LE NOMBRE DE DÉNOUAGE ALGÉBRIQUE

STEFAN FRIEDL

Conférence à l'Université Paris Diderot
travail joint avec Maciej Borodzik.

1. Définitions et le théorème principale

1.1. **Le pôlynome d'Alexander.** Soit $K \subset S^3$ un nœud. Par la dualité d'Alexander nous savons que $H_1(S^3 \setminus \nu K) \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$. Nous considerons

$$H_1(\text{le revêtement cyclic infini de } S^3 \setminus \nu K).$$

C'est un module sur l'anneau du groupe $\langle t \rangle$, donc c'est un module sur $\Lambda = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Nous appelons ce module *module d'Alexander de* K et nous le dénotons par $H_1(S^3 \setminus \nu K; \Lambda)$.

Le module d'Alexander est un module de présentation finie, en fait, il y a une matrice A carrée sur Λ, telle que

$$H_1(S^3 \setminus \nu K; \Lambda) \cong \Lambda^r / A\Lambda^r.$$

Maintenant nous pouvons donner la definition du *polynôme d'Alexander de* K:

$$\Delta_K(t) := \det(A) \in \Lambda.$$

(1) Le polynôme du nœud trivial est égale à ± 1. En fait, si K est un nœud quelconque, alors $\Delta_K(t) = \pm 1$.
(2) Soit K un nœud générique, alors $\Delta_K(t) \neq \pm 1$, mais il y des nœud non-trivials avec polynôme d'Alexander trivial (par exemple le nœud de Conway ou le nœud de Kinoshita–Terasaka).

1.2. **Le nombre de dénouage (algébrique).** *Définition.* Le nombre de dénouage $u(K)$ d'un nœud K correspond au minimum de croisements à inverser dans l'une de ses projections afin de le transformer au nœud trivial.

Le nombre de dénouage est un invariant élémentaire, mais pratiquement c'est un invariant trés difficile a calculer. Plus précisément, on peut obtenir des bords supérieurs en étudiant des diagrammes explicits, mais il n'y a pas beaucoup de bords inférieurs.

Nous proposons d'étudier un invariant plus accessible:

Définition. Le nombre de dénouage algébrique $a(K)$ d'un nœud K correspond au minimum de croisements à inverser dans l'une de ses projections afin de le transformer à un nœud J tel que $\Delta_J(t) \pm 1$.

Cette définition à été introduit par Murakami [Muk90] utilisant les matrices de Seifert. Notre définition est équivalent à la définition de Murakami par le travail de Fogel [Fo93] et Saeki [Sae99]. En particulier on peut obtenir des bords supérieurs en étudiant les matrices de Seifert. C'est ce que nous faisons avec 'knotorious' ([BF12a]).

C'est évident que $a(K) \leq u(K)$, est en général c'est n'est pas une égalité. Par exemple, soit K un nœud non-trivial tel que $\Delta_K(t) = \pm 1$, alors $u(K) \geq 1$ et $a(K) = 0$.

1.3. **La forme de Blanchfield.** Soit $K \subset S^3$ un nœud. Nous écrivons $X = X(K) = S^3 \setminus \nu K$, $\Lambda = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ et $\Omega = \mathbb{Q}(t)$. Nous considerons

$$\Phi\colon H_1(X;\Lambda) \to H_1(X,\partial X;\Lambda) \to \overline{H^2(X;\Lambda)} \xleftarrow{\cong} \overline{\mathrm{Ext}_\Lambda(H_1(X;\Lambda),\Omega)} = \overline{\mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(X;\Lambda),\Omega/\Lambda)}.$$

L'application première est l'inclusion, la deuxième est la dualité de Poincaré, la troisième et le théorème de coefficients universels. Ainsi nous obtenons une forme

$$\begin{array}{rcl} \lambda(K)\colon H_1(X(K);\Lambda) \times H_1(X(K);\Lambda) & \to & \Omega/\Lambda \\ (a,b) & \mapsto & \Phi(a)(b), \end{array}$$

non–singulière et hermitienne. Nous l'appelons *forme de Blanchfield de* K.

Soit A une $n \times n$–matrice sur Λ, telle que $\det(A) \neq 0$. Nous considerons la forme

$$\begin{array}{rcl} \lambda(A)\colon \Lambda^n/A\Lambda^n \times \Lambda^n/A\Lambda^n & \to & \Omega/\Lambda \\ (a,b) & \mapsto & \overline{a}^T A^{-1} b. \end{array}$$

Nous definissions

$$n(K) := \begin{array}{l} \text{la taille minimale d'une matrice } A = A(t) \text{ hermitienne sur } \Lambda \text{ telle que} \\ \quad (1) \quad \lambda(A) \cong \lambda(K), \text{ et telle que} \\ \quad (2) \quad A(1) \text{ est congruente sur } \mathbb{Z} \text{ à une matrice diagonale.} \end{array}$$

Il faut verifier que telle matrice existe. Soit V une matrice de taille $2k$ qui est S–equivalente à une matrice de Seifert de K. Notons que $V - V^t$ est antisymmétrique est que $\det(V - V^t) = (-1)^k$. Après une change de base nous pouvons supposer que

$$V - V^t = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_k \\ -\mathrm{id}_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant nous considerons

$$A_K(t) = \begin{pmatrix} (1-t^{-1})^{-1}\mathrm{id}_k & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_k \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} \mathrm{id}_k & 0 \\ 0 & (1-t)\mathrm{id}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{id}_k & 0 \\ 0 & (1-t^{-1})\mathrm{id}_k \end{pmatrix} V^t \begin{pmatrix} (1-t)^{-1}\mathrm{id}_k & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_k \end{pmatrix}.$$

Utilisant le travail de Kearton [Ke75] on peut démontrer que $\lambda(A_K(t)) \cong \lambda(K)$.

Finalement, considerons $A(t) = A_K(t) \oplus (1)$, alors $A(1)$ représente undeforme indéfinie, impaire et symmétrique sur $\mathbb{Z}$. Cela implique que $A(1)$ est diagonalisable. Ainsi nous avons démontré que $n(K)$ est definie et que

$$n(K) \leq \deg \Delta_K(t) + 1.$$

1.4. **Les résultats principals.** Notre résultat principal de [BF12b] dit que $n(K)$ est un bord inférieur au nombre de dénouage algébrique:

Theorem 1.1. (F–Borodzik) *Soit K un nœud, alors*

$$n(K) \leq a(K).$$

De plus, de notre connaissance, $n(K)$ est le meilleur bord inférieur 'classique' au nombre de dénouage. (Un invariant 'classique' est un invariant determiné par la matrice de Seifert.) Plus précisement nous montrons que $n(K)$ subsume

(1) les signatures de Levine et Tristram [Tr69, Lev69, Mus65],
(2) l'indice de Nakanishi [Na81] (ça veut dire, le nombre minimal de générateurs du module d'Alexander),
(3) l'obstruction de Lickorish [Lic85, CL86] qui donne une obstruction à $u(K) = 1$, en terme de la forme d'enlacement sur le revêtement branché double de K,
(4) l'obstruction de Jabuka [Ja09] à $u(K) = 1$,
(5) l'invariant de Livingston [Liv11] qui donne un bord inférieur au genre topologique en dimension 4, et donc au nombre de dénouage algébrique,
(6) l'obstruction de Stoimenow [St04] à $u(K) = 2$.

Nous concluons cette section avec quelque remarques:

(1) Malheureusement Il n'y a aucun algorithme pour calculer $n(K)$.
(2) Nous conjecturons que $n(K) = a(K)$. Dans le cas que $n(K) = 1$ cela a été démontré par Fogel [Fo93, Fo94].
(3) Pour détecter la différence entre le nombre de dénouage et le nombre de dénouage algébrique il faut des invariants plus subtiles, par exemple la théorie de gauge [CL86, KM93], l'homologie de Khovanov [Ras10] et l'homologie de Heegaard-Floer [OS03, OS05, Ow08]. Ces invariants sont pour la plus part trés difficile a calculer.

1.5. **La forme d'enlacement et exemples.** Soit $A(t)$ une matrice sur Λ qui représente la forme de Blanchfield, alors la matrice intégrale $A(-1)$ représente la forme d'enlacement

$$l(K) : H_1(\Sigma_2(K)) \times H_1(\Sigma_2(K)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

où $\Sigma_2(K)$ dénote le revêtement branché double de K . Notre résultat principal implique le théorème suivant:

Theorem 1.2. *Si $n(K) = n$, alors il existe une $n \times n$–matrice symmétrique A sur $\mathbb{Z}$, telle que*

(1) $|\det(A)| = |\Delta_K(-1)|$,

(2) *$l(A) \cong 2l(K)$,*
(3) *A modulo deux est égale à l'identité.*

Si $sign(K) = 2n \cdot \epsilon$ avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$, alors nous pouvons arranger que A est aussi telle que

(4) *A est définie positive si $\epsilon = 1$ et définie négative si $\epsilon = -1$,*
(5) *les entrées diagonales de A modulo quatre sont égale à $-\epsilon$.*

Remark. Théorème 1.2 est trés proche à [Ow08, Theorem 3].

Ce résultat donne des obstructions calculables pour que $n(K)$ tient une certaine valeur. L'obstruction à $n(K) = 1$ est précisement l'obstruction de Lickorish, mais les obstructions à $n(K) = 2$, $n(K) = 3$ etc. sont nouveaux. Nous avons écrit un programme 'knotorious' et nous avons trouvé 21 nœuds avec au plus 12 croisement, tel que notre méthode démontre que $n(K) \geq 3$, mais tel que les autres invariants classiques sont sans conclusion.

En particulier nous pouvons déterminer le nombre de dénouage algébrique pour tous les nœuds avec au plus 11 croisements, et nous pouvons déterminer le nombre de dénouage algébrique pour tous les nœuds avec au plus 12 croisements avec 19 exceptions.

Le nœud $K = 12a_{50}$ est un nœud pour lequel nous ne pouvons pas déterminer le nombre de dénouage algébrique. Nous savons que ou $n(K) = 1$ ou $n(K) = 2$. La forme de Blanchfield est isométrique à

$$\begin{array}{rcl} \Lambda/p \times \Lambda/p & \to & \Omega/\Lambda \\ (v, w) & \mapsto & \frac{1}{p}\overline{v}qw, \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} p & = & \Delta_K(t) = -8t^3 + 20t^2 - 30t + 3 - 30t^{-1} + 20t^{-2} - 8t^{-3}, \\ q & = & -t^3 + 7t^2 - 13t + 17 - 13t^{-1} + 7t^{-2} - t^{-3}. \end{array}$$

Alors $n(K) = 1$ si et seulement si il y a un automorphisme de Λ/p (commue module sur Λ), qui transforme la forme à une forme telle que $(v, w) \mapsto \pm\overline{v}w/p$. Equivalentement, $n(K) = 1$ si et seulement s'il existe un $f \in \Lambda$ tel que $qf\overline{f} = \pm 1 \pmod p$.

2. Démonstration que $n(K) \leq u(K)$

Pour simplifier la discussion nous allons démontrer que

$$n(K) \leq u(K).$$

Nous commencons avec une discussion de l'effet que tient une change de croisement sur la chirurgie $N(K)$ de pente 0 le long du nœud K.

Si K' est obtenu de K en changeant un croisement, also nous pouvons obtenir $N(K')$ de $N(K)$ par une chirurgie de pente ± 1 utilisant une des deux courbes autour du croisement.

Si nous ajoutons à $N(K)$ une anse le long de la courbe avec encadrement ± 1, alors nous obtenons un cobordisme W de $N(K)$ à $N(K')$.

Notons qu'une des deux courbes est trivial en homologie, si nous utilions cette courbe, alors $H_1(N(K)) \to H_1(W)$ et $H_1(N(J)) \to H_1(W)$ sont des isomorphismes.

Maintenent soit K un nœud, tel que nous pouvons le transformer au nœud trivial J par invertir n croisements. Alors nous pouvons transformer J à K invertissant n croisements.

Par la discussion ci dessus nous obtenons une variété W de dimension 4, telle que

(1) $\partial W = N(K) \cup N(J) = S^1 \times S^2$,
(2) $\mathbb{Z} = \pi_1(N(J)) \to \pi_1(W)$ est surjective et induit un isomorphisme d'homologie, donc $\pi_1(W) = \mathbb{Z}$,
(3) $H_1(N(K)) \to H_1(W)$ est un isomorphisme,
(4) $b_2(W) = n$,
(5) la forme d'intersection sur $H_2(W)$ est diagonalisable.

On peut démontrer que

$$H_2(W; \Lambda) \cong \Lambda^n.$$

De plus, chaque matrice $A(t)$ (qui est nécessairement de taille n) sur Λ qui représente la forme d'intersection équivariante

$$H_2(W; \Lambda) \times H_2(W; \Lambda) \to \Lambda$$

représente aussi la forme de Blanchfield. La matrice $A(1)$ représente la forme d'intersection ordinaire sur $H_2(W)$, qui est diagonalisable. Cela conclu la démonstration de l'inegalité $n(K) \leq u(K)$.

References

[Bl57] R. C. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann. of Math., 65: 340-356 (1957)

[BF12a] M. Borodzik and S. Friedl, *Knotorious World Wide Web page*, `http://www.mimuw.edu.pl/~mcboro/knotorious.php`, December 2011.

[BF12b] M. Borodzik and S. Friedl, *The unknotting number and classical invariants I*, preprint (2012)

[CL86] T. Cochran and R. Lickorish, *Unknotting information from 4-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), no. 1, 125-142.

[Fo93] M. Fogel, *The Algebraic Unknotting Number*, PhD thesis, University of California, Berkeley (1993)

[Fo94] M. Fogel, *Knots with Algebraic Unknotting Number One*, Pacific J. Math. 163, 277–295 (1994)

[Ja09] S. Jabuka, *The rational Witt class and the unknotting number of a knot*, Preprint (2009)

[Ke75] C. Kearton, *Blanchfield duality and simple knots*, Trans. Am. Math. Soc. 202, 141-160 (1975)

[Ke89] C. Kearton, *Mutation of knots*, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), no. 1, 206208.

[KM93] P. Kronheimer and T. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces I*, Topology 32 (1993), no. 4, 773–826.

[Lev69] J. Levine, *Knot cobordism groups in codimension two*, Commentarii Mathematici Helvetici, 44 (1969) 229-244

[Lev77] J. Levine, *Knot modules. I.*, Trans. Am. Math. Soc. 229, 1-50 (1977)

[Lic85] W. B. R. Lickorish, *The unknotting number of a classical knot*, Contemp. Math. 44 (1985) 117–121.

[Liv11] C. Livingston, *Knot 4-genus and the rank of classes in $W(\mathbb{Q}(t))$*, Pac. J. of Math. (2011), 113–126

[Muk90] H. Murakami, *Algebraic Unknotting Operation*, Q&A. Gen. Topology 8, 283-292 (1990)

[Mus65] K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 387-422.

[Na81] Y. Nakanishi, *A note on unknotting number*, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 9: 99-108. (1981)

[OS03] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Knot Floer homology and the four-ball genus*, Geometry and Topology 7 (2003), 625–639.

[OS05] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Knots with unknotting number one and Heegaard Floer homology*, Topology 44 (2005), no. 4, 705–745.

[Ow08] B. Owens, *Unknotting information from Heegaard Floer homology*, Adv. Math. 217 (2008), no. 5, 2353–2376.

[Ras10] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, Inventiones Mathematicae 182 (2010), no. 2, 419–447.

[Sae99] O. Saeki, *On Algebraic Unknotting Numbers of Knots*, Tokyo J. Math. 22, 425-443 (1999)

[St04] A. Stoimenow, *Polynomial values, the linking form and unknotting numbers*, Math. Res. Lett. 11 (2004), no. 5-6, 755–769.

[Tr69] A. Tristram, *Some cobordism invariants for links*, Proc. Camb. Phil. Soc. 66 (1969), 251-264

Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Germany
E-mail address: sfriedl@gmail.com