r \circ i = \text{id}_{S^1}$, d.h. $(r \circ i)_* = (\text{id}_{S^1})_*$ ist die Identitätsabbildung auf $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Die untere Abbildung ist also ein Isomorphismus, aber die obere Abbildung faktorisiert sich durch die triviale Gruppen, d.h. die Verknüpfung von i_* und r_* kann kein Isomorphismus von \mathbb{Z} sein. Wir haben damit einen Widerspruch erhalten.

Das gleiche Argument wie im Beispiel zeigt auch folgendes Lemma:

Lemma 9.13. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Retrakt von X . Es sei $a \in A$. Dann ist die induzierte Abbildung $\pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ injektiv.*

9.5. Überlagerungstheorie. Es sei $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen. Wenn $f: [0, 1] \rightarrow B$ ein Weg mit Anfangspunkt b_0 ist, dann haben wir in Satz 9.5 gesehen, dass wir f zu genau einem Weg $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow X$ mit Anfangspunkt x_0 hochheben können.

Man kann sich nun allgemeiner fragen, welche Abbildungen von punktierten topologischen Räumen $(Z, z_0) \rightarrow (B, b_0)$ sich hochheben lassen. Hierzu gibt es praktischerweise eine vollständige Antwort für ‘lokal wegzusammenhängende’ Räume.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen X ist *lokal wegzusammenhängend*, wenn es zu jeder Umgebung U eines Punktes x eine Umgebung V von x gibt, welche wegzusammenhängend ist.

Beispiel. (1) Der topologische Raum \mathbb{R}^n ist lokal wegzusammenhängend, denn jede Umgebung U eines Punktes x enthält eine ε -Kugel um x , welche natürlich wegzusammenhängend ist.

(2) Jede n -Mannigfaltigkeit N ist lokal wegzusammenhängend. In der Tat, es sei $x \in N$ ein Punkt und U eine Umgebung. Notfalls durch Einschränkung kann man annehmen, dass es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n gibt. Wir können damit den Fall einer n -Mannigfaltigkeit auf den Fall (1) zurückführen.

(3) Wir betrachten

$$X := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \times [-1, 1],$$

mit der Teilraumtopologie. Dann ist X wegzusammenhängend aber nicht lokal wegzusammenhängend. In der Tat, betrachten wir den Punkt $(0, 0) \in X$ und $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap X$, dann ist keine Umgebung V von $(0, 0)$, welche in U enthalten ist, wegzusammenhängend.

Wir können jetzt folgenden Satz formulieren:

Satz 9.14. *Es sei $\pi : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen. Es sei Z ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum und $f : (Z, z_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine stetige Abbildung. Dann existiert eine Hochhebung $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ von punktierten topologischen Räumen genau dann, wenn*

$$\text{Im}(f_* : \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)) \subset \text{Im}(p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)).$$

Wenn es eine Hochhebung gibt, dann gibt es zudem genau eine Hochhebung.

Wir können die Aussage des Satz auch wie folgt formulieren:

$$\begin{array}{ccc} & (X, x_0) & \Leftrightarrow \text{Im}(f_*) \subset \text{Im}(p_*) \\ \text{es gibt } \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_0) \end{array}$$

Beispiel. Es sei $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen und es sei $f : (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine stetige Abbildung. Der Raum S^n ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum. Nachdem $n \geq 2$ folgt, dass $\pi_1(S^n) = 0$, insbesondere folgt, dass

$$f_*(\pi_1(S^n, s_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)) = \{0\} \subset p_*(\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)).$$

Es folgt also aus Satz 9.14, dass es eine eindeutig bestimmte Hochhebung $\tilde{f} : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ von $f : (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$ gibt.

Wir skizzieren den Beweis des Satzes, ein ausführlicher Beweis kann in Kapitel 9.5 von Jänich: Topologie gefunden werden.

Beweisskizze. Es sei $\pi : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen. Es sei Z ein wegzusammenhängender

und lokal wegzusammenhängender Raum und $f: (Z, z_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine stetige Abbildung.

(A) Nehmen wir zuerst dann, dass eine Hochhebung $\tilde{f}: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ existiert. Wir erhalten dann folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & & (X, x_0) . \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_0) \end{array}$$

Aus der Funktorialitätseigenschaft der Fundamentalgruppe folgt, dass $f_* = (p \circ \tilde{f})_* = p_* \circ \tilde{f}_*$, d.h. das folgende Diagramm ist ebenfalls kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(X, x_0) . \\ & \nearrow \tilde{f}_* & \downarrow p_* \\ \pi_1(Z, z_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

Es folgt also, dass

$$\text{Im}(f_*) = \text{Im}((p \circ \tilde{f})_*) = \text{Im}(p_* \circ \tilde{f}_*) \subset \text{Im}(p_*).$$

(B) Nehmen wir nun an, dass

$$\text{Im}(f_*: \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)) \subset \text{Im}(p_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)).$$

Wir konstruieren nun eine Abbildung $\tilde{f}: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ wie folgt.

Es sei $z \in Z$ beliebig. Nachdem Z wegzusammenhängend ist können wir einen Weg $\alpha: [0, 1] \rightarrow Z$ finden mit $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha(1) = z$. Nach Satz 9.5 können wir den Weg $f \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow B$ zu einem Weg $\widetilde{(f \circ \alpha)}: [0, 1] \rightarrow X$ mit Anfangspunkt x_0 hochheben. Wir definieren nun

$$\tilde{f}(z) := \widetilde{(f \circ \alpha)}(1).$$

Wir müssen zeigen, dass $\widetilde{(f \circ \alpha)}(z)$ wohl-definiert ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Weges α . Es sei also $\beta: [0, 1] \rightarrow Z$ ein weiterer Weg mit $\beta(0) = z_0$ und $\beta(1) = z_1$. Der Weg $\alpha * \overline{\beta}$ ist dann eine Schleife in (Z, z_0) . Nach Voraussetzung liegt $[(f \circ \alpha) * (f \circ \overline{\beta})] = f_*([\alpha * \overline{\beta}])$ im Bild von $p_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$. Dies bedeutet nach Lemma 9.10, dass die Hochhebung von $(f \circ \alpha) * (f \circ \overline{\beta})$ zum Anfangspunkt x_0 eine Schleife

in (X, x_0) ist. Es folgt, dass ⁴⁰

$$\begin{aligned}
 & \widetilde{(f \circ \alpha)}(t = 1) \\
 = & \text{(Hochhebung von } f \circ \alpha \text{ zum Anfangspunkt } x_0)(t = 1) \\
 = & \text{(Hochhebung von } (f \circ \alpha) * \overline{(f \circ \beta)} * (f \circ \beta) \text{ zum Anfangspunkt } x_0)(t = 1) \\
 = & \text{(Hochhebung von } f \circ \beta \text{ zum Anfangspunkt } x_0)(t = 1) \\
 = & \widetilde{(f \circ \beta)}(t = 1).
 \end{aligned}$$

Wir haben also nun gezeigt, dass die Abbildung \tilde{f} wohl-definiert ist.

Es ist offensichtlich, dass $p(\tilde{f}(z)) = p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = z$. Es verbleibt also zu zeigen, dass die Abbildung \tilde{f} stetig ist. Wir werden aus Zeitgründen den Beweis dazu nicht ausführen. Der Beweis dazu kann z.B. in Kapitel 9.5 von Jänich: Topologie gefunden werden. Man beachte, dass im Beweis der Stetigkeit verwendet wird, dass Z ein lokal wegzusammenhängender Raum ist.

Zum Schluß merken wir noch an, dass die Eindeutigkeit der Hochhebung aus dem Wegzusammenhang von Z und der Eindeutigkeit der Hochhebung von Wegen folgt. \square

Es sei $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ nun wiederum eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen. In Korollar 9.9 haben wir gesehen, dass

$$p_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

eine injektive Abbildung ist. Wir können also $\pi_1(X, x_0)$ als Untergruppe von $\pi_1(B, b_0)$ auffassen.

Man kann sich nun fragen, ob es zu jeder Untergruppe von $\pi_1(B, b_0)$ auch eine dazugehörige Überlagerung gibt. Wir werden nun sehen, dass dies der Fall ist, wenn der topologische Raum B lokal wegzusammenhängend und ‘semilokal einfach zusammenhängend’ ist.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen X ist *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass jede in U verlaufende Schleife in x_0 null-homotop in X ist.

⁴⁰Hierbei verwenden wir folgende Tatsache, welche direkt aus den Definitionen und Satz 9.5 folgt: Es sei γ ein Weg in B mit Anfangspunkt b_0 und es sei δ ein weiterer Weg in B mit $\gamma(1) = \delta(0)$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\gamma}$ die Hochhebung von γ mit Anfangspunkt x_0 . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & \text{(Hochhebung von } \gamma * \delta \text{ zum Anfangspunkt } x_0)(t = 1) \\
 = & \text{(Hochhebung von } \delta \text{ zum Anfangspunkt } \tilde{\gamma}(1))(t = 1).
 \end{aligned}$$

- Beispiel.* (1) Jede n -Mannigfaltigkeit N ist semilokal einfach zusammenhängend. In der Tat, zu jedem Punkt $x_0 \in N$ kann man mithilfe von Karten eine offene Umgebung U finden, welche homöomorph zu einer offenen n -Kugel ist. Diese hat dann die gewünschte Eigenschaft.
- (2) Wir betrachten

$$X := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right),$$

mit der Teilraumtopologie. Dann ist X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend aber nicht semilokal einfach zusammenhängend. (Dies sieht man wiederum in dem man die Umgebungen von $(0, 0)$ betrachtet.)

Satz 9.15. *Es sei Y ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum und es sei $y_0 \in Y$.⁴¹ Es sei $\Gamma \subset \pi = \pi_1(Y, y_0)$ eine Untergruppe. Dann existiert eine wegzusammenhängende Überlagerung⁴² $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ von punktierten topologischen Räumen, so dass $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \Gamma$.*

Beispiel. Wir betrachten $(Y, y_0) = (S^1, 1)$. Wir wählen einen Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ und identifizieren mithilfe dieses Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1)$ mit \mathbb{Z} . Es sei nun $\Gamma = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, 1)$. Wir werden in Übungsblatt 8 sehen, dass die Überlagerung⁴³

$$\begin{aligned} p : S^1 &\rightarrow S^1 \\ z &\mapsto z^2 \end{aligned}$$

die Eigenschaft besitzt, dass $p_*(\pi_1(S^1, 1)) = 2\mathbb{Z}$. Ein weiteres Beispiel ist die Überlagerung

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}/2\mathbb{Z} &\rightarrow S^1 \\ t + 2\mathbb{Z} &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall gilt, dass $\text{Im}(q_*) = 2\mathbb{Z}$.

Beispiel. Es sei Z ein topologischer wegzusammenhängender und einfach zusammenhängender topologischer Raum und es sei $z_0 \in Z$. Nehmen wir an $Y = Z/\pi$ wobei π eine Gruppe ist, welche auf Z stetig und

⁴¹Beim ersten Durchlesen des Satzes und des Beweises ist es vielleicht angebracht, nur an den Fall von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten zu denken, und die verschiedenen, etwas technischen, Begriffe von Zusammenhang zu ignorieren.

⁴²D.h. X ist wegzusammenhängend.

⁴³Hier betrachten wir S^1 wieder mal als Teilmenge von \mathbb{C} .

diskret operiert. Wir bezeichnen mit $q : Z \rightarrow Y = Z/\pi$ die Projektionsabbildung und wir schreiben $y_0 = q(z_0)$. Mithilfe des Isomorphismus von Satz 9.11 können wir π mit $\pi_1(Y, y_0)$ identifizieren.

Es sei nun $\Gamma \subset \pi = \pi_1(Y, y_0)$ eine Untergruppe. Dann operiert Γ auch auf Z und wir können die Projektionsabbildung

$$p : X := Z/\Gamma \rightarrow Y := Z/\pi$$

betrachten. Wir setzen $x_0 = q(z_0)$. Man kann nun leicht zeigen, dass dies eine Überlagerung ist mit $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \Gamma$.

Wiederum aus Zeitgründen skizzieren wir nur den Beweis von 9.15. Es lohnt sich jedoch die ausführliche Motivation und Herleitung des Beweises in Jänich, Topologie, Kapitel 9.6 zu lesen.

Beweisskizze. ⁴⁴ Es sei Y ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum, es sei $y_0 \in Y$ und es sei $\Gamma \subset \pi = \pi_1(Y, y_0)$ eine Untergruppe.

(A) Wir betrachten zuerst

$$W := \{\text{Alle Wege in } Y \text{ mit Anfangspunkt } y_0\}.$$

Für einen Weg $v : [0, 1] \rightarrow W$ bezeichnen wir mit \bar{v} den ‘umgekehrten Weg,’ welcher gegeben ist durch $\bar{v}(t) = v(1-t)$. Für $u, v \in W$ definieren wir nun

$$u \sim v : \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} u \text{ und } v \text{ haben den gleichen Endpunkt} \\ \text{und } [u * \bar{v}] \in \Gamma. \end{array} \right)$$

Nachdem $\Gamma \in \pi_1(Y, y_0)$ eine Untergruppe ist, kann man sich leicht davon überzeugen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf W definiert.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} p : W/\sim &\rightarrow Y \\ [v] &\mapsto v(1), \end{aligned}$$

Man beachte, dass diese Abbildung wohl-definiert ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten v . Wir schreiben $X := W/\sim$ und $x_0 := [e_{y_0}]$, d.h. x_0 ist die Äquivalenzklasse des konstanten Weges.

(B) Wir wollen nun eine Topologie auf X einführen, so dass p eine Überlagerung ist, mit der gewünschten Eigenschaft, dass $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \Gamma$.

Es sei $x = [f] \in X = W/\sim$ und V eine offene Umgebung von $p(x) = f(1) \in Y$. Wir betrachten dann

$$U(x, V) := \{[f * u] \mid u \text{ ein Weg in } V \text{ mit Anfangspunkt } f(1)\}.$$

⁴⁴Es ist vielleicht hilfreich den Beweis anhand eines expliziten Beispiels (z.B. $\Gamma = 3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, 1)$) durchzuarbeiten.

Man kann nun zeigen, dass die Mengen $\{U(x, V)\}$ die Basiseigenschaft besitzen und wir betrachten jetzt X als topologischen Raum bezüglich der von den $\{U(x, V)\}$ erzeugten Topologie.

Man kann nun zeigen (als freiwillige Übungsaufgabe oder siehe auch Jänich: Topologie), dass die Abbildung $p: X \rightarrow Y$ stetig ist. In dem Beweis dieser Aussage wird die Voraussetzung, dass Y lokal wegzusammenhängend ist verwendet.

(C) Es kann nun gezeigt werden, dass $p: X = W/\sim \rightarrow Y$ eine Überlagerung ist. In dem Beweis dazu wird die Voraussetzung, dass W semilokal einfach zusammenhängend ist verwendet. Wir werden diesen Schritt hier nicht ausführen, den Beweis dazu kann man z.B. in Jänich, Topologie, Kapitel 9.6 nachlesen.

(D) Wir zeigen nun, dass $X = W/\sim$ wegzusammenhängend ist. Es genügt zu zeigen, dass wir jeden Punkt in W/\sim mit $x_0 = [e_{y_0}]$ durch einen Weg verbinden können. Wir wählen also einen beliebigen Punkt in W/\sim und wählen einen ihn repräsentierenden Weg $\alpha: [0, 1] \rightarrow Y$. Dann ist

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow X = W/\sim \\ t &\mapsto \left[\begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow Y \\ s \mapsto \alpha(ts) \end{array} \right] \end{aligned}$$

ein Weg, welcher $[\alpha] \in W/\sim$ mit $[e_{y_0}]$ verbindet.

(E) Es verbleibt nun zu zeigen, dass $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \Gamma$. Es sei $g \in \pi_1(Y, y_0)$. Wir wählen einen Repräsentanten $\alpha: [0, 1] \rightarrow Y$ von g . Wir betrachten dann den folgenden Weg in $X = W/\sim$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}: [0, 1] &\rightarrow X = W/\sim \\ t &\mapsto \left[\begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow Y \\ s \mapsto \alpha(ts). \end{array} \right] \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{\alpha}$ offensichtlich die Hochhebung von α zum Anfangspunkt x_0 . Dann folgt aus Lemma 9.10, dass

$$\begin{aligned} &g \in p_*(\pi_1(X, x_0)) \\ \Leftrightarrow &\tilde{\alpha} \text{ ist eine Schleife} \\ \Leftrightarrow &\text{in } X = W/\sim \text{ gilt } \tilde{\alpha}(1) = x_0 = e_{y_0} \\ \Leftrightarrow &\alpha \in \Gamma. \end{aligned}$$

□

Man kann sich nun fragen, in wie weit die zu Γ gehörige Überlagerung eindeutig ist. Dazu brauchen wir den Begriff der Äquivalenz von Überlagerungen: Es seien $p: X \rightarrow B$ und $q: Y \rightarrow B$ zwei Überlagerungen eines topologischen Raumes B . Wir sagen p und q sind *äquivalent*, wenn es einen Homöomorphismus $\Phi: X \rightarrow Y$ gibt, so dass folgendes

Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & Y \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & B \end{array} \quad \begin{array}{c} \cong \\ \end{array}$$

Man kann beispielsweise ganz explizit zeigen, dass die beiden Überlagerungen im Beispiel nach Satz 9.15 äquivalent sind.

Wir können nun folgenden Satz formulieren:

Satz 9.16. *Es sei Y ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum und es sei $b_0 \in B$. Es sei $\Gamma \subset \pi = \pi_1(B, b_0)$ eine Untergruppe. Dann gibt es bis auf Äquivalenz genau eine wegzusammenhängende Überlagerung $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ von punktierten topologischen Räumen, so dass $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \Gamma$.*

Beweis. Die Existenz einer solchen Überlagerung ist gerade die Aussage von Satz 9.15. Es seien nun $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ und $q: (Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)$ zwei wegzusammenhängende Überlagerungen von punktierten topologischen Räumen, so dass $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \Gamma$ und $q_*(\pi_1(Y, y_0)) = \Gamma$.

Nach Satz 9.14 gibt es nun stetige Abbildungen $\Phi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $\Psi: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} & (Y, y_0) & \text{und} \\ & \nearrow \Phi & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{p} & (B, b_0) \\ & \searrow q & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & (X, x_0) & \\ & \nearrow \Psi & \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{q} & (B, b_0) \\ & \searrow p & \end{array}$$

Wir haben nun also zwei Hochhebungen

$$\begin{array}{ccc} & (X, x_0) & \text{und} \\ & \nearrow \text{id} & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{p} & (B, b_0) \\ & \searrow p & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & (X, x_0) & \\ & \nearrow \Psi \circ \Phi & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{p} & (B, b_0) \\ & \searrow p & \end{array}$$

Aus der Eindeutigkeit der Hochhebungen (siehe Satz 9.14) folgt nun, dass $\Psi \circ \Phi = \text{id}$. Ganz analog zeigt man, dass $\Phi \circ \Psi = \text{id}$. Es folgt, dass Φ und Ψ Homöomorphismen sind. \square

Wenden wir Satz 9.16 auf die triviale Untergruppe von $\pi_1(Y, y_0)$ an, erhalten wir mithilfe von Lemma 9.13 sofort folgendes Korollar:

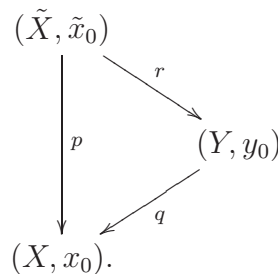
Korollar 9.17. *Es sei Y ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum und es sei $y_0 \in Y$. Dann existiert bis auf Äquivalenz genau eine wegzusammenhängende Überlagerung $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ von punktierten topologischen Räumen, so dass X einfach zusammenhängend ist.*

Wir nennen $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ dann *die universelle Überlagerung*⁴⁵ von (Y, y_0) .

- Beispiel.*
- (1) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ ist die universelle Überlagerung von S^1 .
 - (2) $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \text{Torus}$ ist die universelle Überlagerung des Torus.
 - (3) $p : S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}/p = L(p, q)$ ist die universelle Überlagerung des Linsenraumes $L(p, q)$.

Das folgende Lemma besagt, dass die universelle Überlagerung von X jede andere Überlagerung von X ‘überlagert’. Dies erklärt den Namen ‘universelle’ Überlagerung.

Lemma 9.18. *Es sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$. Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ die universelle Überlagerung und es sei $q : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine beliebige andere Überlagerung, wobei Y wegzusammenhängend ist. Dann existiert genau Überlagerung $r : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0)$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*



Die Existenz einer Abbildung $r : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0)$, so dass $p = r \circ q$ folgt sofort aus Satz 9.14. Die Tatsache, dass r eine Überlagerung ist, folgt leicht aus den Definitionen. Der Beweis des Lemmas wird in Übungsblatt 9 ausgearbeitet.

Wir erinnern zum Schluß noch an folgende Definition aus der Gruppentheorie: Es sei $\Gamma \subset \pi$ eine Untergruppe. Wir nennen die Zahl der Restklassen π/Γ den *Index* $[\pi : \Gamma]$ von Γ in π . Es sei nun $p : X \rightarrow B$

⁴⁵Man müsste natürlich genauer sagen: ‘Wir nennen $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte universelle Überlagerung von (Y, y_0) .’

eine n -fache Überlagerung eines wegzusammenhängenden Raumes B . Wir bezeichnen dann mit $[X : B] := n$ den Grad der Überlagerung. Wir schreiben auch $[X : B] = \infty$, wenn p keine endliche Überlagerung ist.

Folgenden Satz werden wir mithilfe von Lemma 9.10 in Übungsblatt 9 beweisen:

Satz 9.19. *Es sei $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine endliche Überlagerung von punktierten topologischen Räumen, wobei X und B wegzusammenhängend sind. Dann gilt*

$$[X : B] = [\pi_1(B, b_0) : p_*(\pi_1(X, x_0))].$$

9.6. Einschub: Die Quotientengruppe. Es sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Für $x, y \in G$ definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow x^{-1}y \in H.$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf G ⁴⁶. Die Äquivalenzklassen von \sim sind von der Form

$$xH := \{xh \mid h \in H\}.$$

Die Äquivalenzklassen werden oft auch *Restklassen* genannt. Die Menge der Restklassen wird mit G/H bezeichnet.

Es stellt sich nun die Frage, ob G/H ebenfalls eine Gruppenstruktur besitzt. Es seien also xH, yH zwei Restklassen in G/H gegeben. Wir setzen dann

$$xH \cdot yH := xyH.$$

Wir müssen nun überprüfen, ob diese Definition von der Wahl der Repräsentanten x, y der Restklassen abhängt. Es seien dazu \tilde{x} und \tilde{y} zwei weitere Repräsentanten von xH und yH . Dann gibt es $a, b \in H$ mit $\tilde{x} = xa$ und $\tilde{y} = yb$ und es gilt

$$\tilde{x}\tilde{y}H = xyH \Leftrightarrow xaybH = xyH \Leftrightarrow (xy)^{-1}xayb \in H \Leftrightarrow y^{-1}ayb \in H \Leftrightarrow y^{-1}ay \in H.$$

Wir sagen nun, dass H eine *normale Untergruppe* von G ist, wenn

$$y^{-1}hy \in H \text{ für alle } h \in H \text{ und } y \in G.$$

Satz 9.20. *Es sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine normale Untergruppe. Dann ist*

$$xH \cdot yH := xyH$$

eine wohl-definierte Abbildung $G/H \times G/H \rightarrow G/H$, welche eine Gruppenstruktur auf G/H definiert.

⁴⁶Es ist eine gute Übung sich zu überlegen, warum \sim transitiv ist.

Die Tatsache, dass die Abbildung wohl-definiert ist haben wir implizit oben schon bewiesen. Die Tatsache, dass dies in der Tat eine Gruppenstruktur auf G/H definiert folgt leicht aus den Gruppenaxiomen für G .

Beispiel. (1) Es sei G eine abelsche Gruppe, d.h. $ab = ba$ für alle $a, b \in G$. Dann ist jede Untergruppe von G eine normale Untergruppe.

(2) Es sei $G = \text{GL}(2, \mathbb{R})$ und $H \subset \text{GL}(2, \mathbb{R})$ die Untergruppe der diagonalen Matrizen. Dann ist H nicht normal in G , beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq H.$$

(3) Es sei $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $H = \{\lambda \text{id} \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Dann ist H eine normale Untergruppe von G .

Es sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Der *Normalisator* $N(H)$ der Untergruppe $H \subset G$ ist definiert als

$$N(H) := \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}.$$

Man beachte, dass $N(H) \subset G$ eine Untergruppe von G ist. Es ist offensichtlich, dass H eine normale Untergruppe von $N(H)$ ist. Der Normalisator $N(H)$ von $H \subset G$ ist die größte Untergruppe von G , welche H als normale Untergruppe enthält.

9.7. Die Decktransformationsgruppe. In diesem Kapitel wenden wir folgende Konvention an:

Alle topologischen Räume sind wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend.

Alle bisherigen Beispiele einer Überlagerung waren äquivalent zu einer Überlagerung vom Typ $p : X \rightarrow X/G$ wobei G eine Gruppe ist ⁴⁷, welche auf einem topologischen Raum X diskret operiert. Man kann sich fragen, ob in der Tat alle Überlagerungen von dieser Form sind. Um dieser Frage nachzugehen, wollen wir zuerst folgenden Begriff einführen.

Definition. Es sei $p : X \rightarrow B$ eine Überlagerung. Eine *Decktransformation* (oder auch *Deckbewegung*) ist ein Homöomorphismus $d : X \rightarrow X$, so dass $d(p(x)) = p(x)$ für alle x , d.h. so dass das folgende Diagramm

⁴⁷Beispielsweise ist $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ äquivalent zu $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

von Abbildungen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\cong]{d} & X \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & B. \end{array}$$

Die Gruppe der Decktransformationen⁴⁸ wird die *Decktransformationsgruppe* von $p : X \rightarrow B$ genannt und mit $D(p : X \rightarrow B)$ bezeichnet.

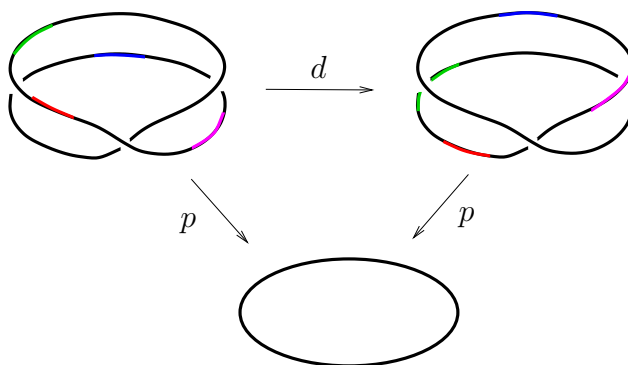


ABBILDUNG 20. Schematisches Bild einer Decktransformation.

Beispiel. (1) Wir betrachten die Überlagerung

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t + n \end{aligned}$$

eine Decktransformation. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass dies die einzigen Decktransformationen von p sind.

- (2) Es sei X ein topologischer Raum auf welchem eine Gruppe G diskret operiert. Wir betrachten die dazugehörige Überlagerung $p : X \rightarrow X/G$ und wir bezeichnen mit $D(p : X \rightarrow B)$ die Decktransformationsgruppe von p . Dann folgt aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen (siehe Satz 9.14) leicht, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\mapsto D(p : X \rightarrow B) \\ g &\mapsto \begin{pmatrix} X &\mapsto X \\ x &\mapsto gx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁴⁸Warum bilden diese eine Gruppe?

ein Gruppenisomorphismus ist. Die Ausarbeitung des Beweises dieser Aussage ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 9.

Lemma 9.21. *Es sei $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen und es seien d_1, d_2 zwei Decktransformationen von p . Dann gilt*

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow d_1(x_0) = d_2(x_0).$$

Beweis. Wir müssen natürlich nur die Rückrichtung beweisen. Es seien also d eine Decktransformationen von p . D.h. d ist eine Abbildung, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & (X, d(x_0)) \\ & \nearrow d & \downarrow p \\ (X, x_0) & \xrightarrow{p} & (B, b_0) \end{array}$$

D.h. d ist eine Hochhebung von $(X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ zur Überlagerung $(X, d(x_0)) \rightarrow (B, b_0)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen (siehe Satz 9.14) folgt nun, dass wenn d_1, d_2 zwei Decktransformationen von p mit $d_1(x_0) = d_2(x_0)$ sind, dann gilt schon $d_1 = d_2$. \square

Es sei nun $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung. Wir schreiben $\pi := \pi_1(B, b_0)$ und $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Nach Korollar 9.9 ist die induzierte Abbildung $p_* : \Gamma \rightarrow \pi$ injektiv, und wir bezeichnen nun $p_*(\Gamma) \subset \pi$ ebenfalls mit Γ . Man kann sich nun fragen, ob ein Zusammenhang zwischen den Gruppen π, Γ und $D = D(p : X \rightarrow B)$ besteht.

Analog zum Beweis von 9.11 betrachten wir nun folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : D(p : X \rightarrow B) &\mapsto \pi/\Gamma \\ d &\mapsto [p(\text{Weg in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } d(x_0))]. \end{aligned}$$

Man kann sich nun davon überzeugen, dass dies eine wohl-definierte Abbildung ist.

Es stellt sich nun die Frage, ob Φ ein Gruppenisomorphismus ist. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall, schon alleine deswegen, weil π/Γ nicht notwendigerweise eine Gruppe ist!

Wir können nun folgenden Satz formulieren:

Satz 9.22. *Es sei $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung. Wir schreiben $\pi := \pi_1(B, b_0)$ und $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$ sowie $\Gamma = p_*(\Gamma)$. Die obige*

⁴⁹Wir bezeichnen hierbei mit $[p(f)]$ nicht nur die Äquivalenzklasse der Schleife $p(f)$ in π , sondern auch die Restklasse in π/Γ , nachdem die Notation $[p(f)]\Gamma$ doch etwas umständlich ist.

Abbildung $\Phi: D(p: X \rightarrow B) \mapsto \pi/\Gamma$ definiert einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi: D(p: X \rightarrow B) &\mapsto N(\Gamma)/\Gamma \\ d &\mapsto [p(\text{Weg in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } d(x_0))]. \end{aligned}$$

Ein ausführlicher Beweis des Satzes ist in Munkres: Topology, Seite 487ff gegeben. Wir skizzieren hier nur den Beweis.

Beweisskizze. Wir schreiben $D := D(p: X \rightarrow B)$.

- (A) Wir müssen zuerst zeigen, dass $\Phi(D) \subset N(\Gamma)/\Gamma$. Es sei also $d \in D$ und f ein Weg in X von x_0 nach $d(x_0)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\Phi(d) = [p(f)] \in N(\Gamma) = \{g \in \pi \mid g\Gamma g^{-1} = \Gamma\}.$$

Sei also $[p(g)] \in \Gamma$, wobei g eine Schleife in (X, x_0) ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi(d)^{-1}g\Phi(d) &= [\overline{p(f)} * p(g) * p(f)] \\ &= [p(\overline{f} * g * f)] \in p_*(\pi_1(X, x_0)) = \Gamma. \end{aligned}$$

- (B) Wir werden nun eine Umkehrabbildung $\Psi: N(\Gamma)/\Gamma \rightarrow D$ konstruieren. Es sei also $[f] \in N(\Gamma) \subset \pi = \pi_1(B, b_0)$. Es sei x_1 der Endpunkt der Hochhebung \tilde{f} von f zum Anfangspunkt x_0 .⁵⁰ Wir betrachten nun folgendes Diagramm von Abbildungen von punktierten topologischen Räumen:

$$\begin{array}{ccc} & (X, x_1) & \\ & \downarrow p & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{p} & (B, b_0). \end{array}$$

Es folgt aus Satz 7.8 und aus der Definition von $N(\Gamma)$, dass

$$\begin{aligned} p_*(X, x_1) &= \{[p(\overline{\tilde{f}} * g * \tilde{f})] \mid [g] \in \pi_1(X, x_0)\} \\ &= [f]p_*(\pi_1(X, x_0))[f]^{-1} \\ &= p_*(\pi_1(X, x_0)). \end{aligned}$$

⁵⁰Nach Lemma 9.10 hängt dieser nicht von der Wahl des Repräsentanten von $[f] \in N(\Gamma)$ ab.

Es folgt nun aus Satz 9.14, dass es eine Hochhebung $\tilde{p} : (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ von p gibt, d.h. eine Abbildung \tilde{p} , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & (X, x_1) \\ & \nearrow \tilde{p} & \downarrow p \\ (X, x_0) & \xrightarrow{p} & (B, b_0). \end{array}$$

Diese Abbildung \tilde{p} ist nun aber offensichtlich eine Decktransformation. Wir haben damit eine Abbildung $\Psi : N(\Gamma)/\Gamma \rightarrow D$ konstruiert.

- (C) Wir müssen nun zeigen, dass Ψ ein Gruppenhomomorphismus ist. Dies erfolgt in Übungsblatt 9.
- (D) Es verbleibt nun zu zeigen, dass Φ und Ψ zueinander inverse Abbildungen sind. Wir überlassen dies als freiwillige Übungsaufgabe. □

Bevor wir das nächste Korollar formulieren wollen wir noch folgende Definitionen einführen: Es sei G eine Gruppe, welche auf einer Menge M operiert. Wir sagen G operiert *transitiv*, wenn es zu allen $m, n \in M$ ein $g \in G$ mit $gm = n$ gibt.

Wir können nun folgendes Korollar formulieren:

Korollar 9.23. *Es sei $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung mit Decktransformationsgruppe $D = D(p : X \rightarrow B)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) D operiert transitiv auf $p^{-1}(b_0) \subset X$.
- (2) $p_*(\pi_1(X, x_0))$ ist eine normale Untergruppe von $\pi_1(B, b_0)$.
- (3) Es gibt eine Gruppe G , welche auf X diskret operiert, und so dass $q : X \rightarrow X/G$ und $p : X \rightarrow B$ äquivalente Überlagerungen sind. D.h. es gibt einen Homöomorphismus $f : X/G \rightarrow B$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ q \swarrow & & \searrow p \\ X/G & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Wenn p eine endliche Überlagerung ist, dann sind die obigen Aussagen zudem äquivalent zu

- (4) $|D(p : X \rightarrow B)| = [X : B]$.

Wenn eine Überlagerung eine dieser äquivalenten Eigenschaften besitzt, dann nennen wir die Überlagerung *normal* oder auch *regulär*.

Beweisskizze. Wir schreiben $\pi := \pi_1(B, b_0)$ und $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$ sowie $\Gamma = p_*(\Gamma)$.

(1) \Leftrightarrow (2) Es gilt:

$$\begin{aligned} & D \text{ operiert transitiv auf } p^{-1}(x_0) \subset X \\ \Leftrightarrow & \Phi: D \rightarrow \pi/\Gamma \text{ ist surjektiv} \\ \Leftrightarrow & \pi = N(\Gamma) \\ \Leftrightarrow & \Gamma \text{ ist normal in } \pi. \end{aligned}$$

Die Ausarbeitung der Details erfolgt in Übungsblatt 10.

(1) \Rightarrow (3) Die Decktransformationsgruppe operiert diskret⁵¹ und man kann nun zeigen, dass $G := D$ die gewünschte Eigenschaft besitzt.

(3) \Rightarrow (1) Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $x \mapsto gx$ eine Decktransformation von $q: X \rightarrow X/G$. Nachdem G auf $q^{-1}(x_0)$ transitiv operiert, operiert auch D transitiv auf $p^{-1}(x_0)$.

Wir nehmen nun an, dass p eine n -fache Überlagerung ist. Es folgt aus Satz 9.19, dass $|\pi/\Gamma| = n$. Nach Satz 9.22 ist die Abbildung

$$\Phi: D \rightarrow N(\Gamma)/\Gamma$$

ein Gruppenisomorphismus, insbesondere eine Bijektion. Es folgt nun aus Satz 9.19, dass

$$\begin{aligned} |D| = [X : B] \Leftrightarrow |D| = |\pi/\Gamma| & \Leftrightarrow |N(\Gamma)/\Gamma| = |\pi/\Gamma| \\ & \Leftrightarrow N(\Gamma) = \pi \\ & \Leftrightarrow \Gamma \subset \pi \text{ normale Untergruppe.} \end{aligned}$$

□

Wir sehen also, dass eine Überlagerung $p: X \rightarrow B$ ‘vom Typ’ $X \rightarrow X/G$ ist, genau dann, wenn $p_*(\pi_1(X, x_0))$ eine normale Untergruppe von $\pi_1(B, b_0)$ ist. Wir werden später Beispiele von Überlagerungen sehen, bei denen dies nicht der Fall ist.

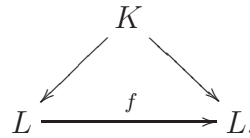
9.8. Einschub: Galoistheorie. Die Theorie der Überlagerungen von topologischen Räumen weist Ähnlichkeiten zur Galoistheorie von Körpererweiterungen auf.

In der Tat, es sei L/K eine Erweiterung eines Körpers K der Charakteristik Null, d.h. L ist ein Körper, welcher den Körper K enthält. Die Dimension von L als K Vektorraum wird mit $[L : K]$ bezeichnet. Wir betrachten dann

$\text{Aut}(L/K) =$ alle Körperautomorphismen von L , welche die Identität auf K sind.

⁵¹Warum?

Anders ausgedrückt, ein Körperautomorphismen $f: L \rightarrow L$ liegt in $\text{Aut}(L/K)$ genau dann, wenn folgendes Diagramm kommutiert:



Beispielsweise gilt:

- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ ist eine Körpererweiterung mit $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ und $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$ besteht aus der Identität und $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$.
- (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist eine Körpererweiterung mit $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ und die Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ besteht nur aus der Identität.

Wir bezeichnen nun mit \overline{K} den algebraischen Abschluß von K . Die Körpererweiterung L/K heißt *normal*, wenn für jedes $f \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ gilt, dass $f(L) = L$. In Galoistheorie beweist man, dass L/K normal ist, genau dann, wenn jedes Polynom in $K[x]$, welches eine Nullstelle in L besitzt, über L zerfällt, d.h. alle anderen Nullstellen von f liegen ebenfalls in L .⁵² Beispielsweise gilt:

- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ ist eine normale Körpererweiterung.
- (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist keine normale Körpererweiterung, denn $\sqrt[3]{2}$ ist eine Nullstelle von $x^3 - 2$, aber die Nullstelle $\sqrt[3]{2}e^{2\pi i/3}$ von f liegt nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.⁵³

Einer der Hauptsätze der Galoistheorie besagt nun, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1) Die Körpererweiterung L/K ist normal.
- (2) $\text{Aut}(L/K) = [L : K]$.

Die Aussage ist formal also ganz ähnlich zur Aussage von Korollar 9.23, dass für eine endliche Überlagerung $p : X \rightarrow B$ folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1) Die Überlagerung $p : X \rightarrow B$ ist normal.
- (2) $/D(p : X \rightarrow B)/ = [X : B]$.

Die Analogie zwischen Galoistheorie und Überlagerungstheorie geht allerdings noch deutlich weiter. Viele Aussagen über die Galoisgruppe

⁵²Nachdem wir annehmen, dass K ein Körper der Charakteristik Null ist, folgt, dass die Körpererweiterung L/K normal ist, genau dann, wenn L/K eine Galois-erweiterung ist.

⁵³Wir schreiben $z = \sqrt[3]{2}$ und $w = e^{2\pi i/3}$. Es ist eine gute Übungsaufgabe zu zeigen, dass $\mathbb{Q}(z, w)/\mathbb{Q}$ eine normale Körpererweiterung mit $[\mathbb{Q}(z, w) : \mathbb{Q}] = 6$ ist. Die Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{Q}(z, w)/\mathbb{Q})$ ist isomorph zur Permutationsgruppe S_3 .

einer Galoiserweiterung besitzen ein Pendant für die Decktransformationsgruppe einer normalen Überlagerung. Beispielsweise entsprechen (normale) Untergruppen einer Galoisgruppe (normalen) Zwischenkörpern und (normale) Untergruppen der Decktransformationsgruppe entsprechen (normalen) ‘Zwischenüberlagerungen’.

10. HOMOTOPIEÄQUIVALENTE RÄUME

Es seien $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Zur Erinnerung, wir sagen f_0 und f_1 sind homotop, geschrieben $f_0 \simeq f_1$, wenn es eine Homotopie zwischen den Abbildungen f_0 und f_1 gibt, d.h. eine stetige Abbildung

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

so dass

$$F(x, 0) = f_0(x) \text{ und } F(x, 1) = f_1(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Beispiel. Es sei $X = B^n$ und wir betrachten

$$\begin{array}{ccc} f_0 = \text{id} : B^n & \rightarrow & B^n \\ x & \mapsto & O := \{0, \dots, 0\} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} f_1 = \text{id} : B^n & \rightarrow & B^n \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{array}{ccc} F : B^n \times [0, 1] & \rightarrow & B^n \\ (x, t) & \mapsto & x \cdot t \end{array}$$

eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 .

Man kann sich nun fragen, ob homotope Abbildungen die gleichen Abbildungen auf Fundamentalgruppen induzieren. Dies ist in der Tat der Fall, wenn man noch eine Bedingungen an das Verhalten der Basispunkte unter der Homotopie stellt:

Satz 10.1. *Es seien $f, g : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Es sei $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Wenn es eine Homotopie $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ zwischen f und g gibt, so dass $F(x_0, t) = y_0$ für alle $t \in [0, 1]$, dann gilt*

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Beweis. Es sei also $a \in \pi_1(X, x_0)$. Wir repräsentieren a durch eine Schleife s in (X, x_0) . Dann sind $f \circ s$ und $g \circ s$ zwei Schleifen in (Y, y_0) , welche $f_*(a)$ beziehungsweise $g_*(a)$ repräsentieren. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \rightarrow & Y \\ (r, t) & \mapsto & F(s(r), t) \end{array}$$

ist dann aber eine Homotopie zwischen den Schleifen $f \circ s$ und $g \circ s$ in (Y, y_0) , also gilt $[f_*(a)] = [g_*(a)] \in \pi_1(Y, y_0)$.⁵⁴ \square

Definition. Es seien X und Y topologische Räume.

- (1) Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist eine *Homotopieäquivalenz zwischen X und Y* , wenn sie ein Homotopieinverses besitzt, d.h. eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$.
- (2) Wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen X und Y gibt, dann sagen wir, dass die Räume X und Y *homotopieäquivalent* sind und wir schreiben $X \simeq Y$.
- (3) Wir sagen X ist *zusammenziehbar*, wenn X homotopieäquivalent ist zu $Y = \{*\}$, d.h. zum Raum, welcher aus genauer einem Punkt besteht.

Beispiel. (1) Es sei $X = B^n$ und $Y = O = \{0, \dots, 0\} \subset B^n$. Wir betrachten

$$\begin{array}{l} f: B^n \rightarrow O \\ x \mapsto O := \{0, \dots, 0\} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} g: O \rightarrow B^n \\ O \mapsto O \end{array} .$$

Dann ist $f \circ g = \text{id}_O$ und $g \circ f \simeq \text{id}_{B^n}$ nach dem vorherigen Beispiel. Die Räume B^n und O sind also homotopieäquivalent.

- (2) Wir betrachten⁵⁵

$$\begin{array}{l} X = [0, 1] \times [-1, 1] / (0, y) \sim (1, -y) \text{ und} \\ Y = [0, 1] / 0 \sim 1. \end{array}$$

(Der Raum X ist also das Möbiusband und Y ist S^1 .) Wir betrachten nun⁵⁶

$$\begin{array}{l} f: X \rightarrow Y \\ (x, y) \mapsto x \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} g: Y \rightarrow X \\ x \mapsto (x, 0) \end{array} .$$

⁵⁴Wo haben wir in diesem Beweis verwendet, dass $F(x_0, t) = y_0$ für alle $t \in [0, 1]$?

⁵⁵Wenn wir schreiben

$$[0, 1] \times [-1, 1] / (0, x) \sim (1, -x)$$

dann meinen wir wirklich die Äquivalenzrelation auf $X = [0, 1] \times [-1, 1]$, welche gegeben ist durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) : \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2), & \text{oder} \\ x_1 = 0, x_2 = 1 \text{ und } y_1 = -y_2. \end{cases}$$

Wir werden im Folgenden öfters die obige suggestive Notation verwenden.

⁵⁶Hier muss man natürlich überprüfen, dass die Definitionen der Abbildungen nicht von der Wahl der Repräsentanten in X und Y abhängen.

Dann ist $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f \simeq \text{id}_X$ mittels folgender Homotopie

$$\begin{aligned} F: X \times [0, 1] &\rightarrow X \\ (x, y, t) &\mapsto (x, y \cdot t) \end{aligned}$$

Das Möbiusband ist also homotopieäquivalent zum geschlossenen Kreis.

- (3) In Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^k homotopieäquivalent sind.
- (4) In Übungsblatt 10 werden wir auch sehen, dass $\mathbb{R}^n \setminus O$ und S^{n-1} homotopieäquivalent sind.
- (5) Wenn X homotopieäquivalent zu Y ist, und wenn Y homotopieäquivalent zu Z ist, dann kann man leicht sehen, dass X homotopieäquivalent zu Z ist. In der Tat ist Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der topologischen Räume, wie der Name schon suggeriert.

Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 10 bewiesen:

Lemma 10.2. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, welche eine Homotopieäquivalenz ist. Dann gilt*⁵⁷

$$X \text{ ist wegzusammenhängend} \Leftrightarrow Y \text{ ist wegzusammenhängend}.$$

Satz 10.3. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, welche eine Homotopieäquivalenz ist. Es sei $x_0 \in X$ ein Punkt. Wir setzen $y_0 = f(x_0)$. Dann ist*

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es sei $g: Y \rightarrow X$ das Homotopieinverse von f . Wir setzen $x_1 = g(y_0)$ und wir betrachten die induzierten Abbildungen

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} .$$

⁵⁷In Kapitel 6 hatten wir $\pi_0(X)$ wie folgt definiert: Es sei X ein topologischer Raum und es seien $x, y \in X$. Wir schreiben

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{es gibt einen Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y.$$

Die Äquivalenzklassen von \sim heißen die Komponenten von X und die Menge der Komponenten von X bezeichnen wir mit $\pi_0(X)$.

Man kann nun auch folgende Aussage beweisen: Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, welche eine Homotopieäquivalenz ist. Dann f induziert eine Bijektion $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$.

Nach Voraussetzung ist $\text{id}_X \simeq g \circ f$, d.h. es existiert eine Homotopie H zwischen id_X und $g \circ f$.⁵⁸

Wir wollen nun zeigen, dass $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ein Isomorphismus ist. Wir bezeichnen dazu mit

$$\alpha: [0, 1] \rightarrow X$$

$$t \mapsto H(x_0, t)$$

die Kurve, mithilfe welcher die Homotopie H die Punkte

$$x_0 = H(x_0, 0) = (\text{id}_X)(x_0) \text{ und } x_1 = H(x_0, 1) = (g \circ f)(x_0)$$

verbindet.

Behauptung. Die Abbildungen

$$(g \circ f)_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \quad \text{und} \quad \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$[s] \mapsto [g(f(s))] \quad \text{und} \quad [s] \mapsto [\bar{\alpha} * s * \alpha]$$

sind identisch.

Es sei $s : [0, 1] \rightarrow X$ eine Schleife in (X, x_0) . Dann ist

$$G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(r, t) \mapsto \begin{cases} \bar{\alpha}(4r), & \text{wenn } r \in [0, \frac{1}{4}t], \\ H(\frac{r-\frac{1}{4}t}{1-\frac{1}{2}t}, t), & \text{wenn } r \in (\frac{1}{4}t, 1 - \frac{1}{4}t), \\ \alpha(4r - 3), & \text{wenn } r \in [1 - \frac{1}{4}t, 1] \end{cases}$$

eine stetige Abbildung (wie man leicht überprüfen kann), mit $G(0, t) = x_1$ für alle $t \in [0, 1]$. In der Tat ist G sogar eine Homotopie zwischen

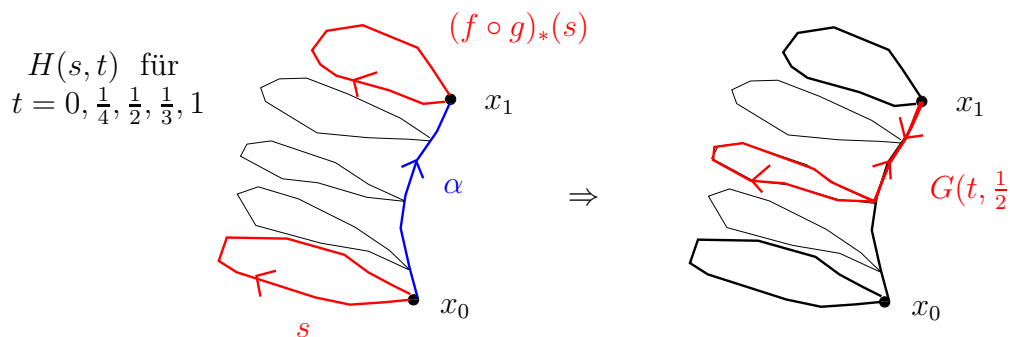


ABBILDUNG 21. Schematisches Bild von H und G .

⁵⁸Können wir daraus schon schließen, dass $g \circ f$ die Identitätsabbildung auf der Fundamentalgruppen induziert? Nein, denn $g \circ f$ induziert noch nicht einmal eine Abbildung auf $\pi_1(X, x_0)$, weil $g \circ f$ den Basispunkt x_0 auf x_1 schickt.

den Schleifen $g(f(s))$ und $\bar{\alpha} * s * \alpha$ ⁵⁹ in (X, x_1) . Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Es folgt aus Satz 7.8, dass die zweite Abbildung der Behauptung ein Isomorphismus ist. Wir erhalten also, dass auch $g_* \circ f_*$ ein Isomorphismus ist.

Wir setzen $x_1 = g(y_0)$ und $y_1 = f(x_1)$ und wir betrachten die induzierten Abbildungen

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_1).$$

Wir gehen jetzt in folgenden Schritten vor:

- (1) Wir haben gerade gesehen, dass $g_* \circ f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$ ein Isomorphismus ist.
- (2) Es folgt, dass $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ injektiv ist.
- (3) Ganz analog zu (1) zeigt man, dass $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$ ein Isomorphismus ist.
- (4) Es folgt, dass $f_*: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$ surjektiv ist.
- (5) Ein Argument wie im Beweis von Satz 7.8 zeigt nun⁶⁰, dass auch $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ surjektiv ist.
- (6) Aus (2) und (5) folgt, dass $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus ist.

□

Wir erhalten also aus Satz 10.3 und aus den obigen Beispielen, dass

$$\pi_1(\text{Möbiusband}) \cong \mathbb{Z}.$$

D.h. das Möbiusband hat die gleiche Fundamentalgruppe wie S^1 und wie der Ring $S^1 \times [0, 1]$. Die Fundamentalgruppe kann also leider nicht zwischen dem Möbiusband und dem Ring $S^1 \times [0, 1]$ unterscheiden.

In Korollar 6.4 hatten wir schon gesehen, dass die topologischen Räume \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 nicht homöomorph zueinander sind. Wir können jetzt folgendes Korollar beweisen:

Korollar 10.4. *Die topologischen Räume \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 sind nicht homöomorph.*

Beweis. Nehmen wir an es gibt einen Homöomorphismus $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Wir setzen $Q := \varphi(P)$. Dann sind auch $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}$ homöomorph. Andererseits ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ homotopieäquivalent zu S^1 und $\mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}$ ist homotopieäquivalent zu S^2 . Aus

⁵⁹Um genau zu sein, sollte man sagen, dass G eine Homotopie zwischen $g(f(s))$ und einer geeignet gewählten Parametrisierung von $\bar{\alpha} * s * \alpha$ ist.

⁶⁰Warum können wir x_0 und x_1 beziehungsweise y_0 und y_1 jeweils durch einen Weg verbinden?

Satz 10.3 folgt dann, dass

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}) \cong \pi_1(S^2) = 0.$$

Wir erhalten also einen Widerspruch. □

Es stellt sich jetzt natürlich die Frage, ob ganz allgemein die topologischen Räume \mathbb{R}^k und \mathbb{R}^l für $k \neq l$ nicht homöomorph sind. Wir werden das später mithilfe einer Verallgemeinerung der Fundamentalgruppe beweisen.

11. DER SATZ VON SEIFERT–VAN KAMPEN I

11.1. Das freie Produkt von Gruppen. Bevor wir den Satz von Seifert–van Kampen formulieren müssen wir noch mehrere Begriffe der Gruppentheorie wiederholen und einführen.

Es seien G und H zwei Gruppen, dann können wir das kartesische Produkt

$$G \times H := \{(g, h) \mid g \in G \text{ und } h \in H\}$$

bilden. Dies ist wiederum eine Gruppe mit der Gruppenstruktur

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1g_2, h_1h_2).$$

Wir nennen die Gruppe $G \times H$ das *direkte Produkt der Gruppen G und H* . Wir können G und H mithilfe der injektiven Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \times H \\ g & \mapsto & (g, e) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & G \times H \\ h & \mapsto & (e, h) \end{array}$$

als Untergruppen von $G \times H$ auffassen. Man beachte, dass diese Untergruppen kommutieren, d.h. für jedes $g \in G$ und $h \in H$ gilt $(g, e)(e, h) = (e, h)(g, e)$.

Für viele Anwendungen ist es sinnvoller mit dem ‘freien Produkt’ $G * H$ von G und H anstatt dem ‘kartesischen Produkt’ $G \times H$ von G und H zu arbeiten. Wir betrachten die Menge $G * H$ aller endlichen Folgen (x_1, \dots, x_m) , so dass gilt:

- (1) Jedes x_i liegt in einer der Gruppen G oder H ,
- (2) kein x_j ist das neutrale Element einer der Gruppen G oder H ,
- (3) je zwei aufeinanderfolgende x_j liegen in verschiedenen Gruppen.

Wir erlauben dabei auch die ‘leere Folge’ $()$.

Auf $G * H$ definieren wir eine Verknüpfung wie folgt. Es seien (x_1, \dots, x_m) und (y_1, \dots, y_n) in $G * H$. Dann gibt es ein j , so dass $x_{m+1-i} = y_i^{-1}$

für $i = 0, \dots, j$, und so dass $x_{m-j} \neq y_j^{-1}$. Wir definieren dann

$$(x_1, \dots, x_m) \cdot (y_1, \dots, y_m) := \begin{cases} (x_1, \dots, x_{m-j}, y_{j+1}, \dots, y_m), & \text{wenn } x_{m-j} \text{ und } y_{j+1} \\ & \text{in verschiedenen} \\ & \text{Gruppen liegen} \\ (x_1, \dots, x_{m-j} \cdot y_{j+1}, \dots, y_m), & \text{wenn } x_{m-j} \text{ und } y_{j+1} \text{ in} \\ & \text{der gleichen Gruppe} \\ & \text{liegen.} \end{cases}$$

Man kann nun leicht überprüfen, dass dies eine Gruppenstruktur auf $G * H$ definiert, dabei ist $()$ das neutrale Element (welches wir wie immer mit e bezeichnen), und es gilt

$$(x_1, \dots, x_m)^{-1} = (x_m^{-1}, \dots, x_1^{-1}).$$

Wir bezeichnen die Gruppe $G * H$ als das *freie Produkt* von G und H .

Wir fassen ein paar wichtige Eigenschaften des freien Produkts in einem Lemma zusammen.

Lemma 11.1. *Es seien G und H Gruppen. Dann gilt:*

(1) *Die Abbildungen*

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G * H \\ g & \mapsto & (g) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & G * H \\ h & \mapsto & (h) \end{array}$$

sind Monomorphismen.

(2) *Zu Gruppenhomomorphismen $\alpha: G \rightarrow A$ und $\beta: H \rightarrow A$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\gamma: G * H \rightarrow A$, so dass*⁶¹

$$\gamma((g)) = \alpha(g) \text{ für alle } g \in G \text{ und } \gamma((h)) = \beta(h) \text{ für alle } h \in H.$$

Beweis. Die erste Aussage ist trivial. Es seien nun $\alpha: G \rightarrow A$ und $\beta: H \rightarrow A$ Gruppenhomomorphismen. Für $(g_1, h_1, \dots, g_k, h_k) \in G * H$ mit $g_i \in G, h_i \in H, i = 1, \dots, n$ definieren wir dann

$$\gamma(g_1, h_1, \dots, g_k, h_k) := \alpha(g_1) \cdot \beta(h_1) \cdot \dots \cdot \alpha(g_k) \cdot \beta(h_k).$$

Ganz analog definieren wir dann γ für alle anderen Elemente in $G * H$. Man kann nun leicht zeigen, dass γ ein Gruppenhomomorphismus ist. \square

Bemerkung. (1) Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, dann schreiben wir oft $x_1 \dots x_m$ anstatt (x_1, \dots, x_m) . Insbesondere fassen wir G und H oft als Untergruppen von $G * H$ auf.

⁶¹Gilt diese Aussage auch für das direkte Produkt? Genauer gesagt, es seien Gruppenhomomorphismen $\alpha: G \rightarrow A$ und $\beta: H \rightarrow A$ gegeben. Gibt es dann einen Gruppenhomomorphismus $\gamma: G \times H \rightarrow A$, so dass $\gamma(g, e) = \alpha(g)$ und $\gamma(e, h) = \beta(h)$ für alle $g \in G$ und $h \in H$?

- (2) Die Konstruktion des freien Produkts verallgemeinert sich auf offensichtliche Weise auch auf freie Produkte von endlich vielen Gruppen (sogar allgemeiner auf eine Familie von Gruppen).

Es sei t ein Symbol. Wir definieren

$$\langle t \rangle := \{ \dots, t^{-2}, t^{-1}, e, t, t^2, \dots \}.$$

Dann besitzt die Menge $\langle t \rangle$ eine offensichtliche Gruppenstruktur. Diese Gruppe ist die unendliche zyklische Gruppen, welche von dem Element t erzeugt wird. Die Gruppe $\langle t \rangle$ ist also isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$.

Für Symbole t_1, \dots, t_k bezeichnen wir dann

$$\langle t_1 \rangle * \dots * \langle t_k \rangle$$

als die *freie Gruppe in den Erzeugern* t_1, \dots, t_k , und bezeichnen diese Gruppe mit $F(t_1, \dots, t_k)$ oder auch $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$. Jedes Element von $F(t_1, \dots, t_k)$ ist also von der Form

$$t_{r_1}^{s_1} t_{r_2}^{s_2} \dots t_{r_l}^{s_l}$$

mit $r_i \neq r_{i+1}$ und $s_i \neq 0$. Wir bezeichnen manchmal die freie Gruppe mit k Erzeugern auch einfach als F_k .

Beispiel. Elemente in der freien Gruppe $\langle x, y \rangle$ in den Erzeugern x und y sind von der Form $xy^3x^{-2}y$ oder $y^{-2}xy$. Die Multiplikation ist ‘die offensichtliche’, beispielsweise gilt

$$(xy^3x^{-1}y^2) \cdot (y^{-2}x^3yxy^{-1}) = xy^3x^2yxy^{-1}.$$

Andererseits gilt $xy \neq yx$.

Es sei G eine beliebige Gruppe und $g_1, \dots, g_k \in G$. Dann folgt aus Lemma 11.1, dass es genau einen Homomorphismus $\alpha: \langle t_1, \dots, t_k \rangle \rightarrow G$ mit $\alpha(t_i) = g_i, i = 1, \dots, k$ gibt.

11.2. Formulierung des Satzes von Seifert–van Kampen I. Die Idee des Satzes von Seifert–van Kampen ist die Berechnung von Fundamentalgruppen eines topologischen Raumes X auf die Bestimmung von Fundamentalgruppen von ‘einfacheren Teilmengen’ von X zurückzuführen.

Es sei X ein topologischer Raum und es seien $U, V \subset X$ Teilmengen mit $X = U \cup V$ und mit $U \cap V \neq \emptyset$. Wir wählen einen Basispunkt $x_0 \in U \cap V$ und betrachten folgende Inklusionsabbildungen und die davon induzierten Homomorphismen der Fundamentalgruppen:

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow{j} & X = U \cup V \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow i_* \\ \pi_1(V, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X, x_0) = \pi_1(U \cup V, x_0) \end{array} .$$

Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 11.2. *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $U, V \subset X$ offene Teilmengen mit $X = U \cup V$ und mit $U \cap V \neq \emptyset$. Wir wählen einen Basispunkt $x_0 \in U \cap V$. Wenn $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, dann ist die Abbildung*

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

welche durch $i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ und $j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ induziert⁶² wird, surjektiv.

Beispiel. (1) Wir betrachten

$$\begin{aligned} X = S^1 &:= \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ U &:= \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \mid t \in (-\frac{1}{8}, \frac{5}{8})\} \\ V &:= \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \mid t \in (-\frac{5}{8}, \frac{1}{8})\} \end{aligned}$$

und $x_0 = (1, 0)$. Dann gilt $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0) = 1$ aber $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}$. Dies ist aber kein Widerspruch zu Lemma 11.2, da $U \cap V$ nicht wegzusammenhängend ist.

(2) Wir betrachten

$$\begin{aligned} X = S^2 &= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ U &= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z > -\frac{1}{2}\}, \\ V &= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z < \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

und $x_0 = (1, 0, 0)$. Dann sind U und V homotopieäquivalent zum Punkt, also sind die Fundamentalgruppen trivial. In diesem Beispiel ist $U \cap V$ wegzusammenhängend, also folgt, dass $\pi_1(X, x_0)$ ebenfalls trivial ist. Wir haben dies schon in Satz 7.11 bewiesen, und der Beweis von Lemma 11.2 weist auch deutliche Parallelen zum Beweis von Satz 7.11 auf.

Das Lemma wird ausführlich in Stöcker-Zieschang: Algebraische Topologie in Lemma 5.3.8. bewiesen.

Beweisskizze. Die Idee des Beweises ist ganz einfach: Es sei $s : [0, 1] \rightarrow X = U \cup V$ eine Schleife in x_0 . Wir müssen zeigen, dass s homotop ist zu einer Schleife s , welche ein Wege-Produkt von Schleifen in (U, x_0) oder in (V, x_0) ist.

Wir können dann (analog zum Beweis von Satz 7.11) eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$$

vom Intervall $[0, 1]$ finden, so dass $s_i := s|_{[t_i, t_{i+1}]}$ abwechselnd ganz in U oder ganz in V liegt. Insbesondere liegt also jedes $s(t_i)$ in $U \cap$

⁶²Siehe Lemma 11.1.

V . Diese Einschränkungen sind im Allgemeinen keine Schleifen in x_0 . Nachdem $U \cap V$ wegzusammenhängend ist können wir allerdings für

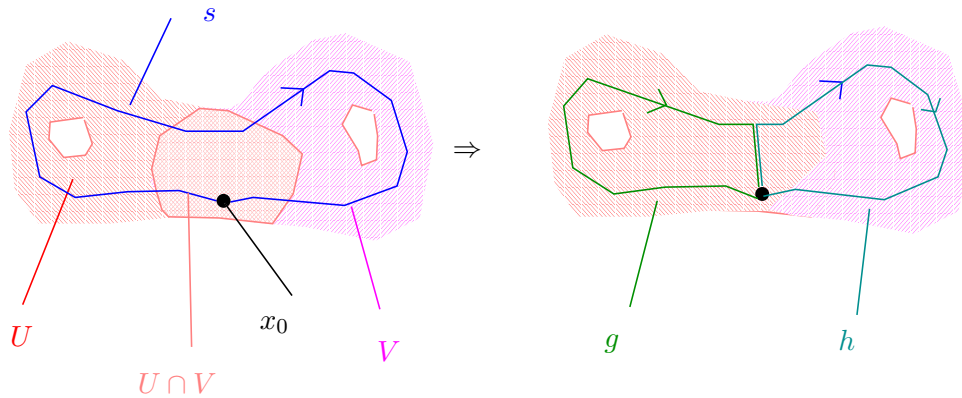


ABBILDUNG 22. Schematisches Bild für den Beweis von Lemma 11.2.

jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ einen Weg p_i in $U \cap V$ finden, welcher $s(t_{i+1})$ mit x_0 verbindet. Wir betrachten jetzt

$$s_0 * p_1 * \overline{p_1} * s_1 * p_2 * \overline{p_2} * \dots * \overline{p_k} * s_k = (s_0 * p_1) * (\overline{p_1} * s_1 * p_2) * (\overline{p_2} * \dots * (\overline{p_k} * s_k)).$$

Dies ist eine Schleife in (X, x_0) , welche homotop ist zur Schleife s .

Jeder der 'Faktoren' $\overline{p_i} * s_i * p_{i+1}$, $i = 1, \dots, k$ ist eine Schleife in (U, x_0) oder in (V, x_0) . Es folgt also, dass die Abbildung

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv ist. □

Satz 11.3. *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $U, V \subset X$ offene Teilmengen mit $X = U \cup V$ und mit $U \cap V \neq \emptyset$. Wir wählen einen Basispunkt $x_0 \in U \cap V$. Wenn $U \cap V$ wegzusammenhängend und einfachzusammenhängend ist, dann ist die Abbildung*

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

welche durch $i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ und $j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ induziert wird, ein Isomorphismus.

Bemerkung. Man kann sich nun fragen, ob die Bedingung, dass $U \cap V$ einfachzusammenhängend ist wirklich notwendig ist. Dies ist jedoch in der Tat der Fall, wie man am Beispiel $X = S^1 \times [-1, 1]$ mit $U = S^1 \times [-1, \frac{1}{2}]$ und $V = S^1 \times [-\frac{1}{2}, 1]$ gut sehen kann.

Auch dieser Satz wird ausführlich in Stöcker-Zieschang: Algebraische Topologie bewiesen.

Beweisskizze. In Anbetracht von Lemma 11.2 müssen wir nur noch zeigen, dass die Abbildung

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_*) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv ist. Wir betrachten den Fall, dass

$$a = g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_k h_k \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_*),$$

wobei $g_1, \dots, g_k \in \pi_1(U, x_0)$ und $h_1, \dots, h_k \in \pi_1(V, x_0)$, und diese jeweils nicht-trivial sind. (Alle anderen Fälle werden ganz analog bewiesen.) Wir nehmen nun an, dass a trivial in $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Wir repräsentieren g_1, \dots, g_k und h_1, \dots, h_k durch Schleifen in (U, x_0) beziehungsweise (V, x_0) , welche wir mit den gleichen Namen bezeichnen. Es sei zudem $H : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \rightarrow X$ eine Nullhomotopie⁶³ für a .

Nachdem U und V offen sind existiert (analog zum Beweis von Satz 7.11) ein $N = 2k \cdot l > 0$, so dass für jede Wahl von $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$ gilt:

$$H \left(\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right], \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right] \right)$$

liegt ganz in U oder ganz in V liegt. Der Beweis dieser Aussage erfolgt in Übungsblatt 11.

Anschaulicher ausgedrückt: das Bild eines jeden Quadrats

$$\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right] \times \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right]$$

liegt ganz in U oder ganz in V . In Skizze 23 ist dies schematisch angezeigt. Wenn von zwei benachbarten Quadraten eines ganz in U und eines ganz in V landet, dann liegt die Bildmenge der Trennungskante ganz in $U \cap V$. Mithilfe von Skizzen 23 und 24 sieht man nun, dass der Weg g_1 homotop ist zu einem Weg g'_1 , welcher ganz in $U \cap V$ verläuft. Nachdem $U \cap V$ einfachzusammenhängend ist, ist dieser Weg nullhomotop. Wir haben also gezeigt, dass g_1 nullhomotop ist. Per Induktion folgt nun, dass $h_1, g_2, h_2, \dots, g_k$ und h_k ebenfalls nullhomotop sind. \square

Wir wollen jetzt noch ein wichtiges Korollar zu Satz 11.3 formulieren. Dazu brauchen wir noch zwei weitere Definitionen:

⁶³Eine Nullhomotopie einer Schleife in (X, x_0) ist eine Homotopie zur konstanten Schleife im Punkt x_0 .

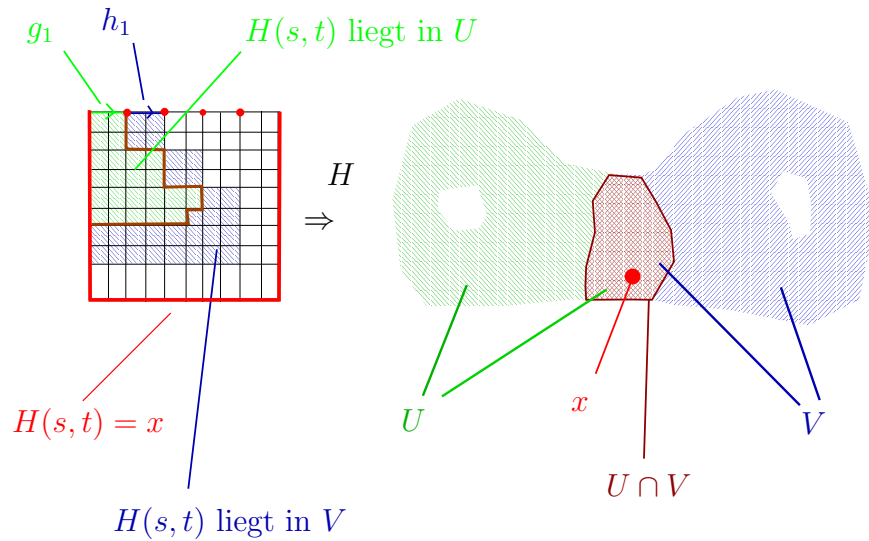


ABBILDUNG 23. Schematisches Bild für den Beweis von Satz 11.3.

der Weg g_1 ist homotop in U zu g'_1

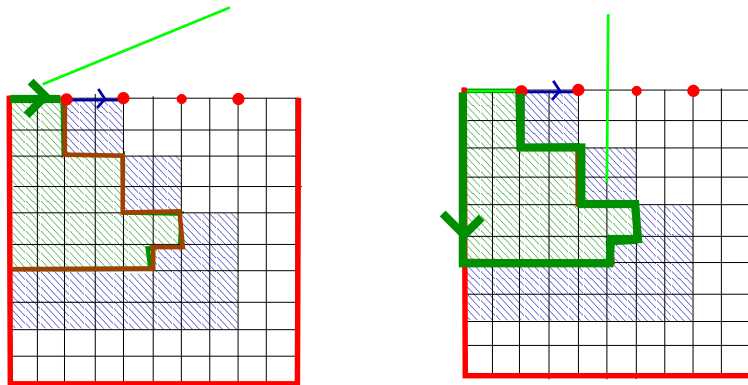


ABBILDUNG 24. Schematisches Bild für die Homotopie von g_1 zu g'_1 .

Definition. (1) Es seien A und B topologische Räume und $a \in A$ und $b \in B$ Punkte. Wir schreiben dann ⁶⁴

$$A \vee B := A \sqcup B / a = b.$$

⁶⁴D.h.

$$A \vee B = A \sqcup B / \sim$$

wobei $x \sim y$ wenn $x = y$ oder wenn $x = a$ und $y = b$.

(Diese Notation unterschlägt, dass $A \vee B$ von der Wahl von a und b abhängt.) Anschaulich gesprochen verkleben wir A und B entlang der Punkte a und b . Der Raum $A \vee B$ heißt die *Einpunktvereinigung von A und B* .⁶⁵

- (2) Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen $x \in X$ ist *einfach*, wenn es eine zusammenziehbare offene Umgebung U von x gibt.

Satz 11.4. *Es seien A und B topologische wegzusammenhängende Räume und $a \in A$ und $b \in B$ einfache Punkte. Dann induzieren die Inklusionsabbildungen einen Isomorphismus*

$$\pi_1(A, a) * \pi_1(B, b) \xrightarrow{\cong} \pi_1(A \vee B, a).$$

Beweis. Wir schreiben $X = A \vee B$ und $x_0 = \{a, b\} \in A \vee B$. Wir bezeichnen mit C eine zusammenziehbare offene Umgebung von a in A und mit D eine zusammenziehbare offene Umgebung von b in B . Wir betrachten dann⁶⁶

$$U := A \cup D \text{ und } V := B \cup C \text{ als Teilmengen von } X.$$

Es folgt aus der Definition der Quotiententopologie, dass U und V offene Teilmengen von X sind. Zudem folgt aus der Zusammenziehbarkeit

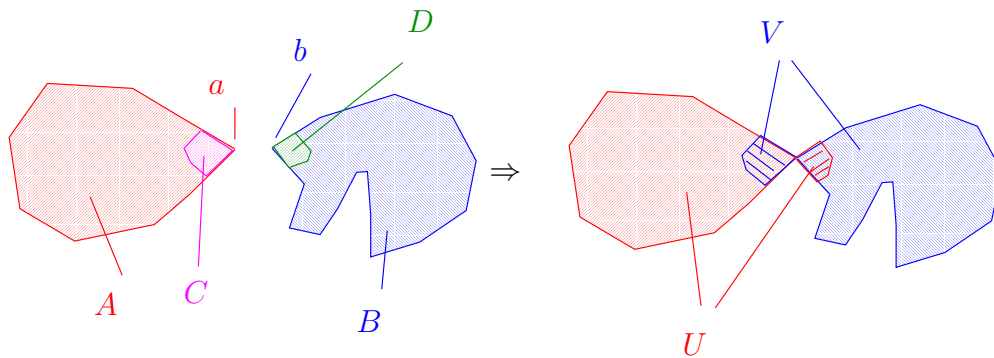


ABBILDUNG 25. Schematisches Bild für den Beweis von Satz 11.4.

von C und D , dass auch $C \cup D \in A \vee B$ zusammenziehbar ist.

⁶⁵Die Einpunktvereinigung $A \vee B$ hängt a priori natürlich von der Wahl der Punkte a und b . Andererseits kann man zeigen, dass wenn A und B wegzusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind, dann hängt der Homöomorphietyp von $A \vee B$ nicht von der Wahl von a und b ab.

⁶⁶Genau gesprochen ist also U das Bild von $A \cup D$ unter der Abbildung $A \sqcup B \rightarrow A \sqcup B / a = b$.

Wir wenden nun Satz 11.3 auf U und V an und erhalten, dass die Abbildung

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_*) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

ein Isomorphismus. Nachdem D zusammenziehbar ist ist die Inklusion $A \rightarrow U$ eine Homotopieäquivalenz und ganz analog ist auch $B \rightarrow V$ eine Homotopieäquivalenz. Also ist die Abbildung

$$\pi_1(A, a) * \pi_1(B, b) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_*) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

eine Verknüpfung von Isomorphismen. □

Beispiel. (1) Wir betrachten $S^1 \vee S^1$ mit A und B ein ‘kleines Intervall’ um je einen Punkt a und b , siehe Abbildung 26. Wir

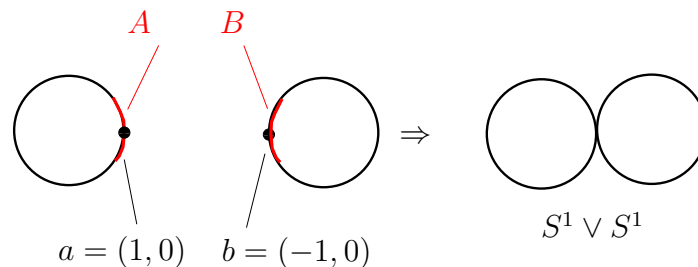


ABBILDUNG 26. Die Einpunktvereinigung von zwei Kreisen.

wissen, dass $\pi_1(S^1, a) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(S^1, b) \cong \mathbb{Z}$. Wir wählen jetzt jeweils einen Erzeuger x beziehungsweise y und verwenden die multiplikative Schreibweise, dann gilt $\pi_1(S^1, a) = \langle x \rangle$ und $\pi_1(S^1, b) = \langle y \rangle$. Satz 11.4, besagt nun, dass die Inklusionsabbildungen einen Isomorphismus

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, a = b) \cong \pi_1(S^1, a) * \pi_1(S^1, b) = \langle x \rangle * \langle y \rangle = \langle x, y \rangle$$

induzieren.

Anders ausgedrückt, es sei x eine Schleife in (S^1, a) und y eine Schleife in (S^1, b) , welche jeweils ein Erzeuger ist. Dann fassen wir beide als Schleifen in $(S^1 \vee S^1, a = b)$ auf, und erhalten, dass $\pi_1(S^1 \vee S^1, a = b) = \langle x, y \rangle$.

11.3. Graphen. Wir wenden uns jetzt den Graphen zu. Diese können entweder abstrakt durch endliche Mengen oder mehr anschaulich als bestimmte Teilmengen von \mathbb{R}^3 aufgefasst werden.

Definition. (1) Ein *Graph* besteht aus einer endlichen Menge E (genannt ‘Eckpunkte’), einer endlichen Menge K (genannt ‘Kanten’) und zwei Abbildungen $i, t : K \rightarrow E$ (initiale und terminale Abbildung).

- (2) Die *topologische Realisierung* $X = X(E, K) = X(E, K, i, t)$ eines Graphen (E, K, i, t) ist der topologische Raum

$$\left(\bigcup_{e \in E} e \cup \bigcup_{k \in K} [0, 1] \times k \right) / \begin{array}{l} i(k) = 0 \times k \\ t(k) = 1 \times k \end{array} \text{ für alle } k \in K.$$

Die topologische Realisierung besteht also aus E Eckpunkten und K Kanten, welche die Eckpunkte nach den Zuordnungen i und t verbinden.

Beispiel. (a) Es sei $E = \mathbb{Z}/n$ und $K = \{(j, j+1)\}_{i \in \mathbb{Z}/n}$ mit $i(j, j+1) = j$ und $t(j, j+1) = j+1$. Die topologische Realisierung ist dann homöomorph zu S^1 .

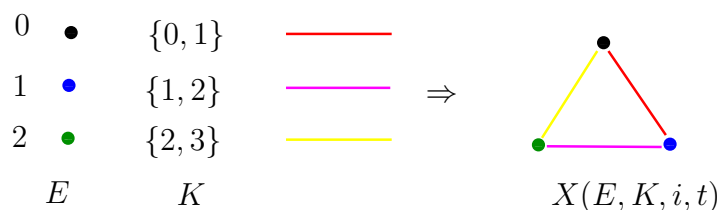


ABBILDUNG 27. Topologische Realisierung von Beispiel (a).

- (b) Es sei $E = \{*\}$ und $K = \{1, \dots, n\}$ mit $i(n) = t(n) = *$. Die topologische Realisierung ist dann homöomorph zur Einpunktvereinigung von n Kopien von S^1 .
- (c) Es sei G eine Gruppe (beispielsweise \mathbb{Z}^2) und E die Menge aller Untergruppen von G . Wir definieren

$$K := \{(U, V) \mid U \subset V \subset \text{Untergruppen von } G\}$$

mit $i(U, V) = U$ und $t(U, V) = V$. Dies ist ebenfalls ein Graph. Wie schaut wohl die topologische Realisierung für die Gruppe $G = \mathbb{Z}/12$ aus?

Definition. Ein *Graph in \mathbb{R}^3* ist eine Teilmenge, welche daraus entsteht, dass man endlich viele Punkte durch endlich viele disjunkte⁶⁷ Kanten verbindet. (Mit Kanten bezeichnen wir hierbei eine Strecke in \mathbb{R}^3 , oder allgemeiner Bilder von injektiven differenzierbaren Abbildungen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.)

Wir überlassen den Beweis des folgenden Lemmas als freiwillige Übungsaufgabe:

⁶⁷Genauer gesagt: disjunkt bis auf die Endpunkte.

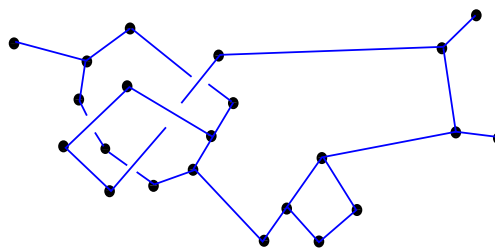


ABBILDUNG 28. Beispiel für einen Graph in \mathbb{R}^3 .

Lemma 11.5. *Es sei (E, K, i, t) ein Graph, dann existiert ein Graph G in \mathbb{R}^3 , so dass G homöomorph zu $X(E, K, i, t)$ ist.*

Es ist auch offensichtlich, wie man einem Graph in \mathbb{R}^3 einen ‘abstrakten’ Graphen (E, K, i, t) zuordnet. Wir werden im Folgenden daher zwischen diesen beiden Vorstellungen von Graphen hin- und herwechseln. Zudem bezeichnen wir oft auch die topologische Realisierung $X(E, K, i, t)$ eines Graphen $G = (E, K, i, t)$ mit G .

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz:

Satz 11.6. *Es sei G ein zusammenhängender Graph⁶⁸ mit e Eckpunkten und k Kanten, dann gilt:*

- (1) G ist homotopieäquivalent zur Einpunktvereinigung von $k - e + 1$ Kreisen,
- (2) $\pi_1(G) \cong$ freie Gruppe mit $k - e + 1$ Erzeugern.

Beweisskizze. Die zweite Aussage ist eine direkte Konsequenz aus der ersten Aussage. Es genügt also (1) zu zeigen.

Es sei K ein Graph. Wenn G genau einen Eckpunkt besitzt, dann ist es offensichtlich, dass G homöomorph zur Einpunktvereinigung von $k - e + 1 = k$ Kreisen ist.

Nehmen wir nun an, dass G mehr als einen Eckpunkt besitzt. Nachdem G zusammenhängend ist, gibt es eine Kante K mit $i(K) \neq t(K)$. Die Kontraktion G' von G entlang K ist der Graph, welcher gegeben ist durch

$$(\{\text{Eckpunkte von } G\} / i(K) = t(K), \{\text{alle Kanten von } G \text{ außer } K\}),$$

⁶⁸ Wir sagen eine Kante K verbindet die Eckpunkte E, F wenn $\{E, F\} = \{i(K), t(K)\}$. Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn es zu allen Eckpunkten E, F weitere Eckpunkte $E = E_1, \dots, E_r = F$ und Kanten K_1, \dots, K_{r-1} gibt, so dass für alle $i = 1, \dots, r - 1$ die Kante K_i die Eckpunkte E_i und E_{i+1} verbindet. Man kann leicht zeigen, dass ein Graph zusammenhängend ist, genau dann, wenn seine topologische Realisierung wegzusammenhängend ist.

mit den offensichtlichen Abbildungen i und t . D.h. wir identifizieren die Eckpunkte $i(K)$ und $t(K)$ und entfernen die Kante K . In Übungsblatt

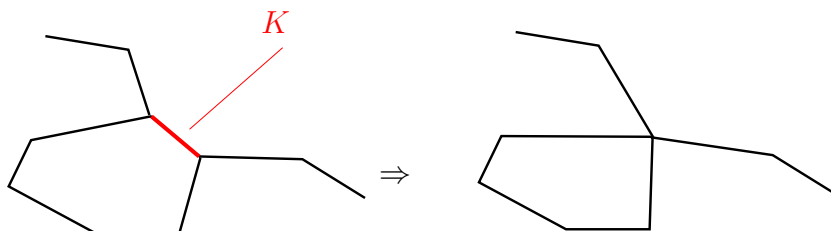


ABBILDUNG 29. Kontraktion entlang der Kante K .

11 werden wir sehen, dass die topologische Realisierung von G und die topologische Realisierung von G' homotopieäquivalent sind. Nachdem G zusammenhängend ist, folgt auch leicht, dass G' zusammenhängend ist. Es ist zudem offensichtlich, dass

$$\begin{aligned} \#\text{Eckpunkte von } G' &= \#\text{Eckpunkte von } G - 1 \\ \#\text{Kanten von } G' &= \#\text{Kanten von } G - 1. \end{aligned}$$

Die Aussage des Satzes folgt nun durch Induktion nach der Zahl der Kanten des Graphen. \square

11.4. **Flächen.** Wir wenden uns jetzt Flächen zu. Die folgende Diskussion ist mathematisch etwas unsauber, kann aber präzisiert werden.

- (1) Wir betrachten zuerst den Torus T und betrachten die Fundamentalgruppe von $F = T \setminus P$, wobei P ein Punkt in T ist. Dann ist F homotopieäquivalent zu einem Graphen mit einem Eckpunkt und zwei Kanten. Dies kann man wie folgt sehen:
 - (a) Betrachten wir die ‘anschauliche Darstellung’ des Torus als Teilmenge von \mathbb{R}^3 , dann veranschaulicht Abbildung 30 diese Tatsache.
 - (b) Wir können auch den Torus abstrakt als $T = [0, 1] \times [0, 1] / \sim$ auffassen. Ein mathematisch präziser Beweis, ausgehend von dieser Beschreibung des Torus wird in den Übungen gegeben.
- (2) Wir betrachten allgemeiner eine geschlossene Fläche S von Geschlecht g und nehmen einen Punkt P heraus.
 - (a) Die ‘anschauliche Darstellung’ der Fläche als Teilmenge von \mathbb{R}^3 wird in Abbildung 31 illustriert. Wir betrachten wiederum $F = S \setminus P$. Wir sehen dann, dass F homotopieäquivalent ist zu einem Graphen mit $2g + 1$ Ecken und

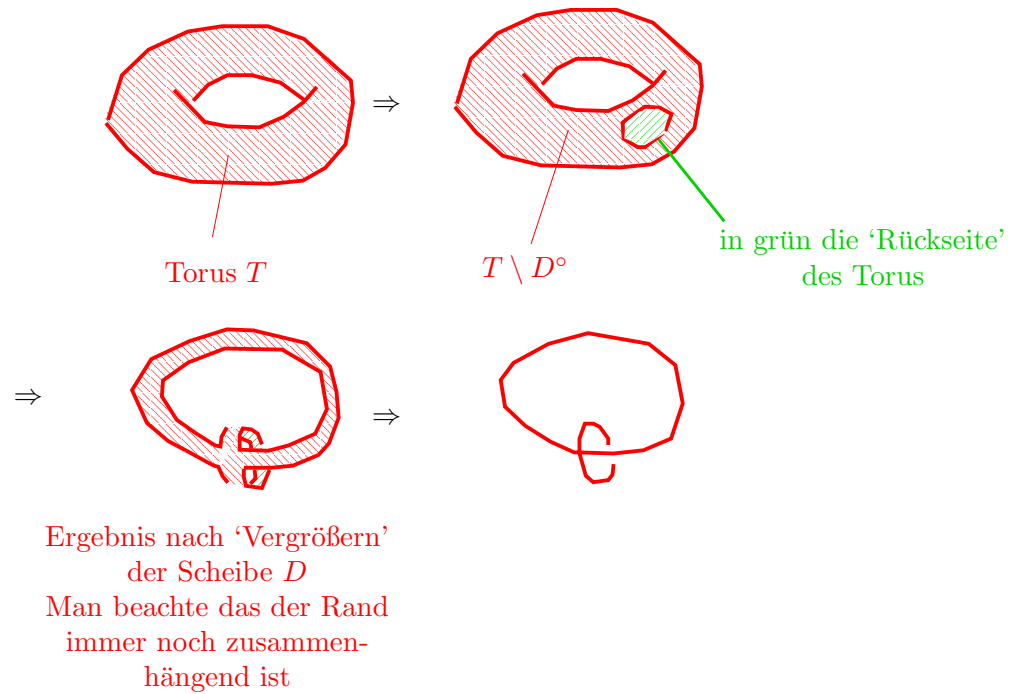


ABBILDUNG 30. Wenn wir einen Punkt aus einem Torus entfernen erhalten wir einen Raum, welcher homotopieäquivalent ist zu einem Graph mit einem Eckpunkt und zwei Kanten.

$4g$ Kanten, es folgt also, dass

$$\pi_1(S \setminus D^\circ) \cong \text{freie Gruppe mit } 2g \text{ Erzeugern} = F_{2g}.$$

- (b) Wir können das auch vielleicht überzeugender anhand des ‘abstrakten Modells’ einer Flächen sehen. In der Tat, die ‘radiale Projektion nach außen’ (siehe Abbildung 32) gibt eine Abbildung von $F \setminus D$ zu den ‘Seiten des $4g$ -Gons (wobei jeweils zwei Seiten identifiziert werden). Dieser Raum ist aber homöomorph zur Einpunktvereinigung von $2g$ Kreisen.

Es seien nun S und T geschlossene Flächen von Geschlecht g und h . Wenn S und T homöomorph sind, dann gilt auch, dass $S \setminus P$ und $T \setminus Q$ für zwei Punkte $P \in S$ und $Q \in T$ homöomorph sind. Aus der obigen Diskussion folgt dann auch, dass S und T nur dann homöomorph sind, wenn $F_{2g} \cong F_{2h}$.

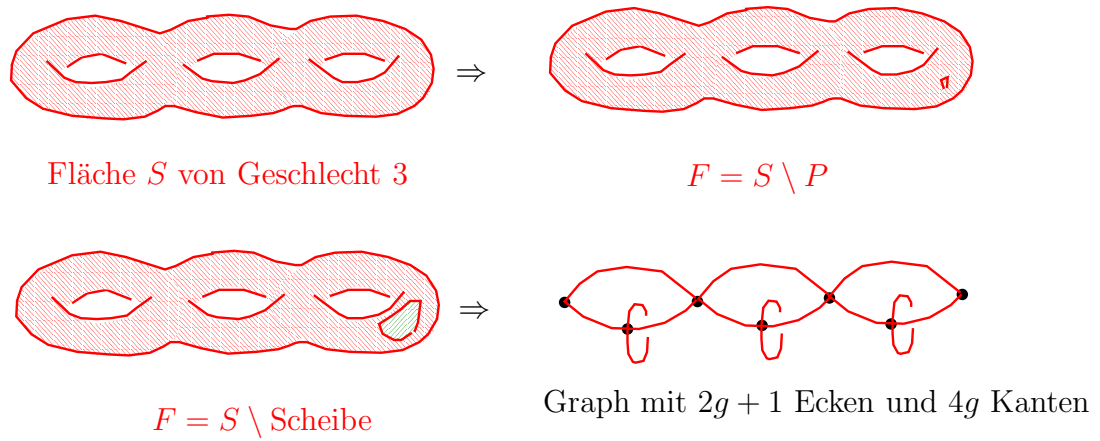
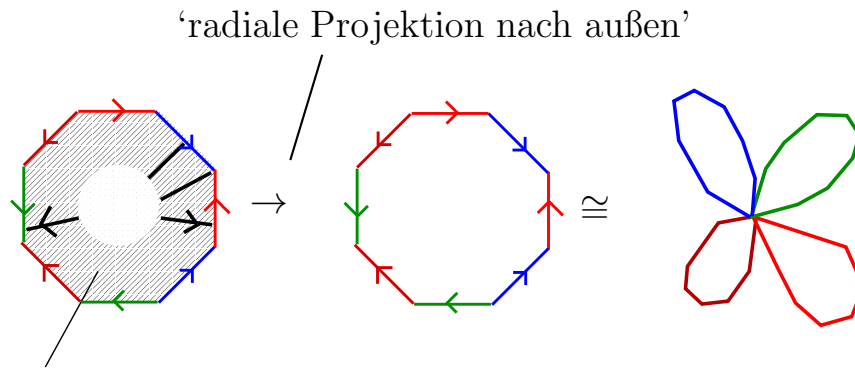


ABBILDUNG 31. Wenn wir einen Punkt aus einer Fläche entfernen erhalten wir einen Raum, welcher homotopieäquivalent ist zu einem Graph.



Fläche minus Scheibe

ABBILDUNG 32. Wenn wir einen Punkt aus einer Fläche entfernen erhalten wir einen Raum, welcher homöomorph zu einem Graphen ist.

Es erscheint offensichtlich, dass $F_k \cong F_l$ genau dann, wenn $k = l$, aber wie können wir das beweisen?

12. DER SATZ VON SEIFERT–VAN KAMPEN II

12.1. Präsentationen von Gruppen. Es sei G eine Gruppe und $A \subset G$ eine Teilmenge. Wir betrachten,

$$\langle\langle A \rangle\rangle := \cap_{A \subset H \triangleleft G},$$

d.h. A ist der Durchschnitt aller normalen Untergruppen H von G , welche A enthalten. Dies ist wiederum eine normale Untergruppe von G ⁶⁹, nämlich die kleinste⁷⁰ normale Untergruppe von G , welche A enthält. Wir nennen $\langle\langle A \rangle\rangle$ die von A normal erzeugte Untergruppe von G .

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $\langle\langle A \rangle\rangle$ die Menge aller Elemente von G ist, welche man als Produkte von Konjugierten von Elementen in A und deren Inversen schreiben kann.⁷¹ D.h.

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \{g_1 a_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1} \cdot g_2 a_2^{\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_l a_l^{\varepsilon_l} g_l^{-1} \mid a_1, \dots, a_l \in A, g_1, \dots, g_l \in G \text{ und } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \in \{-1, 1\}\}.$$

Folgende Definition spielt im Folgenden eine wichtige Rolle:

Definition. Es sei $\{g_1, \dots, g_k\}$ eine Menge von Symbolen. Zudem sei $\{r_1, \dots, r_l\}$ eine Teilmenge der freien Gruppe $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$. Wir definieren dann

$$\langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle := \langle g_1, \dots, g_k \rangle / \langle\langle r_1, \dots, r_l \rangle\rangle.$$

Wir sagen dies ist die Gruppe, welche von g_1, \dots, g_k erzeugt wird mit Relationen r_1, \dots, r_l .

Beispiel. (1) Die Gruppe $\langle g \mid g^k \rangle$ ist isomorph zu \mathbb{Z}/k .⁷²
 (2) Betrachten wir die Gruppe

$$\langle x, y \mid [x, y] \rangle$$

wobei $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ der Kommutator von x und y ist. Was können wir über diese Gruppe aussagen? In $\langle x, y \mid [x, y] \rangle$ gilt, dass

$$yx = \underbrace{yx \cdot y^{-1}x^{-1}xy}_{=e} = \underbrace{yxy^{-1}x^{-1}}_{=(xyx^{-1}y^{-1})^{-1}} \in \langle\langle [x, y] \rangle\rangle \cdot xy = xy.$$

⁶⁹Warum?

⁷⁰Siehe dazu die Bemerkung nach Satz 1.19.

⁷¹In der Tat: die Untergruppe enthält $\langle\langle A \rangle\rangle$ natürlich alle Elemente von A und deren Inversen, da $\langle\langle A \rangle\rangle$ eine normale Untergruppe ist, enthält $\langle\langle A \rangle\rangle$ dann auch alle Elemente von der Form gag^{-1} , $g \in G, a \in A$. Nachdem $\langle\langle A \rangle\rangle$ eine Untergruppe ist, enthält $\langle\langle A \rangle\rangle$ auch alle Produkte von solchen Elementen.

Umgekehrt bilden solche Produkte eine normale Untergruppe von G , welche A enthält.

⁷²Warum?

Man kann sich nun davon überzeugen, dass jedes Element in $\langle x, y \mid [x, y] \rangle$ in der Form $x^m y^n$ geschrieben werden kann ⁷³, und es gilt

$$x^m y^n \cdot x^r y^s = x^{m+r} y^{n+s}.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob jedes Element in $\langle x, y \mid [x, y] \rangle$ *eindeutig* als $x^m y^n$ geschrieben werden kann. Um diese Frage beantworten zu können benötigen wir den nächsten Satz.

- (3) Wir schreiben Relationen auch oft als Gleichungen, beispielsweise schreiben wir oft

$$\langle x, y \mid xy = yx \rangle = \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} = e \rangle = \langle x, y \mid [x, y] \rangle.$$

- (4) Wenn die Menge $\{g_i\}_{i \in I}$ die leere Menge ist, dann definieren wir die dazugehörige Gruppe als die triviale Gruppe, d.h. $\langle \mid \rangle = \{e\}$.

Folgenden Satz werden wir immer wieder verwenden:

Satz 12.1. *Es sei $\{g_1, \dots, g_k\}$ eine Menge von Symbolen und es sei $\{r_1, \dots, r_l\}$ eine Teilmenge der freien Gruppe $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$. Wir betrachten*

$$\pi := \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle.$$

Es sei $\alpha: \langle g_1, \dots, g_k \rangle \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus, so dass $\alpha(r_j) = e \in G$ für alle $j = 1, \dots, l$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\beta: \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle \rightarrow G$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(g_1, \dots, g_k) & \longrightarrow & \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & G. \end{array}$$

⁷³In der Tat: zum einen gilt in π , dass

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= xy^{-1} \cdot \underbrace{x^{-1}yy^{-1}x}_{=e} = \underbrace{xy^{-1}x^{-1}y}_{=y^{-1}(yxy^{-1}x^{-1})y} \cdot y^{-1}x = y^{-1}x. \\ &= y^{-1}(xyx^{-1}y^{-1})^{-1}y \\ &\in \langle [x, y] \rangle \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass in der Gruppe π die Elemente x und y sowie x und y^{-1} kommutieren. Analog zeigt man noch, dass x^{-1} und y und x^{-1} und y^{-1} kommutieren. Wenn wir nun ein beliebiges Produkt in den Potenzen von x und y in π betrachten, dann können wir dieses in π zu einem Produkt der Form $x^m y^n$ umordnen. Beispielsweise gilt in π , dass

$$x^3 y^2 x^{-1} y = x^3 y \cdot y x^{-1} \cdot y = x^3 y \cdot x^{-1} y \cdot y = x^3 \cdot y x^{-1} \cdot y^2 = x^3 \cdot x^{-1} y \cdot y^2 = x^2 y^3.$$

Bemerkung. Wir schreiben

$$r_j := g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_{n_j}}, j = 1, \dots, l.$$

Etwas salopp gesprochen besagt der Satz also, dass eine Zuordnung $g_i \rightarrow a_i \in G, i = 1, \dots, k$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi := \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle \rightarrow G$$

induziert, wenn die Relationen auf das triviale Element in G geschickt werden, d.h. wenn

$$a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_{n_j}} = e \in G, \text{ f\u00fcr alle } j = 1, \dots, l.$$

Beweis. Wir erinnern zuerst an folgende Tatsache aus der Gruppentheorie: Es sei $\alpha : A \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und $H \subset A$ eine normale Untergruppe. Dann existiert ein Homomorphismus $\beta : A/H \rightarrow G$, so dass

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/H \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & G \end{array}$$

kommutiert, genau dann, wenn $H \subset \text{Ker}(\alpha)$. In der Tat, wenn eine solche Abbildung β existiert, dann gilt nat\u00fcrlich, dass $H = \text{Ker}(A \rightarrow A/H) \subset \text{Ker}(\alpha)$. Andererseits, wenn $H \subset \text{Ker}(\alpha)$, dann definieren wir $\beta(aH) := \alpha(a)$, und nachdem $H \subset \text{Ker}(\alpha)$ ist diese Definition unabh\u00e4ngig von der Wahl des Repr\u00e4sentanten a .

Wir wenden uns jetzt dem Beweis des Satzes zu. Wir schreiben $F := \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ und $\Gamma := \langle \langle r_1, \dots, r_l \rangle \rangle$. Es sei $\alpha : F \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus, so dass $\alpha(r_j) = e \in G$ f\u00fcr alle $j = 1, \dots, l$. Nachdem also $\text{Ker}(\alpha)$ eine normale Untergruppe von π ist, welche alle r_j enth\u00e4lt folgt aus der Definition von $\Gamma = \langle \langle r_1, \dots, r_l \rangle \rangle$, dass $\Gamma \subset \text{Ker}(\alpha)$. Wir k\u00f6nnen also jetzt die obige Tatsache aus der Gruppentheorie anwenden. □

Beispiel. (1) Betrachten wir wieder die Gruppe

$$\pi = \langle x, y \mid [x, y] \rangle.$$

Wir haben oben schon gesehen, dass

$$x^m y^n \cdot x^r y^s = x^{m+r} y^{m+s} \text{ f\u00fcr alle } m, n, r, s \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt also, dass

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}^2 &\mapsto \pi = \langle x, y \mid [x, y] \rangle \\ (m, n) &\mapsto x^m y^n \end{aligned}$$

ein Homomorphismus ist. Andererseits folgt aus Satz 12.1, dass die Zuordnung $x \mapsto (1, 0)$ und $y \mapsto (0, 1)$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\psi: \pi = \langle x, y \mid [x, y] \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

definiert. Es ist offensichtlich, dass ϕ und ψ zueinander inverse Abbildungen sind, d.h. $\pi \cong \mathbb{Z}^2$.

(2) Ganz analog zum obigen Beispiel zeigt man, dass

$$\mathbb{Z}^m \cong \langle x_1, \dots, x_m \mid [x_i, x_j], \text{ wobei } i, j \in \{1, \dots, m\} \rangle.$$

(3) Eine Gruppe kann viele verschiedene Präsentationen besitzen. Beispielsweise folgt leicht aus den Definitionen, dass

$$\begin{aligned} \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_i, \dots, r_l \rangle &= \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, gr_i g^{-1}, \dots, r_l \rangle \text{ für beliebiges } g, \\ \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_i, \dots, r_l \rangle &= \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_i r_j, \dots, r_l \rangle \text{ für } i \neq j, \\ \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle &= \langle g_1, \dots, g_k, x \mid r_1, \dots, r_l, x \rangle. \end{aligned}$$

Es sei π eine Gruppe. Wir nennen

$$[\pi, \pi] := \langle \langle [x, y] \mid x, y \in \pi \rangle \rangle$$

die *Kommutatoruntergruppe* von π .⁷⁴ Die Gruppe $\pi/[\pi, \pi]$ ist abelsch, denn für alle $g, h \in \pi$ gilt

$$gh[\pi, \pi] = hg \cdot g^{-1}h^{-1}gh[\pi, \pi] = hg \cdot \underbrace{[g^{-1}, h^{-1}]}_{\in [\pi, \pi]}[\pi, \pi] = hg[\pi, \pi].$$

Wir nennen $\pi/[\pi, \pi]$ die *Abelianisierung* von π .

In den Übungen werden wir zeigen, dass die Abelianisierung ‘der größte abelsche Quotient’ von π ist. Genauer gesagt werden wir zeigen, dass wenn $\alpha: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus zu einer abelschen Gruppe ist, dann existiert genau ein Homomorphismus $\beta: G/[G, G] \rightarrow H$, so

⁷⁴Man beachte, dass die Kommutatorgruppe die von den Kommutatoren normal erzeugte Untergruppe von π ist, d.h. jedes Element g in $[\pi, \pi]$ ist von der Form

$$a_1[g_1, h_1]a_1^{-1} \cdot a_2[g_2, h_2]a_2^{-1} \cdots a_k[g_k, h_k]a_k^{-1}.$$

Nachdem allgemein gilt, dass

$$a[g, h]a^{-1} = aghg^{-1}h^{-1}a^{-1} = aga^{-1}aha^{-1}ag^{-1}a^{-1}ah^{-1}a^{-1} = [aga^{-1}, aha^{-1}]$$

folgt also, dass

$$g = [a_1g_1a_1^{-1}, a_1h_1a_1^{-1}] \cdot [a_2g_2a_2^{-1}, a_2h_2a_2^{-1}] \cdots [a_kg_ka_k^{-1}, a_kh_ka_k^{-1}].$$

D.h. jedes Element in $[\pi, \pi]$ ist ein Produkt von Kommutatoren.

dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/[G, G] \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & H. \end{array}$$

Beispiel. Wenn $F = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ eine freie Gruppe in m Erzeugern ist, dann gilt $F/[F, F] \cong \mathbb{Z}^m$.

Folgendes Lemma überlassen wir als freiwillige Übungsaufgabe:

Lemma 12.2. *Es sei*

$$\pi = \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle$$

eine Präsentation, dann gilt

$$\pi/[\pi, \pi] = \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l, [g_i, g_j]_{i,j=1,\dots,k} \rangle.$$

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz, welcher ebenfalls in den Übungen bewiesen wird:

Satz 12.3. *Wir bezeichnen mit G die Kategorie der Gruppen und mit A die Kategorie der abelschen Gruppen.⁷⁵ Die Zuordnung $\pi \rightarrow \pi/[\pi, \pi]$ definiert dann einen Funktor $F : G \rightarrow A$.*

12.2. Das amalgamierte Produkt von Gruppen.

Satz 12.4. *Es seien $\alpha: G \rightarrow A$ und $\beta: G \rightarrow B$ zwei Gruppenhomomorphismen. Dann gibt es bis auf Isomorphie⁷⁶ genau ein Tripel*

$$(H, \varphi: A \rightarrow H, \psi: B \rightarrow H)$$

mit folgenden Eigenschaften:

⁷⁵Genauer gesagt ist G die Kategorie mit

$\text{Ob}(G) :=$ alle Gruppen,
 $\text{Mor}(X, Y) := \text{Hom}(X, Y) =$ alle Gruppenhomomorphismen von X nach Y ,

und A ist die Kategorie mit

$\text{Ob}(A) :=$ alle abelschen Gruppen,
 $\text{Mor}(X, Y) := \text{Hom}(X, Y) =$ alle Gruppenhomomorphismen von X nach Y .

⁷⁶D.h. wenn $(H, \varphi: A \rightarrow H, \psi: B \rightarrow H)$ und $(H', \varphi': A \rightarrow H', \psi': B \rightarrow H')$ beide die Eigenschaften (a) und (b) besitzen, dann gibt es einen Isomorphismus $\Theta : H \rightarrow H'$, so dass $\varphi' = \Theta \circ \varphi$ und $\psi' = \Theta \circ \psi$.

(a) das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow \beta & & \downarrow \varphi \\ B & \xrightarrow{\psi} & H \end{array} ,$$

(b) wenn $(H', \varphi' : A \rightarrow H', \psi' : B \rightarrow H')$ ein weiteres Tripel ist, welches Eigenschaft (a) besitzt, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\Theta : H \rightarrow H'$, so dass $\varphi' = \Theta \circ \varphi$ und $\psi' = \Theta \circ \psi$.

Wir nennen das Tripel das *freie Produkt von A und B mit Amalgam G* und bezeichnen H mit $A *_G B$. In der Notation unterschlagen wir also α und β . Wir nennen oft $A *_G B$ das *freie Produkt von A und B mit Amalgam G* und erwähnen dabei die Rolle von φ und ψ nicht. Wir nennen $A *_G B$ manchmal auch das *amalgamierte Produkt von A und B*.

Beweisskizze. Wir betrachten

$$H := A * B / \langle \{\alpha(g)\beta(g)^{-1}\}_{g \in G} \rangle.$$

Wir definieren dann $\varphi : A \rightarrow H$ als Verknüpfung der Abbildungen

$$A \rightarrow A * B \rightarrow H = A * B / \langle \{\alpha(g)\beta(g)^{-1}\}_{g \in G} \rangle,$$

und ganz analog definieren wir $\psi : B \rightarrow H$. Es folgt aus der Konstruktion von H , dass $\varphi(\alpha(g)) = \psi(\beta(g))$ für alle $g \in G$. Das Tripel $(H, \varphi : A \rightarrow H, \psi : B \rightarrow H)$ hat dann offensichtlich Eigenschaft (a).

Es sei nun $(H', \varphi' : A \rightarrow H', \psi' : B \rightarrow H')$ ein weiteres Tripel, welches Eigenschaft (a) besitzt. Wir betrachten folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow \beta & & \downarrow \varphi \\ B & \xrightarrow{\psi} & H \end{array} , \quad \begin{array}{c} \varphi' \\ \psi' \\ \searrow \\ H' \end{array}$$

Die Abbildungen φ' und ψ' definieren einen Homomorphismus

$$A * B \rightarrow H'.$$

Nachdem $\varphi' \circ \alpha = \psi' \circ \beta$ folgt, dass der Homomorphismus $A * B \rightarrow H'$ einen Homomorphismus $\Theta : H \rightarrow H'$ induziert, welcher dann die Eigenschaften besitzt, dass $\varphi' = \Theta \circ \varphi$ und $\psi' = \Theta \circ \psi$.

Nachdem H von den Elementen in A und B erzeugt ⁷⁷ wird, folgt auch, dass Θ eindeutig bestimmt ist.

In den Übungen werden wir sehen, dass das Tripel $((H, \varphi: A \rightarrow H, \psi: B \rightarrow H))$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. \square

Den Beweis der folgenden Aussage überlassen wir als freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 12.5. *Es seien $\alpha: G \rightarrow A$ und $\beta: G \rightarrow B$ zwei Gruppenhomomorphismen. Zudem seien*

$$A = \langle x_1, \dots, x_k \mid r_1, \dots, r_p \rangle$$

und

$$B = \langle y_1, \dots, y_l \mid s_1, \dots, s_q \rangle.$$

Präsentationen von A und B , und es seien g_1, \dots, g_m Erzeuger von G . Dann ist $A *_G B$ gegeben durch⁷⁸

$$\langle g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l \mid r_1, \dots, r_p, s_1, \dots, s_q \text{ und } \alpha(g_i) = \beta(g_i), i = 1, \dots, m \rangle.$$

12.3. Der allgemeine Satz von Seifert-van Kampen.

Satz 12.6. (Seifert–van Kampen) *Es sei X ein topologischer Raum und $X = U \cup V$ eine Zerlegung von X in zwei offene Teilmengen U und V , so dass $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Es sei $x_0 \in U \cap V$, dann gilt ⁷⁹*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

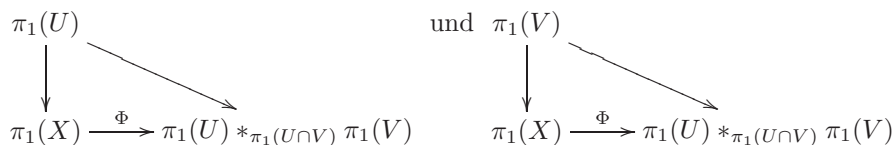
80

⁷⁷D.h. jedes Element in H kann geschrieben werden als Produkt von Elementen in A und B , oder anders ausgedrückt, die Abbildung $A * B \rightarrow H$ ist surjektiv.

⁷⁸Wobei $\varphi: A \rightarrow A *_G B$ und $\psi: B \rightarrow A *_G B$ die offensichtlichen Abbildungen sind.

⁷⁹Hierbei bezeichnen wir mit $\pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$ das freie Produkt der Gruppen $\pi_1(U, x_0)$ und $\pi_1(V, x_0)$ mit Amalgam $\pi_1(U \cap V, x_0)$, wobei die Abbildungen $\pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$ und $\pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)$ induziert sind durch die Inklusionen $U \cap V \rightarrow U$ und $U \cap V \rightarrow V$.

⁸⁰Genauer gesagt gibt es genau einen Isomorphismus $\Phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$, so dass folgende Diagramme kommutieren



wobei wir alle Gruppen bezüglich des Basispunktes x_0 betrachten.

Wir geben auch hier nur eine Beweisskizze. Ein ausführlicher Beweis wird in Kapitel 5.3 von Stöcker-Zieschang: Algebraische Topologie gegeben.

Beweisskizze. Wir betrachten die Abbildungen $\pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$ und $\pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)$ und das dazugehörige amalgamierte Produkt

$$\pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

Die Abbildungen $\pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ haben die Eigenschaft, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U, x_0) \\ \downarrow & & \searrow \\ \pi_1(V, x_0) & & \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

Aus der Definition des amalgamierten Produkts folgt nun, dass es genau eine Abbildung

$$\pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \\ & \searrow & \searrow \\ & & \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass diese Abbildung injektiv und surjektiv ist.

Wir wenden uns erst der Surjektivität zu. Wir betrachten dazu folgendes kommutative Diagramm ⁸¹ von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

⁸¹Was sind die Abbildungen, und warum kommutiert das Diagramm?

Es folgt aus Lemma 11.2, dass die diagonale Abbildung surjektiv ist, insbesondere ist dann auch die horizontale Abbildung surjektiv.

Wir wenden uns nun der Injektivität zu. Es sei a ein Element im Kern der Abbildung. Aus der Konstruktion des amalgamierten Produkts folgt, dass

$$a = g_1 h_1 \dots g_k h_k$$

wobei die Elemente g_i und h_i abwechselnd repräsentiert werden können durch Schleifen in (U, x_0) und Schleifen in (V, x_0) . Wir nehmen nun an, dass

$$a = g_1 h_1 \dots g_k h_k$$

solch ein Produkt minimaler Länge ist. O.B.d.A. nehmen wir an, dass g_1, \dots, g_k durch Schleifen in (U, x_0) und h_1, \dots, h_k durch Schleifen in (V, x_0) repräsentiert werden können.

Wir wollen zeigen, dass $k = 0$, d.h. dass a das triviale Element ist. Nehmen wir nun an, dass $k > 0$. Mit den Methoden des Beweises von Satz 11.3 kann man mit etwas Aufwand zeigen, dass g_1 homotop zu einer Schleife g'_1 in $(U \cap V, x_0)$ ist. Also können wir $g_1 h_1$ durch die Schleife $g'_1 h_1$ in (V, x_0) repräsentieren, und erhalten eine kürzere Produktschreibweise von a . \square

Wir wollen jetzt den Satz von Seifert–van Kampen verwenden um die Fundamentalgruppen von Flächen zu bestimmen.

(A) Betrachten wir zuerst den Torus T . Dabei seien U und V offene Teilmengen von T , wobei V eine offene Scheibe ist, und $U \cap V$ ein offener Ring. Es sei $P \in U \cap V$ ein Punkt. (Siehe Abbildung 33.) Dann folgt aus dem Satz von Seifert–van Kampen, dass

$$\pi_1(T, P) \cong \pi_1(U, P) *_{\pi_1(U \cap V, P)} \pi_1(V, P).$$

Hierbei gilt:

- (1) $\pi_1(V, P)$ ist trivial, nachdem $V \cong D^2$ einfach zusammenhängend ist. Wir wählen jetzt für $\pi_1(V, P)$ die Präsentation mit der leeren Menge an Erzeugern und Relationen.
- (2) $\pi_1(U, P)$ ist die freie Gruppe in den Erzeugern x und y , nachdem U homotopieäquivalent ist zu einem Graph mit einem Eckpunkt und zwei Kanten. Wir wählen jetzt für $\pi_1(U, P)$ die Präsentation $\langle x, y \rangle$.
- (3) $\pi_1(U \cap V, P) \cong \mathbb{Z}$, nachdem $U \cap V$ homotopieäquivalent zu S^1 ist.

Wir wählen nun einen Erzeuger von g von $\pi_1(U \cap V)$, welcher ‘gegen den Uhrzeigersinn’ einmal den Ring durchläuft. Betrachten wir nun g

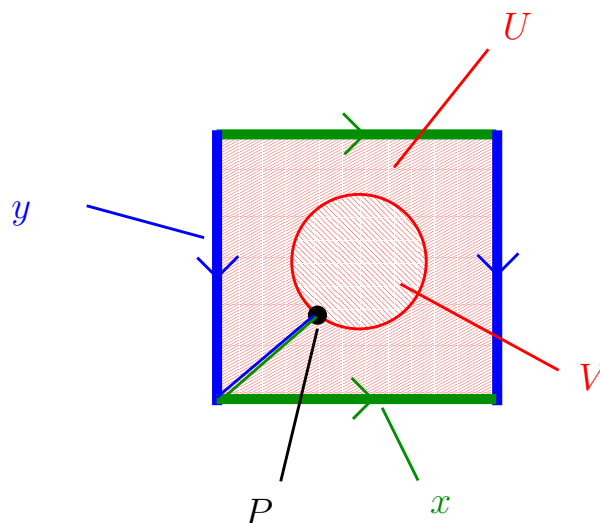


ABBILDUNG 33. Zerlegung von einem Torus in offene Teilmengen U und V , wobei sich U und V in einem ‘dünnen’ Ring überlappen.

als Element in $\pi_1(U, P) = \langle x, y \rangle$, dann ist $g = xy^{-1}x^{-1}y$. Es folgt also aus Lemma 12.5, dass

$$\begin{aligned} & \pi_1(T, P) \\ & \cong \langle x, y \mid \text{Bild von } g \text{ in } \langle x, y \rangle = \text{Bild von } g \text{ in der trivialen Gruppe} \rangle \\ & = \langle x, y \mid xy^{-1}x^{-1}y \rangle = \langle x, y \mid yxy^{-1}x^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten also wiederum, dass die Fundamentalgruppe des Torus die freie abelsche Gruppe \mathbb{Z}^2 ist.⁸²

(B) Betrachten wir nun eine Fläche F von Geschlecht 2. Dabei seien U und V offene Teilmengen von T , wobei V eine offene Scheibe ist, und $U \cap V$ ein offener Ring. Es sei $P \in U \cap V$ ein Punkt. (Siehe Abbildung 34.) Dann folgt aus dem Satz von Seifert–van Kampen, dass

$$\pi_1(T, P) \cong \pi_1(U, P) *_{\pi_1(U \cap V, P)} \pi_1(V, P).$$

Hierbei gilt:

- (1) $\pi_1(V, P)$ ist trivial.
- (2) U homotopieäquivalent ist zu einem Graph mit einem Eckpunkt und vier Kanten, also $\pi_1(U, P)$ ist die freie Gruppe in den Erzeugern x_1, y_1, x_2, y_2 . Wir wählen jetzt für $\pi_1(U, P)$ die Präsentation $\langle x_1, y_1, x_2, y_2 \rangle$.

⁸²Uff.

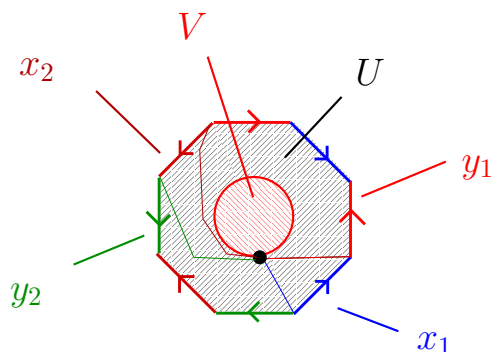


ABBILDUNG 34. Zerlegung der Fläche von Geschlecht 2 in offene Teilmengen U und V .

(3) $\pi_1(U \cap V, P) \cong \mathbb{Z}$, nachdem $U \cap V$ homotopieäquivalent zu S^1 ist.

Wir wählen nun wiederum einen Erzeuger von g von $\pi_1(U \cap V)$, welcher ‘gegen den Uhrzeigersinn’ einmal den Ring durchläuft. Betrachten wir nun g als Element in $\pi_1(U, P) = \langle x_1, y_1, x_2, y_2 \rangle$, dann ist

$$g = x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} = [x_1, y_1][x_2, y_2].$$

Es folgt also aus Lemma 12.5, dass

$$\begin{aligned} \pi_1(F, P) &\cong \langle x_1, y_1, x_2, y_2 \mid \text{Bild von } g \text{ in } \langle x_1, y_1, x_2, y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1, x_2, y_2 \mid \text{Bild von } g \text{ in der trivialen Gruppe} \rangle \\ &= \langle x_1, y_1, x_2, y_2 \mid [x_1, y_1][x_2, y_2] \rangle. \end{aligned}$$

Ganz analog zeigt man natürlich folgenden Satz:

Satz 12.7. *Es gilt*

$$\pi_1(\text{Fläche von Geschlecht } g) = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \mid [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g] \rangle.$$

Wir beweisen jetzt folgendes Lemma:

Lemma 12.8. *Es sei F eine Fläche von Geschlecht g , dann gilt*

$$\pi_1(F) / [\pi_1(F), \pi_1(F)] \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

Die abelschen Gruppen \mathbb{Z}^k und \mathbb{Z}^l sind isomorph genau dann, wenn $k = l$. Dies folgt zum Beispiel aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen. Zudem gilt für homöomorphe wegzusammenhängende Räume X und Y , dass $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$, aber auch, nach Satz 12.3, dass

$$\pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] \cong \pi_1(Y) / [\pi_1(Y), \pi_1(Y)].$$

Wir erhalten nun also folgendes Korollar zum obigen Lemma:

Korollar 12.9. *Es sei $g, h \in \mathbb{N}$. Dann sind die Flächen von Geschlecht g und h homöomorph genau dann, wenn $g = h$.*

Wir wenden uns jetzt dem Beweis von Lemma 12.8 zu:

Beweis von Lemma 12.8. Wir bezeichnen mit F die Fläche von Geschlecht g und wir bezeichnen mit G die freie Gruppe in $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$. Aus den Definitionen und aus Satz 12.7 folgt, dass

$$\begin{aligned} \pi_1(F)/[\pi_1(F), \pi_1(F)] &\cong \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \mid \underbrace{[x_1, y_1] \dots [x_g, y_g]}_{\in [G, G]}, [G, G] \rangle \\ &\cong \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \mid [G, G] \rangle \\ &\cong G/[G, G] \\ &\cong \mathbb{Z}^{2g}. \end{aligned}$$

□

13. EIN ABSTECHER IN DIE KNOTENTHEORIE

13.1. Definitionen.

Definition. Es seien $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^3$ Punkte mit $P_n = P_1$, so dass für $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt:

$$\overline{P_i P_{i+1}} \cap \overline{P_j P_{j+1}} = \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } i+1 \neq j \text{ mod } n \\ P_i, & \text{wenn } i+1 = j \text{ mod } n. \end{cases}$$

Wir bezeichnen dann

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}} \subset \mathbb{R}^3$$

als *Knoten*.

Ein Knoten in unserem Sinne ist also ein geschlossener endlicher *Polygonzug* in \mathbb{R}^3 ohne Selbstschnitte.

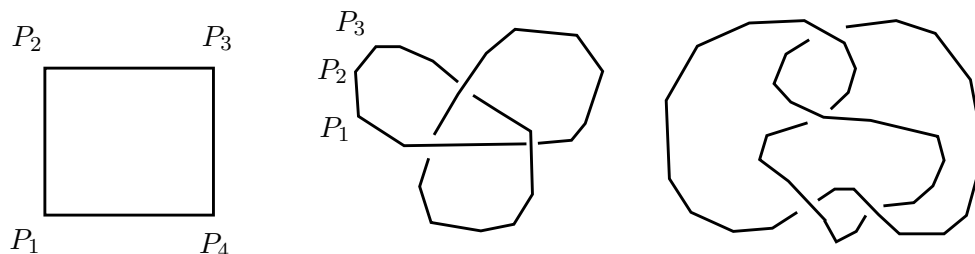


ABBILDUNG 35. Der triviale Knoten, der Kleeblattknoten und der Achter-Knoten.

Eine *elementare Transformation* eines Knotens besteht darin eine Kante AB durch zwei Kanten AC und CB zu ersetzen, wobei wir die Bedingung stellen, dass das Dreieck ABC den Knoten nur in der Strecke AB schneidet. Wir sagen, dass zwei Knoten äquivalent sind, wenn

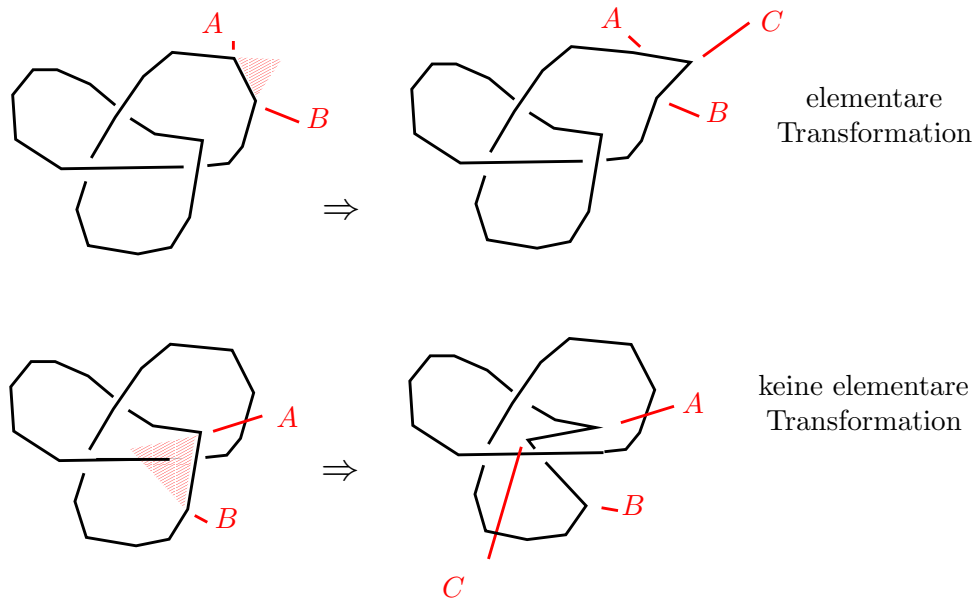


ABBILDUNG 36. Beispiel einer elementaren Transformation und Beispiel einer nicht erlaubten Transformation.

man diese durch elementare Transformationen ineinander überführen kann.⁸³ Beispielsweise kann man sich leicht davon überzeugen, dass die drei Knoten in Beispiel 37 äquivalent sind.

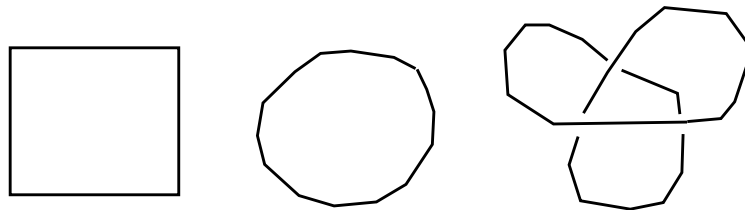


ABBILDUNG 37. Zwei äquivalente Knoten.

Die offensichtliche Frage ist nun, wie können wir zeigen, dass der Kleeblattknoten nicht trivial ist, d.h. nicht äquivalent zum trivialen Knoten ist?

⁸³Anschaulich gesprochen sind also zwei Knoten äquivalent, wenn Sie durch 'Verschiebungen' ineinander übergeführt werden können.

Satz 13.1. *Es seien K und L äquivalente Knoten, dann sind $\mathbb{R}^3 \setminus K$ und $\mathbb{R}^3 \setminus L$ homöomorph, insbesondere gilt*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L).$$

Beweisskizze. Es folgt aus der Definition, dass es genügt diesen Satz zu zeigen für zwei Knoten, welche durch eine einzige elementare Transformationen ineinander übergeführt werden können. Für eine einzige elementare Transformationen ineinander kann man den Homöomorphismus explizit hinschreiben. Allerdings ist das etwas mühsam und nicht besonders erhellend, und wir überlassen dies daher dem Leser als freiwillige Übungsaufgabe. \square

13.2. Die Wirtinger-Präsentation. Es sei K ein Knoten in \mathbb{R}^3 . Wir wollen nun eine Präsentation für $\mathbb{R}^3 \setminus K$ finden. Nach einer endlichen Zahl von elementaren Transformationen können wir annehmen, dass die Projektion von K auf die Ebene $E := \mathbb{R}^2 \times 0$ nur endlich viele Doppelpunkte besitzt und nie mehr als zwei Punkte von K auf einen Punkt in der Ebene E projiziert werden. Zudem können wir annehmen, dass K in $\mathbb{R}^2 \times [-1, 1]$ liegt. Wir sagen, dass solch ein Knoten in *regulärer Lage* ist.

Wir wählen eine Orientierung für K (d.h. eine Durchlaufrichtung, oder genauer gesagt, eine Anordnung der Eckpunkte). Wir bezeichnen nun mit B_1, \dots, B_k der Reihe nach die Streckenabschnitte (oder Bögen) von K , welche wir in der Projektion sehen. Für jeden Bogen B_i wählen wir eine Schleife x_i in P , welche aus einer Strecke von P fast bis B_i besteht und aus einer Schleife um B_i , welche B_i einmal positiv umläuft ('rechte Handregel'), und dann die vorher gewählte Strecke zurück zu P entlang läuft.

In Abbildung 38 betrachten wir den Kleeblattknoten und wir zeigen x_1 . Von x_2 und x_3 zeigen wir einen Ausschnitt. Die Endpunkte der gezeigten Abschnitte müssen nun noch jeweils mit P durch eine Strecke verbunden werden.

Wir unterscheiden jetzt positive und negative Kreuzungen. Wir sagen eine Kreuzung ist *positiv*, wenn der untere Strang vom oberen Strang aus gesehen (mit der gegebenen Orientierung) von rechts nach links geht. Andernfalls nennen wir die Kreuzung negativ.⁸⁴ Man beachte, dass diese Definition nicht von der Orientierung des Knoten abhängt, nachdem eine Umorientierung des Knotens die Orientierung

⁸⁴Man kann dies natürlich auch mathematisch sauber formulieren, wenn $v \in \mathbb{R}^2$ der Richtungsvektor des unteren Stranges ist und wenn $w \in \mathbb{R}^2$ der Richtungsvektor des oberen Stranges ist, dann ist die Kreuzung positiv, wenn $\det(vw) > 0$.

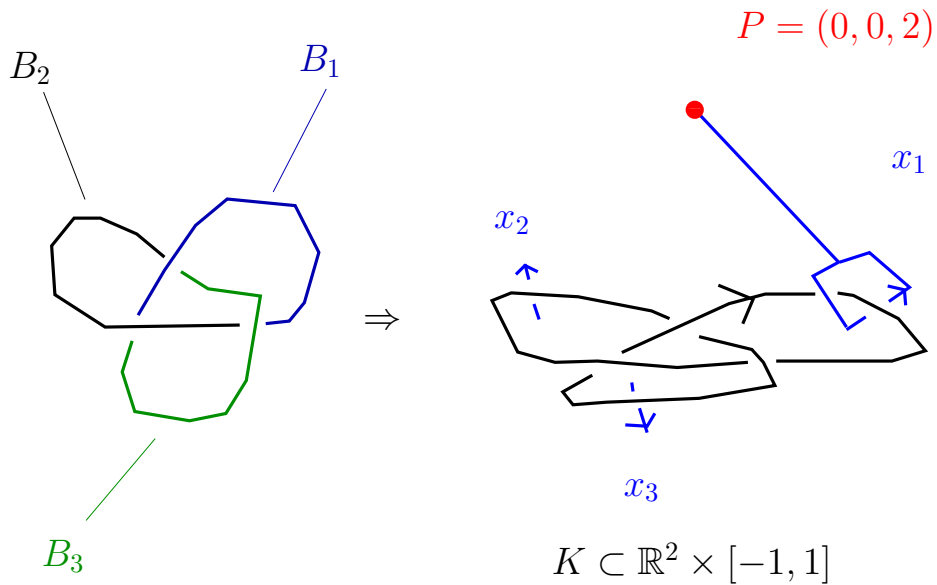


ABBILDUNG 38. Der Kleeblattknoten mit den Schleifen x_1, x_2 und x_3 .

von beiden Strängen an einer Kreuzung ändert. Jeder Kreuzungspunkt gibt uns nun eine Relation wie in Abbildung 39.

Wir können jetzt folgenden Satz formulieren:

Satz 13.2. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Knoten in regulärer Lage mit mindestens einer Kreuzung. Wir setzen $P := (0, 0, 2)$. Wir nummerieren die Bögen mit $1, \dots, k$ und bezeichnen mit x_1, \dots, x_k die dazugehörigen Schleifen in P . Wir durchlaufen die Kreuzungspunkte, an diesen werden die Bögen ⁸⁵ x_i und x_{i+1} durch einen Bogen $x_{s(i)}$ getrennt. Wir setzen*

$$r_i := x_i^{-1} x_{s(i)} x_{i+1} x_{s(i)}^{-1} \text{ bei einer positiven Kreuzung,}$$

$$r_i := x_i^{-1} x_{s(i)}^{-1} x_{i+1} x_{s(i)} \text{ bei einer negativen Kreuzung.}$$

Dann gilt

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x_1, \dots, x_k \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

Eine solche Präsentation von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ wird eine *Wirtinger-Präsentation* ⁸⁶ genannt.

⁸⁵Wir betrachten die Indizes modulo k .

⁸⁶http://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Wirtinger

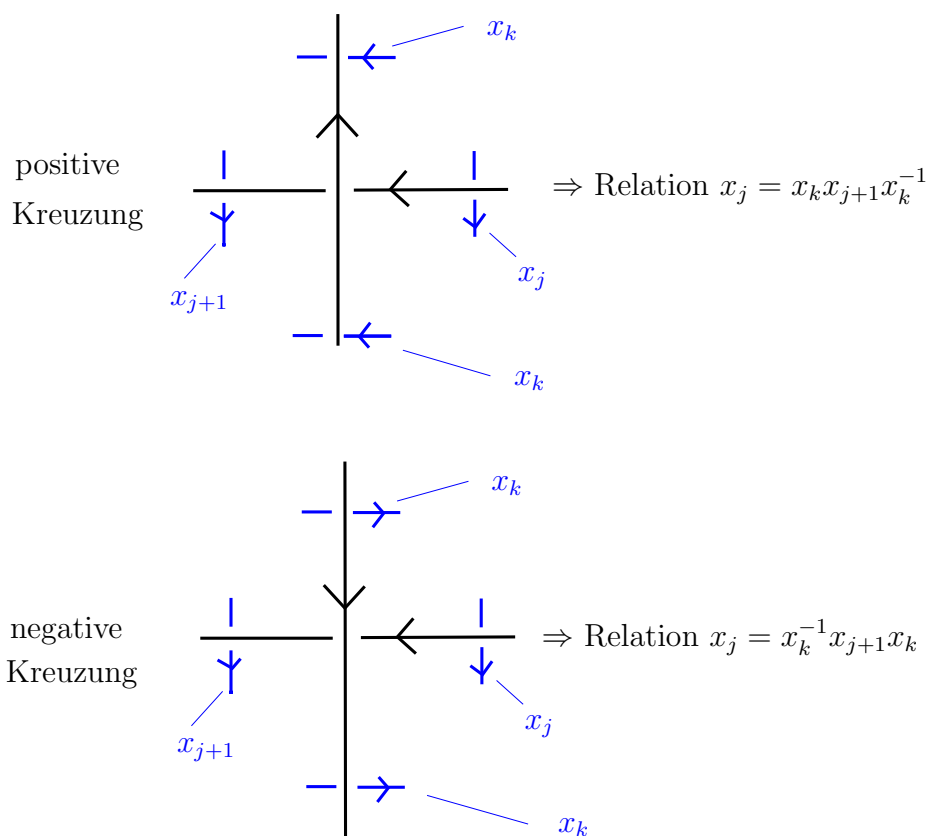


ABBILDUNG 39. Relationen für positive und negative Kreuzungen.

Beispiel. (1) Wir fahren mit dem Beispiel des Kleeblattknotens fort.

In diesem Fall sind alle Kreuzungen negativ und wir sehen, dass

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 = x_3 x_1 x_3^{-1}, x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1}, x_1 = x_2 x_3 x_2^{-1} \rangle.$$

In den Übungen werden wir folgendes Korollar beweisen:

- (2) Es sei T der triviale Knoten. Wir können Satz 13.2 nicht auf das ‘triviale Diagramm’ anwenden, denn dieses hat keine Kreuzung. Wir betrachten daher das Diagramm, welches in Abbildung 40 gegeben ist. Dieses besitzt nur einen Bogen und Satz 13.2 besagt, dass

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T) \cong \langle x \mid x^{-1} x x x^{-1} \rangle = \langle x \rangle = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Wir skizzieren jetzt den Beweis von Satz 13.2.

Beweisskizze von Satz 13.2. Zum Aufwärmen überlegen wir uns zuerst, warum diese Präsentation überhaupt Sinn macht. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Knoten in regulärer Lage mit mindestens einer Kreuzung. Wir setzen

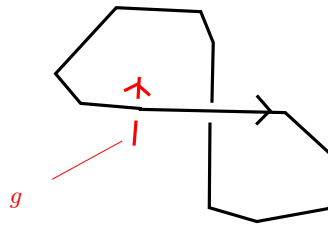


ABBILDUNG 40. Ein Diagramm des trivialen Knotens.

$P := (0, 0, 2)$. Wir nummerieren die Bögen mit $1, \dots, k$ und bezeichnen mit x_1, \dots, x_k die dazugehörigen Schleifen in P .

Wir betrachten die Kreuzung mit den Bögen x_i, x_{i+1} und dem überkreuzenden Bogen x_j . O.B.d.A. sei dies eine positive Kreuzung. Dann sieht man in Abbildung 41, dass die Schleife $x_i^{-1}x_jx_{i+1}x_j^{-1}$ in der Tat eine nullhomotope Schleife in $(\mathbb{R}^3 \setminus K, P)$ ist. Dies beweist, dass es einen Grup-

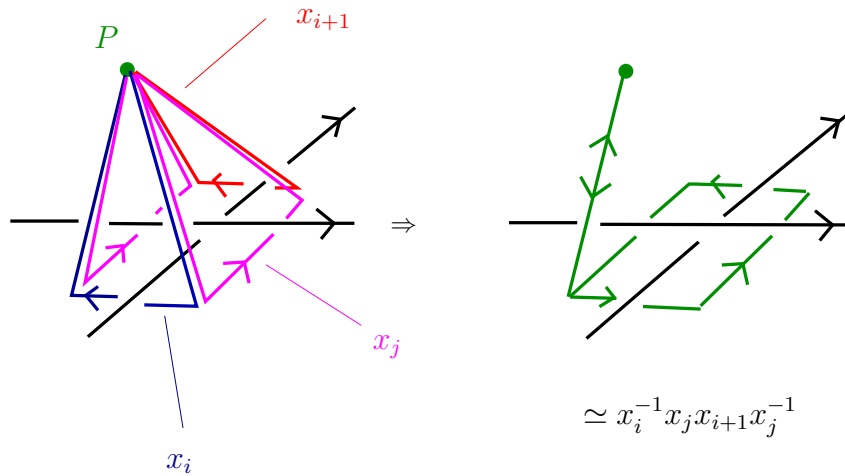


ABBILDUNG 41. Die Schleife $x_i^{-1}x_jx_{i+1}x_j^{-1}$ ist nullhomotop.

penhomomorphismus

$$\langle x_1, \dots, x_k \mid r_1, \dots, r_k \rangle \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, P)$$

gibt.

Wenden wir uns jetzt dem eigentlichen Beweis zu. Wir können die z -Werte der Eckpunkte des Knotens so abändern, dass der Knoten ganz in $\mathbb{R}^2 \times 0$ liegt, bis auf eine kleine Umgebung für jeden Kreuzungspunkt, in der der Knoten gegeben ist wie in Abbildung 42. Wir setzen jetzt

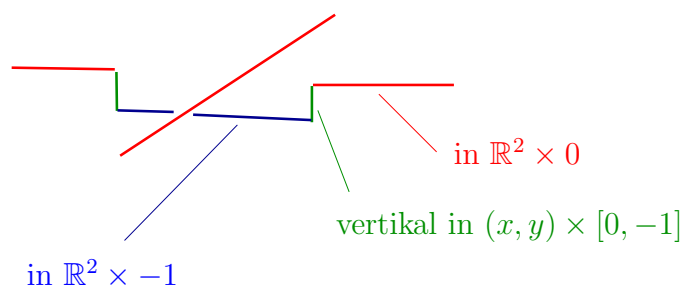


ABBILDUNG 42. Der Knoten in der Nähe einer Kreuzung.

$$\begin{aligned}
 U &:= (\mathbb{R}^3 \setminus K) \cap \{(x, y, z) \mid z \geq -1\} \\
 V &:= (\mathbb{R}^3 \setminus K) \cap \{(x, y, z) \mid z \leq -1\}.
 \end{aligned}$$

Dann kann man zeigen, dass U homotopieäquivalent ist zu der Einpunktvereinigung von k Kreisen, und $\pi_1(U, P) = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$. Andererseits ist V homotopieäquivalent zu einem Punkt, es folgt also, dass $\pi_1(V)$ trivial ist.

Wir wählen jetzt auch einen Basispunkt Q auf $U \cap V$ und verbinden diesen durch einen Weg mit P . Wir fassen jetzt g_1, \dots, g_k auch als Schleifen in Q auf. Die Menge $U \cap V$ ist die Menge $\mathbb{R}^2 \times -1$ aus der k Intervalle entfernt wurden. Insbesondere ist $U \cap V$ homotopieäquivalent zu der Einpunktvereinigung von k Kreisen. Für jedes Intervall wählen

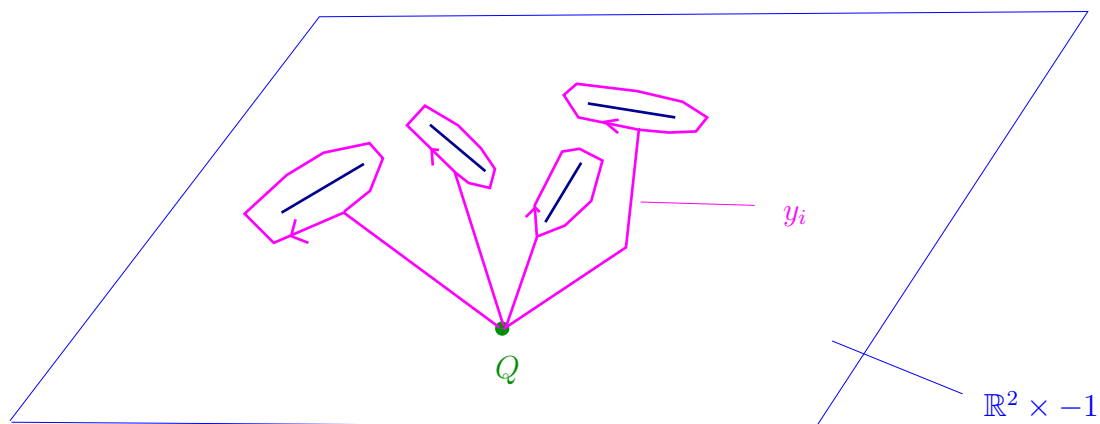


ABBILDUNG 43. Die Schnittmenge $U \cap V$.

wir jetzt eine Schleife y_i in Q , welche genau einmal das Intervall ‘umkreist’. Wir verweisen auf Abbildung 43 für eine Illustration.

Es folgt nun aus dem Satz von Seifert-van Kampen⁸⁷ und aus Lemma 12.5, dass

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) &\cong \pi_1(U, Q) *_{\pi_1(U \cap V, Q)} \pi_1(V, Q) \\ &\cong \langle g_1, \dots, g_k \mid \text{Bild von } y_i \text{ in } \pi_1(U, Q) \text{ ist trivial} \rangle. \end{aligned}$$

Wir müssen also noch bestimmen, was das Bild von y_i in $\pi_1(U, Q)$ ist. Wie in Abbildung 41 kann man nun sehen, dass die Schleife y_i in U homotop ist zur Schleife

$$\begin{aligned} x_i^{-1} x_{s(i)} x_{i+1} x_{s(i)}^{-1} &\text{ bei einer positiven Kreuzung,} \\ x_i^{-1} x_{s(i)}^{-1} x_{i+1} x_{s(i)} &\text{ bei einer negativen Kreuzung.} \end{aligned}$$

Wir haben damit den Satz bewiesen.⁸⁸ □

Wir haben jetzt also eine Präsentation für $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ gefunden. Aber was bringt uns das? Wir möchten gerne zeigen, dass K nicht der triviale Knoten T ist, d.h. das $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \neq \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T) = \mathbb{Z}$. Die Präsentation von $\pi := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ schaut zwar kompliziert aus, aber vielleicht ist die Gruppe trotz allem isomorph zu \mathbb{Z} ? In den Übungen beispielsweise werden wir sehen, dass wir die Präsentation vereinfachen können:

$$\pi = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 = x_3 x_1 x_3^{-1} \text{ und } x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1} \rangle.$$

Können wir die Präsentation vielleicht noch mehr vereinfachen?

Wir haben früher gesehen, dass die Abelianisierung einer Fundamentalgruppe manchmal schon genügend Informationen enthält, um topologische Räume zu unterscheiden. Wie schaut's also jetzt mit der Abelianisierung aus? Es folgt aus den Relationen, dass die Bilder von x_2 und x_1 , sowie auch von x_3 und x_2 in der Abelianisierung identisch sind. Andererseits definiert $x_i \mapsto 1, i = 1, 2, 3$ einen Homomorphismus $\pi/[\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{Z}$. Wir sehen also, dass die Abelianisierung von π isomorph zu \mathbb{Z} ist. (Wir werden dies in de Übungsblatt 13 noch etwas formaler beweisen.)

In der Tat gilt sogar folgender Satz:

Satz 13.3. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Knoten. Dann ist die Abelianisierung von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ isomorph zu \mathbb{Z} .*

Die Abelianisierung kann uns also nicht helfen, den Kleeblattknoten vom trivialen Knoten zu unterscheiden. Das folgende Lemma kommt also vielleicht etwas überraschend.

⁸⁷Streng genommen können wir den Satz von Seifert-van Kampen nicht anwenden, weil U und V nicht offen sind. Dieses Problem kann man umschiffen, aber wir unterlassen das aus Zeitgründen.

⁸⁸Bis auf alle Details, welche unter den Teppich gekehrt wurden.

Lemma 13.4. *Die Gruppe*

$$\pi = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 = x_3 x_1 x_3^{-1} \text{ und } x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1} \rangle$$

ist nicht abelsch, insbesondere nicht isomorph zu \mathbb{Z} . Der Kleeblattknoten ist also nicht der triviale Knoten.

Beweis. Wir bezeichnen mit S_3 die Gruppe der Permutationen der dreielementigen Menge $\{1, 2, 3\}$. Wir betrachten

$$P_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } P_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $i = 1, 2, 3$ ordnen wir x_i die Permutation P_i zu. Man kann leicht nachrechnen, dass

$$P_2 = P_3 P_1 P_3^{-1} \text{ und } P_3 = P_1 P_2 P_1^{-1}.$$

Es folgt also aus Lemma 12.1, dass es einen Homomorphismus $\varphi: \pi \rightarrow S_3$ mit $\varphi(x_i) = P_i$, $i = 1, 2, 3$ gibt. Dieser Homomorphismus ist surjektiv⁸⁹, nachdem S_3 nicht abelsch ist, folgt auch, dass π nicht abelsch ist. \square

13.3. Weiterführende Sätze der Knotentheorie. Man kann sich nun fragen, wie hilfreich die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements ist, um zu zeigen, dass ein Knoten nicht-trivial ist. Folgender Satz wurde von Papakyriakopoulos⁹⁰ bewiesen:

Satz 13.5. (Papakyriakopoulos 1957) *Ein Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ ist trivial, genau dann, wenn $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$.*

Der Beweis führt weit über die Möglichkeiten dieser Vorlesung hinaus. Es stellt sich dann die Frage, wie man den nun für einen gegebenen nicht-trivialen Knoten zeigen kann, dass $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \not\cong \mathbb{Z}$.

Nachdem wir für einen Knoten immer eine Präsentation finden können, stellt sich folgende allgemeine Frage:

Frage. Es sei

$$\pi = \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle$$

eine Präsentation einer Gruppe. Gibt es einen Algorithmus, welcher entscheiden kann, ob π trivial ist oder isomorph zu \mathbb{Z} ist?

⁸⁹Warum?

⁹⁰C. Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math. 66 (1957), 1–26.

Diese Frage ist als das ‘word problem’ bekannt, und wurde von Adyan und Rabin 1955 beantwortet: ⁹¹ Sie haben unabhängig von einander bewiesen, dass es solch einen Algorithmus *nicht* geben kann. Im Allgemeinen können wir also nicht entscheiden, ob eine gegebene Präsentation die Präsentation der trivialen Gruppe ist oder nicht.

Diese negative Aussage raubt uns erstmal alle Hoffnung, dass wir Fundamentalgruppen von Knotenkomplement verwenden können, um festzustellen, ob ein gegebener Knoten trivial ist oder nicht. Zum Glück ist unser Leben aber etwas einfacher: nicht jede Präsentation taucht als Präsentation der Fundamentalgruppe eines Knotenkomplements auf.

In Lemma 13.4 haben wir gezeigt, dass es im Falle des Kleeblattknotens einen Epimorphismus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \rightarrow S_3$ gibt. Der folgende Satz von Thurston besagt, dass diese Methode für jeden nicht-trivialen Knoten funktioniert.

Satz 13.6. (Thurston 1982) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein nicht-trivialer Knoten, dann gibt es einen Epimorphismus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \rightarrow G$ auf eine endliche nicht-kommutative Gruppe.*

Dieser Satz beruht auf den Arbeiten für welche Thurston 1982 die Fields-Medaille bekommen hat. ⁹² Auch dieser Beweis geht weit jenseits dessen, was in dieser Vorlesung machbar ist.

Man kann sich nun auch fragen, ob zwei Knoten K und L genau dann äquivalent sind, wenn $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall. Für einen Knoten K bezeichnen wir mit K^s das

91

- (1) S. I. Adyan, *Algorithmic unsolvability of problems of recognition of certain properties of groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 103 (1955), 533–535,
- (2) M. Rabin, *Recursive unsolvability of group theoretic problems*, Ann. of Math. (2) 67 (1958) 172–194.

⁹²Siehe

- (1) W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton Lecture Notes (1979), <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>,
- (2) W. P. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 6 (1982), 357–379.
- (3) J. Hempel, *Residual finiteness for 3-manifolds*, Ann. of Math. Stud., 111, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987

Spiegelbild ⁹³ von K in der Ebene $(x, y, 0) \subset \mathbb{R}^3$, d.h.

$$(x, y, z) \in K^s \Leftrightarrow (x, y, -z) \in K.$$

Dann sind $\mathbb{R}^3 \setminus K^s$ und $\mathbb{R}^3 \setminus K$ offensichtlich homöomorph⁹⁴, also besitzen sie die gleiche Fundamentalgruppe. Andererseits sind im Allgemeinen ein Knoten und sein Spiegelbild nicht äquivalent.⁹⁵

Wir können also jetzt etwas vorsichtiger fragen ob zwei Knoten K und L genau dann (bis auf Spiegelung) äquivalent sind, wenn $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$.

Um diese Frage zu diskutieren brauchen wir den Begriff der zusammenhängenden Summe $K \# L$ von orientierten Knoten K und L , welcher in Abbildung 44 eingeführt wird. Wenn K ein orientierter Knoten

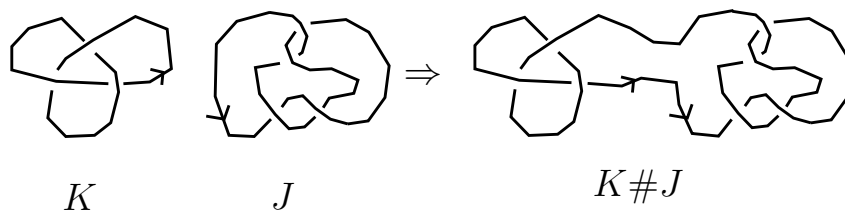


ABBILDUNG 44. Die zusammenhängende Summe $K \# L$ von orientierten Knoten K und L .

ist, dann bezeichnen wir mit \overline{K} den gleichen Knoten mit umgekehrter Orientierung. Mithilfe des Satzes von Seifert-van Kampen kann man relativ leicht zeigen, dass für alle orientierten Knoten K und L gilt

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K \# L) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{K} \# L),$$

andererseits gibt es Knoten K und L , so dass $\overline{K} \# L$ weder mit $K \# L$ noch mit dem Spiegelbild von $K \# L$ übereinstimmt.

Wir sagen nun, dass ein Knoten K ein *Primknoten* ist, wenn K nicht die zusammenhängende Summe von zwei nicht-trivialen Knoten ist. Folgender Satz wurde von Culler-Gordon-Luecke-Shalen-Witten ⁹⁶ bewiesen:

⁹³Man kann relativ leicht zeigen, dass die Äquivalenzklasse des Spiegelbildes nicht von der Wahl der Ebene abhängt. Der Grund ist, dass die Verknüpfung von zwei Spiegelungen in \mathbb{R}^3 eine Drehung ist, aber eine Drehung in \mathbb{R}^3 ändert die Äquivalenzklasse eines Knotens nicht.

⁹⁴Warum?

⁹⁵Dies ist allerdings nicht ganz einfach zu zeigen.

⁹⁶

(1) M. Culler, C. Gordon, J. Luecke and P. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. Math. 125 (1987), 237–300.

Satz 13.7. (Culler-Gordon-Luecke-Shalen-Witten 1989) *Es seien $K, J \subset \mathbb{R}^3$ zwei Primknoten mit $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus J)$, dann gilt $K = J$ oder $K = J^s$.*

Dieser Beweis geht natürlich auch weit über diese Vorlesung hinaus.

14. HÖHERE HOMOTOPIEGRUPPEN

Wir haben mithilfe der Fundamentalgruppe verschiedene nicht-triviale Sätze bewiesen, beispielsweise:

- (1) S^1 und S^k mit $k \geq 2$ sind nicht homöomorph,
- (2) \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^n mit $n \geq 3$ sind nicht homöomorph,
- (3) Flächen von verschiedenen Geschlecht sind nicht homöomorph,
- (4) der Kleeblattknoten ist nicht-trivial.

Andererseits können wir weiterhin nicht zeigen, dass \mathbb{R}^k und \mathbb{R}^l nicht homöomorph sind für $k \neq l$ und $k, l \geq 3$.

Wir werden in diesem Kapitel die höheren Homotopiegruppen einführen, welche zumindest dieses Problem lösen können. Aus Zeitgründen werden wir allerdings die meisten Beweise entweder weglassen oder nur skizzieren.

14.1. Definition von den höheren Homotopiegruppen. Es seien X und Y Mengen und $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen. Eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist definiert als eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$, so dass $f(A) \subset B$.

Es seien nun $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ stetige Abbildungen. Eine *Homotopie zwischen f und g* ist eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

so dass

$$H(x, 0) = f(x) \text{ und } H(x, 1) = g(x) \text{ für alle } x \in X,$$

und so dass

$$H(a, t) \in B \text{ für alle } a \in A \text{ und } t \in [0, 1].$$

Wenn eine Homotopie zwischen f und g existiert, dann sagen wir, dass f und g *homotop* sind, und wir schreiben $f \simeq g$. Wir führen nun folgende Notation ein:

$$\begin{aligned} I^n &:= [0, 1]^n \\ \partial I^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid \text{es gibt ein } i, \text{ so dass } x_i = 0 \text{ oder } x_i = 1\}. \end{aligned}$$

(2) W. Whitten, *Knot complements and groups*, Topology 26 (1987), no. 1, 41–44.

Es sei nun X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Mit diesen Definitionen können wir schreiben

$$\pi_1(X, x_0) = \text{Homotopieklassen von stetigen Abbildungen } (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0).$$

Diese Definition läßt sich jetzt natürlich leicht verallgemeinern: für jedes n definieren wir

$$\pi_n(X, x_0) = \text{Homotopieklassen von stetigen Abbildungen } (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0).$$

Man beachte, dass $\pi_n(X, x_0)$ a priori nur eine Menge ist. Wir würden jetzt gerne eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x_0)$ einführen. Aber was soll schon das Analogon von ‘Verknüpfung von Schleifen’ sein? Es sei $n \geq 1$ und es seien $f, g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ stetige Abbildungen. Wir definieren

$$f * g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} f(2x_1, \dots, 2x_n), & \text{wenn } x_1, \dots, x_n \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2x_1 - 1, \dots, 2x_n - 1), & \text{wenn } x_1, \dots, x_n \in [\frac{1}{2}, 1], \\ x_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist wiederum eine stetige Abbildung, und man kann sich davon

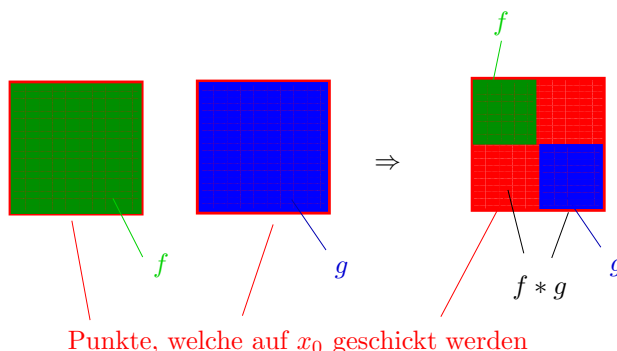


ABBILDUNG 45. Schematisches Bild der Definition von $f * g$.

vergewissern, dass die Homotopieklasse von $f * g$ nur von den Homotopieklassen von f und g abhängt. Wir können also jetzt folgende Abbildung definieren:

$$\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

$$([f], [g]) \mapsto [f][g] := [f * g].$$

Man beachte, für $n = 1$ ist dies genau die gleiche Definition, welche wir schon in Kapitel 7.2 eingeführt hatten.

Wir können jetzt folgenden Satz formulieren:

Satz 14.1. *Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Es sei $n \geq 1$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(X, x_0) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f][g] := [f * g] \end{aligned}$$

definiert eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x_0)$.

Beweisskizze. Wir überlassen den Beweis des Assoziativgesetzes als freiwillige Übungsaufgabe. Das neutrale Element ist durch die Äquivalenzklasse der konstanten Abbildung

$$\begin{aligned} c_{x_0} : I^n &\rightarrow X \\ x &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

gegeben⁹⁷. Die wohl interessanteste Frage ist, was soll eigentlich das Inverse von $[f]$ sein?

Es sei also $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ gegeben. Wenn $g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ eine beliebige weitere Abbildung ist, dann werden wir in Übungsblatt 13 zeigen, dass $f * g$ homotop ist zur Abbildung

$$\begin{aligned} f \cdot g : (I^n, \partial I^n) &\rightarrow (X, x_0) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{wenn } x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & \text{wenn } x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \bar{f} : I^n &\rightarrow X \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(1 - x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass $[f * \bar{f}] = [c_{x_0}]$. Es genügt zu zeigen, dass $f \cdot \bar{f}$ homotop ist zu c_{x_0} . Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} H : I^n \times [0, 1] &\rightarrow X \\ (x_1, \dots, x_n, t) &\mapsto \begin{cases} f(2(x_1 - \frac{t}{2}), x_2, \dots, x_n), & \text{wenn } x_1 \in [\frac{t}{2}, \frac{1}{2}], \\ \bar{f}(1 - 2(x_1 - \frac{t}{2}), x_2, \dots, x_n), & \text{wenn } x_1 \in (\frac{1}{2}, \frac{1+t}{2}], \\ x_0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist stetig und ist in der Tat eine Homotopie der Abbildungen $f \cdot \bar{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ und $c_{x_0} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$. \square

Die höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0)$ erscheinen nochmal komplizierter als die Fundamentalgruppe. Überraschenderweise ist aber zumindest ihre algebraische Struktur einfacher:

Satz 14.2. *Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Für $n \geq 2$ ist die Gruppe $\pi_n(X, x_0)$ eine abelsche Gruppe.*

⁹⁷Wie kann man das wohl beweisen?

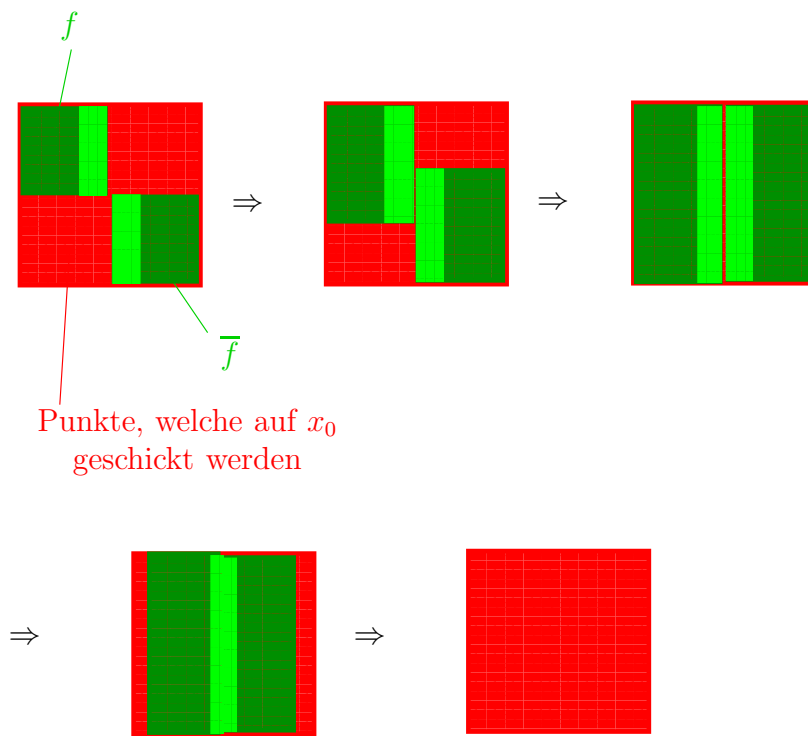


ABBILDUNG 46. Schematisches Bild der Homotopien im Beweis von $[f * \bar{f}] = [c_{x_0}]$.

Beweisskizze. Es seien $f, g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ gegeben. Wir müssen nun zeigen, dass $f * g$ homotop ist zu $g * f$. Die Homotopie ist in Abbildung 47 für den Fall $n = 2$ veranschaulicht. Es ist eine freiwillige Übungsaufgabe eine mathematisch präzise formulierte Homotopie anzugeben. \square

Bemerkung. Man kann sich davon überzeugen, dass es für $n \geq 1$ einen Homöomorphismus $\Phi: I^n / \partial I^n \rightarrow S^n$ gibt. Wir bezeichnen mit $*$ das Bild von $[\partial I^n]$ unter Φ .

Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Es folgt nun, dass Φ eine Korrespondenz zwischen stetigen Abbildungen

$$(I^n, \partial I^n) \mapsto (X, x_0)$$

und stetigen Abbildungen

$$(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$$

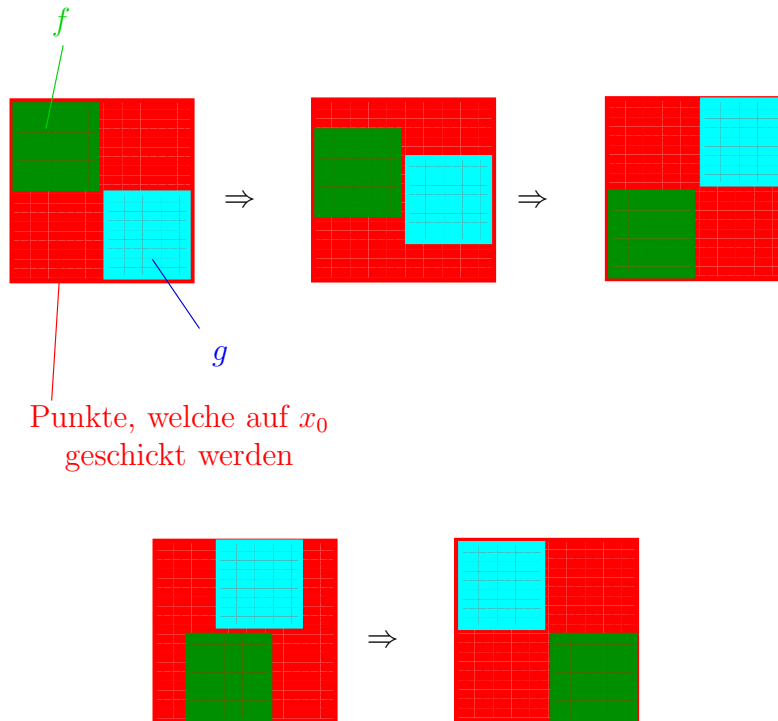


ABBILDUNG 47. Schematisches Bild einer Homotopie von $f * g$ zu $g * f$.

induziert. Wir können also Elemente in $\pi_n(X, x_0)$ auch als Homotopieklassen von Abbildungen $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ betrachten. ⁹⁸

14.2. Eigenschaften von den höheren Homotopiegruppen. Vielleicht die erste Frage, welche sich stellt ist, in wie weit die Homotopiegruppen von der Wahl des Basispunktes abhängen. Die Aussage des folgenden Satzes ist eine Verallgemeinerung von Satz 7.8.

Satz 14.3. *Es X ein topologischer Raum und es seien $x_0, x_1 \in X$, welche durch einen Weg $g: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 verbunden sind. Dann sind $\pi_n(X, x_0)$ und $\pi_n(X, x_1)$ isomorphe Gruppen.*

Wenn X ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist, und wenn wir uns nur für den Isomorphietyp der n -ten Homotopiegruppe von X interessieren, dann schreiben wir manchmal auch einfach $\pi_n(X)$.

⁹⁸Diese Definition macht insbesondere Sinn für $n = 0$, wobei $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} = \{\pm 1\}$, wir können also $\pi_0(X, x_0)$ betrachten. In Kapitel 6 hatten wir auch schon $\pi_0(X)$, die Menge der Komponenten von X eingeführt. Besteht da ein Zusammenhang, oder ist die Ähnlichkeit der Notation Zufall? (Oder vielleicht noch schlimmer, Ungeschicktheit?)

Beweisskizze. Es X ein topologischer Raum und es seien $x_0, x_1 \in X$, welche durch einen Weg $g: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 verbunden sind. Es sei zudem $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ eine stetige Abbildung. Wir definieren dann eine neue Abbildung $\tilde{f}: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ wie in Abbildung 48 skizziert. Diese Zuordnung $f \mapsto \tilde{f}$ induziert dann einen

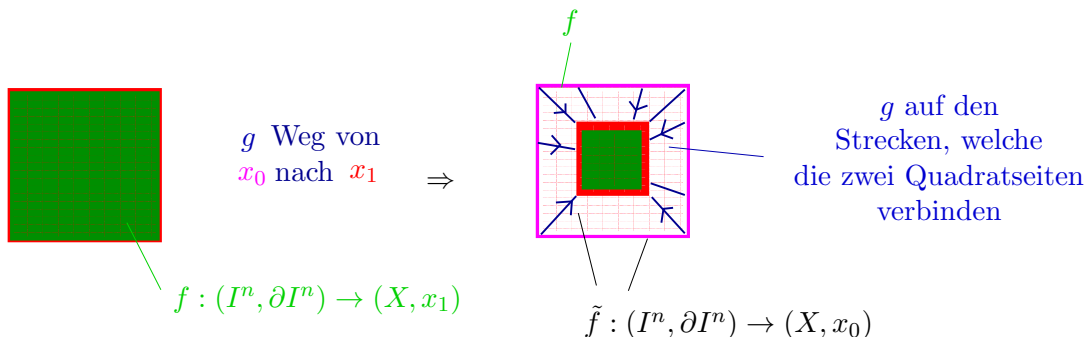


ABBILDUNG 48. Ein Weg von x_0 nach x_1 induziert eine Abbildung $\pi_n(X, x_1)$ und $\pi_n(X, x_0)$.

Gruppenisomorphismus $\pi_n(X, x_1)$ und $\pi_n(X, x_0)$. Wir überlassen den genauen Beweis dieser Aussage als freiwillige Übungsaufgabe. \square

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x_0 \in X$. Wir schreiben $y_0 = f(x_0)$. Dann kann man nachweisen, dass

$$f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

$$[\sigma: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)] \mapsto [f \circ \sigma: (I^n, \partial I^n) \xrightarrow{\sigma} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)]$$

eine wohldefinierte Abbildung ist (d.h. sie hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab), und dass diese Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir nennen diese Abbildung die durch f induzierte Abbildung und bezeichnen sie mit f_* .

Es folgt aus den Definitionen, dass

$$\text{id}_* = \text{id}, \quad \text{für alle punktierten Paare } (X, x_0),$$

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*, \quad \text{für alle stetigen Abbildungen}$$

$$f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \text{ und } g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0).$$

Wir können diese Beobachtungen auch wie folgt in einem Satz zusammenfassen:

Satz 14.4. *Es sei T die Kategorie der punktierten topologischen Räumen und G die Kategorie der Gruppen. Dann ist*

$$\begin{aligned} \text{Ob}(T) &\rightarrow \text{Ob}(G) \\ (X, x_0) &\mapsto \pi_n(X, x_0) \end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} C((X, x_0), (Y, y_0)) &\rightarrow \text{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0)) \\ f &\mapsto f_* \end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor.

Ganz analog zu Satz 10.1 können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 14.5. *Es seien $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Es sei $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Wenn es eine Homotopie $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ zwischen f_0 und f_1 gibt, so dass $F(x_0, t) = y_0$ für alle $t \in [0, 1]$, dann gilt*

$$f_* = g_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0).$$

Ganz analog zu Satz 10.3 können wir zudem folgenden Satz beweisen:

Satz 14.6. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, welche eine Homotopieäquivalenz ist. Es sei $x_0 \in X$ ein Punkt. Wir setzen $y_0 = f(x_0)$. Dann ist*

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

ein Isomorphismus.

Beispiel. Der topologische Raum \mathbb{R}^n ist homotopieäquivalent zu einem Punkt P , es folgt, dass

$$\pi_n(\mathbb{R}^n) \cong \pi_n(P).$$

Nachdem es genau eine Abbildung von $I^n \rightarrow P$ gibt, folgt offensichtlich, dass $\pi_n(P) = 0$.

Für Fundamentalgruppen haben wir viele Ergebnisse dadurch bewiesen, dass wir die Fundamentalgruppen von Überlagerungen studiert haben. Für $n \geq 2$ haben wir nun allerdings ein völlig anderes Verhalten der Homotopiegruppen:

Satz 14.7. *Es sei $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen. Wir nehmen an, dass X und B wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend sind. Es sei $n \geq 2$. Dann ist $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ ein Isomorphismus.*

Beweisskizze. Es sei $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen Räumen. Wir wollen nun eine zu $p_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ inverse Abbildung konstruieren.

Wie wir in Kapitel 14.1 gesehen haben, können wir Elemente in $\pi_n(B, b_0)$ auch als Homotopieklassen von Abbildungen $(S^n, *) \rightarrow (B, b_0)$ betrachten. Es sei also $f: (S^n, *) \rightarrow (B, b_0)$ gegeben. Nachdem $n \geq 2$ folgt, dass $\pi_1(S^n) = 0$, insbesondere folgt, dass

$$\text{Im}(f_*: \pi_1(S^n, s_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)) = \{0\} \subset \text{Im}(p_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)).$$

Es folgt also aus Satz 9.14, dass es eine eindeutig bestimmte Hochhebung $\tilde{f}: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ von $f: (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$ gibt. Zur Erinnerung, \tilde{f} ist also eine Abbildung, so dass $p \circ \tilde{f} = f$.

Ganz analog zeigt man, wiederum mithilfe von Satz 9.14, dass homotope Abbildungen $(S^n, *) \rightarrow (B, b_0)$ zu homotopen Abbildungen $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ hochgehoben werden.

Wir sehen also, dass die Hochhebung eine Abbildung

$$\Phi: \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

definiert. Es folgt sofort aus der Definition von einer Hochhebung, dass $\Phi \circ p_* = \text{id}_{\pi_n(B, b_0)}$. Zudem folgt aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen, dass $p_* \circ \Phi = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$. Wir sehen also, dass Φ eine zu $p_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ inverse Abbildung ist. \square

Beispiel. (1) Wir haben gezeigt, dass es eine Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ gibt. Aus Satz 14.7 folgt nun, dass $\pi_n(S^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) = 0$ für alle $n \geq 2$.

(2) Es sei T der Torus. Wie wir schon gesehen haben gibt es eine Überlagerung $\mathbb{R}^2 \rightarrow T$. Aus Satz 14.7 folgt nun, dass $\pi_n(T) \cong \pi_n(\mathbb{R}^2) = 0$ für alle $n \geq 2$.

(3) Es sei F eine Fläche von Geschlecht $g \geq 2$. Die universelle Überlagerung ist in diesem Fall homöomorph zu einer offenen Scheibe, also ist auch $\pi_n(F) = 0$ für alle $n \geq 2$.

(4) Es sei $K \subset S^3$ ein Knoten, Papakyriakopoulos⁹⁹ hat bewiesen, dass $\pi_n(\mathbb{R}^3 \setminus K) = 0$ für alle $n \geq 2$. D.h. höhere Homotopiegruppen helfen uns nicht bei der Unterscheidung von Knoten.

Es sei X ein topologischer Raum und es seien $U, V \subset X$ offene Teilmengen mit $X = U \cup V$ und mit $U \cap V \neq \emptyset$. Wenn $U \cap V$ homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, dann ist für $n \geq 2$ die abelsche Gruppe $\pi_n(X)$ das direkte Produkt der Gruppen $\pi_n(U)$ und $\pi_n(V)$. Dies ist ganz ähnlich zur Aussage für Fundamentalgruppen, siehe Satz

⁹⁹ C. Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math. 66 (1957), 1–26.

11.3, mit der Ausnahme, dass wir bei den Fundamentalgruppen das freie Produkt und nicht das direkte Produkt der Fundamentalgruppen von U und V betrachten.

Satz 14.8. *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $U, V \subset X$ offene Teilmengen mit $X = U \cup V$ und mit $U \cap V \neq \emptyset$. Wir wählen einen Basispunkt $x_0 \in U \cap V$. Es sei $n \geq 2$. Wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (1) $\pi_i(U \cap V, x_0) = 0$ für $i = 1, \dots, n$,
- (2) $\pi_i(U, x_0) = 0$ und $\pi_i(V, x_0) = 0$ für $i = 1, \dots, n - 1$,

dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_n(U, x_0) \times \pi_n(V, x_0) &\rightarrow \pi_n(X, x_0) \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Der Beweis des Satzes ist zudem sehr ähnlich zum Beweis von Satz 11.3, und wir überlassen ihn als freiwillige Übungsaufgabe. Es gibt allerdings kein Analogon zu Satz 12.6 für den Fall, dass $U \cap V$ nicht homotopieäquivalent zu einem Punkt ist.

14.3. Homotopiegruppen von Sphären. Für Fundamentalgruppen haben wir gesehen, dass es der Satz von Seifert–van Kampen (siehe Satz 11.3) oft erlaubt die Berechnung von Fundamentalgruppen auf die Bestimmung von Fundamentalgruppen von einfacheren Objekten zurückzuführen. Ein solcher Satz gilt für höhere Homotopiegruppen nicht, was die Berechnung von höheren Homotopiegruppen im Allgemeinen ungemein schwer macht.

In diesem Kapitel werden wir ohne Beweis verschiedene Aussagen zu den Homotopiegruppen von Sphären machen. In Satz 7.11 haben wir gesehen, dass

$$\pi_1(S^n) = 0 \text{ für } n \geq 2.$$

Wir haben dies dadurch gezeigt, dass wir zu jeder Abbildung $f: S^1 \rightarrow S^n$ eine homotope Abbildung $g: S^1 \rightarrow S^n$ finden, welche nicht surjektiv ist, d.h. deren Bild in $S^n \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^n$ liegt. Nachdem $S^n \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^n$ homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, folgt dass g und damit auch f null-homotop sind.

Mit etwas mehr Aufwand kann man nun dieses Ergebnis verallgemeinern:

Satz 14.9. *Es ist*

$$\pi_k(S^n) = 0 \text{ für } k < n.$$

Als nächstes stellt sich die Frage, was ist $\pi_n(S^n)$? Die Identitätsabbildung $\text{id} : S^n \rightarrow S^n$ macht einen eher nicht null-homotopen Eindruck. In der Tat kann man zeigen, dass die Identitätsabbildung $\text{id} : S^n \rightarrow S^n$ nicht null-homotop ist, und sogar ein Erzeuger von $\pi_n(S^n)$ darstellt. Genauer gesagt, gilt folgender Satz:

Satz 14.10. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \pi_n(S^n) \\ r &\mapsto r \cdot [\text{id} : S^n \rightarrow S^n] \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Dieser Satz ist für $n \geq 2$ deutlich schwieriger zu beweisen, als für $n = 1$. Der Satz folgt beispielsweise aus dem Satz von Hurewicz¹⁰⁰, welcher es erlaubt in manchen Fällen die Homotopiegruppen durch Homologiegruppen zu bestimmen. Die Homologiegruppen eines Raumes werden in der Vorlesung ‘Algebraische Topologie’ eingeführt. Die Definition ist deutlich komplizierter als für Homotopiegruppen, dafür ist die Berechnung dann deutlich einfacher.

Die obigen beiden Sätze erlauben es uns nun folgenden Satz zu beweisen:

Satz 14.11. *Es gilt*

$$\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^l \Leftrightarrow k = l.$$

Beweis. Der Beweis den wir geben ist ganz analog zum Beweis von Korollar 10.4.

Wir betrachten den Fall $k < l$. Nehmen wir an es gibt einen Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$. Es sei $P \in \mathbb{R}^k$ ein Punkt. Wir setzen $Q := \varphi(P)$. Dann sind auch $\mathbb{R}^k \setminus \{P\}$ und $\mathbb{R}^l \setminus \{Q\}$ homöomorph. Andererseits ist $\mathbb{R}^k \setminus \{P\}$ homotopieäquivalent zu S^{k-1} und $\mathbb{R}^l \setminus \{Q\}$ ist homotopieäquivalent zu S^{l-1} . Aus den Sätzen 14.9 und 14.10 folgt dann, dass $\mathbb{Z} \cong \pi_{k-1}(S^{k-1}) \cong \pi_{k-1}(\mathbb{R}^k \setminus \{P\}) \cong \pi_{k-1}(\mathbb{R}^l \setminus \{Q\}) \cong \pi_{k-1}(S^{l-1}) = 0$.

Wir erhalten also einen Widerspruch. \square

Wie schaut’s nun mit den Gruppen $\pi_k(S^n)$ aus, wenn $k > n \geq 2$? Um die nächste Abbildung zu verstehen führen wir erst den projektiven komplexen Raum ein. Genauer gesagt, für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

wobei

$$(z_1, \dots, z_n) \sim (w_1, \dots, w_n) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{es gibt ein } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit} \\ (z_1, \dots, z_n) = (\lambda w_1, \dots, \lambda w_n) \end{array}$$

¹⁰⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Hurewicz_theorem

Die Äquivalenzklasse eines Punktes (z_1, \dots, z_n) wird mit $[z_1 : \dots : z_n]$ bezeichnet. Man kann nun zeigen, dass $\mathbb{C}P^1$ homöomorph zu S^2 ist.¹⁰¹

Wir werden im Folgenden $\mathbb{C}P^1$ mit S^2 identifizieren.

Beispielsweise können wir folgende Abbildung betrachten:

$$H : S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 = 1\} \rightarrow S^2 = \mathbb{C}P^1$$

$$(z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2].$$

Diese Abbildung geht auf Hopf zurück und wird auch die Hopf-Abbildung genannt. Es gilt folgender Satz:

Satz 14.12. *Die Abbildung*

$$\mathbb{Z} \rightarrow \pi_3(S^2)$$

$$r \mapsto r \cdot [H]$$

ist ein Isomorphismus.

Bemerkung. Dieser Satz zeigt, dass eine ‘naive Verallgemeinerung’ des Satzes von Seifert–van Kampen nicht gelten kann, den wir können S^3 schreiben als Vereinigung von zwei offenen Bällen U und V mit $U \cap V \cong S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Aber es gilt $\pi_i(U) = \pi_i(V) = 0$ für $i \geq 1$ und $\pi_i(U \cap V) = \pi_i(S^1) = 0$ für $i \geq 2$.

Die folgende Tabelle¹⁰² läßt erahnen, dass die höheren Homotopiegruppen von Sphären eher kompliziert sind.

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}
S^1	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^2
S^3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^2
S^4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$	\mathbb{Z}_2^2	\mathbb{Z}_2^2	$\mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_3$	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2
S^5	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{30}
S^6	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2
S^7	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0
S^8	0	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0

Wenn man diese Tabelle genauer anschaut, sieht man verschiedene Gesetzmäßigkeiten. Beispielsweise hat Serre¹⁰³ gezeigt, dass $\pi_n(S^n)$ und $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ die einzigen unendlichen Gruppen sind. Zudem gibt es für jedes k ein N , so dass

$$\pi_{n+k}(S^n) \cong \pi_{m+k}(S^m) \text{ für alle } n, m \geq N.$$

¹⁰¹Wir können $\mathbb{C}P^1$ wie folgt zerlegen:

$$\mathbb{C}P^1 = \{[z : 1] \mid z \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\},$$

die Quotiententopologie auf $\mathbb{C}P^1$ ist von der Gestalt, dass $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong S^2$.

¹⁰²Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy_groups_of_spheres

¹⁰³http://de.wikipedia.org/wiki/Jean-Pierre_Serre

D.h. die Gruppen auf den Nebendiagonalen sind ab einem gewissen Punkt alle isomorph. Im Allgemeinen sind die höheren Homotopiegruppen von Sphären allerdings weiterhin unbekannt.

14.4. Ein Beispiel für die Bestimmung von höheren Homotopiegruppen. Wir beschließen das Kapitel mit einem Beispiel. Wir betrachten

$$X := S^1 \vee S^2 = \{e^{2\pi it} \mid t \in \mathbb{R}\} \cup_{1=(0,0,-1)} S^2$$

und wir wollen $\pi_2(X)$ bestimmen. Nach Satz 14.7 können wir genauso gut π_2 der universellen Überlagerung bestimmen. Die universelle Überlagerung ist gegeben durch

$$p : \tilde{X} := \mathbb{R} \cup_{n=(0,0,-1) \times n, n \in \mathbb{Z}} S^2 \times \mathbb{Z} \rightarrow X = \{e^{2\pi it} \mid t \in \mathbb{R}\} \cup_{1=(0,0,-1)} S^2$$

wobei

$$\begin{aligned} p(t) &= e^{2\pi it}, & \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und} \\ p(P \times n) &= P, & \text{für } P \in S^2 \text{ und } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Bildlich kann man sich \tilde{X} vorstellen als Gerade, bei der an jedem Punkt $n \in \mathbb{Z}$ eine 2-Sphäre angeklebt wurde. In der Tat, man kann leicht überprüfen, dass p eine Überlagerung ist. Wir beweisen nun folgende

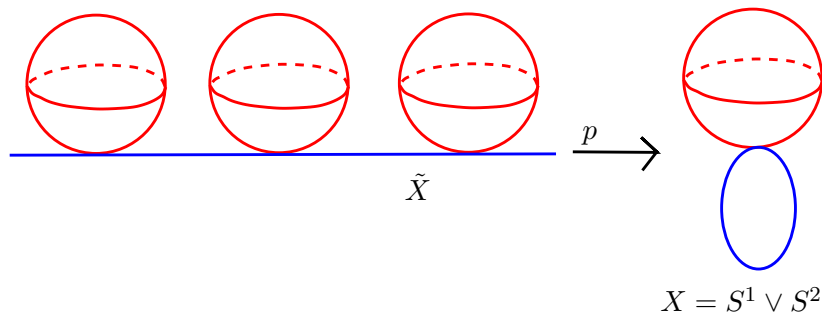


ABBILDUNG 49. Die universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^2$.

Behauptung:

Behauptung. \tilde{X} ist einfach zusammenhängend.

Wir betrachten für jedes $k \in \mathbb{N}$ den Raum

$$X_k := \{-k, -k+1, \dots, k-1, k\} \cup_{n=(0,0,-1) \times n, n=-k, -k+1, \dots, k} S^2 \times \{-k, \dots, k\}.$$

(Bildlich kann man sich X_k vorstellen als Strecke $[-k, k]$, bei der an jedem Punkt $n \in \mathbb{Z} \cap [-k, k]$ eine 2-Sphäre angeklebt wurde.) Mithilfe des Satzes von Seifert-van Kampen und mithilfe von Induktion kann man nun zeigen, dass $\pi_1(X_k) = 0$ für jedes k . Sei nun $g \in \pi_1(\tilde{X})$. Wir

wählen eine Schleife s in \tilde{X} , welche g repräsentiert. Aus der Kompaktheit der Schleife folgt, dass s eine Schleife in X_k ist für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist aber s in X_k zusammenziehbar, also auch in \tilde{X} . Wir haben damit gezeigt, dass \tilde{X} einfach zusammenhängend ist.

Mithilfe von Induktion und mithilfe von Sätzen 14.8 und 14.10 kann man nun zudem zeigen, dass

$$\pi_2(X_k) \cong \mathbb{Z}^k.$$

Es liegt nun auf der Hand anzunehmen, dass $\pi_n(\tilde{X})$ der ‘Grenzwert’ der Gruppen $\mathbb{Z}^k, k \in \mathbb{Z}$ ist, d.h. dass $\pi_2(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}^\infty$. Dies ist der Fall und man kann den Begriff ‘Grenzwert’ der Gruppen auch präzise machen mithilfe des Begriffes des ‘Kolimes’ oder ‘direct limit’, siehe

<http://de.wikipedia.org/wiki/Kolimes>

http://en.wikipedia.org/wiki/Direct_limit

15. DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN

Wir erinnern zuerst an die Definition einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X .

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Eine n -dimensionale Karte für X ist ein Homöomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n .
- (2) Es sei $x \in X$. Eine n -dimensionale Karte um x ist eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $x \in U$.
- (3) Wir sagen X ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn X ein Hausdorff-Raum ist und wenn es zu jedem $x \in X$ eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um x gibt.

Es sei nun $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Nachdem X ein topologischer Raum ist, macht es Sinn von Stetigkeit von f zu sprechen. Können wir auch von Differenzierbarkeit von f sprechen?

Man könnte ganz naiv folgende ‘Definition’ einführen: wir sagen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Punkt x differenzierbar, wenn für eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $x \in U$ die Abbildung $f \circ \Phi^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Auf den ersten Blick macht diese Definition Sinn, denn $f \circ \Phi^{-1}$ ist eine Abbildung von einer offenen Teilmenge in \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} , d.h. es macht Sinn von der Differenzierbarkeit von $f \circ \Phi^{-1}$ zu reden.

Aber was passiert, wenn wir eine andere Karte $\Psi: U \rightarrow W$ um x wählen? Es gilt

$$(15.1) \quad f \circ \Psi^{-1} = (f \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \Psi^{-1}).$$

Wir wissen, dass $\Phi \circ \Psi^{-1}$ stetig ist, aber a priori wissen wir nicht, dass $\Phi \circ \Psi^{-1}$ auch differenzierbar ist. Im Allgemeinen folgt aus der Differenzierbarkeit von $f \circ \Phi^{-1}$ nicht notwendigerweise die Differenzierbarkeit von $f \circ \Psi^{-1}$.

Um dennoch einen Begriff von Differenzierbarkeit für Funktionen auf Mannigfaltigkeiten zu haben müssen wir deswegen unsere Definition verfeinern:

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Ein *Atlas* für X besteht aus einer Familie von Karten $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$, so dass $\cup_{i \in I} U_i = X$.
- (2) Ein Atlas $\{U_i\}_{i \in I}$ heißt *differenzierbar*, wenn für alle $i, j \in I$ die Abbildung

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: \Phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_j(U_i \cap U_j)$$

C^∞ ist.

- (3) Eine *n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit* ist ein Paar (X, \mathcal{A}) , wobei X ein topologischer Raum ist, welcher Hausdorff ist, und \mathcal{A} ist ein differenzierbarer Atlas für X .

Bemerkung. Man kann sich fragen, was für 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten es gibt. Wir kennen natürlich S^1 und \mathbb{R} , und es erscheint auf den ersten Blick vernünftig, dass jede 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit zu einer der beiden Beispiele diffeomorph ist. (Beispielsweise ist $(-1, 1)$ diffeomorph zu \mathbb{R} , via $t \mapsto \tan(\frac{\pi}{2}t)$.) Erstaunlicherweise ist die jedoch nicht der Fall, es gibt noch eine weitere 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die sogenannte ‘lange Gerade’, siehe

[http://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_\(topology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_(topology)) oder
http://de.wikipedia.org/wiki/Lange_Gerade

Um dieses exotische Beispiel auszuschließen wird in der Literatur deshalb in der Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit oft auch noch gefordert, dass diese *zweit-abzählbar* sein soll. Ein topologischer Raum heißt hierbei *zweit-abzählbar*, wenn es eine abzählbare Basis für die Topologie gibt. Beispielsweise besitzt \mathbb{R}^n , und damit auch jede Teilmenge von \mathbb{R}^n , eine abzählbare Basis der Topologie. Die lange Gerade hingegen ist nicht zweit-abzählbar.

In Kapitel 4.1 haben wir verschiedene Beispiele von Mannigfaltigkeiten betrachtet. Man kann sich leicht davon vergewissern, dass die Karten, welche wir betrachtet haben, jeweils einen differenzierbaren Atlas bilden. Beispielsweise ist

$$\mathcal{A} := \{\Phi_U : U \xrightarrow{\text{id}} U\}_{U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}}$$

ein differenzierbarer Atlas für \mathbb{R}^n . Wir unterdrücken zumeist den Atlas \mathcal{A} von der Notation, und reden beispielsweise nur von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^n .

Wir Betrachten S^n mit den Abbildungen $\phi : S^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : S^n \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche gegeben sind durch die stereographische Projektion vom Nordpol $N = (0, \dots, 0, 1)$ oder Südpol $S = (0, \dots, 0, -1)$. Dann ist $\{\phi, \psi\}$ ein differenzierbarer Atlas für S^n . Wir betrachten nun S^n durchgehend als differenzierbare Mannigfaltigkeit bezüglich dieses Atlas.

Definition. Es sei (X, \mathcal{A}) eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

- (1) Es sei $x \in X$, wir sagen, eine Abbildung f ist *differenzierbar* (bzw. C^k oder C^∞) in x , wenn es für jedes $x \in X$ eine Karte $\Phi : U \rightarrow V$ in \mathcal{A} um x gibt, so dass $f \circ \Phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar (bzw. C^k oder C^∞) in $\Phi(x)$ ist.¹⁰⁴
- (2) Wir sagen, f ist *differenzierbar* (bzw. C^k oder C^∞) wenn f *differenzierbar* (bzw. C^k oder C^∞) in allen Punkten ist.

Wir überlassen es als freiwillige Übungsaufgabe, folgende Definitionen adäquat einzuführen:

- (1) k -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit einer n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.
- (2) Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.
- (3) Diffeomorphismus zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Der Beweis vom Satz vom regulären Wert liefert folgenden Satz:

Satz 15.1. (Satz vom regulären Wert) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Abbildung und $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann gibt es einen differenzierbaren Atlas \mathcal{A} auf $M := f^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n$, so dass (M, \mathcal{A}) eine $(n - 1)$ -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist, mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung einer C^∞ Funktion auf U auf M ebenfalls C^∞ ist.*

Wenden wir den Satz auf

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

¹⁰⁴Es folgt leicht aus (15.1) und aus der Differenzierbarkeit des Atlases, dass diese Definition nicht von der Wahl der Karte um x abhängt.

und $z = 1$ an, dann erhalten wir einen differenzierbaren Atlas für S^n . Man kann leicht zeigen, dass dieser Atlas äquivalent¹⁰⁵ ist zu dem vorherigen differenzierbaren Atlas.

Definition. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe. Eine C^∞ -Operation von G auf X ist eine Operation

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

so dass für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

eine C^∞ -Abbildung ist.

Folgender Satz wird nun ganz analog zu Satz 5.3 bewiesen.

Satz 15.2. *Es sei X eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, welche auf X diskret und C^∞ -operiert. Dann gibt es einen differenzierbaren Atlas auf X/G , so dass die Abbildung $X \rightarrow X/G$ eine C^∞ -Abbildung ist.*

Wir betrachten daher im Folgenden den n -Torus, $\mathbb{R}P^n$ usw. als differenzierbare Mannigfaltigkeiten. In Kapitel 3.3 hatten wir unter anderem den Torus, die Kleinsche Flasche und die Flächen von Geschlecht g eingeführt. Man kann direkt mithilfe der Definitionen zeigen, dass diese 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten einen kanonischen differenzierbaren Atlas besitzen, wir fassen diese Flächen daher nun durchgehend als differenzierbare Mannigfaltigkeiten auf.

Aus den Definitionen folgt auch leicht folgendes Lemma:

Lemma 15.3. *Es sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung einer n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit B , dann gibt es einen differenzierbaren Atlas auf X , so dass die Abbildung $X \rightarrow B$ ein lokaler Diffeomorphismus¹⁰⁶ ist.*

16. DIE POINCARÉ VERMUTUNG

In diesem Kapitel nehmen wir durchgehend an, dass alle topologischen Räume wegzusammenhängend sind.

¹⁰⁵Wir sagen zwei differenzierbare Atlanten sind äquivalent, wenn sie den gleichen Differenzierbarkeitsbegriff liefern. Dies ist äquivalent dazu, dass Verknüpfungen von den Karten diffeomorph sind.

¹⁰⁶D.h. zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U , so dass $p: U \rightarrow p(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen X ist n -fach zusammenhängend, wenn $\pi_i(X) = 0$ für $i = 1, \dots, n$.¹⁰⁷ ¹⁰⁸ Eine geschlossene differenzierbare n -Mannigfaltigkeit X , welche $(n - 1)$ -fach zusammenhängend ist, nennen wir im Folgenden eine Homotopiesphäre.¹⁰⁹ Es folgt aus Satz 14.9, dass S^n eine Homotopiesphäre ist.

Man kann sich nun fragen, ob S^n die einzige Homotopiesphäre ist ist.

Hierbei muss man allerdings die Fragestellung präzisieren: Wenn wir schreiben ‘einzige Mannigfaltigkeit’ macht es a priori einen Unterschied, ob ‘bis auf einen Homöomorphismus’ oder ‘bis auf einen Diffeomorphismus’.

Für jedes n stellen sich also zwei Fragen:

Frage. Es sei X eine n -dimensionale Homotopiesphäre.

- (1) Ist X diffeomorph zu S^n ?
- (2) Ist X homöomorph zu S^n ?

Wenn $n = 1$ oder $n = 2$ dann ist die Antwort auf beide Fragen in der Tat ‘Ja’. Der Fall $n = 1$ ist ¹¹⁰ eine interessante Übungsaufgabe. Der Fall $n = 2$ wurde im 19. Jahrhundert im Zuge der Klassifikation von Flächen bewiesen.

Der Fall $n = 3$ wurde in 1905 von Poincaré als Vermutung formuliert und wurde als die Poincaré-Vermutung bekannt.

Die Beantwortung der Fragen erfolgte in Sprüngen, welche man vielleicht so nicht erwarten würde. Der erste wichtige Satz wurde von John Milnor ¹¹¹ in 1956 (Fieldsmedaille 1962) bewiesen:

Satz 16.1. (Milnor) *Es gibt eine geschlossene differenzierbare 7-Mannigfaltigkeit, welche homöomorph zu S^7 aber nicht diffeomorph zu S^7 ist.*

Eine differenzierbare n -Mannigfaltigkeit, welche homöomorph zu S^n aber nicht diffeomorph zu S^n ist wird *exotische n -Sphäre* genannt. Folgender Satz wurde kurze Zeit später von Kervaire und Milnor bewiesen:

¹⁰⁷In Kapitel 6 hatten wir $\pi_0(X)$ als die Menge der Komponenten von X eingeführt. Nachdem X wegzusammenhängend ist, macht es Sinn von $\pi_i(X)$ zu reden, nachdem der Isomorphietyp nicht von der Wahl des Basispunktes abhängt.

¹⁰⁸Für $n = 1$ erhalten wir also den Begriff, dass X wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

¹⁰⁹Es folgt aus dem Satz von Hurewicz und Poincaré-Dualität, dass eine geschlossene differenzierbare n -Mannigfaltigkeit X eine Homotopiesphäre ist, wenn $\pi_i(X) = 0$ für $i = 0, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Insbesondere ist eine geschlossene differenzierbare 3-Mannigfaltigkeit X eine Homotopiesphäre ist, genau dann, wenn $\pi_1(X) = 0$.

¹¹⁰Vermutlich.

¹¹¹http://de.wikipedia.org/wiki/John_Willard_Milnor

Satz 16.2. (Kervaire-Milnor) *Es sei $n \geq 5$. Dann gibt es höchstens endlich viele exotische n -Sphären, zudem gibt es in den Dimensionen 5 und 6 überhaupt keine exotischen Sphären.*

Unabhängig davon hat Moise ¹¹² schon in 1952 bewiesen, dass es in Dimension 3 keine exotischen Sphären geben kann. Kurze Zeit später wurde im Jahre 1961 folgender Satz von Smale ¹¹³ (Fieldsmedaille 1966) bewiesen:

Satz 16.3. (Smale) *Es sei $n \geq 5$, dann ist jede Homotopiesphäre homöomorph zu S^n .*

Nach diesen Durchbrüchen wurde es eine zeitlang ruhig bevor Freedman ¹¹⁴ (Fieldsmedaille 1986) in 1981 die Poincarévermutung in Dimension 4 bewies:

Satz 16.4. (Freedman) *Jede 4-dimensionale Homotopiesphäre ist homöomorph zu S^4 .*

Dieser Beweis ist so schwierig und kompliziert, dass es angeblich nur 5 Mathematiker gibt, die den Beweis jemals verstanden haben. Freedman wird im Frühjahr 2013 eine Vorlesung am Max-Planck Institut in Bonn über den Beweis halten.

Es dauerte dann noch einmal 20 Jahre bis die ursprüngliche Poincarévermutung endlich von Perelman ¹¹⁵ (Fieldsmedaille in 2006 abgelehnt) ¹¹⁶ bewiesen wurde:

Satz 16.5. (Perelman 2003) *Jede 3-dimensionale Homotopiesphäre ist homöomorph zu S^3 .*

Die Poincarévermutung ist eine der 7 großen Vermutungen ¹¹⁷, auf welche die Clay-Stiftung ein Preisgeld von 1 Million Dollar ausgesetzt hat. Es verbleiben jetzt noch 6 Wege um mithilfe von Mathematik reich zu werden.

Was verbleibt jetzt noch zu beweisen? Folgende Frage ist weiterhin offen:

¹¹² E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Ann. of Math. (2) 56 (1952), 96–114.

¹¹³ http://de.wikipedia.org/wiki/Stephen_Smale

¹¹⁴ http://de.wikipedia.org/wiki/Michael_Freedman

¹¹⁵ http://de.wikipedia.org/wiki/Grigori_Jakowlewitsch_Perelman

¹¹⁶ G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, (2002).

G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, (2003).

G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, (2003).

¹¹⁷ <http://de.wikipedia.org/wiki/Millennium-Probleme>

Frage. Gibt es in Dimension 4 exotische Sphären?

Die 4-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten spielen in der Topologie eine außergewöhnliche Rollen.

- (1) Flächen, d.h. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind seit dem 19. Jahrhundert klassifiziert.
- (2) Mannigfaltigkeiten der Dimension größer gleich fünf sind relativ gut verstanden und viele Probleme wurden schon in den Fünfzigern und Sechzigern gelöst.
- (3) 3-dimensionale Mannigfaltigkeit sind zwar nicht klassifiziert, aber durch die Arbeiten von Thurston, Perelman, Agol etc. haben wir jetzt ein relativ gutes Verständnis von 3-Mannigfaltigkeiten.
- (4) 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten hingegen sind in vielerlei Beziehung terra incognita. Wir wissen, dass sich Mannigfaltigkeiten in Dimension 4 dramatisch von Mannigfaltigkeiten in anderen Dimensionen unterscheiden. Beispielsweise gilt für $k \neq 4$, dass es keine exotischen \mathbb{R}^k gibt¹¹⁸, andererseits folgt aus den Arbeiten von Donaldson (Fieldsmedaille 1986)¹¹⁹, dass \mathbb{R}^4 überabzählbare viele differenzierbare Strukturen besitzt.¹²⁰

¹¹⁸D.h. für $k \neq 4$ ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche homöomorph zu \mathbb{R}^k ist, ist auch diffeomorph zu \mathbb{R}^k

¹¹⁹http://de.wikipedia.org/wiki/Simon_Donaldson

¹²⁰D.h. es gibt überabzählbar viele differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche homöomorph zu \mathbb{R}^4 sind, aber welche paarweise nicht diffeomorph sind.