

HYPERBOLISCHE GEOMETRIE - WINTERSEMESTER 2013-2014

STEFAN FRIEDL

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	3
Danksagung	3
1. Einleitung	4
2. Die hyperbolische Ebene und die Riemann-Sphäre	5
2.1. Hyperbolische Geraden	5
2.2. Die Riemann-Sphäre	7
3. Möbiustransformation	9
3.1. Definition von Möbiustransformationen	9
3.2. Klassifikation von Möbiustransformationen bis auf Konjugation	15
3.3. Spiegelungen	17
3.4. Konforme Abbildungen	20
3.5. Möbiustransformation der hyperbolischen Ebene	21
4. Längenmaße	27
4.1. Längenmaße auf Mannigfaltigkeiten	27
4.2. Längenmaße auf der hyperbolischen Ebene	32
4.3. Geodäten und vollständige Mannigfaltigkeiten	40
5. Axiomatische Geometrie	41
5.1. Geradenaxiome	42
5.2. Streckenaxiome	42
5.3. Bewegungsaxiome	46
5.4. Längenmaße in Ebenen	50
5.5. Das Parallelenaxiom	52
5.6. Das Winkelmaß	53
6. Flächen	59
6.1. Die Sphäre	59
6.2. Der Torus	64
7. Das Poincaré-Scheibenmodell	72
8. Flächen von Geschlecht größer eins	76
8.1. Topologische Beschreibung von Flächen von höherem Geschlecht	76
8.2. Riemannsche Metriken und Kartenwechsel	80
8.3. Reguläre n -ecke und hyperbolische Geometrie	82
8.4. Hyperbolische Metriken auf Flächen	85

8.5. Eigenschaften von hyperbolischen Metriken auf Flächen	88
8.6. Der Satz von Gauss-Bonnet	91
9. Parkettierungen	93
10. Allgemeine Flächen	96
10.1. Nicht-orientierbare geschlossene Flächen	96
10.2. Flächen mit Rand	99
11. Der dreidimensionale hyperbolische Raum	104
11.1. Einige Isometrien von \mathbb{H}^3	104
11.2. Geodäten in \mathbb{H}^3	106
11.3. Die Isometriegruppe von \mathbb{H}^3	107
12. Homotopiesphären und die Poincaré-Vermutung	110
13. 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten	112
13.1. Beispiele von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten	112
13.2. Konstruktionen von weiteren 3-Mannigfaltigkeiten	114
13.3. Der Primzerlegungssatz	115
13.4. Seifert gefaserte Mannigfaltigkeiten	116
13.5. Die JSJ-Zerlegung einer 3-Mannigfaltigkeit	117
13.6. Atorische Mannigfaltigkeiten	118
13.7. Hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten	121

LITERATUR

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skript. Als begleitende und weiterführende Literatur bieten sich eventuell folgende Bücher an:

- [A] Anderson: *Hyperbolic Geometry*
- [BP] Benedetti, Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*
- [B] Bonahon: *Low-dimensional Geometry*
- [K] Kunz: *Ebene Geometrie*
- [M] Massey: *Algebraic topology: An introduction*
- [S] Stillwell: *Geometry of Surfaces*.

Das Buch von Kunz kann mithilfe des folgenden Links von der Webseite des Autoren heruntergeladen werden:

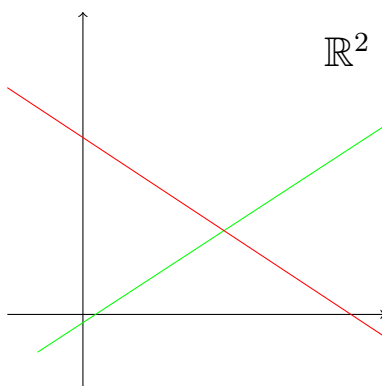
<http://www-nw.uni-regensburg.de/~kue22107/geometrie/ebenegeo.pdf>

DANKSAGUNG

Ich möchte mich bei allen Studenten für die aktive Teilnahme an der Vorlesung bedanken. Mein Dank geht auch an Matthias Nagel für viele hilfreiche Diskussionen und für das Erstellen von Kapitel 7. Ein besonderer Dank gilt Wolfgang Hempel für das 'texen' von Kapitel 1 bis 7. Zudem danke ich auch Frau Ingrid Boehm für das sorgfältige Korrekturlesen.

1. EINLEITUNG

Die klassische euklidische Geometrie in \mathbb{R}^2 ist bekannt aus der Schule und dem ‘alltäglichen’ Leben. Eine Gerade ist hierbei eine Kurve, welche zwischen je zwei Punkten auf der Kurve, die kürzeste Verbindung bildet.



In der euklidischen Geometrie gelten insbesondere folgende Aussagen:

- (1) Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Gerade durch diese Punkte.
- (2) Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h parallel zu g durch P .
- (3) Die Winkelsumme in einem Dreieck ist immer π .

Wenn man einen Globus betrachtet, dann ist es offensichtlich, dass wir nicht nur die euklidische Geometrie betrachten müssen, sondern auch die sphärische Geometrie. In der

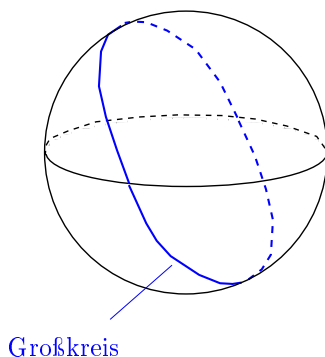


ABBILDUNG 1. Großkreise auf S^2 geben ‘lokal’ die kürzeste Verbindung.

mathematischen Abstraktion betrachten wir dazu

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Ein *Großkreis* ist die Schnittmenge von S^2 mit einer Ebene durch den Ursprung. In der sphärischen Geometrie gelten folgende Eigenschaften:

- (1) Zu je zwei Punkten gibt es einen Großkreis, welcher beide Punkte enthält. Jedoch ist dieser im Allgemeinen nicht eindeutig.
- (2) Parallelen gibt es nicht.
- (3) Die Winkelsumme in einem Dreieck ist immer größer als π .

In dieser Vorlesung wollen wir noch eine weitere Geometrie kennenlernen, nämlich die hyperbolische. Diese ist auf dem ersten Blick nicht besonders intuitiv. Sie hat beispielsweise folgende Eigenschaften:

- (1) Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Gerade, welche beide Punkte enthält.
- (2) Zu jeder Gerade g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es unendlich viele Parallelen zu Geraden g durch P .
- (3) Die Winkelsumme in einem Dreieck ist immer kleiner als π .

Obwohl die hyperbolische Geometrie solch eigenartige Eigenschaften besitzt, ist sie nichtsdestotrotz eine sehr natürliche Geometrie, mindestens so wichtig wie die euklidische und die sphärische Geometrie. Beispielsweise werden wir zeigen, dass alle geschlossenen Flächen bis auf die Sphäre und den Torus “hyperbolisch” sind. In der Tat sind “fast alle” 2-Mannigfaltigkeiten hyperbolisch.

Das Ziel dieser Vorlesung ist die hyperbolische Ebene einzuführen und die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur euklidischen Geometrie herauszuarbeiten. Wir werden dann zeigen, dass ‘fast alle’ Flächen eine hyperbolische Struktur besitzen. Zum Abschluß der Vorlesung wenden wir uns den hyperbolischen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten und der Arbeit von Perelman zu.

2. DIE HYPERBOLISCHE EBENE UND DIE RIEMANN-SPHÄRE

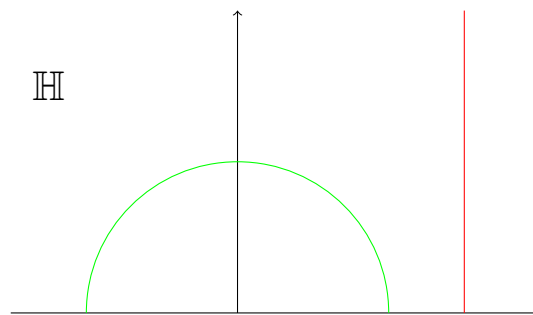
2.1. Hyperbolische Geraden. Im Folgenden identifizieren wir durchgehend \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} . Wir bezeichnen dann

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\},$$

als die *Hyperbolische Ebene*. Wir definieren zudem eine *Gerade in \mathbb{H}* oder auch *Hyperbolische Gerade* als eine Teilmenge g von \mathbb{H} der Form

$$g = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re } z = a\}, \text{ wobei } a \in \mathbb{R} \text{ oder}$$

$$g = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - b| = r\}, \text{ wobei } b \in \mathbb{R} \text{ und } r > 0.$$



Das folgende Lemma besagt insbesondere, dass eine ganz grundlegende Eigenschaft für euklidische Geraden auch für hyperbolische Geraden gilt.

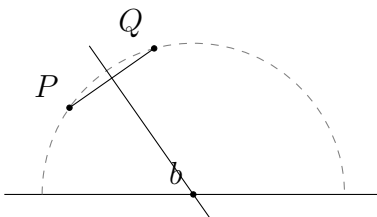
Lemma 2.1. *Zu je zwei Punkten $P \neq Q$ gibt es genau eine hyperbolische Gerade durch P und Q .*

Beweis. 1. Fall: $\operatorname{Re} P = \operatorname{Re} Q$.

Dann ist $P, Q \in \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} P\}$ und diese Gerade ist auch die einzige, welche P und Q enthält.

2. Fall: $\operatorname{Re} P \neq \operatorname{Re} Q$.

Die Mittelsenkrechte zu \overline{PQ} ist nicht parallel zur x -Achse, denn es ist $\operatorname{Re} P \neq \operatorname{Re} Q$. Sei dann b der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der reellen Achse. Dann ist $r := \overline{bP} = \overline{bQ}$ und P, Q liegen auf $\{z \in \mathbb{H} \mid |z - b| = r\}$.



□

Definition. Zwei Geraden heißen im Folgenden *parallel*, wenn sie sich nicht schneiden.

Das folgende Lemma zeigt nun, dass sich hyperbolische Geraden in einem wichtigen Punkt radikal von den euklidischen Geraden unterscheiden.

Lemma 2.2. *Es sei g eine Gerade in \mathbb{H} und $P \notin g$. Dann gibt es unendlich viele Geraden in \mathbb{H} , die P enthalten und zu g parallel sind.*

Beweis. 1. Fall: $g = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = a\}$ für $a \in \mathbb{R}$

Wähle

$$\tilde{a} = \begin{cases} \gg 0 & \text{falls } P \text{ rechts von } g \text{ liegt,} \\ \ll 0 & \text{falls } P \text{ links von } g \text{ liegt.} \end{cases}$$

Dann gilt für alle diese \tilde{a} , dass $g \cap \{z \in \mathbb{H} \mid |\tilde{a} - z| = |\tilde{a} - Q|\} = \emptyset$.

2. Fall: $g = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - a| = r\}$

Wir betrachten $h = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - a| = |a - Q|\}$. Dann ist $Q \in h$ und $h \cap g = \emptyset$. Zudem gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $0 < \delta < \varepsilon$ die Geraden $\{z \in \mathbb{H} \mid |z - a + \delta| < |a - \delta - Q|\}$ auch parallel sind zu g . □

Frage. Welche Transformationen von \mathbb{H}^2 gibt es, die hyperbolische Geraden in hyperbolische Geraden überführen?

2.2. Die Riemann-Sphäre. Es sei $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die sogenannte *Riemann-Sphäre*. Wir wollen $\bar{\mathbb{C}}$ nicht nur als Menge, sondern als topologischen Raum auffassen. Für $z \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir dazu

$$U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon\}$$

und

$$U_\varepsilon(\infty) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > \frac{1}{\varepsilon}\}$$

Wir sagen nun $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ist *offen*, wenn für jedes $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(z) \subset U$. Es ist relativ leicht zu zeigen, dass dies eine Topologie auf $\bar{\mathbb{C}}$ definiert.

Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} J: \bar{\mathbb{C}} &\longrightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z}, \text{ wenn } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 &\longmapsto \infty \\ \infty &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus.

Lemma 2.3. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} f: S^2 &\longrightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ (x, y, z) &\longmapsto \begin{cases} \infty, & \text{wenn } (x, y, z) = (0, 0, 1), \\ \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus. Sie wird die *stereographische Projektion* genannt.

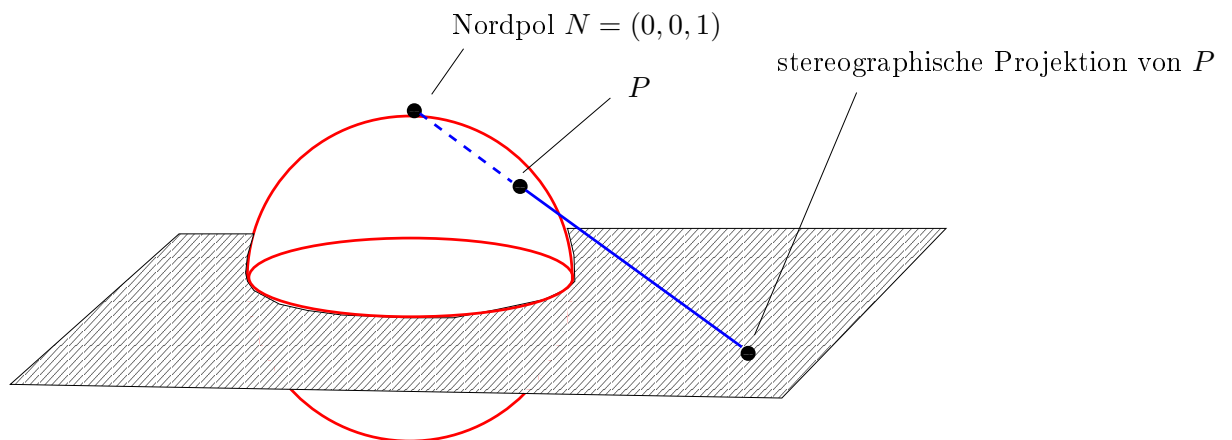


ABBILDUNG 2. Die Stereographische Projektion vom Nordpol auf die xy -Ebene.

Beweis. Die Abbildung ist bijektiv und stetig. Der Raum S^2 ist kompakt und $\overline{\mathbb{C}}$ ist Hausdorffsch. Damit ist f^{-1} stetig. \square

Definition. Ein *Kreis* in $\overline{\mathbb{C}}$ ist entweder ein euklidischer Kreis in \mathbb{C} oder eine Gerade in \mathbb{C} zusammen mit dem Punkt $\{\infty\}$. Anders ausgedrückt, ein Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ ist eine Teilmenge der Form

$$\{z \in \mathbb{C} \mid az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\},$$

wobei $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ und entweder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$, oder von der Form

$$\{z \in \mathbb{C} \mid bz + \bar{b}\bar{z} = 0\} \cup \{\infty\},$$

wobei $b \neq 0$.

Die stereographische Projektion bildet gerade Kreise in S^2 auf Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$ ab.

Definition. Sei A eine Teilmenge von \mathbb{H} . Die *Punkte im Unendlichen* sind definiert als die Menge

$$\overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}},$$

wobei \overline{A} der topologische Abschluss von A in $\overline{\mathbb{C}}$ ist und $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

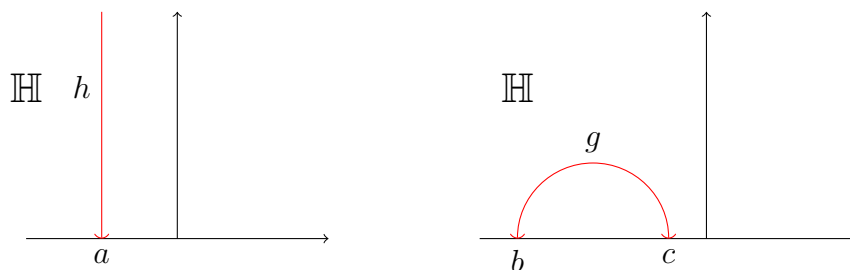


ABBILDUNG 3. Die Punkte im Unendlichen von h sind a und ∞ . Die Punkte im Unendlichen von g sind c und b .

Lemma 2.4. Für alle Punktepaare $P, Q \in \overline{\mathbb{R}}$, $P \neq Q$ existiert genau eine hyperbolische Gerade $g \in \mathbb{H}$, sodass P und Q die Punkte im Unendlichen von g sind.

Beweis. 1.Fall: $P, Q \in \mathbb{R}$.

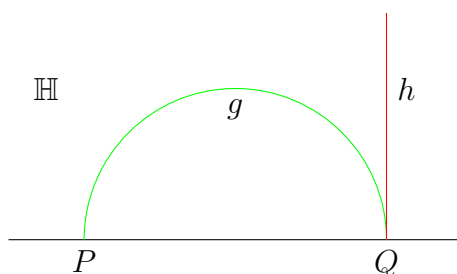


ABBILDUNG 4. Bild zum Beweis von Lemma 2.4

Die gesuchte Gerade ist $g = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - \frac{Q+P}{2}| = \frac{|P-Q|}{2}\}$.

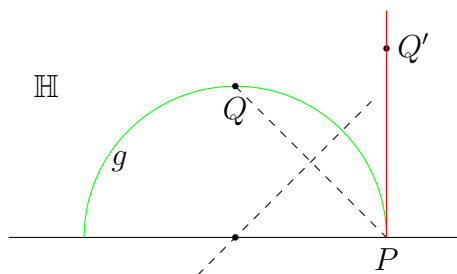
2.Fall: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P = \infty$.

Dann ist $h = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = Q\}$ die gesuchte Gerade. □

Lemma 2.5. Sei $P \in \overline{\mathbb{R}}$ und $Q \in \mathbb{H}$. Dann gibt es genau eine hyperbolische Gerade, sodass Q auf g liegt und P ein Punkt im Unendlichen von g ist.

Beweis. 1. Fall: $P \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{Re} Q = \operatorname{Re} P$.

Dann ist $g = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} P\}$ die gesuchte Gerade.



2. Fall: $P \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{Re} Q \neq \operatorname{Re} P$.

Folgt wie im Beweis zu Lemma 2.1.

3.Fall: $P = \infty$.

Dann erfüllt $g = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} Q\}$ die gewünschten Eigenschaften. □

3. MÖBIUSTRANSFORMATION

3.1. **Definition von Möbiustransformationen.** Wir schreiben

$$\operatorname{Homeo}(\overline{\mathbb{C}}) = \{f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ ist ein Homöomorphismus}\}$$

und

$$\text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}}) = \{f \in \text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}}) \mid f \text{ bildet Kreise auf Kreise ab}\}.$$

Wir wollen im Folgenden die Gruppe $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ besser verstehen. Wir geben dazu erst einmal Beispiele von Abbildungen in $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$.

Lemma 3.1. *Sei $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} z &\mapsto az + b \text{ f\"ur } z \in \mathbb{C} \\ \infty &\mapsto \infty \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus in $\text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$.

Bemerkung. Sei $a = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $z \mapsto az + b$ eine Drehung um φ , gefolgt von einer Streckung um den Faktor r und einer Translation um b .

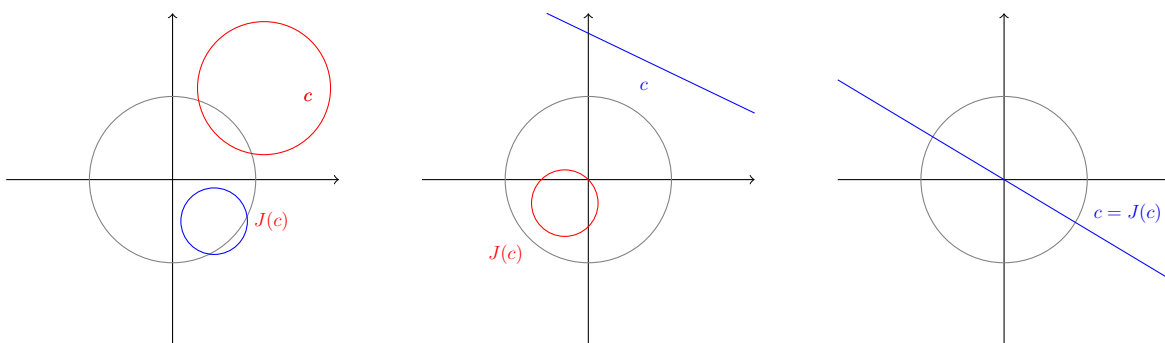
Beweis zu Lemma 3.1. Die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$ erhält euklidische Kreise und Geraden. Damit prüft man leicht, dass die Behauptung gilt. \square

Lemma 3.2. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} J: \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \text{ f\"ur } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 &\mapsto \infty \\ \infty &\mapsto 0 \end{aligned}$$

liegt in $\text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$.

Beweis.



1.Fall: $k \subset \mathbb{C}$ euklidischer Kreis, also

$$k = \{z \in \mathbb{C} \mid az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\}$$

mit $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ und $b \neq 0$ oder $c \neq 0$.

Sei zunächst $c \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} J(k) &= \{z \in \mathbb{C} \mid a \frac{1}{z} + b \frac{1}{z} + \bar{b} \frac{1}{\bar{z}} + c = 0\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid a + b\bar{z} + \bar{b}z + cz\bar{z} = 0\}, \end{aligned}$$

also ist $J(k)$ wieder ein euklidischer Kreis. Ist $c = 0$, so ist

$$\begin{aligned} J(k) &= \{z \in \mathbb{C} \mid a \frac{1}{z} + b \frac{1}{z} + \bar{b} \frac{1}{\bar{z}} = 0\} \cup \{\infty\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid a + b\bar{z} + \bar{b}z = 0\} \cup \{\infty\}, \end{aligned}$$

also eine euklidische Gerade. Alle anderen Fälle berechnet man analog. \square

Satz 3.3. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Dann gibt es genau einen Homöomorphismus $\varphi: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$. Außerdem ist $\varphi \in \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$.

Beweis. 1.Fall: $c = 0$.

Da $ad - bc \neq 0$ folgt $d \neq 0$ und damit

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Diese Abbildung setzen wir mit $\infty \mapsto \infty$ zu einem Homöomorphismus $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ fort. Aus Lemma 3.1 folgt, dass dieser sogar in $\text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$ liegt.

2.Fall: $c \neq 0$.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty &\mapsto \frac{a}{c} \\ -\frac{d}{c} &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Dann ist die Abbildung ein Homöomorphismus, da sie eine Komposition der folgenden Abbildungen ist:

- (1) $z \mapsto c^2z + d$, $\infty \mapsto \infty$,
- (2) $z \mapsto \frac{1}{z}$, $0 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto 0$ und
- (3) $z \mapsto -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$, $\infty \mapsto \infty$

ist, welche alle in $\text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$ liegen. □

Definition. Die Abbildungen von der Form wie in Satz 3.3 werden *Möbiustransformationen* genannt. Im Allgemeinen werden sie nur mit

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

bezeichnet.

Bemerkungen.

- (1) Die Verknüpfung von Möbiustransformationen ist eine Möbiustransformation.
- (2) Die Umkehrabbildung zu $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ist gegeben durch

$$z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}$$

Lemma 3.4. *Jede nichttriviale Möbiustransformation hat höchstens zwei Fixpunkte.*

Beweis. Sei $\varphi: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation.

1. Fall: $c = 0$.

Dann ist $m: z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \infty \mapsto \infty$. Damit ist ∞ ein Fixpunkt. Außerdem hat die Gleichung $\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$ genau eine Lösung, also hat m höchstens noch einen Fixpunkt in \mathbb{C} .

2. Fall $c \neq 0$.

Dann ist $m(\infty) = \frac{a}{c}$. Damit ist $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid m(z) = z\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{az+b}{cz+d}\}$. Außerdem ist $z = \frac{az+b}{cz+d}$ eine quadratische Gleichung und hat damit höchstens zwei Lösungen. □

Korollar 3.5. *Jede Möbiustransformation mit mindestens drei Fixpunkten ist bereits die Identität.*

Notation. Wir bezeichnen die Gruppe aller Möbiustransformationen mit Möb^+ .

Korollar 3.6. *Falls $m, n \in \text{Möb}^+$ an drei Punkten übereinstimmen, so ist bereits $m = n$.*

Beweis. Wenn m und n an drei Punkten übereinstimmen, so hat die Abbildung $m^{-1} \circ n \in \text{Möb}^+$ drei Fixpunkte. Aus Korollar 3.5 folgt damit $m^{-1} \circ n = \text{id}$ und somit die Behauptung. □

Satz 3.7. *Seien (w_1, w_2, w_3) und (z_1, z_2, z_3) Tripel von paarweise verschiedenen Punkten in $\overline{\mathbb{C}}$. Dann gibt es genau ein $m \in \text{Möb}^+$ mit*

$$(z_1, z_2, z_3) = (m(w_1), m(w_2), m(w_3)).$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$.

1. Fall: $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$.

Dann hat

$$m: z \mapsto \frac{(z - w_1)(w_2 - w_3)}{(z - w_3)(w_2 - w_1)} \in \text{Möb}^+$$

die gewünschte Eigenschaft.

2.Fall: Dieser Fall wird in den Übungsaufgaben betrachtet. \square

Definition. Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine *Operation von G auf X* ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

sodass $ex = x$ für alle $x \in X$ und $(gh)x = g(hx)$ für alle $x \in X$ und $g, h \in G$.

Definition. Eine Operation heißt *transitiv*, wenn für alle $x, x' \in X$ ein $g \in G$ existiert, sodass $x' = gx$. Die Operation heißt *eindeutig transitiv*, wenn dieses g eindeutig ist für alle $x, x' \in X$.

Mit dieser Definition können wir die Aussage von Satz 3.7 wie folgt formulieren: die Gruppe Möb^+ operiert eindeutig transitiv auf der Menge der Tripel von verschiedenen Punkten in $\overline{\mathbb{C}}$.

Satz 3.8. Möb^+ operiert transitiv auf der Menge der Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$.

Für den Beweis von Satz 3.8 benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 3.9. *Zu je drei verschiedenen Punkten in $\overline{\mathbb{C}}$ gibt es genau einen Kreis, der diese drei Punkte enthält.*

Beweis. 1.Fall: $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ nicht kollinear.

Dann gibt es einen Kreis in \mathbb{C} , der z_1, z_2 und z_3 enthält.

2.Fall: $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ kollinear.

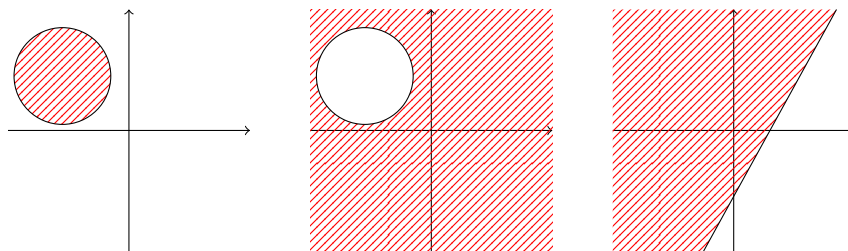
Dann gibt es eine euklidische Gerade g in \mathbb{C} mit $z_1, z_2, z_3 \in g$. Somit ist $g \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ der gesuchte Kreis.

3.Fall: Ohne Einschränkung sei $z_1 = \infty$.

In diesem Fall gibt es eine euklidische Gerade g , welche z_2 und z_3 enthält. Dann ist $g \cup \{\infty\}$ der gesuchte Kreis. \square

Beweis von Satz 3.8. Seien K und K' Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$. Wir wählen paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3 \in K$ und $z'_1, z'_2, z'_3 \in K'$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $m \in \text{Möb}^+$ mit $m(z_i) = z'_i$ für $i = 1, 2, 3$. Folglich sind damit $z'_1 z'_2, z'_3 \in m(K) \cap K'$. Da $m(K)$ ein Kreis ist und Kreise durch drei Punkte eindeutig festgelegt sind, folgt bereits $m(K) = K'$. \square

Definition. Eine *Scheibe* in $\overline{\mathbb{C}}$ ist eine Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ für einen Kreis $K \subset \overline{\mathbb{C}}$.



Bemerkung. Zu jedem Kreis gibt es genau zwei Scheiben und jede Scheibe legt einen Kreis fest.

Satz 3.10. Möb^+ operiert transitiv auf der Menge der Scheiben.

Beweis. Es seien D und D' Scheiben in $\overline{\mathbb{C}}$. Ohne Einschränkung sei $D' = B(0, 1)$, also die Einheitsdisk. Nach Satz 3.8 gibt es ein $m \in \text{Möb}^+$, welches den Rand von D auf S^1 abbildet. Dann gibt es zwei mögliche Fälle.

1. Fall: $mD = D'$.

Dann folgt die Behauptung.

2. Fall: $mD = \overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 1)$.

Dann ist $J \circ m(D) = D'$. □

Bemerkung. Möbiustransformationen erhalten Scheiben, da sie Kreise erhalten und da Homöomorphismen Zusammenhangskomponenten auf Zusammenhangskomponenten abbilden.

Definition. Es sei $U \subset \overline{\mathbb{C}}^k$. Eine Funktion $f: U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt *invariant unter Möbiustransformationen*, wenn $f(z_1, \dots, z_k) = f(m(z_1), \dots, m(z_k))$ für alle $(z_1, \dots, z_k) \in U$ und alle $m \in \text{Möb}^+$ mit $(m(z_1), \dots, m(z_k)) \in U$.

Definition. Es seien z_1, z_2, z_3, z_4 vier paarweise verschiedene Punkte in $\overline{\mathbb{C}}$. Das *Doppelverhältnis* (engl. *cross ratio*) von z_1, \dots, z_4 ist definiert als

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)},$$

wenn $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$. Wenn $z_1 = \infty$, dann definieren wir das Doppelverhältnis als

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4},$$

und ganz analog für $\infty \in \{z_2, z_3, z_4\}$.

Satz 3.11. Das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.

Beweis. Dies kann man leicht nachrechnen. □

Satz 3.12. Paarweise verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ liegen genau dann auf einem Kreis, wenn $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $m \in \text{Möb}^+$ mit

$$\begin{aligned} m(z_1) &= \infty, & m(z_2) &= 0, \\ m(z_3) &= 1, & m(z_4) &=: a. \end{aligned}$$

Da das Doppelverhältnis invariant unter Möbiustransformationen ist, genügt es zu zeigen, dass $\infty, 0, 1$ und a genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $[\infty, 0, 1, a] \in \mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{C}$ gilt aber

$$[\infty, 0, 1, a] = \frac{1}{1-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Dabei ist $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau der Kreis, welcher durch die Punkte $\infty, 0$ und 1 festgelegt wird. \square

3.2. Klassifikation von Möbiustransformationen bis auf Konjugation.

Definition. Zwei Möbiustransformationen m, m' heißen *konjugiert*, falls es ein $f \in \text{Möb}^+$ gibt, sodass

$$m = f \circ m' \circ f^{-1}.$$

Satz 3.13. *Hat eine Möbiustransformation genau einem Fixpunkt, so ist sie konjugiert zu $z \mapsto z + 1$.*

Beweis. Sei x der einzige Fixpunkt der Möbiustransformation m . Wir wählen $y \in \mathbb{C} \setminus \{x\}$. Dann ist $m(y) \neq y$. Ferner sei f die Möbiustransformation mit $f(x) = \infty$, $f(y) = 0$ und $f(m(y)) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f \circ m \circ f^{-1})(\infty) &= f \circ m(x) = f(x) = \infty \\ \text{und } (f \circ m \circ f^{-1})(0) &= 1. \end{aligned}$$

Also ist ∞ ein Fixpunkt, d.h. $f \circ m \circ f^{-1}$ ist von der Form $z \mapsto az + b$. Da f genau einen Fixpunkt hat, hat auch $f \circ m \circ f^{-1}$ genau einen Fixpunkt, also ist $a = 1$. Wegen $f \circ m \circ f^{-1}(0) = 1$ ist außerdem $b = 1$. \square

Definition. Möbiustransformationen mit genau einem Fixpunkt heißen *parabolisch*. Außerdem nennen wir $z \mapsto z + 1$ die *Standardform* einer parabolischen Möbiustransformation.

Satz 3.14. *Hat eine Möbiustransformation genau zwei Fixpunkte, so ist sie konjugiert zu $z \mapsto az$ für ein $a \neq 0, 1$.*

Beweis. Es seien $x \neq y$ die einzigen Fixpunkte der Möbiustransformation m . Sei f die Möbiustransformation mit $f(x) = \infty$ und $f(y) = 0$. Dann sind die Fixpunkte von $f \circ m \circ f^{-1}$ gerade 0 und ∞ . Eine leichte Rechnung zeigt nun, dass $f \circ m \circ f^{-1}$ von der Form $z \mapsto az$ mit $a \neq 0$ ist. \square

Satz 3.15. *Die Möbiustransformationen $z \mapsto az$ und $z \mapsto bz$ sind genau dann konjugiert, wenn $a = b$ oder $a = b^{-1}$.*

Beweis.

“ \Leftarrow ” Wenn $a = b^{-1}$ dann gilt

$$(z \mapsto az) = (z \mapsto \frac{1}{z}) \circ (z \mapsto \frac{1}{a}z) \circ (z \mapsto \frac{1}{z}).$$

“ \Rightarrow ” Dies rechnet man leicht nach. □

Bemerkung. Sei m konjugiert zu $z \mapsto az$. Wenn $|a| = 1$ ist, dann nennen wir m *elliptisch* und für $|a| \neq 1$ *loxodromisch*.

In Übungsblatt 1 Aufgabe 4 wurde gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \Phi: \text{PSL}(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Möb}^+ \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Möb}^+ &\rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \\ \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{ad - bc}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \tau: \text{Möb}^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ m &\mapsto \text{Spur}(\Phi^{-1}(m))^2 \end{aligned}$$

Der folgende Satz besagt nun, dass wir mithilfe von τ sofort den Konjugationstyp einer Möbiustransformation bestimmen können.

Satz 3.16. *Es sei $m \in \text{Möb}^+ \setminus \{\text{id}\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- (1) m ist parabolisch $\Leftrightarrow \tau(m) = 4$.
- (2) m ist elliptisch $\Leftrightarrow \tau(m) \in [0, 4)$.
- (3) m ist loxodromisch $\Leftrightarrow \tau(m) \notin [0, 4]$.

Beweis. Der Typ von m und $\tau(m)$ ist invariant unter Konjugation, d.h. unter der Abbildung $m \mapsto f \circ m \circ f^{-1}$.

Wir wissen schon, dass

m parabolisch $\Leftrightarrow m$ konjugiert zu $z \mapsto z + 1$

$$\Leftrightarrow \Phi^{-1}(m) \text{ ist konjugiert zu } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

m elliptisch $\Leftrightarrow m$ konjugiert zu $z \mapsto az$ mit $|a| = 1$

$$\Leftrightarrow \Phi^{-1}(m) \text{ ist konjugiert zu } \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} \text{ mit } |a| = 1,$$

m loxodromisch $\Leftrightarrow m$ konjugiert zu $z \mapsto az$ mit $|a| \neq 1$

$$\Leftrightarrow \Phi^{-1}(m) \text{ ist konjugiert zu } \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \text{ mit } |a| \neq 1.$$

Der Satz folgt nun aus folgender Beobachtung, welche leicht mithilfe von linearer Algebra bewiesen werden kann: für $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ gilt

$$\tau(A) = 4 \Leftrightarrow A \text{ ist konjugiert zu } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau(A) \in (0, 4) \Leftrightarrow A \text{ ist konjugiert zu } \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}, |a| = 1,$$

$$\tau(A) \notin [0, 4] \Leftrightarrow A \text{ ist konjugiert zu } \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}, |a| \neq 1.$$

Außerdem ist A entweder konjugiert zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder zu $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$ mit

$$\tau \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = \begin{cases} 4 & \Leftrightarrow b = \pm 1 \\ \in (0, 4) & \Leftrightarrow |b| = 1, b \neq \pm 1 \\ \neq [0, 4] & \Leftrightarrow |b| \neq 1. \end{cases}$$

□

3.3. Spiegelungen. Wir betrachten

$$\begin{aligned} K: \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \bar{z}, \text{ wenn } z \in \mathbb{C} \\ \infty &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Dann ist $K \in \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$. Wir definieren nun Möb als die von K und den Möbiustransformation erzeugte Untergruppe von $\text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$, d.h. wir definieren

$$\text{Möb} := \{K^{n_1} \circ m_1 \circ K^{n_2} \circ m_2 \circ \dots \circ m_k \mid m_i \in \text{Möb}^+, n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Satz 3.17. Jedes Element in Möb ist für $ad - bc \neq 0$ von der Form

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \text{ also aus } \text{Möb}^+,$$

oder

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \text{ also von der Form } m \circ K \text{ mit } m \in \text{Möb}^+.$$

Beweis. Es ist $K^2 = \text{id}$ und $K \circ (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}) \circ K = (z \mapsto \frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}}) \in \text{Möb}^+$. Um die Notation etwas zu vereinfachen, beweisen wir die Aussage für ein Element von der Form

$$K^{n_1} \circ m_1 \circ K^{n_2} \circ m_2 \circ K^{n_3}.$$

Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Dann ist

$$K^{n_1} \circ m_1 \circ K^{n_2} \circ m_2 \circ K^{n_3} = \underbrace{K^{n_1-n_2+n_3}}_{K \text{ oder id}} \circ \underbrace{K^{n_2-n_3} \circ m_1 \circ K^{n_2-n_3}}_{\in \text{Möb}^+} \circ \underbrace{K^{n_3} \circ m_2 \circ K^{n_3}}_{\in \text{Möb}^+},$$

also liegt das Element entweder in Möb^+ oder es ist von der Form $K \circ m$ für ein $m \in \text{Möb}^+$. \square

Definition. Sei $R \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Kreis und $m \in \text{Möb}^+$ mit $m(\overline{\mathbb{R}}) = R$. Wir definieren die *Spiegelung in R* als $m \circ K \circ m^{-1}$.

Lemma 3.18. Die Spiegelung ist wohldefiniert.

Beweis. Siehe Blatt 2 Aufgabe 3. Dazu geht man folgendermaßen vor.

- (1) Man bestimme alle $m \in \text{Möb}^+$ mit $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$.
- (2) Man zeige, dass die Spiegelung an $\overline{\mathbb{R}}$ wohldefiniert ist.
- (3) Man zeige den allgemeinen Fall. \square

Satz 3.19. Jedes $m \in \text{Möb}$ ist das Produkt von endlich vielen Spiegelungen.

Beispiel. Die Spiegelung an $R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ ist gegeben durch $se^{i\varphi} \mapsto \frac{r^2}{s}e^{i\varphi}$.

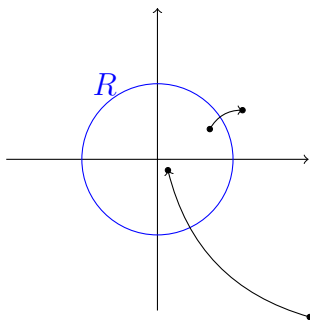


ABBILDUNG 5. Spiegelung an R

Beweis von Satz 3.19. Sei $m \in \text{Möb}$. Dann ist m die Verknüpfung von Abbildungen, welche konjugiert sind zu K , $z \mapsto z + 1$, $z \mapsto e^{i\varphi}z$ oder $z \mapsto rz$ mit $r > 0$. Wir zeigen, dass diese Abbildungen Produkte von Spiegelungen sind. Für einen Kreis $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir im Folgenden mit $S(A): \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ die Spiegelung an A . Für eine euklidische Gerade $g \in \mathbb{C}$ schreiben wir zudem $S(g) := S(g \cup \{\infty\})$. Man kann nun leicht folgende Aussagen zeigen:

- (1) K ist selbst eine Spiegelung.
- (2) $z \mapsto z + 1 = S(\{\text{Re } z = 1\}) \circ S(\{\text{Re } z = \frac{1}{2}\})$.
- (3) $z \mapsto e^{i\varphi}z = S(\{re^{i\varphi} \mid r \in \mathbb{R}\}) \circ S(\{re^{i\frac{\varphi}{2}} \mid r \in \mathbb{R}\})$.
- (4) $z \mapsto rz = S(\{re^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}) \circ S(\{\sqrt{r}e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\})$.

□

Wenn man den Beweis des Satzes genauer durchliest, dann sieht man zudem, dass jedes $m \in \text{Möb}^+$ Verknüpfung von einer geradzahlgigen Zahl von Spiegelungen ist.

Satz 3.20. *Es gilt*

$$\text{Möb} = \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}}).$$

Beweis.

“ \subset ”: wurde bereits gezeigt

“ \supset ”: Sei nun $f \in \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$. Dann gibt es ein $m \in \text{Möb}^+$, sodass $m(0) = f(0)$, $m(1) = f(1)$ und $m(\infty) = f(\infty)$. Wir betrachten $m^{-1} \circ f$. Diese Abbildung hat 0, 1 und ∞ als Fixpunkte.

Behauptung. Wenn $(m^{-1} \circ f)(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, dann gilt $m^{-1} \circ f = \text{id}$. Wenn $(m^{-1} \circ f)(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$, dann gilt $(K \circ m^{-1}) \circ f = \text{id}$.

Das entspricht

Behauptung. Ist $g \in \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$ mit $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(\infty) = \infty$ und $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, so ist $g = \text{id}$.

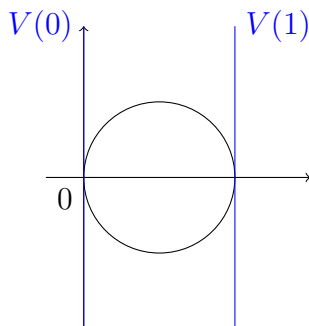
Beweisskizze. Sei $X := \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid g(z) = z\}$. Wir machen zuerst folgende Beobachtungen:

- (1) Da $g \in \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$ und $g(\infty) = \infty$, werden euklidische Geraden auf euklidische Geraden abgebildet.
- (2) Seien c und d Geraden mit $c \cap d = \{\infty\}$. Dann gilt bereits $g(c) \cap g(d) = \{\infty\}$.
- (3) Seien c und d Geraden, welche sich in P schneiden, für die $g(c) = c$ und $g(d) = d$ gilt. Dann ist $c \cap d \subset X$.
- (4) Eine Gerade h ist tangential zu einem Kreis K , genau dann, wenn sich h und K in genau einem Punkt schneiden. Es folgt, dass wenn eine Gerade h tangential zu einem Kreis K ist, dann ist auch $g(h)$ tangential zu $g(K)$.

Für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} H(s) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z = s\}, \\ V(s) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z = s\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten den Kreis k um $z = \frac{1}{2}$ mit Radius $\frac{1}{2}$.



Dann sind $V(0)$ und $V(1)$ Tangenten an den Kreis k .

Wir wenden jetzt g an. Dann gilt $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$. Außerdem ist $g(k)$ ein Kreis durch 0 und 1. Außerdem sind $g(V(0))$ und $g(V(1))$ parallele Tangenten an $g(k)$ an den Punkten 0 und 1. Damit folgt $g(V(0)) = V(0)$ und $g(V(1)) = V(1)$ sowie $g(k) = k$. Insbesondere ist $\frac{1}{2} \in X$.

Dann ist $g(H(\frac{1}{2}))$ parallel zu $g(H(0)) = \overline{\mathbb{R}}$. Da $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ folgt nun, dass $g(H(\frac{1}{2})) = H(t)$ für ein $t > 0$.

Des Weiteren ist

$$\#g(k) \cap g(H(\frac{1}{2})) = \#k \cap H(\frac{1}{2}) = 1.$$

Damit ist $g(H(\frac{1}{2}))$ eine Tangente an k . Also ist $g(H(\frac{1}{2})) = H(\frac{1}{2})$. Aus (3) folgt nun, dass $\frac{1}{2}i, 1 + \frac{1}{2}i \in X$.

Durch Fortführen diese Methode kann man zeigen, dass

$$A := \left\{ \frac{a}{2^m} + \frac{b}{2^n}i \mid a, b \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset X.$$

Da f stetig ist und $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ dicht liegt, folgt $X = \overline{\mathbb{C}}$. □

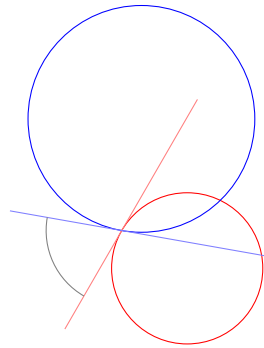
Aus der eben gezeigten Behauptung folgt dann sofort die Aussage des Satzes. □

3.4. Konforme Abbildungen. Der *Winkel zwischen zwei Geraden* g und h in $\overline{\mathbb{C}}$ in einem Schnittpunkt $P \in \mathbb{C}$ ist definiert als $\angle_P(g, h) = \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sodass

$$h - P = e^{i\varphi}(g - P).$$

Der *Winkel zwischen zwei differenzierbaren Kurven*, welche sich in P schneiden, ist definiert als der Winkel zwischen den Tangenten in P .

Eine differenzierbare Abbildung $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt *konform* oder *winkeltreu*, wenn sie Absolutbeträge von Winkeln erhält.



Satz 3.21. *Alle Abbildungen in Möb sind konform.*

Beweis. Jedes $m \in \text{Möb}$ ist eine Verknüpfung von Abbildungen der Form $z \mapsto az + b$ und $J: z \mapsto \frac{1}{z}$, wobei erstere konform ist. Wir müssen also nur noch zeigen, dass J konform ist. Es seien also g_1 und g_2 Geraden in \mathbb{C} .

1.Fall: g_1 und g_2 gehen nicht durch den Ursprung.

Für $i = 1, 2$ ist

$$g_i = \{z \in \mathbb{C} \mid b_i z + \bar{b}_i \bar{z} + 1 = 0\} \text{ für ein } b_i = r_i e^{i\varphi} \neq 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} J(g_i) &= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid b_i \frac{1}{z} + \bar{b}_i \frac{1}{\bar{z}} + 1 = 0 \right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid b_i \bar{z} + \bar{b}_i z + z\bar{z} = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z + b_i|^2 = |b_i|^2\} \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass der Winkel zwischen $J(g_1)$ und $J(g_2)$ im Punkt $J(S)$ der gleiche ist wie der Winkel zwischen g_1 und g_2 im Punkt S .

Aus der elementaren euklidischen Geometrie wissen wir, dass

$$\sphericalangle_{J(S)}(J(g_1), J(g_2)) = \sphericalangle_{0=J(\infty)}(J(g_1), J(g_2))$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle_0(J(g_1), J(g_2)) &= (\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) - (\varphi_2 + \frac{\pi}{2}) = \varphi_1 - \varphi_2 = \\ &= (\frac{\pi}{2} - \varphi_2) - (\frac{\pi}{2} - \varphi_1) = \sphericalangle(g_2, g_1). \end{aligned}$$

Die anderen Fälle überlassen wir als freiwillige Übungsaufgabe. □

3.5. Möbiustransformation der hyperbolischen Ebene. Wir betrachten ab jetzt

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) := \{f \in \text{Möb} \mid f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$$

und ganz analog $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$.

Lemma 3.22. *Jedes $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ führt Geraden in \mathbb{H} über in Geraden in \mathbb{H} .*

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$, m konform ist, sowie der Beschreibung der Geraden in \mathbb{H} als Mengen der Form $c \cap \mathbb{H}$, wobei c ein Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ ist mit $c \perp \overline{\mathbb{R}}$. \square

Definition. Wir definieren

$$\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}}) := \{m \in \text{Möb} \mid m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Satz 3.23. *Es sei $m: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}^+$ mit $ad - bc = 1$. Dann gilt*

$$m \in \text{Möb}^+(\overline{\mathbb{R}}) \Leftrightarrow (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ oder } a, b, c, d \in i\mathbb{R}).$$

Die ganz analoge Aussage gilt auch für $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \in \text{Möb}$.

Beweis. “ \Leftarrow ” ist klar.

“ \Rightarrow ”: Sei also $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} m^{-1}(\infty) &= \frac{-d}{c} \in \overline{\mathbb{R}} \\ m(\infty) &= \frac{a}{c} \in \overline{\mathbb{R}} \\ m^{-1}(0) &= \frac{-b}{a} \in \overline{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Ist $a \neq 0$, so ist

$$1 = ad - bc = c^2 \underbrace{\left(\frac{a}{c} \frac{d}{c} + \frac{-b}{a} \frac{a}{c} \right)}_{\in \mathbb{R}}.$$

Also folgt $c^2 \in \mathbb{R}$ und somit $c \in \mathbb{R}$ oder $c \in i\mathbb{R}$.

Der restliche Beweis funktioniert über eine analoge Rechnung. \square

Bemerkung. Für $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ rechnet man leicht nach, dass

$$m \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \Leftrightarrow \text{Im } m(i) > 0.$$

Korollar 3.24. *Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ac - bd = 1$. Dann gilt*

- (1) $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ liegt in $\text{Möb}(\mathbb{H})$ genau dann, wenn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,
- (2) $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ liegt in $\text{Möb}(\mathbb{H})$ genau dann, wenn $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$.

Erinnerung. Möb^+ operiert eindeutig transitiv auf

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 \mid z_i \neq z_j \Leftrightarrow i \neq j\}.$$

Lemma 3.25. $\text{Möb}(\mathbb{H})$ operiert transitiv auf \mathbb{H} .

Beweis. Es genügt zu zeigen: Für jedes $w = x + iy \in \mathbb{H}$ gibt es ein $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit $m(w) = i$.

Wir betrachten

$$m_1: z \mapsto z - x = \frac{1 \cdot z - x}{0 \cdot z + 1} \in \text{Möb}(\mathbb{H}).$$

Dann gilt $m_1(w) = iy$ und mit

$$m_2: z \mapsto \frac{1}{y}z = \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}z + 0}{0 \cdot z + \frac{1}{\sqrt{y}}} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$$

ist $(m_2 \circ m_1)(x + iy) = m_2(yi) = i$. □

Bemerkung. $\text{Möb}(\mathbb{H})$ operiert nicht transitiv auf Paaren von Punkten in \mathbb{H} . Zum Beispiel kann man leicht nachrechnen, dass es kein $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit $m(i) = i$ und $m(2i) = 4i$ gibt. Wir werden später sehen, dass der tiefere Grund dafür ist, dass es auf \mathbb{H} eine Abstandsfunktion gibt, bezüglich welcher $\text{Möb}(\mathbb{H})$ mithilfe von Isometrien operiert, aber der Abstand von i zu $2i$ ist verschieden vom Abstand von i zu $4i$.

Lemma 3.26. *Zu je zwei Geraden $g, h \subset \mathbb{H}$ gibt es ein $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit $m(g) = h$.*

Beweis. Dieses Lemma ist eine Übungsaufgabe. □

Definition. Ein *offener Halbraum* von \mathbb{H} ist eine Zusammenhangskomponente vom Komplement einer Geraden in \mathbb{H} .

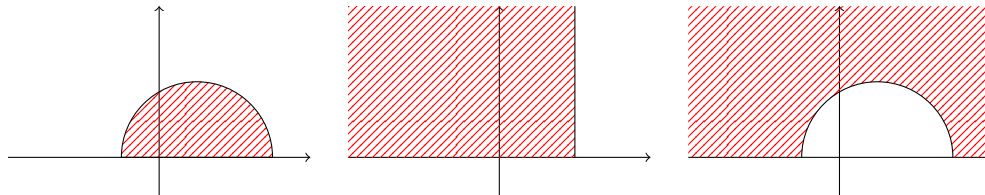
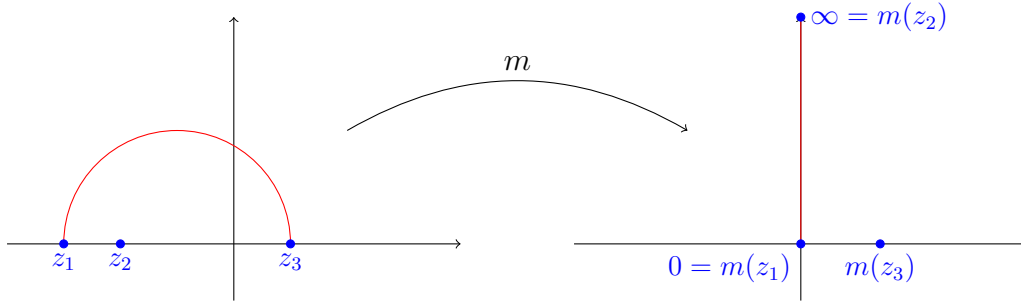


ABBILDUNG 6. Darstellung von Halbräumen in \mathbb{H} .

Satz 3.27. *$\text{Möb}(\mathbb{H})$ operiert transitiv auf der Menge der Tripel von paarweise verschiedenen Punkten in $\overline{\mathbb{R}}$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass es für $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{R}}$ ein $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ gibt mit $m(z_1) = 0$, $m(z_2) = 1$ und $m(z_3) = \infty$.

Es gibt genau eine Gerade g mit z_1, z_3 als Punkte im Unendlichen von g . Also existiert nach Lemma 3.26 ein $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit $m(g) = h$, wobei $h \subset \mathbb{H}$ die Gerade mit 0 und ∞ als Punkte im Unendlichen ist. Also ist $\{m(z_1), m(z_2)\} = \{0, \infty\}$.



Wir wollen als nächstes arrangieren, dass in der z_1 auf 0 geschickt wird. Falls $m(z_1) = \infty$ betrachten wir $(z \mapsto \frac{1}{z}) \circ m$. Diese Abbildung ist in $\text{Möb}(\mathbb{H})$, da $z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot \bar{z} + i}{i\bar{z} + 0} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$. Wir wissen also jetzt, dass z_1 auf 0 geschickt wird. Wir verknüpfen die Abbildung dann noch mit $z \mapsto \frac{1}{m(z_2)}z$, falls $m(z_2) > 0$ und mit $z \mapsto \frac{1}{m(z_2)}\bar{z}$, falls $m(z_2) < 0$. \square

Alternativer Beweis. Es gibt ein $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ mit $m(z_1) = 0$, $m(z_2) = 1$ und $m(z_3) = \infty$. Da $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ folgt $m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Wenn $m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, so ist m die gesuchte Abbildung. Andernfalls betrachte $(z \mapsto \bar{z}) \circ m$. \square

Satz 3.28. *Es sei $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen.*

- (1) $m = \text{id}$.
- (2) m besitzt genau einen Fixpunkt in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann ist m konjugiert in $\text{Möb}(\mathbb{H})$ zu $z \mapsto z+1$. Damit ist m parabolisch.
- (3) m besitzt genau zwei Fixpunkte in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann ist m konjugiert in $\text{Möb}(\mathbb{H})$ zu $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. Damit ist m loxodromisch.
- (4) m besitzt genau einen Fixpunkt in \mathbb{H} . Dann ist m konjugiert in $\text{Möb}(\mathbb{H})$ zu $z \mapsto \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta}$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. Damit ist m elliptisch.

Beweis. Sei $m: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $m \neq \text{id}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$.

1.Fall: $c = 0$.

Also ist $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$.

- a) $a = d$. Dann ist $b \neq 0$ und m hat keine Fixpunkte in \mathbb{C} . Also hat m genau einen Fixpunkt in ∞ . Zudem ist $a = d = \pm 1$. Folglich ist $\tau(m) = 4$ und damit m parabolisch.
- b) $a \neq d$. Dann gibt es einen weiteren Fixpunkt $\frac{b}{d} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{d}} \in \mathbb{R}$. Folglich gibt es zwei Fixpunkte in $\overline{\mathbb{R}}$. Zudem gilt $\tau(m) = (a+d)^2 > 4$, da $ad = 1$ und $a \neq d$ und somit $a+d > 2$.

2.Fall: $c \neq 0$.

Also ist ∞ kein Fixpunkt. Die Fixpunkte von m sind Lösungen von $\frac{az+b}{cz+d} = z$, also der

Gleichung $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Damit sind die Fixpunkte gegeben durch

$$z_{1,2} = \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} (d - a)^2 + 4bc &= (d + a)^2 - 4ad + 4bc = (d + a)^2 - 4 \underbrace{(ad - bc)}_{=1} \\ &= (d + a)^2 - 4 = \tau(m) - 4. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden dann folgende Fälle.

- a) $\tau(m) = 4$. Dann gibt es genau einen Fixpunkt und m ist parabolisch.
- b) $\tau(m) > 4$. Dann gibt es genau zwei reelle Fixpunkte und m is loxodromisch.
- c) $\tau(m) < 4$. Dann gibt es genau einen Fixpunkt in \mathbb{H} (der zweite liegt in $-\mathbb{H}$) und m ist elliptisch.

Wir müssen also noch zeigen, dass m in $\text{Möb}(H)$ konjugiert ist zu einer der angegebenen Abbildungen.

Zunächst habe m genau einen Fixpunkt x in $\overline{\mathbb{R}}$. Sei $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{x\}$. Dann existiert ein $f \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit $f(x) = \infty$, $f(y) = 0$ und $f(m(y)) = 1$ und wir betrachten $f \circ m \circ f^{-1}$. Die Abbildung hat einen Fixpunkt in ∞ und 0 wird auf 1 abgebildet. Man prüft außerdem leicht nach, dass $f \circ m \circ f^{-1} = (z \mapsto z + 1)$.

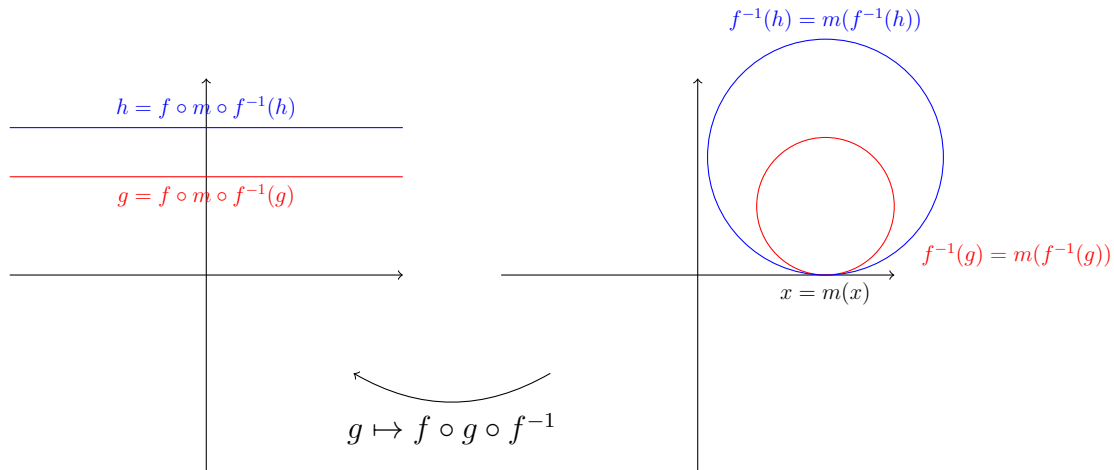
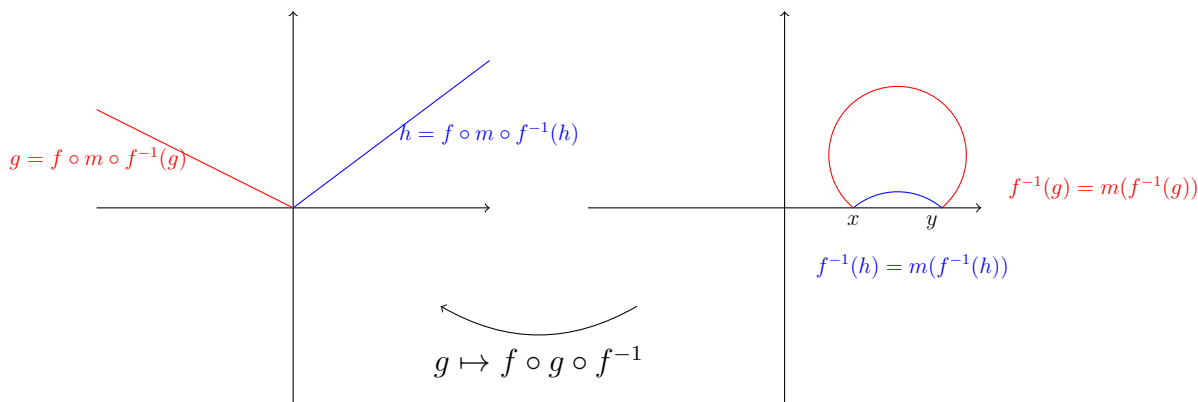


ABBILDUNG 7. Die Kreise im rechten Bild, welche bezüglich der parabolischen Abbildung m erhalten bleiben, heißen *Horokreise*.

Seien nun $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ genau die (paarweise verschiedenen) Fixpunkte von m . Wir wählen $f \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, sodass $f(x) = 0$ und $f(y) = \infty$. Dann sind die Fixpunkte von $f \circ m \circ f^{-1}$

gerade 0 und ∞ . Damit ist $f \circ m \circ f^{-1}: z \mapsto \lambda z$ für ein $\lambda > 0$. Wir nennen die von x und y festgelegte Gerade in \mathbb{H} die *Achse von m* .



Sei nun $x \in \mathbb{H}$ der einzige Fixpunkt von m . Dann existiert eine Abbildung $f \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit $f(x) = i$. Damit ist i der einzige Fixpunkt von $f \circ m \circ f^{-1}$. Wir schreiben $f \circ m \circ f^{-1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$. Aus $\frac{ai+b}{ci+d} = i$ folgt $ai + b = -c + id$, also $a = d$ und $b = -c$. Damit ist $1 = ad - bc = a^2 + b^2$. Damit gibt es ein $\theta \in \mathbb{R}$, sodass $a = \cos \theta$ und $b = \sin \theta$. \square

Wir wollen im Folgenden noch die Abbildungen in $\text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ klassifizieren, welche durch $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$ gegeben sind.

Beispiel. Wir betrachten

$$z \mapsto \frac{i\bar{z} + 0}{0 - i} = \bar{z}, \text{ also}$$

$$x + iy \mapsto -x + iy.$$

Diese Abbildung ist die Spiegelung an der y -Achse. Damit ist die Fixpunktmenge gerade die y -Achse zusammen mit ∞ .

Beispiel. Wir betrachten

$$m: z \mapsto \frac{i\lambda\bar{z} + 0}{0 - \frac{1}{\lambda}i} = -\lambda^2\bar{z}$$

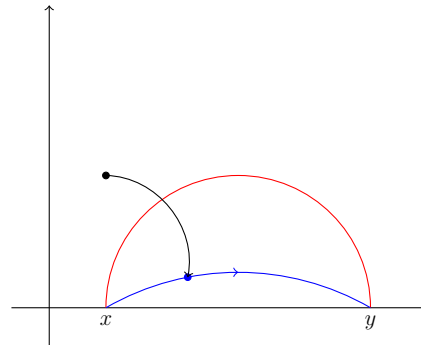
mit $\lambda \neq 1$. Diese Abbildung lässt sich darstellen als Verknüpfung von $z \mapsto -\bar{z}$, also der Spiegelung an der y -Achse und $z \mapsto \lambda^2 z$, also der loxodromischen Abbildung mit der y -Achse als Achse der loxodromischen Abbildung. Die Fixpunkte von m sind 0 und ∞ .

Der folgende Satz gibt nun eine Klassifikation von den Abbildungen in $\text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ bis auf Konjugation.

Satz 3.29. *Es sei $m \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \text{Möb}^+(\mathbb{H})$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen.*

- (1) m besitzt einen Fixpunkt in \mathbb{H} und m ist die Spiegelung an einer Geraden in \mathbb{H} .
- (2) m besitzt keinen Fixpunkt in \mathbb{H} . In diesem Fall besitzt m genau zwei Fixpunkte x und y in $\overline{\mathbb{R}}$ und $m = l \circ s$, wobei s die Spiegelung an der durch x und y festgelegten Geraden in \mathbb{H} ist und l eine loxodromische Abbildung, wobei die Achse von l genau die von x und y festgelegte Gerade in \mathbb{H} ist.

Beweis. Ohne Beweis. Die Aussage (2) wird im folgenden Bild illustriert.



□

Lemma 3.30. Jedes $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ ist eine Verknüpfung von Abbildungen der Form $z \mapsto az + b$ mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$, sowie $K: z \mapsto -\frac{1}{z}$. Jedes Element $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ ist eine Verknüpfung von Abbildung derselben Form und gegebenenfalls $B: z \mapsto -\bar{z}$.

Beweis. Ohne Beweis.

□

4. LÄNGENMASSE

4.1. Längenmaße auf Mannigfaltigkeiten.

Definition. Sei M eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Eine 1-Form ω auf M ist eine Zuordnung

$$M \ni P \mapsto (\omega_p: T_P M \rightarrow \mathbb{R}),$$

wobei ω_p eine Linearform ist. Für 1-Formen gibt es die Begriffe stetig, differenzierbar, C^1 , C^k , C^∞ , usw.

Es sei nun $p: [a, b] \rightarrow M$ ein C^1 -Weg und ω eine stetige 1-Form auf M . Wir definieren

$$\int_p \omega := \int_a^b \omega_{p(t)} \left(\underbrace{p'(t)}_{\in T_{p(t)} M} \right) dt$$

Es sei $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Abbildung mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Wir nennen dann φ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung und sagen, $p \circ \varphi$ geht aus φ durch eine orientierungserhaltende Umparametrisierung hervor.

Lemma 4.1. *Wenn φ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von p ist, so gilt*

$$\int_{p \circ \varphi} \omega = \int_p \omega.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{p \circ \varphi} \omega &= \int_c^d \omega_{p(\varphi(t))} \left((p \circ \varphi)'(t) \right) dt = \int_c^d \omega_{p(\varphi(t))} (p'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt = \\ &= \int_c^d \omega_{p(\varphi(t))} p'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \stackrel{u=\varphi(t)}{=} \int_a^b \omega_{p(u)} (p'(u)) du = \int_p \omega. \end{aligned}$$

□

Definition. Ein Längenmaß auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine Abbildung $\lambda: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, wobei

$$\begin{aligned} \lambda(v) &= 0 \Leftrightarrow v = 0, \\ \lambda(sv) &= |s|\lambda(v) \text{ für } v \in V \text{ und } s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$\lambda(v + w) \leq \lambda(v) + \lambda(w) \text{ für } v, w \in V.$$

Ein Längenmaß auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Zuordnung

$$M \ni P \mapsto \left(\lambda_P: T_p M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ Längenmaß auf } T_p M \right).$$

Mithilfe von Karten kann man definieren, was es heißen soll, dass ein Längenmaß auf einer Mannigfaltigkeit stetig ist. Wenn ein Längenmaß $P \mapsto \lambda_P$ stetig ist, und $\gamma: I \rightarrow M$ ein differenzierbarer Weg ist, dann ist insbesondere die Abbildung $t \mapsto \lambda_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ stetig.

Definition. Es sei $p: [a, b] \rightarrow M$ ein Weg und λ sei ein stetiges Längenmaß auf M . Dann definieren wir die *Länge von p* als

$$\text{Länge}_\lambda(p) := \int_a^b \lambda_{p(t)}(p'(t)) dt.$$

Wir erweitern die Definition der Länge eines Weges auf offensichtliche Weise auf Wege, welche abschnittsweise C^1 sind.

Bemerkung. Es sei $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Abbildung mit entweder $\varphi'(t) \geq 0$ für alle t oder $\varphi'(t) \leq 0$ für alle t . Dann nennen wir

$$p \circ \varphi: [c, d] \rightarrow M$$

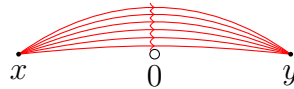
eine *monotone Umparametrisierung* von p . Ein Argument wie im Beweis von Lemma 4.1 zeigt nun, dass

$$\text{Länge}_\lambda(p \circ \varphi) = \text{Länge}_\lambda(p).$$

Definition. Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und λ ein stetiges Längenmaß auf M . Für $x, y \in M$ definieren wir

$$d_\lambda(x, y) = \inf\{\text{Länge}_\lambda(p) \mid p: [a, b] \rightarrow M \text{ abschnittsweise } C^1\text{-Weg, } p(a) = x, p(b) = y\}.$$

Beispiel. Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, λ die euklidische Norm und $x = (-1, 0)$ sowie $y = (1, 0)$.



Dann ist $d(x, y) = 2$. Es gibt zwar nun für jedes $\varepsilon > 0$ einen Weg in M von x nach y der Länge $2 + \varepsilon$, aber es gibt keinen Weg $p: [a, b] \rightarrow M$ mit $\text{Länge}_\lambda p = d(x, y)$.

Satz 4.2. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Längenmaß λ . Dann ist d_λ eine Metrik auf M .

Beweisskizze. Wir zeigen dazu:

- (1) $d_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Der Beweis dazu ist nicht ganz trivial.
- (2) $d_\lambda(x, y) = d_\lambda(y, x)$.
Dies ist klar, da $\text{Länge}_\lambda p(t) = \text{Länge}_\lambda p(-t)$.
- (3) Dreiecksungleichung.
Diese Aussage zeigen wir in den Übungen. □

Satz 4.3. Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit Längenmaß λ . Weiter seien $x, y \in M$. Wenn es einen Weg p von x nach y mit $\text{Länge}_\lambda(p) = d_\lambda(x, y)$ gibt, dann gibt es auch einen C^1 -Weg q von x nach y von konstanter Geschwindigkeit, d.h. $\lambda_{q(t)}(q'(t)) = \text{const.}$ für alle t .

Beweis. Ohne Beweis. □

Bemerkung. Es sei $p: [a, b] \rightarrow M$ ein Weg mit $\lambda(p'(t)) \equiv c$. Dann gilt $\text{Länge}_\lambda(p) = c(b - a)$.

Definition. Es sei $p: I \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir nennen p eine *Geodäte*, wenn

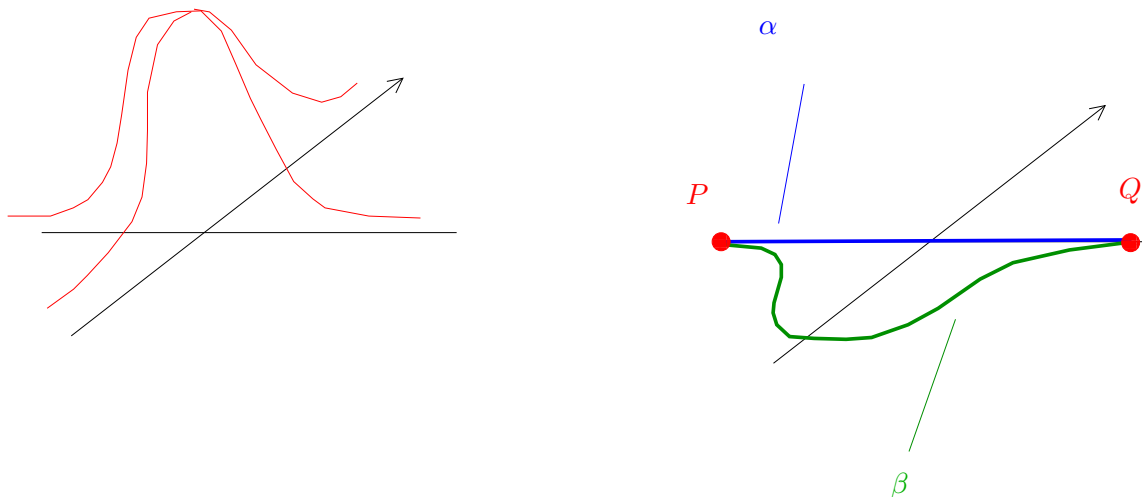
- (1) $\lambda_{p(t)}(p'(t)) \equiv 1$ und
- (2) für alle $[a, b] \subset I$ gilt, dass

$$d_\lambda(p(a), p(b)) = b - a = \text{Länge}_\lambda p|_{[a, b]}.$$

Es sei nun $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen. Für alle $w \in U$ ist $T_w U = \mathbb{R}^2$. Es sei $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion. Wir bezeichnen mit $\rho|dz|$ das Längenmaß mit $(\rho|dz|)(v) = \rho(w)|v|$, wobei $w \in \mathbb{C}$ und $v \in T_w U = \mathbb{R}^2$.

Beispiel. In Abbildung 8 betrachten wir ein ρ , welches am Ursprung ein relatives Maximum besitzt. Um von einem Punkt auf der x -Achse P zum gegenüberliegenden Punkt Q zu kommen, ist es bezüglich des Längenmaß $\rho|dz|$ besser, den Ursprung zu umgehen.

Graph von $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$



der Weg β ist bezüglich $\rho|dz|$ kürzer als der Weg α

ABBILDUNG 8. Länge von Wegen in $(\mathbb{R}^2, \rho|dz|)$.

Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall, dass ρ konstant 1 ist. In diesem Fall erhalten wir folgenden Satz.

Satz 4.4. *Es seien $P, Q \in \mathbb{C}$. Dann ist*

$$p: [0, |P - Q|] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \frac{t}{|P - Q|} P + \left(1 - \frac{t}{|P - Q|}\right) Q$$

die einzige Geodäte mit $p(0) = P$ und $p(|P - Q|) = Q$.

Beweis. Da das Längenmaß $|dz|$ invariant ist unter Abbildungen der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto B + A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $B \in \mathbb{C}$ und $A \in O(2)$, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $P = 0$ und $Q = (0, y)$. Sei dann

$$q: [0, y] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto (q_x(t), q_y(t))$$

ein Weg von $(0, 0)$ nach $(0, y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Länge}_\lambda(q) &= \int_0^y \sqrt{(q'_x(t))^2 + (q'_y(t))^2} dt \geq \int_0^y \sqrt{(q'_y(t))^2} dt \\ &= \text{Länge}_\lambda \left(t \mapsto (0, q_y(t)) \right), \end{aligned}$$

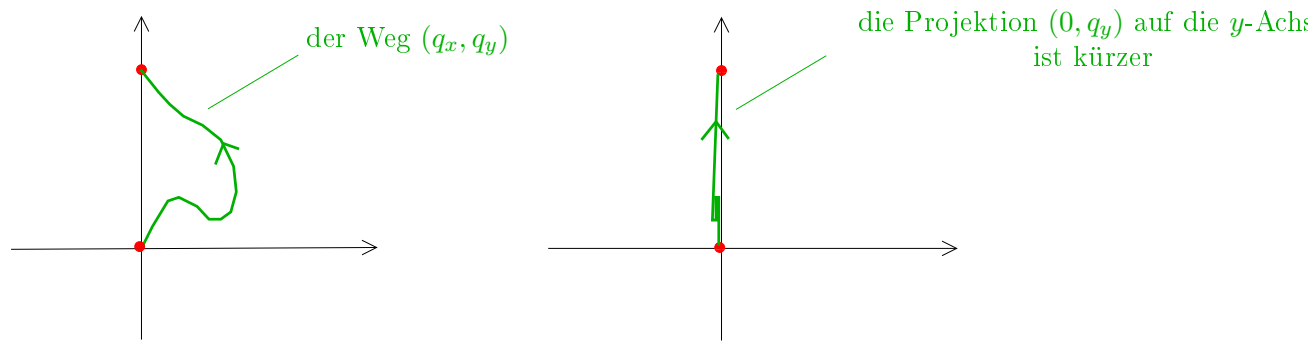


ABBILDUNG 9. Geodäten in \mathbb{R}^2 mit Längenmaß $|dz|$.

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $q_x \equiv 0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.Fall: $q'_y(t) \geq 0$ für alle t .

$$\text{Länge}_p \left(t \mapsto (0, q_y(t)) \right) = \int_0^y q'_y(t) dt = q_y(y) - q_y(0) = y = \text{Länge}_\lambda p.$$

2.Fall: Es gibt ein t mit $q'_y(t) < 0$.

Wir setzen

$$I_+ = \int_0^y \max\{0, q'_y(t)\} dt$$

und

$$I_- = \int_0^y \min\{0, q'_y(t)\} dt.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$I_+ + I_- = \int_0^y q'_y(t) dt = y.$$

Andererseits ist

$$\text{Länge}_\lambda q = |I_+| + |I_-| = I_+ - I_- = I_+ + I_- - 2I_- = y - 2 \underbrace{I_-}_{>0} > y.$$

Zusammenfassend habe wir also gezeigt, dass $\text{Länge}_\lambda q \geq \text{Länge}_p$ und Gleichheit genau dann eintritt, wenn $q_x = 0$ und $q'_y(t) \geq 0$ für alle t . Wenn q also eine Geodäte ist, dann muss q schon gleich p sein. \square

4.2. Längenmaße auf der hyperbolischen Ebene.

Ziel. Wir wollen ein Längenmaß auf \mathbb{H} finden, welches invariant ist unter $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

Erinnerung. Die Erzeuger von $\text{Möb}(\mathbb{H})$ sind $z \mapsto z + b$ mit $b \in \mathbb{R}$, $z \mapsto rz$ mit $r > 0$, $K: z \mapsto -\frac{1}{z}$ und $B: z \mapsto -\bar{z}$.

Frage. Gibt es ein ρ , sodass $\rho|dz|$ invariant unter diesen Operationen ist?

Wir wollen diese Frage im Folgenden erst einmal etwas diskutieren. Wenn $\rho|dz|$ invariant unter $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{R}$ sein soll, dann muss $\rho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ invariant sein unter diesen Translationen, d.h. $\rho(z)$ hängt nur von $\text{Im } z$ ab.

Was soll das heißen, dass ein Längenmaß λ invariant unter einer Abbildung $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ ist?

Für alle Wege $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ muss dann gelten, dass

$$\int_a^b \lambda_{p(t)}(p'(t)) dt = \int_a^b \lambda_{m(p(t))}((m(p(t)))') dt.$$

Wir betrachten jetzt $\lambda = \rho(\text{Im } z) \cdot |dz|$ und

$$\begin{aligned} p: [a, b] &\rightarrow \mathbb{H} \\ t &\mapsto (0, t) \end{aligned}$$

und $m(z) = rz$. Es muss gelten

$$\int_a^b \lambda_{p(t)} p'(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Andererseits ist

$$\int_a^b \lambda_{m(p(t))}((m(p(t)))') dt = \int_a^b \rho(rt) |dz|(0, r) dt = \int_a^b r \rho(rt) dt.$$

Wir brauchen also ein $\rho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $\rho(x + iy) = \varphi(y)$ mit

$$\int_a^b \varphi(y) dy = \int_a^b r \varphi(ry) dy$$

für alle a, b und $r > 0$. Die Funktion $t \mapsto \frac{1}{t}$ hat diese Eigenschaft. Diese Diskussion zeigt also, wenn ein Längenmaß auf \mathbb{H} invariant unter Möbiustransformationen sein soll, dann muss es schon von der Form $z \mapsto \frac{C}{\text{Im } z} |dz|$ für eine feste Konstante C sein.

In der Tat haben wir jetzt folgenden Satz.

Satz 4.5. *Das Längenmaß*

$$\mathbb{H} \ni z \mapsto \frac{1}{\text{Im } z} |dz|$$

ist invariant unter den Operationen von $\text{Möb}(\mathbb{H})$ auf \mathbb{H} .

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{H}$, $v \in T_z\mathbb{H} = \mathbb{R}^2$ und alle $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ gilt, dass

$$\left(\frac{1}{\text{Im } z}|dz|\right)(v) = \left(\frac{1}{\text{Im}(m(z))}|dz|\right)(d_z m(v)).$$

Es genügt dies für die Erzeuger von $\text{Möb}(\mathbb{H})$ zu zeigen, also für

- (1) $z \mapsto z + a$ mit $a \in \mathbb{R}$,
- (2) $z \mapsto rz$ mit $r > 0$,
- (3) $B: z \mapsto -\frac{1}{z}$ und
- (4) $z \mapsto \bar{z}$.

Wir zeigen zunächst die Invarianz unter $B: z \mapsto -\frac{1}{z}$. Unter der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist B gegeben durch

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Das Differential ist gegeben durch

$$d_{(x,y)}B = \begin{pmatrix} \frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $v = (a, b) \in T_{(x,y)}\mathbb{H} = \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\left(\frac{1}{y}|dz|\right)(a, b) = \frac{1}{y}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\text{Im}(z)}|dz|\right)(d_z m(v)) = \\ & = \frac{x^2 + y^2}{y} \left| \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left(a \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \right) \right| = \\ & = \frac{1}{y} \sqrt{(a(x^2 - y^2) + b2xy)^2 + (-a2xy + b(x^2 - y^2))^2} \frac{1}{x^2 + y^2} = \\ & = \left(a^2(x^2 - y^2)^2 + b^2(2xy)^2 + 2a(x^2 - y^2)b2xy + a^2(2xy)^2 \right. \\ & \quad \left. + b(x^2 - y^2)^2 - 4axy(x^2 - y^2) \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y x^2 + y^2} = \\ & = \frac{1}{y} \frac{1}{x^2 + y^2} \left(a^2(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + b^2(x^2 + y^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{1}{y} \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Wir haben also jetzt gezeigt, dass $z \mapsto \frac{1}{\text{Im } z}|dz|$ invariant ist unter der Abbildung B . Es ist leicht zu sehen, dass das Längenmaß auch invariant ist unter den anderen Abbildungen. \square

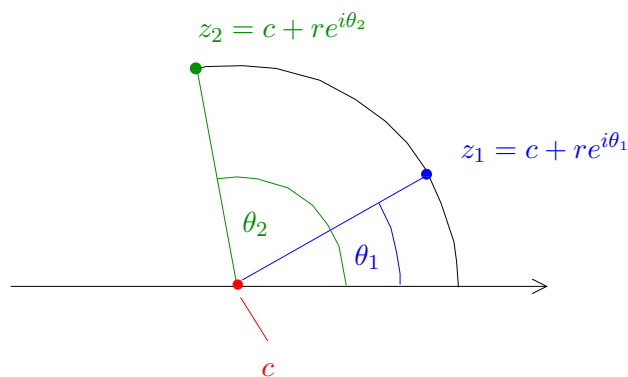
Es stellt sich nun die Frage, was ist der ‘‘schnellste Weg’’ von A nach B in $(\mathbb{H}, \frac{1}{\text{Im } z}|dz|)$? Wir geben im folgenden Satz eine vollständige Antwort.

Satz 4.6. *Es seien $A, B \in \mathbb{H}$ zwei verschiedene Punkte. Dann ist die Strecke von A nach B ein kürzester Weg. Zudem gilt, wenn $\text{Re } A = \text{Re } B$, dann ist*

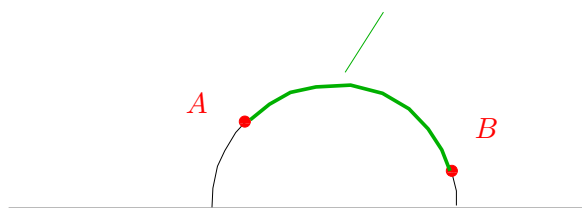
$$d(A, B) = |\ln \text{Im } A - \ln \text{Im } B|.$$

Wenn $\text{Re } A \neq \text{Re } B$, dann können wir A und B schreiben als $A = c + re^{i\theta_1}$ und $B = c + re^{i\theta_2}$ mit $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$. Dann gilt

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) = \ln \frac{\sin t}{1 + \cos t} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}.$$



der kürzeste Wege von A nach B



Es gilt somit auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\mathbb{H}}(ia, it) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln a) = \infty \text{ und}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} d_{\mathbb{H}}(ia, it) = \lim_{t \rightarrow 0} (\ln a - \ln t) = \infty.$$

Beweis von Satz 4.6. Es seien $A, B \in \mathbb{H}$ zwei verschiedene Punkte. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\text{Re } A = \text{Re } B$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\text{Re } A = \text{Re } B = 0$ und $\text{Im } B > \text{Im } A$. Es gibt also $b > a$ mit $A = ia$ und $B = ib$ mit $b > a$.

Behauptung. Der Weg $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto it$ ist einer kürzester Weg.

Beweis. Sei $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto (g_x(t), g_y(t))$ ein beliebiger Weg von ia nach ib und zudem $h: [c, d] \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto (0, g_y(t))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Länge}_{\mathbb{H}}(g) &= \int_c^d \frac{1}{g_y(t)} \sqrt{(g_x(t))^2 + (g_y(t))^2} \geq \int_c^d \frac{1}{g_y(t)} \sqrt{(g_y(t))^2} \\ &= \text{Länge}_{\mathbb{H}}(h) \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $g_x \equiv 0$.

Es sei nun $h: [c, d] \rightarrow \mathbb{H}$ ein Weg mit $h(c) = ia$ und $h(d) = ib$, sowie $\text{Re } h(t) = 0$. Dann ist $\text{Länge}_{\mathbb{H}} h \geq \text{Länge}_{\mathbb{H}} g$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn h eine monotone Umparametrisierung von p ist. Dies folgt aus dem Beweis von Satz 4.4, da

$$\begin{aligned} f: \left(i\mathbb{R}_{>0}, \lambda_y(v) = \frac{1}{y}|v| \right) &\xrightarrow{\cong} \left(i\mathbb{R}_{>0}, \lambda_y(v) = |v| \right) \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. Dies gilt, da

$$\lambda_y(v) = \frac{1}{y}|v| = f'(y)|v| = |d_y f v|$$

für $y \in i\mathbb{R}_{>0}$ und $v \in T_y i\mathbb{R}_{>0}$. □

Bemerkung. Sei $b > a$. Dann gilt

$$d_{\mathbb{H}}(ia, ib) = \text{Länge}_{\mathbb{H}} \left(\begin{array}{l} p: [a, b] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto it \end{array} \right) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln b - \ln a.$$

Wir wenden uns nun dem Fall zu, dass A und B verschiedene Realteile besitzen. Wir wollen zeigen, dass die Strecke von A nach B ein kürzester Weg ist. Es sei g die Gerade in \mathbb{H} durch A und B . Dann gibt es ein $m \in \text{Möb } \mathbb{H}$ mit $m(g) = i\mathbb{R}_{>0}$. Die Aussage gilt, wie oben gezeigt, für Punkte auf der y -Achse. Da m Strecken in Strecken überführt und eine Isometrie ist, gilt die Aussage für A und B , d.h. die Strecke von A nach B ist ein kürzester Weg.

Wir schreiben $A = c + re^{i\theta_1}$ und $B = c + re^{i\theta_2}$ mit $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{H}}(A, B) &= \text{Länge} \left(\begin{array}{l} [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto c + re^{it} \end{array} \right) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r \sin t} dt \\
&= r \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt \stackrel{u=\cos t}{=} r \int_{\cos(\theta_1)}^{\cos(\theta_2)} \frac{-1}{1 - u^2} du \\
&= r \int_{\cos(\theta_1)}^{\cos(\theta_2)} \frac{-\frac{1}{2}}{1 - u} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + u} du \\
&= r \left(\frac{1}{2} \ln |1 - u| - \frac{1}{2} \ln |1 + u| \right) \Big|_{\cos(\theta_1)}^{\cos(\theta_2)} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - u}{1 + u} \Big|_{\cos(\theta_1)}^{\cos(\theta_2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos^2 t}{(1 + \cos t)^2} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin^2 t}{(1 + \cos t)^2} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
&= \ln \frac{\sin t}{1 + \cos t} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}.
\end{aligned}$$

□

Definition. Seien X und Y Teilmengen von \mathbb{H} . Wir definieren

$$d_{\mathbb{H}}(X, Y) := \inf\{d_{\mathbb{H}}(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Frage. Was ist der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden?

Satz 4.7. *Sei g eine Gerade in \mathbb{H} und $P \notin g$ ein Punkt. Dann existiert eine Gerade h durch P , welche g orthogonal in einem Punkt Q schneidet. Zudem gilt*

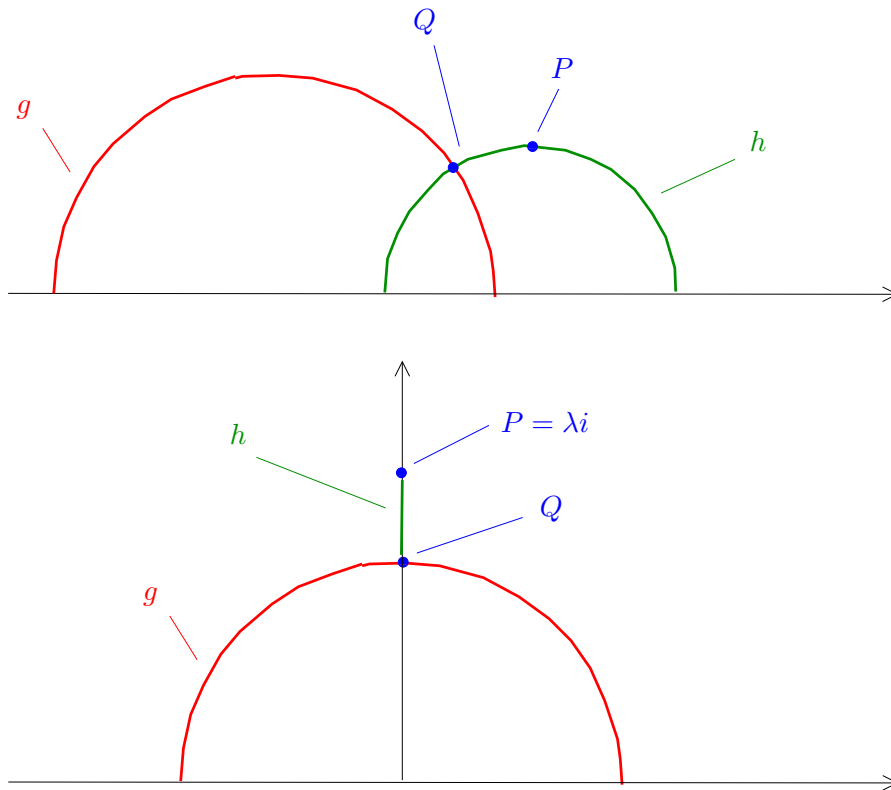
$$d_{\mathbb{H}}(P, g) = d_{\mathbb{H}}(P, Q)$$

und

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) < d_{\mathbb{H}}(P, R) \text{ für } R \in g \setminus \{Q\}.$$

Beweisskizze. In einer Übungsaufgabe haben wir gezeigt, dass es ein $m \in \text{Möb } \mathbb{H}$ gibt, mit $m(g) = S^1 \cap \mathbb{H}$ und $m(P) = \lambda i$ für $\lambda > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei also $g = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ und $P = \lambda i$ mit $\lambda > 0$. Man kann zeigen, dass

$$d_{\mathbb{H}}(i\lambda, e^{i\theta}) = \ln \left(\frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) + \sqrt{\frac{(\lambda + \frac{1}{\lambda})^2}{4} \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} \right)$$



und dass das globale Minimum bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ liegt. Der Punkt $Q = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ hat also den geringsten Abstand zu P , und wir wählen h als der Teil der y -Achse, welcher in \mathbb{H} liegt. \square

Im euklidischen Fall gilt: Sind g und h parallel, so ist $d_\lambda(g, P) = d_\lambda(g, Q)$ für $P, Q \in h$. Es stellt sich die Frage, wie verhält sich der Abstand von parallelen Geraden im hyperbolischen Fall?

Wir werden gleich sehen, dass es zwei verschiedene Typen von Parallelität gibt. Genauer gesagt, wir nennen zwei Geraden g und h *ultraparallel*, wenn sie keinen Punkt im Unendlichen gemeinsam haben.

Wir können jetzt folgenden Satz formulieren.

Satz 4.8. *Es seien g und h zwei parallele Geraden in \mathbb{H} . Wenn g und h nicht ultraparallel sind, dann gilt $d_{\mathbb{H}}(g, h) = 0$.*

Im Beweis werden wir eine genauere Aussage zeigen, welche in Abbildung 10 skizziert wird.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt

$$g = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 0\} \text{ und}$$

$$h = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = a > 0\}.$$

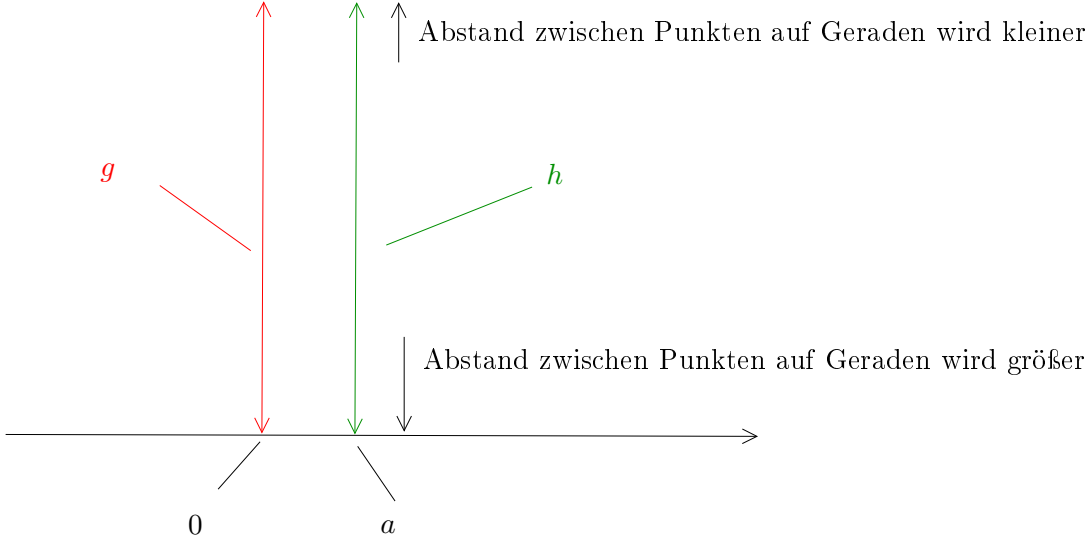


ABBILDUNG 10. Der Abstand zwischen zwei Geraden mit einem gemeinsamen Punkt im Unendlichen.

Der Satz folgt jetzt insbesondere aus folgender Behauptung.

Behauptung. Es gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d_{\mathbb{H}}(is, h) = 0 \text{ und}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} d_{\mathbb{H}}(is, h) = \infty.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} d_{\mathbb{H}}(is, h) &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \text{Länge}_{\mathbb{H}} \left(\begin{array}{l} r: [0, a] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto is + t \end{array} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{1}{s} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a}{s} = 0. \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit $r = \sqrt{a^2 + r^2}$, dass

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} d_{\mathbb{H}}(is, h) &= \lim_{s \rightarrow 0} \text{Länge}_{\mathbb{H}} \left(\begin{array}{l} p: [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{a}{s}] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto a + \sqrt{a^2 + s^2} e^{it} \end{array} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} d_{\mathbb{H}} \left(a + r e^{i(\frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{a}{s}))}, a + r e^{i\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \ln \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \right) - \ln \left(\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{a}{s} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{a}{s} \right)} \right) \right| = \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Wir haben damit die Behauptung und insbesondere den Satz bewiesen. \square

Wir betrachten jetzt den Fall, dass g und h ultraparallel sind.

Satz 4.9. *Es seien g und h parallele Geraden in \mathbb{H} , welche zudem ultraparallel sind. Dann gibt es einen Punkt P auf g und einen Punkt Q auf g , so dass die Strecke \overline{PQ} in \mathbb{H} orthogonal ist zu g und h , zudem gilt*

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(g, h).$$

Im Beweis vom Satz werden wir eine etwas genauere Aussage beweisen, welche in Abbildung 4.2 skizziert wird.

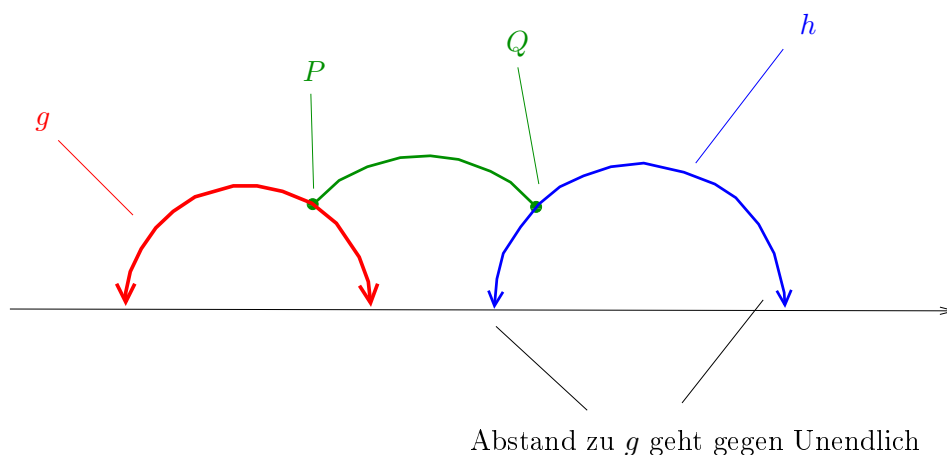


ABBILDUNG 11. Abstand zwischen ultraparallelen Geraden.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dabei g die y -Achse und wir können annehmen, dass die Punkte im Unendlichen von h gegeben sind durch 1 und $x > 1$. Die Geraden werden in Abbildung 12 skizziert. Der kürzeste Weg von einem Punkt auf h nach g ist dann ein Segment von dem Kreis $re^{i\theta}$, $r > 0$. Wir betrachten

$$f(r) = \text{Länge}_{\mathbb{H}} c_r,$$

wobei c_r in Abbildung 12 skizziert ist. Es ist

$$f(r) = \underbrace{\ln \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \right)}_{=0} - \ln \left(\frac{1 + \cos \theta_r}{\sin \theta_r} \right).$$

In unserem Fall ist also

$$\cos \theta_r = \frac{r^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}{2 - \frac{x+1}{2}} = \frac{r^2 + x}{r(x+1)}$$

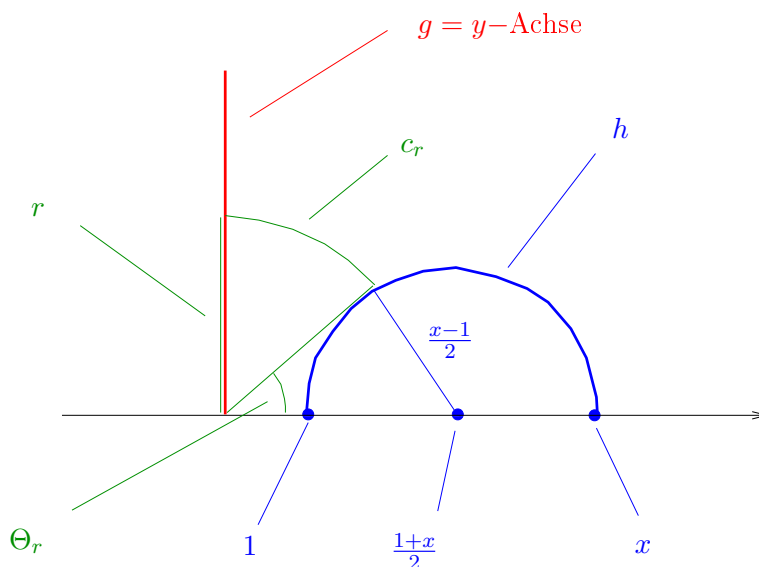


ABBILDUNG 12. Die Geraden g und h .

und

$$\sin \theta_r = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_r} = \sqrt{1 - \frac{r^2 + x}{(r(x+1))^2}}.$$

Also ist

$$f(r) = -\ln \left(\frac{1 + \frac{r^2+x}{r(x-1)}}{\sqrt{1 - \frac{r^2+x}{(r(x+1))^2}}} \right) = \dots = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(r+1)(x+r)}{(r-x)(1-r)} \right).$$

Dabei nimmt $f(r)$ sein Minimum genau bei $r = \sqrt{x}$ an. Es ist

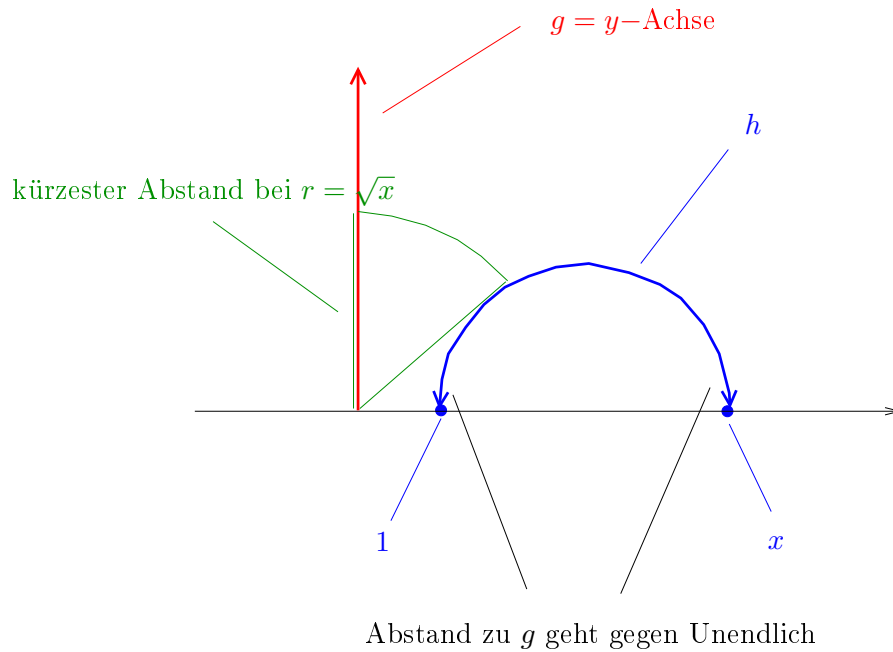
$$2\sqrt{x} \frac{x-1}{2} \cos(\pi - \varphi) = \sqrt{x^2} + \left(\frac{x-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 = 0.$$

Damit ist $\cos(\pi - \varphi) = 0$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Es gibt also genau eine Strecke, welche orthogonal zu g und h ist. Diese ist auch der kürzeste Weg von g nach h . \square

4.3. Geodäten und vollständige Mannigfaltigkeiten.

Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit und λ ein Längenmaß auf M . Eine *Geodäte in M* ist eine C^1 -Abbildung $g: I \rightarrow M$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, $\lambda_{g(t)}(g'(t)) = 1$ für alle $t \in I$ und für alle $a, b \in I$ gilt, dass $\text{Länge}_\lambda(g|_{[a,b]}) = d_\lambda(g(a), g(b))$.

Definition. Eine Mannigfaltigkeit M mit Längenmaß heißt *vollständig*, wenn es zu jeder Geodäte $g: [a, b] \rightarrow M$ eine Geodäte $h: \mathbb{R} \rightarrow M$ gibt, sodass $h|_{[a,b]} = g$.



Beispiele.

- (1) $(\mathbb{R}^2, \text{euklidisches Längenmaß } |dz|)$ ist vollständig.
- (2) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, |dz|)$ ist nicht vollständig, da sich $p: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, t \mapsto (t, 0)$ nicht auf \mathbb{R} fortsetzen läßt.
- (3) Wir betrachten $(\mathbb{H}, \lambda_{\mathbb{H}})$. Dann ist für $b > a$

$$g: [0, \ln b - \ln a] \rightarrow \mathbb{H},$$

$$t \mapsto (0, e^t a)$$

eine Geodäte von ia nach ib , diese Geodäte läßt sich aber offensichtlich auf \mathbb{R} fortsetzen. Nachdem jede Geodäte bis auf eine Isometrie vom obigen Typ ist, läßt sich jede Geodäte auf \mathbb{R} fortsetzen. Damit ist gezeigt, dass $(\mathbb{H}, \lambda_{\mathbb{H}})$ vollständig ist.

5. AXIOMATISCHE GEOMETRIE

In diesem Kapitel wollen wir einen axiomatischen Aufbau der euklidischen und hyperbolischen Geometrie betrachten. Die Idee dabei ist, dass die euklidische und die hyperbolische Geometrie viele formale Gemeinsamkeiten besitzen. Beispielsweise gelten viele der klassischen Kongruenzsätze für Dreiecke in beiden Geometrien und können, von einem Axiomensystem ausgehend, für beide Geometrien gleichzeitig bewiesen werden. Die Wege von euklidischer und hyperbolischer Geometrie trennen sich dann am Ende, wenn wir die Eindeutigkeit von Parallelen betrachten.

Der axiomatische Aufbau von Geometrien ist nicht nur eine mathematische Spielerei, sondern er lenkt auch den Blick auf das Wesentliche. Wir werden sehen, dass sich viele von

den Aussagen über hyperbolische Geometrie relativ leicht beweisen lassen, ohne, dass man dauernd auf die Analysis zurückgreifen muss.

Das Kapitel ‘Axiomatische Geometrie’ basiert fast durchgehend auf dem Buch *Ebene Geometrie* von Ernst Kunz.

5.1. Geradenaxiome.

Definition. Eine Ebene ist eine Menge E zusammen mit einer Menge $G \subset \mathcal{P}(E)$, also eine Teilmenge der Potenzmenge von E , sodass folgende Axiome gelten.

- (A1) Zu $A, B \in E$ gibt es ein $g \in G$ mit $A, B \in g$.
- (A2) Zu $A, B \in E$, $A \neq B$ gibt es höchstens ein g mit $A, B \in g$.
- (A3) Jedes $g \in G$ enthält mindestens zwei Elemente.
- (A4) Es gibt drei Elemente in E , welche nicht in einem $g \in G$ liegen.

Sprechweise: Elemente in E heißen *Punkte* und Elemente in G heißen *Geraden in E* .

Beispiel. Wir betrachten folgende Beispiele für eine Ebene.

- (1) \mathbb{R}^2 mit $G = \{\text{euklidische Geraden}\}$.
- (2) \mathbb{H}^2 mit $G = \{\text{hyperbolische Geraden}\}$.
- (3) \mathbb{R}^n mit Geraden $G = \{\{P + tv \mid t \in \mathbb{R}\}, P, v \in \mathbb{R}^2\}$.
- (4) Es sei $E = \{A, B, C\}$ eine Menge mit genau drei Elementen. Dann erfüllt E , zusammen mit $G = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$, die vier Axiome.
- (5) Wir betrachten S^2 mit Großkreisen. Dies ist **keine** Ebene, da (A2) nicht gilt. Alle anderen Axiome gelten aber. Dies zeigt insbesondere, dass man (A2) nicht aus den anderen Axiomen herleiten kann.
Ganz analog kann man zeigen, dass jedes Axiom unabhängig ist von den anderen Axiomen. D.h. für jedes Axiom gibt es ein E und G , so dass die anderen Axiome gelten, aber das ausgewählte Axiom gerade nicht gilt.
- (6) Sei \mathbb{K} ein Körper. Dann ist \mathbb{K}^n mit den Geraden $\{P + tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ für $P \in \mathbb{K}^n$, $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ eine Ebene.

Lemma 5.1. *Jedes $P \in E$ ist ein Schnittpunkt zweier Geraden.*

Beweis. Nach (A1) gibt es ein $g \in G$ mit $P \in g$. Nach (A4), zusammen mit (A3) gibt es ein $A \notin g$. Damit existiert nach (A1) und (A2) eine Gerade $h \in G$ mit $A, P \in h$ und $h \neq g$. Dann ist $P \in g \cap h$ und sogar $g \cap h = \{P\}$. \square

Bemerkung. Seien A, B in E . Dann bezeichnen wir die Gerade, welche A und B enthält mit $g(A, B)$. Diese existiert laut (A1) und ist dank (A2) eindeutig.

5.2. Streckenaxiome.

Definition. Eine Ebene mit Strecken ist eine Ebene mit einer Abbildung

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow \mathcal{P}(E), \\ (A, B) &\mapsto \overline{AB}, \end{aligned}$$

welche folgende Axiome erfüllt.

- (B1) Für alle $A, B \in E$ gilt $A \in \overline{AB}$.
- (B2) Für alle $A, B \in E$ gilt $\overline{AB} = \overline{BA}$.
- (B3) Für alle $A, B \in E, A \neq B$ gilt $\overline{AB} \subset g(A, B)$.
- (B4) Für alle $A, B \in E$ gibt es ein $C \neq B$, sodass $B \in \overline{AC}$.
- (B5) Für alle $A, B, C \in E, A \neq B, C \neq B$ und $C \in \overline{AB}$ gilt $B \in \overline{AC}$.
- (B6) Es seien $A, B, C \in E$, welche nicht auf einer Geraden liegen und g eine Gerade mit $g \cap \overline{AB} \neq \emptyset$. Dann gilt $g \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ oder $g \cap \overline{BC} \neq \emptyset$.

Das Axiom (B6) wird oft auch das *Axiom von Pasch* genannt. Es besagt, dass eine Gerade, welche eine Seite eines Dreiecks trifft, auch eine der anderen beiden Seiten treffen muss.

Beispiel. Wir betrachten folgende Beispiele.

- (1) Für \mathbb{R}^2 mit euklidischen Geraden und Strecken gelten alle Axiome.
- (2) Für \mathbb{H} mit hyperbolischen Geraden und den üblichen Strecken gelten alle Axiome. In der Tat, die Axiome (B1) bis (B5) folgen leicht aus den Definitionen. Der Beweis von (B6) ist etwas schwieriger und wird beispielsweise in Kapitel 8 von [K] nachgewiesen.
- (3) Für \mathbb{R}^3 mit euklidischen Geraden gelten (B1) bis (B5), aber nicht (B6). Man sieht also, dass man das Axiom von Pasch nicht aus den anderen Axiomen herleiten kann. Auch in diesem Fall kann man zeigen, dass in der Tat alle Axiome unabhängig von einander sind. Der Beweis dieser Aussage wird in [K] ausgeführt.
- (4) Sei \mathbb{K} ein Teilkörper von \mathbb{R} . Dann erfüllt \mathbb{K}^2 mit den üblichen Geraden und den Strecken

$$\overline{AB} := \{A + t(B - A) \mid t \in \mathbb{K} \cap [0, 1]\}$$

alle Streckenaxiome.

Satz 5.2. *Es sei $A, B \in R, A \neq B$. Dann existiert ein Punkt $C \in \overline{AB}$ mit $C \notin \{A, B\}$.*

Definition. Ein innerer Punkt von \overline{AB} ist ein Punkt $C \in \overline{AB}$ mit $C \notin \{A, B\}$.

Beweis zu Satz 5.2. Idee:

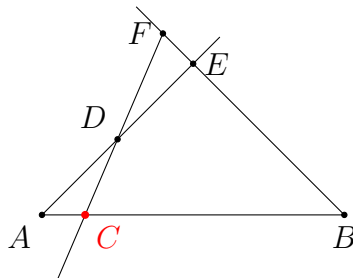


ABBILDUNG 13. Die Konstruktion des gesuchten Punktes.

Nach (A4) existiert ein $D \notin g(A, B)$. Nach (B4) existiert ein $E \neq D$, sodass $D \in \overline{AE}$. Nach (B4) existiert ein $F \neq E$, sodass $E \in \overline{BF}$.

Behauptung. Es gilt $D \neq F$.

Beweis der Behauptung. Wir nehmen an, dass $D = F$ gilt. Dann ist

$$g(A, D) = g(A, E) = g(D, E) \stackrel{E=F}{=} g(F, E) = g(E, B),$$

womit dann A, B und D auf einer Geraden liegen, was ein Widerspruch ist. \square

Behauptung. A, B und E liegen nicht auf $g = g(D, F)$.

Beweis der Behauptung. Wenn $A \in g$, dann ist $\overline{AD} \subset g$ und somit $E \in g$. Wenn $B \in g$, dann ist $\overline{BF} \subset g$ und somit $E \in g$. Es genügt also zu zeigen, dass $E \notin g$. Angenommen $E \in g$, dann ist $\overline{EF} \subset g$. Damit ist $B \in g$ und $\overline{DE} \subset g$, also $A \in g$. Damit wären $A, B, D \in g$, was ein Widerspruch ist, da diese nicht auf einer Geraden liegen. \square

Wir betrachten nun g und \triangle_{ABE} . Die Gerade g schneidet \overline{AE} . Nach (B6) schneidet g entweder \overline{AB} oder \overline{EB} . Falls g die Strecke \overline{AB} schneidet, dann gilt, da $A, B \notin g$ dass $g \cap \overline{AB}$ ein innerer Punkt ist.

Nehmen wir andernfalls an, dass $\{Q\} = g \cap \overline{EB}$. Damit folgt, dass $g = g(F, Q) = g(F, E)$. Damit ist $E \in g$, was ein Widerspruch ist.

Die folgenden Sätze werden alle in Kapitel 2 von [K] bewiesen. \square

Satz 5.3. *Es seien A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, dann gilt genau eine der drei folgenden Aussagen.*

- (1) $A \in \overline{BC}$.
- (2) $B \in \overline{AC}$.
- (3) $C \in \overline{AB}$.

Satz 5.4. *Es seien $A_1, A_2, A_3 \in E$ drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen. Seien ferner $P_1 \in \overline{A_1A_2}$, $P_2 \in \overline{A_2A_3}$ und $P_3 \in \overline{A_3A_1}$. Dann liegen P_1, P_2 und P_3 nicht auf einer Geraden.*

Definition. Sei g eine Gerade und $A, B \in E \setminus g$. Wir schreiben

$$A \sim_g B :\Leftrightarrow \overline{AB} \cap g = \emptyset.$$

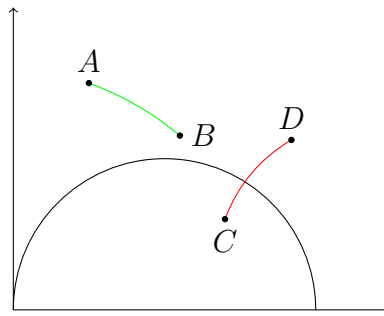


ABBILDUNG 14. Es ist $A \sim B$ und $C \not\sim D$.

Satz 5.5. Die Relation \sim_g ist eine Äquivalenzrelation und es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Wir nennen die Äquivalenzklassen die durch g bestimmten Halbräume.

Definition. Es sei g eine Gerade, $P \in g$ und $A, B \in g \setminus \{P\}$. Wir schreiben $A \sim_P B$, wenn $P \notin \overline{AB}$.

Satz 5.6. Die Relation \sim_P ist eine Äquivalenzrelation und es gibt genau zwei Äquivalenzklassen, welche wir Halbgeraden oder Strahlen nennen.

Lemma 5.7. Seien $A, B \in E$ und $P \in \overline{AB}$. Dann gilt $\overline{AP} \cup \overline{PB} = \overline{AB}$ und $\overline{AP} \cap \overline{PB} = \{P\}$.

Lemma 5.8. Es sei A' und B' innere Punkte von \overline{AB} . Dann gilt $\overline{A'B'} \subset \overline{AB}$.

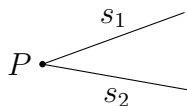
Korollar 5.9. Es sei $A \neq B$. Dann enthält \overline{AB} unendlich viele Punkte.

Beweis. Nach Satz 5.2 gibt es einen inneren Punkt $C \in \overline{AB}$.

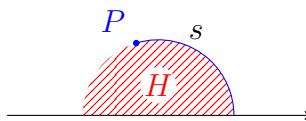


Nach Lemma 5.7 gilt $\overline{AC} \subset \overline{AB}$. Die induktive Fortsetzung des Verfahrens mit \overline{AC} zeigt die Behauptung. □

Definition. Ein Winkel ist eine Menge der Form $\{P\} \cup s_1 \cup s_2 \subset E$, wobei $P \in E$ und s_1 und s_2 Strahlen sind, welche von P ausgehen.



Definition. Eine Flagge in E ist ein Tripel (P, s, H) , wobei $P \in E$, s ein Strahl, welcher von P ausgeht und H eine der beiden Halbebenen, welche durch s bestimmt werden.



5.3. **Bewegungsaxiome.** Seien E und E' Ebenen. Eine bijektive Abbildung

$$f: E \rightarrow E'$$

heißt *streckenerhaltend*, wenn $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$ für alle $A, B \in E$. Der folgende Satz wird in Kapitel 3 von [K] bewiesen.

Satz 5.10. *Für eine streckenerhaltende Abbildung f gelten folgende Aussagen.*

- (1) f überführt Geraden in Geraden, Winkel in Winkel und Flaggen in Flaggen.
- (2) f^{-1} ist streckenerhaltend.

Definition. Eine *Ebene mit Strecken und Bewegungen* ist eine Ebene mit Strecken, zusammen mit einer Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Geraden in } E\} &\rightarrow \text{Aut}^s(E) = \{f: E \rightarrow E \mid f \text{ ist streckenerhaltend}\} \\ g &\mapsto \sigma_g, \end{aligned}$$

sodass

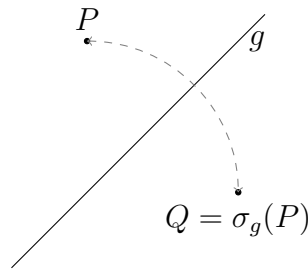
- (C1) $\sigma_g(P) = P$ für alle $P \in g$ und σ_g vertauscht die Halbebenen, welche durch σ_g definiert sind.
- (C2) Für alle $P, Q \in E$ existiert eine Gerade g , sodass $\sigma_g(P) = Q$.
- (C3) Es sei $P \cup s_1 \cup s_2$ ein Winkel. Dann existiert eine Gerade g mit $\sigma_g(s_1) = s_2$.
- (C4) Für jede Bewegung β , d.h. für jede Verknüpfung $\beta = \sigma_{g_1} \circ \dots \circ \sigma_{g_k}$ von Spiegelung, und jede Flagge (P, s, H) gilt:
Wenn $\beta(P, s, H) = (P, s, H)$, so ist $\beta = \text{id}$.

Beispiel. (1) Sei $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ ein Teilkörper, sodass

$$a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{K}$$

gilt, also dass \mathbb{K} pythagoräisch ist. Es sei $g = \{P + tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ mit $P, v \in \mathbb{K}^2$, $v \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$. Wir definieren

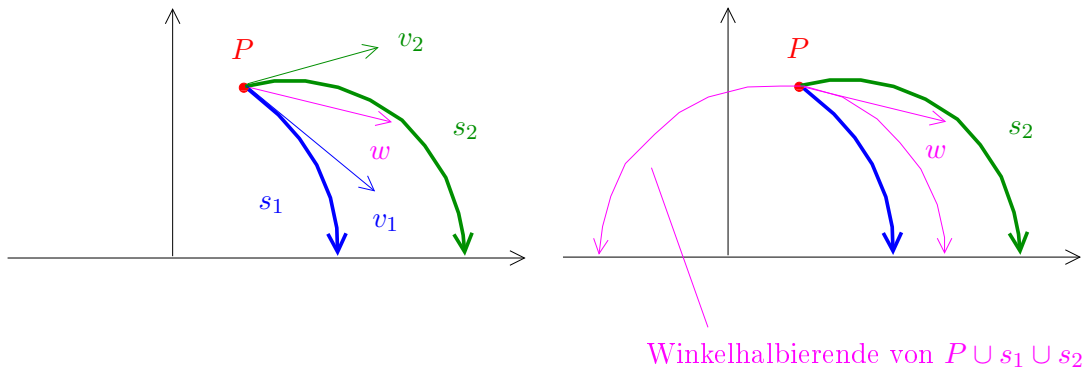
$$\begin{aligned} \sigma_g: \mathbb{K}^2 &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\ Q &\mapsto -(Q - P) + 2(Q - P) \cdot v \frac{v}{\|v\|} + P. \end{aligned}$$



Dann hat diese Abbildung die gewünschten Eigenschaften.

- (2) Sei $E = \mathbb{H}$ und σ_g die Spiegelung an einer Geraden g . Dann ist (C1) erfüllt. Um einzusehen, dass (C2) erfüllt ist, nehmen wir an, dass $P = ip$ und $Q = iq$. Dann besitzt $g = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = \sqrt{qp}\}$ die gewünschte Eigenschaft.

Um (C3) zu zeigen, sei $P \cup s_1 \cup s_2$ ein Winkel. Seien v_1 und v_2 die Tangentialvektoren an s_1 und s_2 in P . Es sei w die Winkelhalbierende von $\sphericalangle(v_1, v_2)$. Ferner



sei g der euklidische Halbkreis durch P mit Mittelpunkt auf der x -Achse und w als Tangentialvektor in P . Dann erfüllt σ_g die gewünschten Eigenschaften, da σ_g winkelerhaltend ist.

Um (C4) einsehen zu können, sei ohne Einschränkung die Flagge

$$(P, s, H) = (i, i\mathbb{R}_{>1}, \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z > 0\})$$

und es ist

$$m: z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } ac - db = 1$$

oder

$$m: z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \text{ mit } a, b, c, d \in i\mathbb{R} \text{ und } ac - db = 1.$$

Dann gilt $m(P, s, H) = (P, s, H)$ genau dann, wenn $m = \operatorname{id}$.

Lemma 5.11. *Es sei g eine Gerade. Dann gilt $\sigma_g \circ \sigma_g = \operatorname{id}$.*

Beweis. Sei $P \in g$ und s ein Strahl auf g an P . Dann ist $\sigma_g(s) = s$ nach (C1), $\sigma_g(H) = H'$, also die von g begrenzte Halbebene, welche nicht H ist. Dann ist $\sigma_g(H') = H$, also $\sigma_g \circ \sigma_g(H) = H$. Also folgt mit (C4), dass $\sigma_g \circ \sigma_g = \text{id}$. \square

Definition. Zwei Geraden g und g' heißen *rechtwinklig* oder *orthogonal*, wenn $\sigma_g(g') = g'$ und $\sigma_{g'}(g) = g$.

Satz 5.12. *Es sei g eine Gerade und P ein Punkt. Dann existiert genau eine Gerade h durch P orthogonal zu g . Die Gerade h wird als das Lot von P auf g bezeichnet.*

Beweisskizze.

1. Fall: $P \notin g$.

Es sei $P' = \sigma_g(P)$. Dann setzen wir $h = g(P, P')$ und es ist $\sigma_g(h) = h$, da beide Geraden P und P' enthalten.

2. Fall: Sei $P \in g$.

Nach Fall 1 gibt es ein $h \perp g$. Wenn $P \in h$ ist nichts zu zeigen. Ansonsten sei $\{Q\} = h \cap g$. Es sei k die Gerade mit $\sigma_k(P) = Q$. Dann hat $\sigma_k(h)$ die gewünschte Eigenschaft. Die Eindeutigkeit wird in Kapitel 3 von [K] bewiesen. \square

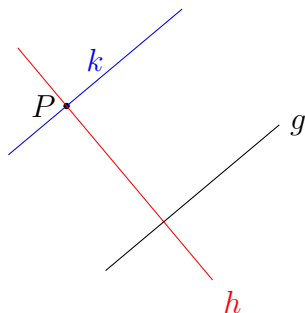
Die folgenden Sätze werden in Kapitel 3 von [K] bewiesen.

Satz 5.13. *Die Gerade in (C2) ist eindeutig, wenn $A \neq B$. Sie wird in diesem Fall die Mittelsenkrechte von A und B genannt.*

Satz 5.14. *Es sei α ein Winkel. Dann ist die Gerade in (C3) eindeutig bestimmt. Wir nennen sie die Winkelhalbierende von α .*

Satz 5.15. *Sei g eine Gerade und $P \notin g$. Dann gibt es eine Gerade h durch P mit $h \cap g = \emptyset$.*

Beweis. Sei h das Lot von P auf G und k das Lot von P auf h .



Nehmen wir an, dass g und h sich in einem Punkt A schneiden. Da $h \perp g$ und $k \perp h$ folgt $\sigma_h(g) = g$, $\sigma_h(k) = k$. Also ist $\sigma_h(A) =: A'$ auch ein Schnittpunkt von g und k . Damit sind $A \neq A'$ zwei Punkte in $g \cap k$ und damit folgt bereits $g = k$. Damit wäre $P \in k = g$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. \square

Sei $s(A, B)$ der Strahl an A durch B . Die folgenden zwei Lemmas werden in Kapitel 4 von [K] bewiesen.

Definition. Seien (M_1, \dots, M_n) und (M'_1, \dots, M'_n) n -Tupel von Teilmengen von E . Wir nennen die beiden Tupel *kongruent*, falls es eine Bewegung β gibt mit $\beta(M_i) = M'_i$ für alle i . In diesem Fall schreiben wir $(M_1, \dots, M_n) \equiv (M'_1, \dots, M'_n)$.

Lemma 5.16 (Eindeutigkeit der Abtragung von Strecken). *Es sei $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ und β eine Bewegung mit $\beta(A) = A'$ und außerdem $\beta(s(A, B)) = s(A', B')$. Dann gilt $\beta(B) = B'$.*

Lemma 5.17 (Eindeutigkeit der Abtragung von Winkeln). *Es sei $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ und β eine Bewegung, welche $\beta(A) = A'$ und $\beta(s(A, B)) = s(A', B')$ erfüllt und die Halbebene H' an $g(A, B)$, welche C enthält auf die Halbebene H' an $g(A', B')$, welche C' enthält, schickt. Dann gilt $\beta(s(A, C)) = s(A', C')$.*

Der folgende Satz besagt insbesondere, dass ein Dreieck genau dann zwei gleiche Seiten besitzt, wenn es zwei gleiche Winkel besitzt.

Satz 5.18. *Es sei (A, B, C) ein Dreieck. Dann gilt*

$$\overline{AC} \equiv \overline{BC} \Leftrightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABC$$

und wenn eine der beiden Aussagen gilt, so ist die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ gleich der Mittelsenkrechten von A und B .

Beweis. "⇒":

Es sei g eine Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Dann folgt aus der eindeutigen Abtragung von Strecken, dass $\sigma_g(A) = B$. Also ist g die Mittelsenkrechte von \overline{AB} , d.h. $\sigma_g(A) = B$ und $\sigma_g(B) = A$. Wir sehen also, dass $\sigma_g(\Delta_{BAC}) = \sigma_g(\Delta_{ABC})$, d.h. insbesondere $\sigma_g(\sphericalangle BAC) = \sphericalangle ABC$.

"⇐":

Es sei nun g die Mittelsenkrechte von \overline{AB} . Aus der eindeutigen Abtragung von Winkeln folgt $\sigma_g(\sphericalangle BAC) = \sphericalangle ABC$. Dann schickt σ_g den Schnittpunkt der Geraden $g(A, C)$ und $g(B, C)$ auf den Schnittpunkt der Geraden $g(A, C)$ und $g(B, C)$, einfacher ausgedrückt, es ist $\sigma_g(C) = C$. Es folgt, dass $C \in g$, also ist auch $\sigma_g(\overline{AC}) = \sigma_g(\overline{BC})$, d.h. g ist die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. \square

Die folgenden Lemmas und Sätze werden in Kapitel 4 von [K] bewiesen.

Lemma 5.19. *Seien (P, s, H) und (P', s', H') Flaggen. Dann gibt es genau eine Bewegung mit $\beta(P) = P'$, $\beta(s) = s'$ und $\beta(H) = H'$.*

Satz 5.20 (SWS). *Seien $A, B, C \in E$, sodass $C \notin g(A, B)$. Falls $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ und $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, so ist*

$$(A, B, C) \equiv (A', B', C').$$

Beweis. Sei H die Halbebene an $g(A, B)$ welche C enthält und H' die Halbebene an $g(A', B')$, welche C' enthält. Sei β die Bewegung, welche die Flagge $(A, s(A, B), H)$ in $(A', s(A', B'), H')$ überführt. Dann folgt mit Lemma 5.16 aus $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ bereits $\beta(B) = B'$. Mit Lemma 5.17 folgt aus $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ sofort $\beta(s(A, C)) = s(A', C')$ und da $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ auch $\beta(C) = C'$ und somit die Behauptung. \square

Satz 5.21 (WSW). *Seien $A, B, C \in E$, sodass $C \notin g(A, B)$. Ferner seien $A', B', C' \in E$, sodass $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$. Dann gilt $(A, B, C) \equiv (A', B', C')$.*

Satz 5.22 (SSS). *Seien wieder $A, B, C \in E$, sodass $C \notin g(A, B)$ und $A', B', C' \in E$, sodass $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. Dann gilt bereits $(A, B, C) \equiv (A', B', C')$.*

Beweis. Sei H die von $g(A, B)$ begrenzte Halbebene, die C enthält, H' die von $g(A', B')$ begrenzte Halbebene, die C' enthält und β die Bewegung, welche die Flagge $(A, s(A, B), H)$ auf $(A', s(A', B'), H')$ überführt. Dann ist $\beta(A) = A'$ und $\beta(B) = B'$. Wir müssen also noch zeigen, dass $\beta(C) = C'$. Angenommen, $\beta(C) \neq C'$. Dann gibt es eine Mittelsenkrechte m von $\beta(C)$ und C' . Nach Satz 5.18 liegen dann A' und B' auf m . Für die Spiegelung σ_m gilt, dass sie die Halbebenen an $g(A, B)$ vertauscht und dass $\sigma_m(\beta(C)) = C'$. Dann liegen $\beta(C)$ und C' in verschiedenen Halbebenen von $g(A', B')$, was ein Widerspruch ist. \square

5.4. Längenmaße in Ebenen.

Motivation. Wir wollen jeder Strecke \overline{AB} eine "Länge" $l(\overline{AB}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zuweisen, welche die folgenden Eigenschaften hat.

- (L1) Für $A, B, C, D \in E$ gilt $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Leftrightarrow l(\overline{AB}) = l(\overline{CD})$.
- (L2) Ist $B \in \overline{AC}$, so gilt $l(\overline{AC}) = l(\overline{AB}) + l(\overline{BC})$.

Frage. Gibt es eine solche Abbildung?

Nehmen wir im Folgenden an, wir hätten eine Ebene mit Strecken und Bewegungen, zusammen mit einer Abbildung $l: \{\text{Strecken in } E\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche die Axiome (L1) und (L2) erfüllt.

Bemerkung. Da wir beliebige Strecken \overline{AB} auf einen Strahl s abtragen können, ist l schon durch die Einschränkung auf s festgelegt.

Definition. Sei s ein Strahl an P und $A \in s$. Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}$ die n -te wiederholte Abtragung von \overline{PA} auf s mit $n \cdot_s A$ oder kurz mit nA .

Bemerkung. Liegen B und C auf einem Strahl an A und gilt außerdem $l(\overline{AB}) \leq l(\overline{AC})$, so gilt $B \in \overline{AC}$.

Lemma 5.23. *Sei E eine Ebene mit Strecken, Bewegungen und Längen. Sei s ein Strahl an P und $A, B \in s$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B \in \overline{P(nA)}$.*

Beweis. Da $A \neq P$ ist $l(\overline{PA}) > 0$. Dann ist $l(\overline{P(nA)}) = nl(\overline{PA})$. Für hinreichend große n gilt $l(\overline{P(nA)}) > l(\overline{PB})$. Damit ist $B \in \overline{P(nA)}$. \square

Bemerkung. Es gibt Ebenen mit Strecken und Bewegungen, in denen es einen Strahl s an einen Punkt P gibt, zusammen mit $A, B \in s$, sodass $B \notin \overline{P(nA)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also besitzt nicht jede Ebene mit Strecken und Bewegungen eine Abbildung l der obigen Form.

Beispiel. Sei $\mathbb{R}(x) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{R}[x], g \neq 0\}$ geordnet durch folgende Ordnungsrelation. Sei $p \in \mathbb{R}(x)$. Dann ist $p > 0$ genau dann, wenn $p(r) > 0$ für hinreichend große $r \in \mathbb{R}$. Sei dann $E = (\mathbb{R}(x))^2$ und $g \subset E$ eine Gerade, wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}(x)$ gibt, $(a, b) \neq (0, 0)$, sodass

$$g = \{(x, y) \in E \mid ax + by = c\}.$$

Seien $A, B \in E$, $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$. Dann definiert

$$\overline{AB} = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid 0 \leq \lambda \leq 1, \lambda \in \mathbb{R}(x)\}$$

einen Streckenbegriff.

Sei nun $P = (0, 0)$, $A = (1, 0)$. Dann ist $A \in s(P, A) = \{(z, 0) \mid z > 0\}$. Außerdem ist $(x, 0) \in s(P, A)$. und $n \cdot_s A = (n, 0)$. Aber $(x, 0)$ liegt nicht in $\overline{P(nA)}$.

Wir haben also jetzt gesehen, dass es nicht für jede Strecke und Bewegung eine Abbildung $l: \{\text{Strecken in } E\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, welche die Axiome (L1) und (L2) erfüllt. Wir führen jetzt noch folgendes Axiom ein.

Axiom (Archimedisches Axiom, D1). ¹ Es gibt einen Strahl s an einen Punkt P , sodass für beliebige Punkte $A, B \in s$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $B \in \overline{P(nA)}$.

Das archimedische Axiom ist erfüllt für \mathbb{R}^2 und \mathbb{H} , und auch noch etwas allgemeiner für \mathbb{K}^2 , wobei $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ ein pythagoräischer Teilkörper ist.

Satz 5.24. *Sei E eine Ebene mit Geraden, Strecken und Bewegungen, in der (D1) gilt. Seien A und B zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es genau eine Abbildung*

$$l: \{\text{Strecken in } E\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit $l(\overline{AB}) = 1$, welche (L1) und (L2) erfüllt.

Dieser Satz wird in [K] Kapitel 5 bewiesen. Dort wird auch bewiesen, dass die Abbildung

$$l: \{\text{Kongruenzklassen von Strecken}\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

injektiv ist. Gilt das folgende Axiom, so ist sie auch surjektiv.

Axiom (Vollständigkeitsaxiom, D2). ² Sei $(\overline{A_n B_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Strecken, für welche $\overline{A_n B_n} \supset \overline{A_{n+1} B_{n+1}}$ gilt. Dann gibt es ein

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n B_n}.$$

¹Das archimedische Axiom ist moralisch das gleiche wie das archimedische Axiom für reelle Zahlen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $C > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \cdot \varepsilon > C$.

²Auch das Vollständigkeitsaxiom kommt uns bekannt vor, für reelle Zahlen besagt es gerade, dass jede Cauchy-Folge in der Tat einen Grenzwert besitzt.

Beispiel. (1) Die Ebenen \mathbb{R}^2 und \mathbb{H} erfüllen das Vollständigkeitsaxiom.

(2) Es sei $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ algebraisch}\}$. Dann gilt für $E = K^2$ das Axiom (D1), aber nicht das Axiom (D2).

5.5. Das Parallelenaxiom.

Erinnerung (Eulersches Parallelenaxiom, (P)). Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h durch P , welche parallel ist zu g .

Bemerkung. Das Axiom (P) gilt in \mathbb{R}^2 , aber nicht in \mathbb{H} . Also ist (P) unabhängig von (A1) bis (A4), (B1) bis (B6), (C1) bis (C4), sowie (D1) und (D2).

Satz 5.25. *Es sei E eine Ebene, in der (A1) bis (A4), (B1) bis (B6), (C1) bis (C4), sowie (D1) und (D2) gelten. Dann ist $E \cong \mathbb{R}^2$ vermöge eines geraden-, strecken- und bewegungserhaltenden Isomorphismus.*

Beweisskizze. Wir wählen $A \neq B$. Dann existiert nach Satz 5.24 und dem Vollständigkeitsaxiom eine surjektive Abbildung

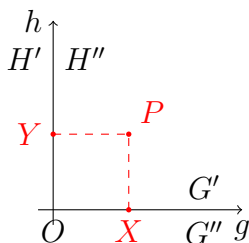
$$l: \{\text{Strecken in } E\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \overline{PQ} \mapsto l(\overline{PQ}),$$

sodass $l(\overline{AB}) = 1$ gilt, l invariant ist unter Bewegungen und die Aussage

$$l(\overline{PQ}) = l(\overline{P'Q'}) \Rightarrow \overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$$

gilt.

Wir wählen nun zwei g, h Geraden in E , welche orthogonal sind.



Es sei $\{O\} = g \cap h$ und $P \in E$. Sei dann X der Schnittpunkt des Lotes von P auf g mit g und Y der Schnittpunkt des Lotes von P auf h mit h . Es seien G', G'' die durch g bestimmten Halbebenen und H' und H'' die durch h bestimmten Halbebenen.

Wir definieren

$$x(P) = \begin{cases} l(\overline{OX}), & \text{wenn } X \in H'', \\ -l(\overline{OX}), & \text{wenn } X \in H', \\ 0, & \text{wenn } X \in h. \end{cases}$$

Analog sei $y(P) \in \mathbb{R}$ definiert. In Kapitel 7 von [K] wird gezeigt, dass die Abbildung $E \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto \begin{pmatrix} x(P) \\ y(P) \end{pmatrix}$ ein Isomorphismus von Ebenen mit Strecken und Bewegungen ist. \square

Satz 5.26. *Sei $\text{Isom}(\mathbb{H})$ die Gruppe aller Isometrien auf \mathbb{H} . Dann gilt*

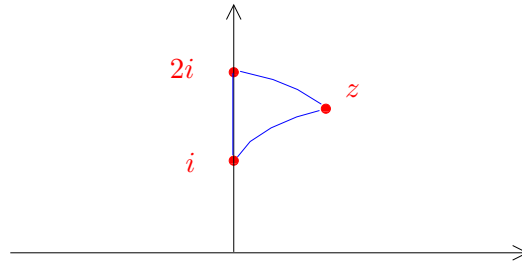
$$\text{Isom}(\mathbb{H}) = \text{Möb}(\mathbb{H}).$$

Beweis. Sei $f \in \text{Isom}(\mathbb{H})$. Wir schreiben $s := \{iy \in \mathbb{H} \mid y > 1\}$ und $H := \{z \in \mathbb{H} \mid z > 0\}$. Dann ist (i, s, H) eine Flagge und auch $f(i, s, H)$ ist wiederum eine Flagge. Da $\text{Möb}(\mathbb{H})$ transitiv auf Flaggen operiert, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f die obige Flagge erhält, d.h. dass $f(i) = i, f(s) = s$ und $f(H) = H$.

Behauptung. Es ist $f(iy) = iy$ für $y > 1$.

Es ist $f(iy) = iy'$, mit $d(i, iy') = d(i, iy)$. Damit folgt $y = y'$. Wir haben also damit die Behauptung bewiesen.

Behauptung. Es gilt $f(z) = z$ für $z \in \mathbb{H}$, mit $\text{Re } z > 0$.



Wir betrachten das Dreieck $(i, 2i, z)$. Dann ist $f(\Delta_{i,2i,z}) = \Delta_{i,2i,f(z)}$. Nachdem f eine Isometrie ist, folgt, unter Anwendung des Satzes 5.22 (SSS), dass es eine Bewegung β gibt mit $\beta(i) = i, \beta(2i) = 2i$ und $\beta(z) = f(z)$. Die Bewegung erhält also insbesondere die obige Flagge. Damit folgt aus (C4), dass $\beta = \text{id}$. Damit ist $f(z) = \beta(z) = z$. Wir haben also damit auch diese Behauptung bewiesen.

Damit folgt bereits die Aussage des Satzes. \square

5.6. Das Winkelmaß.

Definition. Ein Winkel $\{P\} \cup s_1 \cup s_2$ heißt *gestreckt*, wenn $s_1 \neq s_2$ und s_1, s_2 auf einer Geraden liegen. Das *Innere* eines gestreckten Winkels ist eine der beiden, durch s_1 und s_2 festgelegten Halbebenen.

Es sei $\{P\} \cup s_1 \cup s_2$ ein Winkel, welcher nicht gestreckt ist. Dann ist das *Innere* definiert als $H_1 \cap H_2$, wobei H_i die Halbebenen sind, welche durch s_i begrenzt und durch $s_{3-i} \subset H_i$ eindeutig bestimmt sind.

Definition. Es sei $\omega = \{P\} \cup s_1 \cup s_2$ ein Winkel und t ein Strahl, welcher von P ausgeht, im Inneren von ω liegt und auf der Winkelhalbierenden von ω liegt. Dann nennen wir $\{P\} \cup s_1 \cup t$ und $\{P\} \cup t \cup s_2$ *halbe Winkel von ω* .

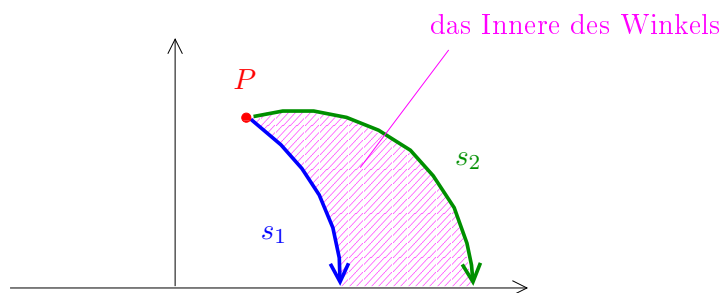


ABBILDUNG 15. Das Innere eines nicht gestreckten Winkels.

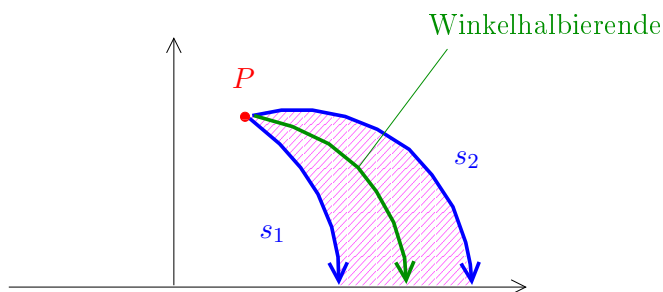


ABBILDUNG 16. Die Winkelhalbierende und halbe Winkel.

Definition. Es seien α, β zwei Winkel. Wir sagen $\alpha < \beta$, wenn es eine Bewegung f gibt, sodass

$$f(\text{Scheitelpunkt von } \alpha) = \text{Scheitelpunkt von } \beta$$

und

$$f(\alpha) \setminus (\text{Scheitelpunkt von } \beta) \subset \text{Inneres von } \beta.$$

Satz 5.27. *Es gibt genau eine Abbildung*

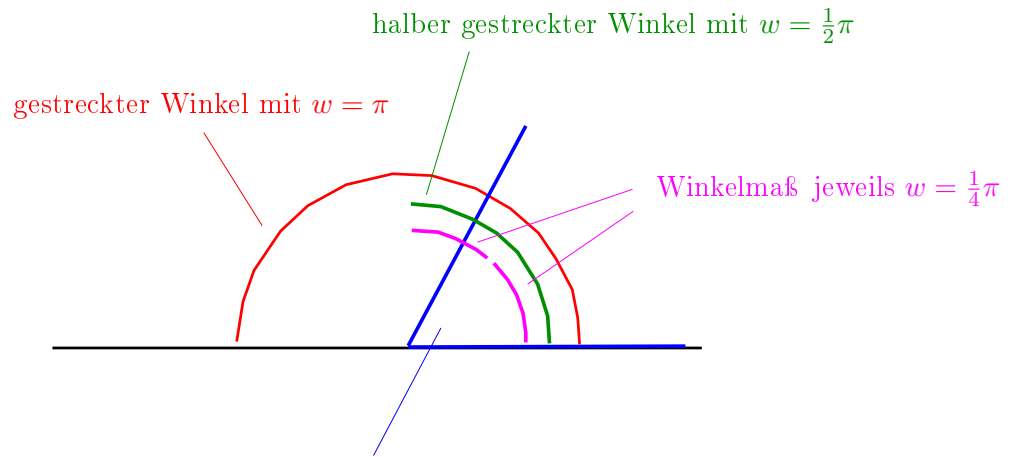
$$w: \{\text{Winkel in } E\} \rightarrow [0, 2\pi],$$

sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) $w(\text{gestreckter Winkel}) = \pi$.
- (2) w ist invariant unter Bewegungen.
- (3) $w(\text{Hälfte von } \alpha) = \frac{1}{2}w(\alpha)$.
- (4) $\alpha < \beta \Rightarrow w(\alpha) < w(\beta)$.

Beweisskizze. Die Idee für den Beweis wird in Abbildung 17 skizziert. □

Der folgende Satz ist Satz 5.19 in [K], und wird dort auch bewiesen.



Wir approximieren den gegebenen Winkel durch sukzessives Unterteilen des gestreckten Winkels in zwei Hälften

ABBILDUNG 17. Skizze für die Definition des Winkelmaß.

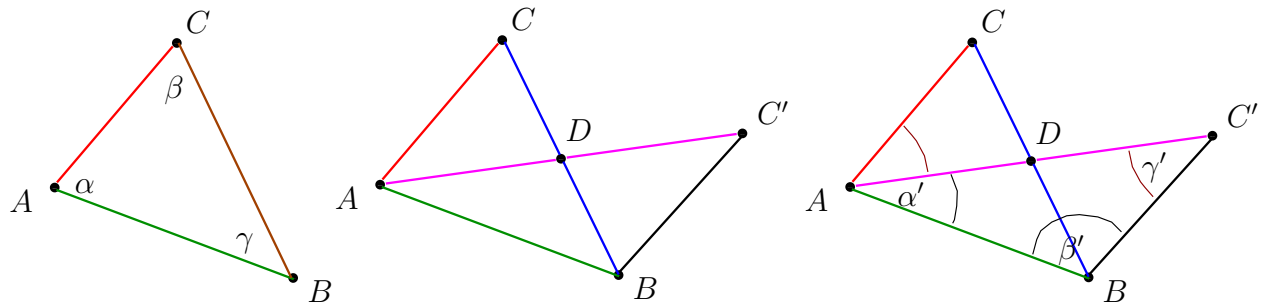
Satz 5.28. *Es gilt*

$$w(\alpha) = w(\beta) \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta.$$

Satz 5.29. *Es sei E eine Ebene mit Strecken und Bewegungen. Dann gilt für jedes Dreieck, dass*

$$\text{Summe der Innenwinkel} \leq \pi.$$

Beweis. Es sei also $\triangle_{A,B,C}$ ein Dreieck. Es sei D der Mittelpunkt von \overline{BC} . Ferner sei $C' \neq A$



der Punkt auf dem Strahl $s(A, D)$, sodass $\overline{C'D} \equiv \overline{AD}$.

Beobachtung. Aus Satz 5.20 (SWS), folgt dass $\triangle_{A,D,C} \equiv \triangle_{C',D,B}$.

Wir betrachten $\triangle_{A,B,C'}$. Dann ist $\alpha = \alpha' + \gamma'$ und $\beta' = \beta + \gamma$.

Beobachtung. $\beta + \gamma = \beta' \leq \pi$, d.h. die Summe von den zwei Innenwinkeln β und γ ist höchstens π . Nachdem wir das gleiche Argument auch für beliebige zwei Innenwinkel durchführen können, sehen wir, dass die Summe von je zwei Innenwinkeln immer höchstens π ist.

Zudem ist

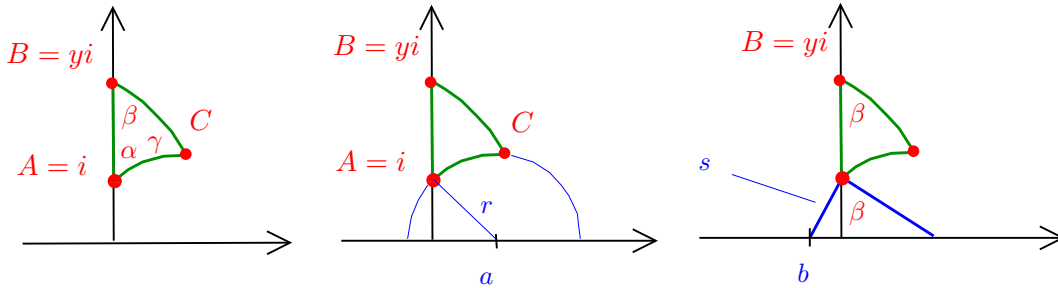
$$\underbrace{\alpha}_{=\alpha'+\gamma'} + \underbrace{\beta+\gamma}_{\beta'} = \alpha' + \beta' + \gamma'.$$

Aus $\alpha = \alpha' + \gamma'$ folgt, dass $\alpha' \leq \frac{\alpha}{2}$ oder $\gamma' \leq \frac{\alpha}{2}$. Nehmen wir an, dass $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$. Wenn wir den obigen Prozess genügend oft iterieren, dann erhalten wir ein Dreieck $\triangle_{A'',B'',C''}$ mit $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = \alpha + \beta + \gamma = \varepsilon + \pi$ und $\alpha' < \varepsilon$. Damit ist $\beta' + \gamma' = \pi + \varepsilon - \alpha' > \pi$, was ein Widerspruch ist, zur obigen Erkenntnis, dass die Summe von zwei Innenwinkeln immer $\leq \pi$ ist. \square

Satz 5.30. Sei $\triangle_{A,B,C}$ ein Dreieck in \mathbb{H} . Dann gilt

$$\text{Summe der Innenwinkel} < \pi.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A = i$, $B = yi$ mit $y > 1$ und $\operatorname{Re} C > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei β spitz. Wir wählen $a, r > 0$ so dass



$$g(A, C) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - a| = r\}.$$

Wir wählen zudem $b < 0$, $s > 0$ sodass die Gerade $\{z \in \mathbb{H} \mid |z - b| = s\}$ den Punkt A enthält und den Winkel β mit der y -Achse besitzt.

Behauptung. Für $t \geq 0$ betrachten wir $g_t = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - bt| = st\}$. Dann gilt:

- (1) Der Winkel zwischen g_t und der y -Achse ist immer β .
- (2) g_t schneidet $g(A, C)$ in $\{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ genau dann, wenn $t < \frac{a+r}{b+s}$.

Beweis der Behauptung.

- (1) Es sei B_t der Schnittpunkt von g_t mit der y -Achse. Dann ist $\triangle_{bt, B_t, 0}^E$ ähnlich zu $\triangle_{b, B, 0}^E$, wobei \triangle^E euklidische Dreiecke bezeichnet, da $l(\overline{0bt}) = tb = t \cdot l(\overline{b0})$ und $l(\overline{btB_t}) = t \cdot l(\overline{bB})$ und $\sphericalangle(bt, 0, B_t) = \sphericalangle(b, 0, B)$.

- (2) Wir betrachten die linke Skizze in Abbildung 18. Also schneidet g die Gerade $g(A, C)$ in $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ genau dann, wenn $bt + st < a + r$ was genau dann eintritt, wenn $t < \frac{a+r}{b+s}$.

□

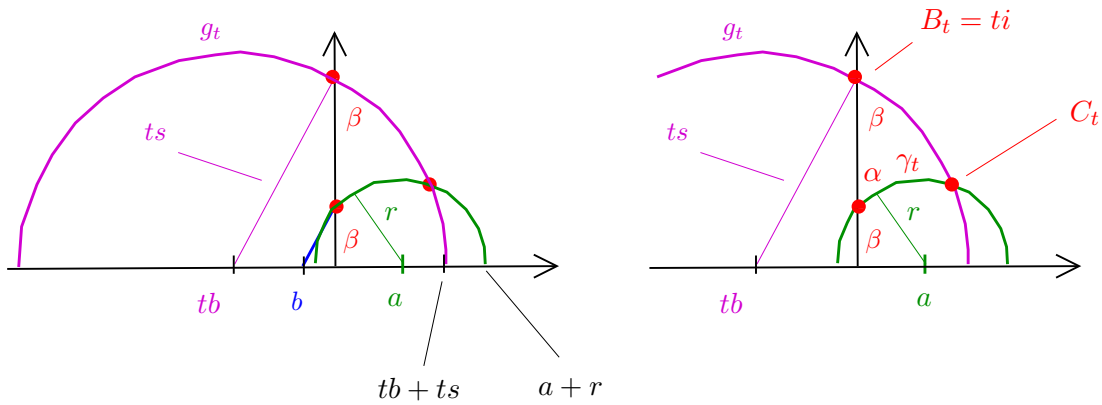


ABBILDUNG 18. Das Dreieck mit Eckpunkten A, B_t und C_t .

Es sei C_t der Schnittpunkt von g_t mit $g(A, C)$. Wir betrachten Δ_{A, B_t, C_t} , wobei der Winkel bei A gleich α ist, der Winkel bei B_t ist β und der Winkel bei C_t mit γ_t bezeichnet wird.

Behauptung. Es ist $\cos(\gamma_t) = \frac{1}{2rs} \left(t + \frac{1}{t} \right) + \frac{ab}{rs}$.

Beweis der Behauptung. Wir betrachten das Dreieck Δ_{a, tb, C_t} auf der rechten Seite von Abbildung 18. Aus dem Kosinussatz folgt, dass

$$(a - bt)^2 = (st)^2 + r^2 - 2rst \cos(\gamma).$$

Zudem gilt $r^2 = a^2 + 1$ und $s^2 = b^2 + 1$. Damit rechnet man die Behauptung leicht nach. □

Beobachtung. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \left[1, \frac{a+r}{b+s} \right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2rs} \left(1 + \frac{1}{t} \right) + \frac{ab}{rs} = \cos(\gamma_t) \end{aligned}$$

ist streng monoton steigend.

Also ist

$$\begin{aligned} \left[1, \frac{a+r}{b+s} \right] &\rightarrow [0, \pi] \\ t &\mapsto \gamma_t \end{aligned}$$

streng monoton fallend. Es genügt zu zeigen, dass $\alpha + \beta + \gamma_1 = \pi$. Für $t > 1$ erhalten wir dann hyperbolische Dreiecke. Dann gilt

$$\alpha + \beta + \gamma_t < \alpha + \beta + \gamma_1 = \pi.$$

Um $\alpha + \beta + \gamma_1 = \pi$ einzusehen, betrachten wir Abbildung 19.

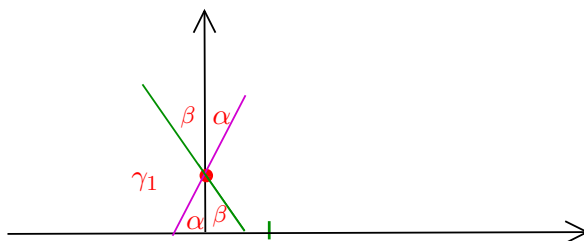


ABBILDUNG 19. Die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma_1$ beträgt π .

□

Korollar 5.31 (Korollar zum Beweis von Satz 5.30). *Ein Dreieck in \mathbb{H} ist bis auf Kongruenz durch seine Innenwinkel festgelegt.*

Beweis. Es sei $\Delta_{A,B,C}$ ein Dreieck mit Innenwinkeln α , β und γ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $A = i$, $B = yi$ für $y > 1$ und $\operatorname{Re} C > 0$. Es seien a, b, r und s wie im Beweis zu Satz 5.30. Nachdem $[1, \frac{a+r}{b+s}] \rightarrow [0, \pi]$ streng monoton ist, gibt es genau ein t mit $\gamma_t = \gamma$. Damit ist $C = C_t$ und $B = B_t$. □

Es sei

$$\begin{aligned} \gamma_t: \left[1, \frac{a+r}{b+s}\right] &\rightarrow [0, \pi) \\ t &\mapsto \gamma_t. \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma_{\frac{a+r}{b+s}} = 0$. Damit folgt, dass die Winkelsumme in $(\alpha + \beta, \pi)$ liegt. Wir sehen, dass die Winkelsumme um so kleiner ist, je ‘größer’ das Dreieck ist.

Wir können diese Aussage auch präziser machen. Wir benötigen dazu den Begriff des Flächeninhalts. Es sei $U \subset \mathbb{H}$. Wir definieren

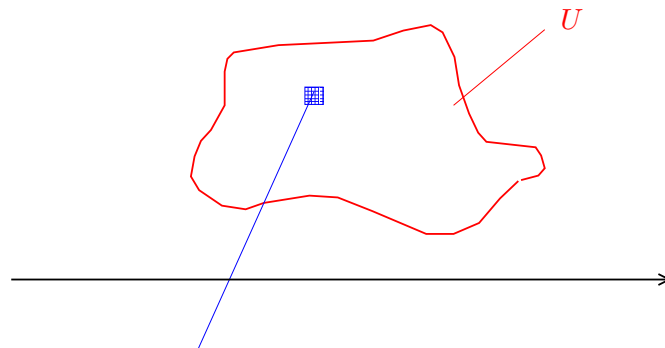
$$\text{Flächeninhalt}_{\mathbb{H}}(U) := \int_U \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Man kann nun leicht nachrechnen, dass der Flächeninhalt invariant ist unter Möbiustransformationen, d.h. es gilt $\text{Flächeninhalt}_{\mathbb{H}}(m(U)) = \text{Flächeninhalt}_{\mathbb{H}}(U)$ für alle $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$.

Folgender Satz wird in [A] als Theorem 5.16 bewiesen.

Satz 5.32. *Es sei $\Delta_{A,B,C}$ ein Dreieck in \mathbb{H} mit Innenwinkeln α , β und γ . Dann gilt*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \text{Flächeninhalt}_{\mathbb{H}}(\Delta_{A,B,C}).$$



Flächeninhalt von Quadrat mit Eckpunkt (x, y) und euklidischen Seitenlängen Δ_x, Δ_y ist hyperbolische Seitenlänge mal hyperbolische Seitenlänge
 also in etwa $\frac{1}{y} \Delta_x \cdot \frac{1}{y} \Delta_y = \frac{1}{y^2} \Delta_x \Delta_y$

ABBILDUNG 20. Flächeninhalt wird durch die Flächeninhalte von kleinen Quadraten approximiert.

Wir erhalten sofort folgendes überraschendes Korollar.

Korollar 5.33. Die Flächeninhalt von jedem Dreieck in \mathbb{H} ist kleiner als π .

6. FLÄCHEN

Definition. Eine Fläche ist eine zusammenhängende, orientierbare und kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Satz 6.1 (Radó, 1923). Jede Fläche ist diffeomorph zu genau einer der folgenden Flächen:

- (1) S^2 .
- (2) 2-Torus.
- (3) Fläche von Geschlecht ≥ 2 .

Das Ziel ist, folgende Fragen zu beantworten:

Frage. Wie kann man “Flächen von Geschlecht ≥ 2 ” mathematisch sauber definieren?

Frage. Wie kann man Flächen als geometrische Objekte auffassen?

6.1. **Die Sphäre.** Zur Erinnerung: Die 2-Sphäre ist definiert als

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Satz 6.2. Die 2-Sphäre ist eine Fläche.

Beweis. Ein möglicher Atlas ist gegeben durch die stereographischen Projektionen als Basis. Die 2-Sphäre ist zudem kompakt nach dem Satz von Heine-Borel. Der Normalenvektor an jedem Punkt definiert zudem eine Orientierung des Tangentialraumes an jedem Punkt. \square

Bemerkung. Zudem gilt für alle $P \in S^2$

$$T_P S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot P = 0\}.$$

Definition. Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer C^∞ -Zuordnung

$$P \mapsto \left(\begin{array}{c} g_P: T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{bilinear, positiv definit und symmetrisch} \end{array} \right)$$

Auf S^2 betrachten wir die Riemannsche Struktur

$$\begin{aligned} T_P S^2 \times T_P S^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto v \cdot w, \end{aligned}$$

wobei $(v, w) \mapsto v \cdot w$ das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^3 ist.

Definition. Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren für $v \in T_P M$

$$\|v\| := \sqrt{g_P(v, v)}$$

als *Länge von v* . Dies ist ein Längenmaß auf M . Wir erhalten den Begriff der *Länge eines Weges* und des *Abstandes zwischen zwei Punkten* auf M .

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir sagen nun eine differenzierbare Abbildung $f: I \rightarrow M$ ist eine *Geodäte*, wenn $\|f'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ und wenn es zu jedem $t_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$d(f(s_0), f(s_1)) = |s_0 - s_1|$$

für alle $s_0, s_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I$.

Beispiel. Wir betrachten S^2 . Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ orthogonale Vektoren. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist

$$\begin{aligned} f: I &\rightarrow S^2 \\ t &\mapsto \sin t \cdot v + \cos t \cdot w \end{aligned}$$

eine Geodäte. Zudem ist jede Geodäte auf S^2 von dieser Form.

Satz 6.3. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} O(3) &\rightarrow \text{Isom}(S^2) \\ A &\mapsto (P \mapsto A \cdot P) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Korollar 6.4. *Zu je zwei Punkten $P, Q \in S^2$ und Vektoren $v \in T_P S^2$ und $w \in T_Q S^2$ mit $\|v\| = \|w\|$ gibt es ein $f \in \text{Isom}(S^2)$ mit $f(P) = Q$ und $df(v) = w$.*

³Diese Definition unterscheidet sich also ein bisschen von der Definition, welche wir in Kapitel 4.1 gegeben hatten. Dort hatten wir verlangt, dass eine Geodäte für alle Punkte die kürzeste Verbindung ist. Jetzt verlangen wir nur noch, dass die Geodäte die kürzeste Verbindung ist für Punkte, welche nahe genug beieinander liegen.

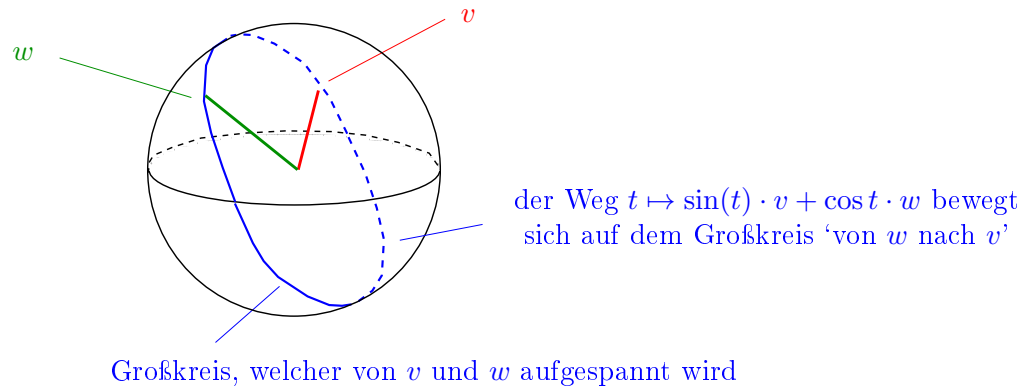


ABBILDUNG 21. Eine Geodäte auf der Sphäre.

Beweis. Dies ist eine Übungsaufgabe. □

Definition. Es sei M eine kompakte n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn es eine Karte

$$\phi: U \rightarrow V$$

mit $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset M$ gibt, sodass der Träger von f ganz in V enthalten ist, dann definieren wir

$$\int_M f := \int_U f(\phi(x_1, \dots, x_n)) \sqrt{\left| \det \left(g_{\phi(x)}(d_x \phi(e_1), d_x \phi(e_j)) \right)_{i,j} \right|} dx_1 \dots dx_n.$$

Mithilfe des Transformationssatzes für Integrale kann man leicht zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Karte abhängt. Für ein allgemeines f verwendet man in der Definition von $\int_M f$ eine Partition der Eins auf M .

Für $U \subset M$ definieren wir das Volumen von U als

$$\text{Vol}(U) := \int_M \chi_U,$$

wobei χ_U die charakteristische Funktion von U ist, d.h. $\chi_U(x) = 1$, wenn $x \in U$ und $\chi_U(x) = 0$, wenn $x \notin U$.⁴ Im Falle einer 2-Mannigfaltigkeit schreiben wir *Fläche* oder *Flächeninhalt* statt *Volumen*.

⁴Aus der Maßtheorie wissen wir natürlich, dass nicht alle Mengen meßbar sind. Dies wird im weiteren Verlauf für uns allerdings keine Rolle spielen.

Beispiel. Wir betrachten die Karte

$$\begin{aligned} \phi: U := (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow S^2 \\ (\varphi, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(S^2) &= \int_{S^2} 1 = \int_{\phi(U)} 1 = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\left| \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \right|} d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\left| \det \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|} d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi. \end{aligned}$$

Beispiel. Wir betrachten \mathbb{H}^2 mit $g_z(v, w) = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} v \cdot w$ für $z \in \mathbb{H}^2$ und $v, w \in T_z \mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^2$. Dann gilt für $U \subset \mathbb{H}^2$, dass

$$\text{Flächeninhalt}_{\mathbb{H}}(U) = \int_U \sqrt{\left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \right|} dx dy = \int_U \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Dies entspricht der Definition aus Kapitel 7.

Beispiel.

Wir betrachten das ‘‘Zweieck’’ U mit Winkel α wie in Abbildung 22 skizziert. Dann ist

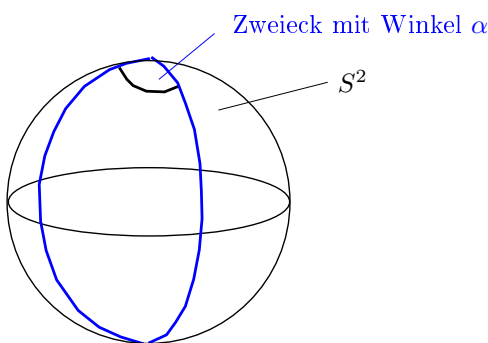


ABBILDUNG 22. Ein Zweieck mit Innenwinkel α auf S^2 .

$$\text{Flächeninhalt}_{\mathbb{H}}(U) = 2\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi.$$

Satz 6.5. *Es sei $\Delta_{A,B,C}$ ein Dreieck auf S^2 , d.h. drei Punkte verbunden durch Strecken auf Großkreisen mit Streckenlänge kleiner als π . Dann gilt*

$$\text{Summe der Innenwinkel} = \pi + \text{Flächeninhalt}_{S^2} \Delta_{A,B,C}$$

Betrachten wir beispielsweise ein Dreieck, welches aufgespannt wird durch den Nordpol $(0,0,1)$ und zwei Punkte auf dem Äquator. Es sei α der Innenwinkel am Nordpol. Die Innenwinkel an den Punkten auf dem Äquator sind gerade $\frac{\pi}{2}$. Wir sehen also, dass der Flächeninhalt des Dreiecks gegeben ist durch

$$\text{Summe der Innenwinkel} - \pi = \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = \alpha.$$

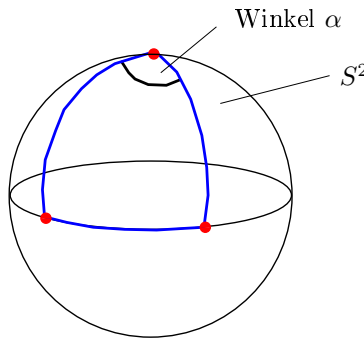


ABBILDUNG 23. Ein Dreieck auf S^2 aufgespannt durch den Nordpol und zwei Punkten auf dem Äquator.

Beweis von Satz 6.5. Es sei $\Delta = \Delta_{A,B,C}$ ein Dreieck auf S^2 . Die drei Großkreise, welche durch die Seiten des Dreiecks gebildet werden, zerteilen S^2 in 8 Dreiecke, wobei immer genau zwei Dreiecke antipodal sind. Wir bezeichnen mit X das Dreieck, welches gegenüber von A liegt, d.h. es sei $X \neq \Delta$ das Dreieck, welches \overline{BC} als Seite besitzt. Ganz analog definieren wir Y und Z . Wir bezeichnen mit X', Y', Z' und Δ' die Antipoden von X, Y, Z und Δ . Wir bezeichnen zudem mit $x, y, z, \delta, x', y', z', \delta'$ die Flächeninhalte von $X, Y, Z, \Delta, X', Y', Z', \Delta'$. Aus der Symmetrie der Kugel und der Großkreise folgt sofort, dass $\delta = \delta', x = x', y = y', z = z'$. Es ist $\Delta \cup x$ ein Zweieck mit Winkel α . Damit ist $x + \delta = 2\alpha$. Analog gilt $x + \delta = 2\beta$ und $z + \delta = 2\gamma$.

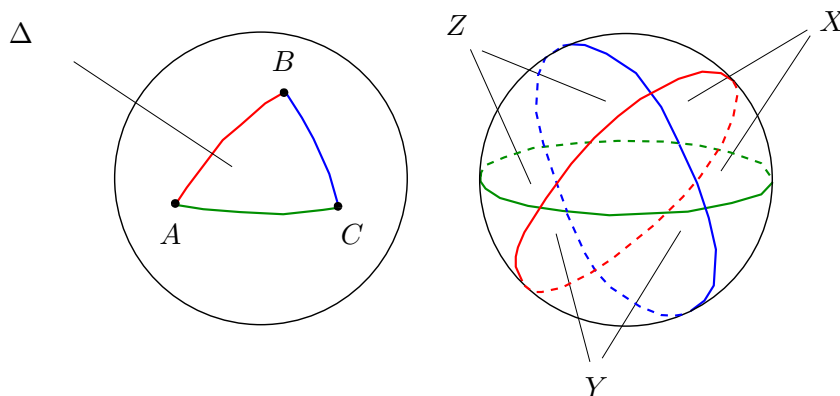
Aus der Zerlegung der Kugel in 8 Dreiecke folgt nun, dass

$$4\pi = \delta + \delta' + x + x' + y + y' + z + z' = 2\delta + 2x + 2y + 2z.$$

Wir erhalten nun, dass

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}(x + y + z + 3\delta) = \frac{1}{2}(2\pi + 2\delta) = \pi + \delta.$$

□



Zusammenfassend können wir also festhalten, dass auf S^2 die übliche Riemannsche Metrik folgende Eigenschaften besitzt:

- (1) Summe der Innenwinkel im $\Delta = \pi + \text{Flächeninhalt } \Delta$.
- (2) Für alle $P, Q \in S^2, v \in T_P S^2, w \in T_Q S^2$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ gibt es ein $f \in \text{Isom}(S^2)$ mit

$$f(P) = Q \text{ und } d_P f(v) = w.$$

- (3) Es gibt genau eine Metrik auf S^2 , welche 1) und 2) erfüllt.

Wir wollen im Folgenden studieren, ob es auch auf anderen Flächen interessante Riemannsche Metriken gibt.

6.2. Der Torus. Wir betrachten jetzt den Torus, wie in Abbildung 24 auf der linken Seite skizziert. Eine mathematisch saubere Beschreibung des Torus kann dadurch gegeben werden, dass wir den Torus wie folgt konstruieren: wir nehmen einen Kreis in der xz -Ebene mit Radius $\frac{1}{4}$ um den Punkt $(1, 0, 0)$, und rotieren diesen dann um die z -Achse. Wir erhalten dann folgende Beschreibung vom Torus T , es ist

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \mid \varphi, \theta \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Für $P \in T$ und $v, w \in T_P T$ definieren wir

$$g_P(v, w) = v \cdot w,$$

wobei $v \cdot w$ wiederum das Skalarprodukt von Vektoren in \mathbb{R}^3 ist. Dies definiert eine Riemannsche Metrik auf T .

Frage. Gibt es zu $P, Q \in T$ eine Isometrie von (T, g) , sodass $f(P) = Q$?

In diesem Fall ist die Antwort ‘Nein’, denn man kann zeigen, dass Drehungen um die z -Achse und Spiegelungen die einzigen Isometrien von (T, g) sind. Die Isometrien operieren also nicht transitiv auf T .

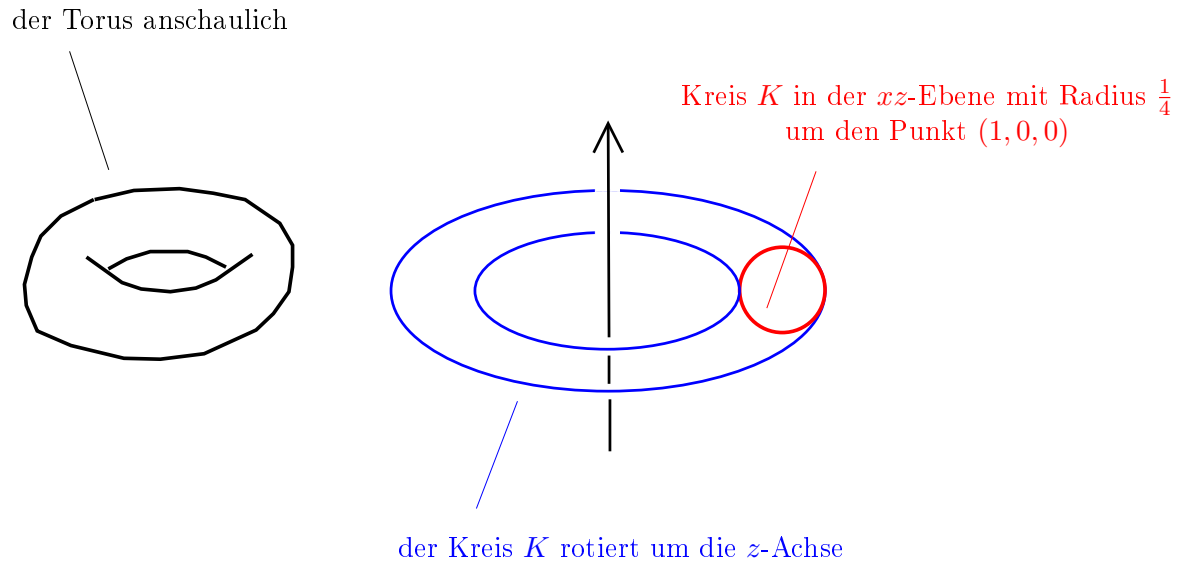


ABBILDUNG 24. Der Torus.

Wir wollen dieses Manko dadurch beheben, indem wir eine ‘bessere’ Metrik auf T wählen. Um diese Idee auszuführen, benötigen wir allerdings noch etwas mehr Theorie.

Erinnerung. Es sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe, welche auf X (mittels Homöomorphismen) operiert. Wir betrachten

$$X/G = \{\text{Äquivalenzklassen von } x \sim y : \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y\}$$

und die Projektionsabbildung

$$p: X \rightarrow X/G$$

$$x \mapsto [x].$$

Dann ist

$$U \subset X/G \text{ offen} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \text{ offen in } X$$

eine Topologie auf X/G .

Beispiel. Wir betrachten

$$\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(z, v) \mapsto z + v.$$

Dann ist

$$\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \rightarrow S^1 \times \dots \times S^1$$

$$[(v_1, \dots, v_n)] \mapsto (e^{2\pi i v_1}, \dots, e^{2\pi i v_n})$$

ein Homöomorphismus.

Definition. Eine Gruppe operiert *diskret* auf einem topologischen Raum X , wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt, sodass $g(U) \cap U = \emptyset$ falls $g \neq e$.

Beispiel. Wir betrachten $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie oben. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann hat

$$U = \left\{ w \mid \|v - w\| < \frac{1}{2} \right\}$$

die gewünschte Eigenschaft.

Satz 6.6. *Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $G \times M \rightarrow M$ eine diskrete Operation, sodass für alle $g \in G$ die Abbildung $M \rightarrow M, m \mapsto g \cdot m$ ein Diffeomorphismus ist. Dann besitzt M/G die Struktur einer n -Mannigfaltigkeit, sodass die Projektionsabbildung $p: M \rightarrow M/G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Sei $\bar{Q} \in M/G$ ein Punkt. Sei $Q \in M$ mit $p(Q) = \bar{Q}$. Wir wählen eine Umgebung U von Q wie in der Definition der diskreten Operation. Dann ist

$$p|_U: U \rightarrow p(U) \subset M/G$$

ein Homöomorphismus. Es sei $\phi: V \rightarrow W, V \subset M, W \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte um Q . Dann ist

$$p(U \cap V) \xrightarrow{(p|_{U \cap V})^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n$$

eine Karte um \bar{Q} .

Wir müssen noch zeigen, dass diese Karten einen differenzierbaren Atlas bilden. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass die Kartenwechsel immer gegeben sind durch Abbildungen vom Typ

$$\begin{aligned} U &\rightarrow V \\ m &\mapsto gm \end{aligned}$$

wobei U und V offen sind und $g \in G$ festgewählt ist. Aber wir hatten gerade vorausgesetzt, dass die Abbildungen $m \mapsto g \cdot m$ für jedes $g \in G$ ein Diffeomorphismus sind. \square

Beispiel. Wegen Satz 6.6 ist $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Satz 6.7. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $G \times M \rightarrow M$ eine diskrete Operation, sodass für jedes $h \in G$ die Abbildung $M \rightarrow M, m \mapsto hm$ eine Isometrie ist. Dann existiert auf M/G eine Riemannsche Metrik, sodass p eine lokale Isometrie ist.*

Beweisskizze. Es sei $\bar{Q} \in M/G$ und $v, w \in T_{\bar{Q}}(M/G)$. Wir wählen $Q \in M$, sodass $p(Q) = \bar{Q}$. Des Weiteren wählen wir eine Umgebung $U \subset M$ von Q , sodass $p|_U$ ein Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$g_{\bar{Q}}(v, w) = g((p|_U)_*^{-1}(v), (p|_U)_*^{-1}(w)).$$

Mithilfe der Voraussetzung, dass G mithilfe von Isometrien operiert, kann man nun leicht zeigen, dass $g_{\bar{Q}}(v, w)$ wohl-definiert ist, d.h. nicht von der Wahl des Urbildes Q abhängt. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, dass die Metrik g auf M/G die gewünschten Eigenschaften besitzt. \square

Konvention. Eine Isometrie ist immer schon ein Diffeomorphismus.

Satz 6.8. *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, welche auf M diskret durch Isometrien operiert. Es sei $f: M \rightarrow M$ eine Isometrie. Wenn es für alle $m \in M$, $g \in G$ ein $g' \in G$ gibt, sodass $f(gm) = g'f(m)$ gilt, so existiert eine Isometrie $\bar{f}: M/G \rightarrow M/G$, sodass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ M/G & \xrightarrow{\bar{f}} & M/G \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Wir definieren

$$\bar{f}(G \cdot m) = G \cdot f(m).$$

Behauptung. Die Abbildung \bar{f} ist wohldefiniert.

Es sei also $m' \in M$ mit $Gm = Gm'$. Dann existiert ein $g \in G$ mit $m' = gm$. Also ist

$$Gf(m') = Gf(gm) = Ggf(m) = Gf(m).$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Es folgt aus der Definition, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ M/G & \xrightarrow{\bar{f}} & M/G \end{array}$$

kommutiert. Nachdem f eine Isometrie ist und p eine lokale Isometrie, folgt aus der Kommutativität des Diagramms, dass \bar{f} eine Isometrie ist. \square

Bemerkung. Jede Isometrie von \mathbb{R}^2 ist eine Verknüpfung von

- (1) Rotationen,
- (2) Translationen und
- (3) Spiegelungen an einer Geraden.

Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-y, x). \end{aligned}$$

Dann ist im Allgemeinen $f(P+v) \neq f(P)+v$, aber es gilt immer, dass $f(P+v) = f(P)+w$ für ein $w \in \mathbb{Z}^2$. Damit induziert f eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Wenn $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ die Bedingung aus Satz 6.8 erfüllt, so gilt insbesondere, dass

$$f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2 + f(0).$$

Daraus erhält man das folgende Lemma.

Lemma 6.9. *Die Isometrien von \mathbb{R}^2 , welche die Bedingung des Satzes 6.8 erfüllen, sind Verknüpfungen von*

- (1) *der Rotation um $\frac{k}{2}\pi$,*
- (2) *Translationen und*
- (3) *der Spiegelung an der x -Achse, y -Achse, der Diagonalen oder der Antidiagonalen.*

Korollar 6.10. *Für alle $P, Q \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ gibt es eine Isometrie f mit $f(P) = Q$.*

Beweis. Sei seien $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathbb{R}^2$ Urbilder von P und Q unter der Projektion $p: \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Wir betrachten

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto x + (\tilde{Q} - \tilde{P}).$$

Dann induziert \tilde{f} eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der gewünschten Eigenschaft. \square

Frage. Gibt es zu allen $v, w \in T_P\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit $\|v\| = \|w\|$ eine Isometrie f mit $df(v) = w$?

Lemma 6.11. *Die Abbildung $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, t \mapsto [P + tv]$, wobei $R \in \mathbb{R}^2, \|v\| = 1$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, sind Geodäten und sogar die einzigen Geodäten auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.*

Beweis. Wir erinnern zuerst daran, dass die Abbildungen der Form $I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto P + tv$ mit $\|v\| = 1$ sind die einzigen Geodäten auf \mathbb{R}^2 . Das Lemma folgt dann aus der Tatsache, dass "geodätisch" eine lokale Eigenschaft ist und $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ lokal isometrisch zu \mathbb{R}^2 ist. \square

Definition. Eine Geodäte $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ heißt *periodisch*, wenn es ein $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, sodass

$$f(t + T) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wir nennen

$$\inf\{T \in \mathbb{R}_{>0} \mid f(t + T) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

die *Periode* von f .

Lemma 6.12. *Es sei $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$. Dann ist*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \\ t &\mapsto [P + tv] \end{aligned}$$

genau dann eine periodische Geodäte, wenn $y = 0$ oder $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ mit $y \neq 0$.

Beweis. “ \Leftarrow ”:

Es sei $v = (x, y)$ mit $x, y \neq 0$ und $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$, sodass $\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$. Damit gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} f\left(t + \frac{r}{x}\right) &= P + \left(t + \frac{r}{x}\right)v = P + tv + \frac{r}{x}(x, y) = P + tv + \underbrace{(r, s)}_{\in \mathbb{Z}^2} \\ &\equiv P + tv \pmod{\mathbb{Z}^2}. \end{aligned}$$

“ \Rightarrow ”. Es sei $T \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(t + T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$P + tv + Tv \equiv P + tv \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist $Tv \in \mathbb{Z}^2$, also $T(x, y) = (r, s)$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$. Also folgt, dass $\frac{x}{y} = \frac{Tx}{Ty} = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. \square

Bemerkung. Wir sagen $v \in \mathbb{R}$ ist *rational*, wenn entweder $y = 0$ oder $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.

Korollar 6.13. *Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ und $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|$ rational. Es sei $f: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ eine Isometrie. Dann ist $\|df(v)\|$ rational.*

Beweis. Jede Isometrie einer Riemannschen Mannigfaltigkeit schickt periodische Geodäten auf periodische Geodäten. Das Korollar folgt nun aus Lemma 6.12. \square

Es gibt Tangentialvektoren $v, w \in T_P\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit $\|v\| = \|w\|$, so dass v rational und w irrational ist. Aus dem Korollar folgt, dass es keine Isometrie f mit $df(v) = w$ gibt. Insbesondere ist die Antwort auf die obige Frage “Nein”.

Frage. Was ist der Flächeninhalt von $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$?

Die Abbildung $p: X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in (0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist eine Isometrie auf $p(X)$ und $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \setminus p(X)$ ist eine Nullmenge. Also folgt

$$\text{Flächeninhalt}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = \int_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2} 1 = \int_X 1 = 1.$$

Bemerkung. Jedes Dreieck Δ in $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ lässt sich durch eine Isometrie komplett in $p(X)$ verschieben.

Satz 6.14. *Es sei Δ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Dann ist die Summe der Innenwinkel von Δ gleich π .*

Beweis. Da die Projektion $p: X \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ eine Isometrie ist, können wir Δ auf $X \subset \mathbb{R}^2$ zurückziehen. Für Dreiecke in \mathbb{R}^2 ist die Summe der Innenwinkel natürlich gleich π . \square

Frage. Ist eine Metrik auf dem Torus T durch die Eigenschaften

- (1) Für $P, Q \in T$ gibt es ein $\xi \in \text{Isom}(T)$ mit $\xi(P) = Q$.
- (2) Es gilt Flächeninhalt $T = 1$.
- (3) Für alle Dreiecke ist die Winkelsumme π .

eindeutig bestimmt?

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dann wirkt $A\mathbb{Z}^2 = \{Av \mid v \in \mathbb{Z}^2\}$ durch Translation diskret auf \mathbb{R}^2 . Wir bilden $\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2$. Wie vorher erbt $\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2$ die Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 , sodass $\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2$ lokal isometrisch zu \mathbb{R}^2 ist. Zudem ist

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2 \\ v + \mathbb{Z}^2 &\mapsto Av + A\mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus. Also ist $\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2$ topologisch ein Torus. Die Quotientenabbildung $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2$ eingeschränkt auf

$$Y = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in (0, 1) \right\}$$

ist eine Isometrie auf $p(X)$. Die Menge $\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2 \setminus p(Y)$ ist eine Nullmenge. Damit ist

$$\text{Flächeninhalt}(\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2) = \int_{\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2} 1 = \int_Y 1 = 1.$$

Frage. Ist $\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2$ isometrisch zu $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$?

Wir suchen dazu weitere Invarianten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Wir betrachten folgende Invariante $\lambda(M, g)$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) .

Definition. Zu einer periodische Geodäte γ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) bezeichnen wir die Periode von γ mit $\lambda(\gamma)$. Dann definieren wir

$$\lambda(M, g) := \inf_{\gamma \text{ periodische Geodäte}} \lambda(\gamma).$$

Beispiel. Betrachten wir S^2 , zusammen mit der sphärischen Metrik. Dann ist

$$\lambda(S^2, g) = 2\pi.$$

Dies folgt, da alle Geodäten von der Form

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow S^2 \\ t &\mapsto \cos tv + \sin tw \end{aligned}$$

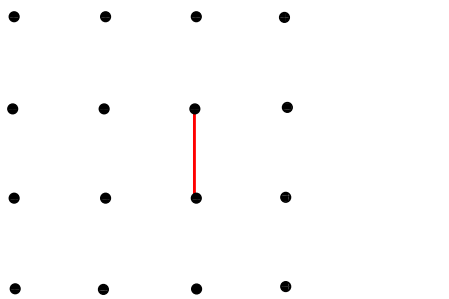
mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $v \perp w$ sind.

Satz 6.15. *Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Dann gilt*

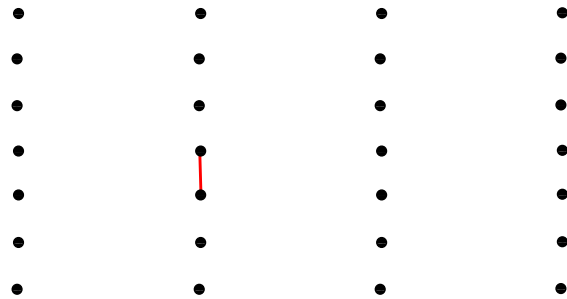
$$\lambda(\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w)) = \min\{\|P - Q\| \mid P \neq Q, P, Q \in \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w\}.$$

Beispiel. Wir betrachten die Gitter $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $A\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ in Abbildung 6.2. Der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten auf \mathbb{Z}^2 ist 1, d.h. es gilt $\lambda(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = 1$. Andererseits ist der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten auf $A\mathbb{Z}^2$ gerade $\frac{1}{2}$, d.h. es gilt $\lambda(\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$.

Korollar 6.16. *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist nicht isometrisch zu $\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2$.*



das Gitter $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$
 der minimalem Abstand
 zwischen zwei Gitterpunkten = 1



das Gitter $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$
 der minimale Abstand
 zwischen zwei Gitterpunkten = 1

Beweis von Satz 6.15. "≤":

Sei $P, Q \in \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w$ mit $P \neq Q$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w \\ t &\mapsto P + \frac{t}{\|P - Q\|}(Q - P) \end{aligned}$$

eine periodische Geodäte mit $\lambda(\gamma) \leq \|P - Q\|$. Damit folgt

$$\lambda(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w) \leq \min\{\|P - Q\| \mid P \neq Q, P, Q \in \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w\}.$$

Wir müssen also noch "≥" zeigen.

Sei $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$ eine periodische Geodäte. Dann wissen wir aus der algebraischen Topologie, dass man γ hochheben kann zu

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\gamma}: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow \gamma & \downarrow p \\ & & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w. \end{array}$$

Da p eine lokale Isometrie ist, ist $\tilde{\gamma}$ auch eine Geodäte in \mathbb{R}^2 . Da $\gamma(0) = \gamma(\lambda(\gamma))$, ist $\tilde{\gamma}(0) - \tilde{\gamma}(\lambda(\gamma)) \in \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$. Damit ist insbesondere $\|\tilde{\gamma}(\lambda(\gamma)) - \tilde{\gamma}(0)\| = |\lambda(\gamma) - 0| = \lambda(\gamma)$, da $\tilde{\gamma}$ eine Geodäte ist. Somit ist $\lambda(\gamma) \geq \min\{\|P\| \mid 0 \neq P \in \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w\}$. Also folgt

$$\lambda(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w) \geq \min\{\|P - Q\| \mid P \neq Q, P, Q \in \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w\}.$$

□

7. DAS POINCARÉ-SCHEIBENMODELL

In diesem kurzen Kapitel lernen wir eine alternative Beschreibung des hyperbolischen Raums kennen. Diese wird uns dann später behilflich sein, wenn wir hyperbolische Metriken auf Flächen finden wollen.

Definition. Wir definieren

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Sei ferner

$$\begin{aligned} \xi: \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{H} \\ z &\mapsto \frac{iz + 1}{-z + i}. \end{aligned}$$

Dann ist ξ die Einschränkung einer Abbildung aus $\text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ und wie man leicht sehen kann, ist ξ ein Diffeomorphismus. Durch ξ kann die hyperbolische Metrik von \mathbb{H} auf \mathbb{D} zurückgezogen werden.

Definition. Eine Menge $g \subset \mathbb{D}$ ist genau dann eine *hyperbolische Gerade in \mathbb{D}* , wenn $\xi(g)$ eine hyperbolische Gerade in \mathbb{H} ist.

Lemma 7.1. *Die Geraden in \mathbb{D} sind genau folgende beiden Typen von Teilmengen:*

- (1) *Schnitte von euklidischen Geraden durch den Ursprung mit \mathbb{D} , d.h. Teilmengen von der Form $\{re^{it} \mid r \in (-1, 1)\}$ für ein $t \in [0, 2\pi]$, oder*
- (2) *der Schnitt $\mathbb{D} \cap k$, wobei k ein euklidischer Kreis k in $\overline{\mathbb{C}}$ ist, welcher den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}$ senkrecht schneidet.*

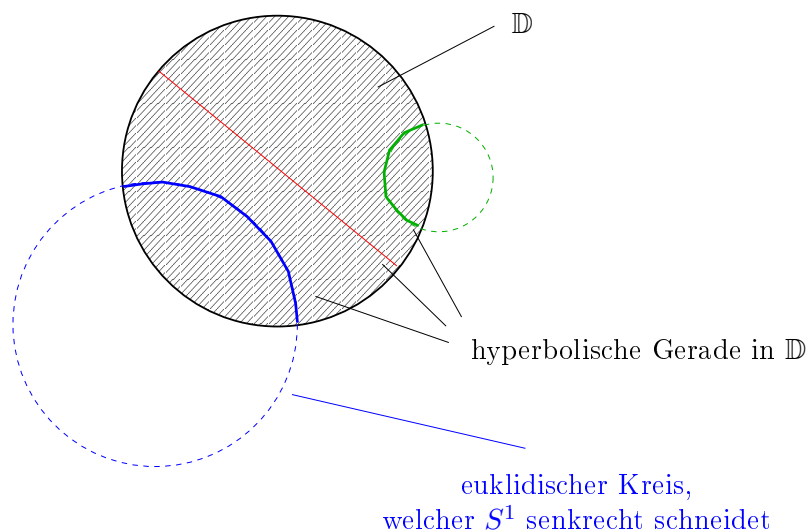


ABBILDUNG 25. Beispiele von hyperbolische Geraden in \mathbb{D} .

Beweis. “ \Rightarrow ”:

Sei g eine hyperbolische Gerade in \mathbb{H} . Dann gibt es einen Kreis k in $\overline{\mathbb{C}}$, welcher \mathbb{R} senkrecht schneidet, sodass $\xi(g) = \mathbb{H} \cap k$. Es folgt aus Satz 3.21 und damit ist $\xi^{-1}(k)$ ein Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$, welcher S^1 senkrecht schneidet.

“ \Leftarrow ”:

Dieser Beweis verläuft analog. □

Wir definieren nun die *Länge* eines C^2 -Weges $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ als

$$\text{Länge}_{\mathbb{D}} \gamma := \text{Länge}_{\mathbb{H}}(\xi \circ \gamma).$$

Die dadurch induzierte Metrik $d_{\mathbb{D}}$ hat, per Definition, die Eigenschaft dass

$$d_{\mathbb{D}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\xi(x), \xi(y))$$

für $x, y \in \mathbb{D}$. Insbesondere ist ξ damit eine Isometrie.

Satz 7.2. *Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ ein C^1 -Weg. Dann ist*

$$\text{Länge}_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_a^b \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} \frac{2}{1 - |z|^2} |dz|.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Länge}_{\mathbb{D}}(\gamma) &= \text{Länge}_{\mathbb{H}}(\xi \circ \gamma) = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(\xi \circ \gamma)} |(\xi \circ \gamma)'(t)| dt = \\ &= \int_a^b \frac{|\gamma(t) + i|^2}{1 - |\gamma(t)|^2} \cdot \frac{2}{|\gamma(t) + i|^2} |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} \frac{2}{1 - |z|^2} |dz|, \end{aligned}$$

da $\text{Im} \xi(z) = \frac{1 - |z|^2}{|z + i|^2}$ und $|\xi'(z)| = \frac{2}{|z + i|^2}$. □

Lemma 7.3. *Sei $\tilde{\xi} \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ mit $\tilde{\xi}(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ ein C^1 -Weg. Dann ist*

$$\text{Länge}_{\mathbb{H}}(\xi \circ \gamma) = \text{Länge}_{\mathbb{H}}(\tilde{\xi} \circ \gamma).$$

Beweis. Es gilt

$$\text{Länge}_{\mathbb{H}}(\tilde{\xi} \circ \gamma) = \text{Länge}_{\mathbb{H}}(\underbrace{\tilde{\xi} \circ \xi^{-1}}_{\in \text{Möb}(\mathbb{H})} \circ \xi \circ \gamma) = \text{Länge}_{\mathbb{H}}(\xi \circ \gamma).$$

□

Bemerkung. Die Metrik von \mathbb{D} hängt nicht von der Wahl der Abbildung $\xi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit $\xi(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ ab.

Definition. Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto \frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}. \end{aligned}$$

Durch elementares nachrechnen kann man folgendes Lemma beweisen.

Lemma 7.4. *Die Funktion φ ist invariant unter der Diagonalwirkung von $\text{Möb}(\mathbb{D})$, d.h. es gilt*

$$\varphi(\xi(x), \xi(y)) = \varphi(x, y)$$

für alle $\xi \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ und $x, y \in \mathbb{D}$.

Satz 7.5. *Für $x, y \in \mathbb{D}$ gilt*

$$\varphi(x, y) = \sinh^2\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(x, y)\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \text{ und} \end{aligned}$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1.$$

Es gibt ein $p \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ mit $p(x) = 0$ und $p(y) = ir \in i\mathbb{R}_{>0}$, da sich diese Eigenschaft von \mathbb{H} zurückziehen lässt auf \mathbb{D} . Damit gilt

$$\varphi(x, y) = \varphi(p(x), p(y)) = \varphi(0, ir) = \frac{r^2}{1 - r^2}.$$

Außerdem gilt

$$d_{\mathbb{D}}(0, ir) = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

Dies folgt, da $\gamma: [0, r] \rightarrow \mathbb{D}, t \mapsto it$ die Umparametrisierung einer Geodäten ist. Damit ist

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(0, ir) &= \text{Länge}_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_0^r \frac{2}{1-t^2} dt = \int_0^r \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} dt \\ &= \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right). \end{aligned}$$

Damit ist $r = \tanh\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(0, r)\right)$. Folglich ergibt sich

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, ir) = \sinh^2\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(x, y)\right),$$

da

$$\frac{\tanh^2(x)}{1 - \tanh^2(x)} = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)} = \sinh^2(x).$$

□

Definition. Der *hyperbolische Kreis* in \mathbb{D} mit *Radius* $r > 0$ und *Mittelpunkt* $x \in \mathbb{D}$ ist definiert als

$$\{y \in \mathbb{D} \mid d_{\mathbb{D}}(x, y) = r\}.$$

Satz 7.6. *Ein hyperbolischer Kreis in \mathbb{D} ist ein euklidischer Kreis in \mathbb{D} und umgekehrt.*

Bemerkung. Ein hyperbolischer Kreis C hat im Allgemeinen einen anderen Mittelpunkt und einen anderen Radius als C , aufgefasst als euklidischer Kreis.

Beweis von Satz 7.7. "⇒":

1.Fall: Sei C ein hyperbolischer Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius r .

Für $y \in \mathbb{D}$ gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(0, y) = r &\Leftrightarrow \varphi(0, y) = \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{|y|^2}{1 - |y|^2} = \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \tanh\frac{r}{2} = |y|. \end{aligned}$$

Damit ist C ein euklidischer Kreis um 0 mit Radius $\tanh\frac{r}{2}$.

2.Fall: Sei $C \subset \mathbb{D}$ ein hyperbolischer Kreis mit Mittelpunkt $x \neq 0$. Wir wählen $\xi \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ mit $\xi(x) = 0$. Dann ist $\xi(C)$ ein euklidischer Kreis und somit auch $C = \xi^{-1} \circ \xi(C)$.

"⇐":

Ist $C \subset \mathbb{D}$ ein euklidischer Kreis um 0, dann folgt die Aussage analog zu Fall 1. Sei also C ein euklidischer Kreis um $P \neq 0$. Sei dann g die euklidische Gerade durch 0 und P . Dann ist g auch eine hyperbolische Gerade. Sei Q der hyperbolische Mittelpunkt von $g \cap C$ und $m \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ mit $m(Q) = 0$ und

$$\{x, y\} = m(g) \cap m(C) \subset \mathbb{R}.$$

Da x und y hyperbolisch äquidistant von 0 sind, sind sie auch euklidisch äquidistant von 0. Da $x, y \in \mathbb{R}$, folgt damit insbesondere $x = -y$. Also ist $m(C)$ ein euklidischer Kreis um 0 und somit auch ein hyperbolischer Kreis um 0. Damit ist bereits C ein hyperbolischer Kreis in \mathbb{D} . □

Wir definieren ganz analog auch hyperbolische Kreise in \mathbb{H} . Nachdem die Abbildung ξ per Definition eine Isometrie ist und zudem, als Möbiustransformation, euklidische Kreise in euklidische Kreise überführt erhalten wir sofort folgendes Korollar.

Korollar 7.7. *Ein hyperbolischer Kreis in \mathbb{H} ist ein euklidischer Kreis in \mathbb{H} und umgekehrt.*

8. FLÄCHEN VON GESCHLECHT GRÖßER EINS

Wir hatten gesehen, dass die Fläche von Geschlecht Null, das heißt die 2-Sphäre S^2 eine Riemannsche Metrik mit folgenden Eigenschaften besitzt:

- (1) Für jedes Dreieck gilt

$$\text{Winkelsumme} = \pi + \text{Flächeninhalt}.$$

- (2) Zu je zwei Punkten P und Q auf S^2 und je zwei Vektoren $v \in T_P S^2$ und $w \in T_Q S^2$ mit $\|v\| = \|w\|$ gibt es eine Isometrie h von S^2 mit $h(P) = Q$ und $d_P h(v) = w$.

Darüber hinaus gibt es genau eine Riemannsche Metrik auf S^2 , welche diese beiden Eigenschaften besitzt.

Für die Fläche von Geschlecht eins, das heißt dem 2-Torus T^2 hatten wir gesehen, dass es eine Riemannsche Metrik mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (1) Für jedes Dreieck gilt

$$\text{Winkelsumme} = \pi.$$

- (2) Zu je zwei Punkten P und Q auf T^2 gibt es eine Isometrie h von T^2 mit $h(P) = Q$.

In diesem Fall ist die Riemannsche Metrik durch diese beiden Eigenschaften allerdings nicht mehr eindeutig bestimmt.

In diesem Kapitel wollen wir nun Flächen höheren Geschlechts studieren. Wir müssen dazu allerdings erst eine mathematische saubere Beschreibung von Flächen einführen.

8.1. Topologische Beschreibung von Flächen von höherem Geschlecht. Betrachten wir jetzt ein reguläres Oktagon ⁵ E_8 wie in Abbildung 26. Wie für den Torus wählen wir jetzt eine Äquivalenzrelation, so dass zwei Kanten, welche durch genau eine Kante getrennt sind, mit ‘entgegengesetzter Orientierung’ äquivalent werden. Das Oktagon mit den Verklebungen wird in Abbildung 26 skizziert.

Der topologische Raum E_8 / \sim , den wir dadurch erhalten, ist anschaulich die Fläche von Geschlecht 2. Dies kann man wie folgt sehen: Wir betrachten in E_8 zuerst die rechte obere Hälfte, wir identifizieren dann jeweils zwei Kanten, und erhalten einen ‘Torus minus eine Scheibe’. (Siehe die untere Hälfte von Abbildung 26). Wir erhalten jetzt E_8 / \sim , indem wir zwei solche ‘Torus minus eine Scheibe’ am Rand verkleben.

Wir beschreiben jetzt E_8 und die Äquivalenzrelation noch mal etwas präziser. Dabei bezeichnen wir mit E_8 das reguläre Oktagon mit den Eckpunkten $Q_k = e^{2\pi i k/16}$ mit $k = 1, 3, \dots, 15$. Für Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bezeichnen wir wie üblich mit \overline{AB} die euklidische Strecke von A nach B . Zudem bezeichnen wir für $z \in S^1$ mit $s_z: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ die

⁵Ein n -Eck E im \mathbb{R}^2 heißt regulär, wenn alle Kanten die gleiche Länge besitzen und wenn alle Innenwinkel gleich sind.

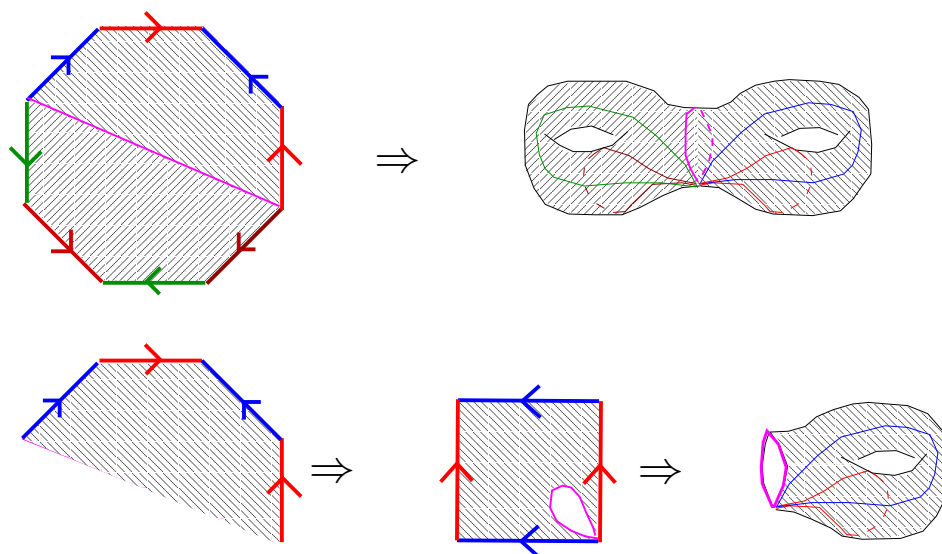


ABBILDUNG 26. Die Fläche von Geschlecht 2.

Spiegelung an der euklidischen Geraden $\{tz \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wir bezeichnen mit \sim die Äquivalenzrelation auf E_8 , welche definiert ist durch

$$P \in \overline{Q_{2k-1}Q_{2k+1}} \sim s_{e^{\pi i(k+1)/4}}(P) \in \overline{Q_{2k+3}Q_{2k+5}}$$

für $k = 0, 1, 4, 5$. Obwohl es nicht ganz offensichtlich ist, sind bei dieser Äquivalenzrelation alle Eckpunkte des Oktagon äquivalent. Wir bezeichnen dann den topologischen Raum E_8 / \sim als die *Fläche von Geschlecht 2*. Ganz analog kann man auch die Fläche von Ge-

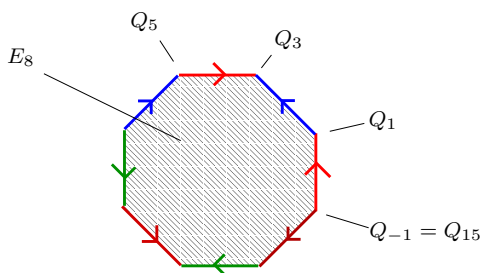


ABBILDUNG 27. Die Fläche von Geschlecht 2 als Quotient von E_8 .

schlecht g definieren.

Satz 8.1. *Die Fläche von Geschlecht g ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für den Fall $g = 2$. Der allgemeine Fall geht fast genauso. Wir betrachten also wieder das Oktagon E_8 mit der Äquivalenzrelation \sim . Wir bezeichnen

mit p die Projektionsabbildung $E_8 \rightarrow F := E_8 / \sim$. Wenn P ein Punkt im Inneren von E_8 ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$U_\varepsilon(P) := \{Q \in \mathbb{C} \mid \|P - Q\| < \varepsilon\}$$

noch ganz im Inneren von E_8 liegt. Es folgt, dass schon die Identität eine Karte um $p(P)$ ist. Wir bezeichnen dies als Karte vom 1. Typ.

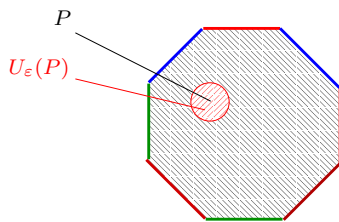


ABBILDUNG 28. Karte für einen Punkt im Inneren von E_8 .

Es sei nun P ein Punkt, welcher im Inneren einer Kante von E_8 liegt. Wir wollen eine Karte um $p(P)$ finden. O.B.d.A. sei $P \in \overline{Q_{-1}Q_1}$. Wir bezeichnen mit $P' = s_{e^{\pi i/4}}(P)$ den Punkt, welcher mit P identifiziert wird. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(P)$ keinen Eckpunkt des Oktagon berührt. Wir schreiben $U := U_\varepsilon(P) \cap E_8$ und $U' := U_\varepsilon(P') \cap E_8$. Dann ist $p(U \cup U')$ eine offene Umgebung um P . Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden, welche durch die Kante $\overline{Q_{-1}Q_1}$ definiert wird. Es folgt nun leicht aus den Definitionen, dass die Abbildung

$$p(U \cup U') \rightarrow U_\varepsilon(P)$$

$$p(X) \mapsto \begin{cases} X, & \text{wenn } X \in U \\ f(s_{e^{\pi i/4}}(X)), & \text{wenn } X \in U' \end{cases}$$

wohl-definiert ist, und dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist

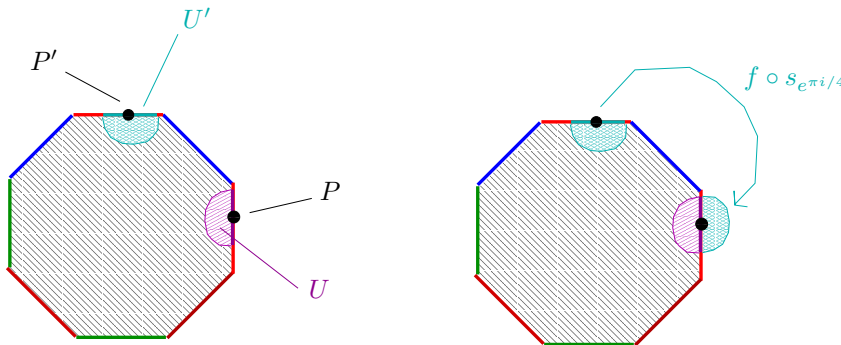


ABBILDUNG 29. Karte für einen Punkt im Inneren einer Kante von E_8 .

dies also eine Karte für E_8 um $p(P)$. Wir bezeichnen dies als Karte vom 2. Typ.

Wir wollen nun noch eine Karte um $p(Q_1) = p(Q_3) = \dots = p(Q_{15})$ finden. Für $k = 1, 3, \dots, 15$ betrachten wir jetzt $U_k := U_{\frac{1}{32}}(Q_k) \cap E_8$. Die Mengen U_1, U_3, \dots, U_{15} sind disjunkt und es folgt aus den Definitionen, dass

$$p(U_1) \cup p(U_3) \cup \dots \cup p(U_{15})$$

eine offene Umgebung von $p(Q_1) = p(Q_3) = \dots = p(Q_{15})$ ist.

Bevor wir die Karte mathematisch sauber aufschreiben, wollen wir uns die Lage veranschaulichen. In Abbildung 30 sehen wir links die Mengen U_1, \dots, U_{15} . Wenn wir diese

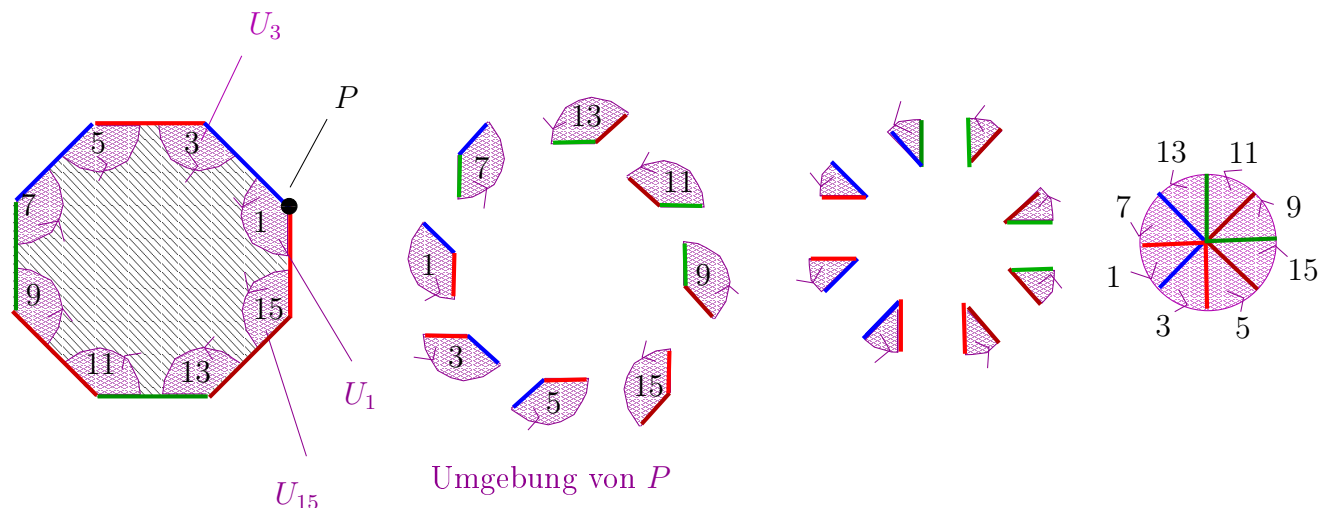


ABBILDUNG 30. Karte für einen Eckpunkt von E_8 .

wie im zweiten Bild anordnen, dann sehen wir die ‘Tortenstücke’ mit den Winkel $\frac{3\pi}{4}$ mit den jeweiligen Identifikation am Rand. Die Abbildung vom zweiten Bild zum dritten Bild ist dadurch gegeben, dass wir jedes ‘Tortenstück’ auf ein Drittel des Winkels zusammenstauchen. Diese acht Tortenstücke, welche jeweils den Winkel $\frac{\pi}{4}$ besitzen, fügen sich dann zusammen zu einer Scheibe in \mathbb{R}^2 .

Wir führen jetzt die gerade beschriebene Idee sauber aus. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: p(U_1) \cup \dots \cup p(U_{15}) &\rightarrow U_{\frac{1}{32}}(0) \\ p(X) &\mapsto r e^{i\left(\frac{1}{3}(\alpha - \underline{(k)}) + \gamma(k)\right)}, \text{ wenn } X = Q_k + r e^{i\alpha} \end{aligned}$$

wobei \underline{k} und $\gamma(k)$ durch folgende Tabelle gegeben sind:

k	1	3	5	7	9	11	13	15
\underline{k}	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\gamma(k)$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$.

Diese Abbildung staucht also jedes U_i auf ein Drittel des Winkels, ‘dreht es zum richtigen Winkel’ und verschiebt es in den Ursprung. Man kann nun leicht überprüfen, dass die Abbildung Φ wohl-definiert ist und das dies in der Tat ein Homöomorphismus ist.

Wir bezeichnen diese Abbildung als Karte vom 3. Typ.

Wir haben bisher nur bewiesen, dass die Fläche von Geschlecht g eine topologische 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Wir müssen nun noch zeigen, dass die obigen Karten einen differenzierbaren Atlas bilden. Dies ist in der Tat der Fall. Wenn wir die Karten von den ersten beiden Typen vergleichen, dann sind diese auf dem Überlappungsgebiet entweder identisch oder sie unterscheiden sich um zwei Spiegelungen. In beiden Fällen ist der Kartenwechsel differenzierbar. Wenn wir die Karte um den ‘Eckpunkt’ mit den anderen Karten vergleichen, dann sieht man, dass sich diese im Überlappungsgebiet wiederum nur um Spiegelungen und um die Abbildung

$$\begin{aligned} \{re^{i\alpha} \mid r \in (0, \frac{1}{32}), \alpha \in (0, \frac{3}{4}\pi)\} &\rightarrow \{re^{i\alpha} \mid r \in (0, \frac{1}{32}), \alpha \in (0, \frac{1}{4}\pi)\} \\ z &\mapsto z^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

unterscheiden. Diese Abbildung ist auf dem angegebenen Definitionsbereich jedoch ein Diffeomorphismus. \square

8.2. Riemannsche Metriken und Kartenwechsel. Es sei $F = E_8 / \sim$ wiederum die Fläche von Geschlecht 2. Wir sind auf der Suche nach einer Riemannschen Metrik auf F , welche ‘überall gleich aussieht’. Eine erste Idee wäre, die Riemannsche Metrik mithilfe der im vorherigen Kapitel beschriebenen Karten zu definieren. Wenn dies klappen würde, dann wäre die Metrik zuallermindest überall im Inneren von E_8 ‘gleich’.

Um diese Idee genauer zu diskutieren, führen wir folgende Definitionen ein. Es sei N eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein N -Atlas für eine Mannigfaltigkeit M ist eine Familie $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von Homöomorphismen von offenen Teilmengen in M zu offenen Teilmengen in N , so dass $\cup_{i \in I} U_i = M$. Für $i, j \in J$ bezeichnen wir dann die Abbildung

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{(\varphi_i|_{U_i \cap U_j})^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j|_{U_i \cap U_j}} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

als den *Kartenwechsel von φ_i zu φ_j* . Wir haben nun folgendes allgemeines Lemma, welches leicht aus den Definitionen folgt.

Lemma 8.2. *Es sei (N, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es sei zudem M eine weitere Mannigfaltigkeit und es sei $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein N -Atlas für M . Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

- (1) *Für alle $i, j \in I$ ist der Kartenwechsel von φ_i zu φ_j eine Isometrie.*

(2) Für $P \in M$ und $v, w \in T_P M$ und alle $i, j \in I$ mit $P \in U_i$ und $P \in U_j$ gilt:

$$g_{\varphi_i(P)}(d_P \varphi_i(v), d_P \varphi_i(w)) = g_{\varphi_j(P)}(d_P \varphi_j(v), d_P \varphi_j(w)).$$

Wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist, dann definieren wir

$$g_P(v, w) := g_{\varphi_i(P)}(d_P \varphi_i(v), d_P \varphi_i(w)),$$

wobei φ_i eine Karte um P ist. Die Zuordnung $P \mapsto g_P$ ist dann wohl-definiert und dies ist eine Riemannsche Metrik auf M .

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

- (1) \mathbb{E} bezeichnet die Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ zusammen mit der euklidischen Metrik.
- (2) \mathbb{S} bezeichnet die Sphäre S^2 zusammen mit der sphärischen Metrik.
- (3) \mathbb{D} bezeichnet die Poincaré-Scheibe D^2 zusammen mit der hyperbolischen Metrik.

Wir sagen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist lokal isometrisch zu \mathbb{E} wenn es zu jedem Punkt $P \in M$ eine offene Umgebung U von P , eine offene Menge $V \subset \mathbb{E}$ sowie eine Isometrie $f: U \rightarrow V$ gibt. Wenn (M, g) lokal isometrisch zu \mathbb{E} ist, dann sagen wir, g ist eine euklidische Metrik auf M , und wir sagen, dass (M, g) eine euklidische Mannigfaltigkeit ist. Ganz analog definieren wir auch sphärische und hyperbolische Metriken sowie sphärische und hyperbolische Mannigfaltigkeiten.

Beispiel. Wir wählen $N = S^2$ zusammen mit der sphärischen Metrik. Wir betrachten den 2-dimensionalen projektiven Raum

$$\mathbb{R}P^2 := S^2 / \sim \text{ wobei } P \sim Q \Leftrightarrow P = \pm Q.$$

Wir bezeichnen mit $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ die Projektionsabbildung. Für einen Vektor $v \in S^2$ betrachten wir $H_v := \{w \in S^2 \mid v \cdot w > 0\}$. Die Einschränkung von p auf H_v ist ein Homöomorphismus und die Abbildungen

$$\{p|_{p(H_v)}^{-1}: p(H_v) \rightarrow H_v\}_{v \in S^2}$$

bilden einen S^2 -Atlas für $\mathbb{R}P^2$, wobei ein Kartenwechsel entweder die Identität oder die Spiegelung am Ursprung ist. In beiden Fällen ist dies eine Isometrie von S^2 . Nach Lemma 8.2 definiert dieser S^2 -Atlas also eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}P^2$, welche lokal isometrisch zu S^2 ist, d.h. $\mathbb{R}P^2$ ist eine sphärische Mannigfaltigkeit.

Beispiel. Die Karten, welche wir für den Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mithilfe der Projektionsabbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ konstruiert hatten, erfüllen ebenfalls die Bedingung von Lemma 8.2. Der Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ besitzt also eine euklidische Metrik.

Beispiel. Wir betrachten nun

$$M := \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] / \sim$$

wobei \sim die Äquivalenzrelation mit $(x, \frac{1}{2}) \sim (x, -\frac{1}{2})$ und $(-\frac{1}{2}, y) \sim (\frac{1}{2}, -y)$ ist. Der topologische Raum M beschreibt die Kleinsche Flasche. Wir wählen nun $N = \mathbb{R}^2$ zusammen mit der euklidischen Metrik. In den Übungen werden wir sehen, dass die Kleinsche Flasche

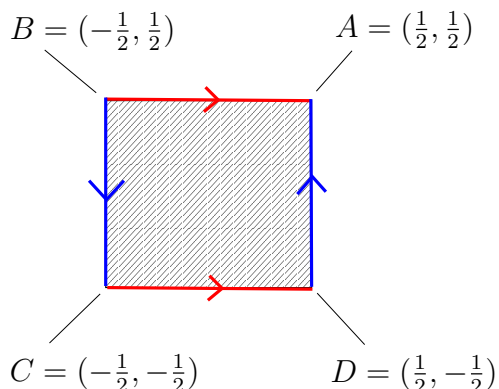


ABBILDUNG 31. Kleinsche Flasche.

einen \mathbb{E} -Atlas wie in Lemma 8.2 besitzt. Insbesondere ist M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und M besitzt eine Riemannsche Metrik, welche lokal isometrisch zu \mathbb{E}^2 ist, d.h. M ist eine euklidische Mannigfaltigkeit.

Wir kehren nun wieder zurück zur Diskussion von Flächen von Geschlecht 2. Wir betrachten nun den Spezialfall, dass $N = \mathbb{R}^2$ und g die übliche euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 ist. Wir können nun überprüfen, ob wir das Lemma auf die Karten im Beweis von Satz 8.1 anwenden können. Wie wir im Beweis schon erwähnt hatten, sind die Kartenwechsel zwischen den Karten vom 1. und 2. Typ entweder gegeben durch die Identität oder durch Spiegelungen. Insbesondere ist der Kartenwechsel also durch Isometrien gegeben. Andererseits ist der Kartenwechsel zwischen Karten von den ersten beiden Typen um dem 3. Typ die Verknüpfung von Spiegelungen und der Abbildung $z \mapsto z^{1/3}$ auf einem Teilgebiet von $\{re^{i\alpha} \mid r \in (0, \frac{1}{32}), \alpha \in (0, \frac{3}{4}\pi)\}$. Wir werden in Übungsblatt 12 zeigen, dass diese Abbildung auf keinem Teilgebiet von \mathbb{C} eine Isometrie ist. Wir sehen also, dass wir die Karten aus dem Beweis von Satz 8.1 nicht verwenden können um eine Riemannsche Metrik auf F einzuführen.

8.3. Reguläre n -ecke und hyperbolische Geometrie. Wenn man die Diskussion der letzten beiden Kapitel genauer betrachtet, dann sieht man, dass der Haken bei der Konstruktion die Tatsache ist, dass bei den Kartenwechseln die Abbildung $z \mapsto z^3$ auftaucht, welche keine Isometrie ist. Die Abbildung $z \mapsto z^3$ wiederum taucht deswegen auf, weil der Innenwinkel in einem euklidischen Oktagon $\frac{3}{4}\pi$ beträgt, und wir den Innenwinkel ‘mit Gewalt’ auf $\frac{1}{4}\pi$ reduzieren müssen.

Wir könnten dieses Problem umschiffen, wenn wir ein Oktagon mit Innenwinkel $\frac{1}{4}\pi$ hätten. Dies ist im euklidischen Fall natürlich nicht möglich. Aber wir werden jetzt sehen, dass dies im hyperbolischen Fall kein Problem ist.

Lemma 8.3. *Es sei $n \geq 3$. Dann gibt es für jedes $\alpha \in (0, \pi - \frac{2\pi}{n})$ ein reguläres n -Eck ⁶ in \mathbb{D}^2 mit Innenwinkel α .*

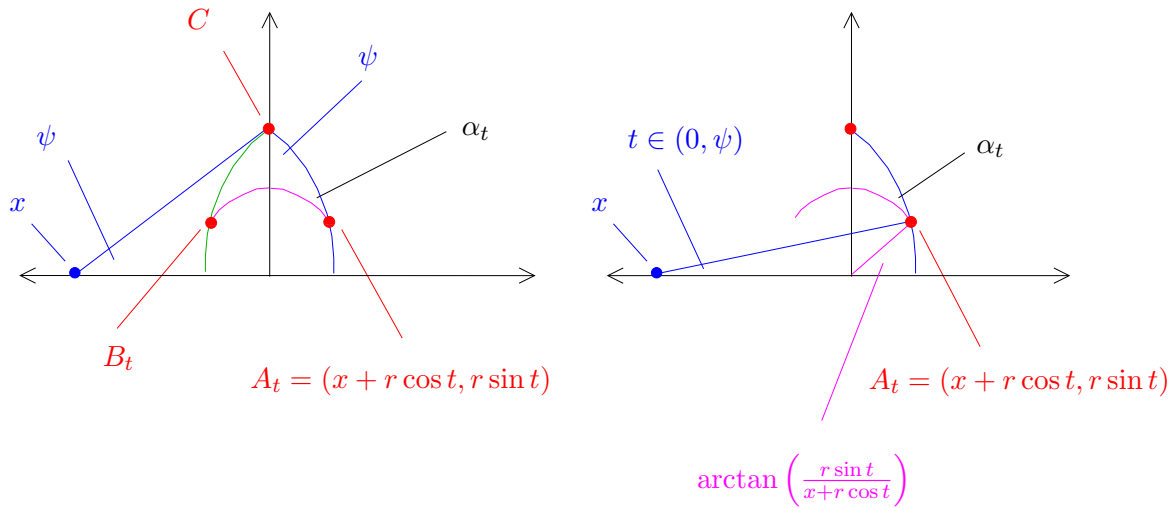
Beweisskizze. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Es seien α, φ Winkel mit $\varphi + 2\alpha < \pi$, dann gibt es ein Dreieck in \mathbb{D} mit Innenwinkeln α, α und φ .

Nachdem \mathbb{D} isometrisch zu \mathbb{H} ist genügt es die Behauptung in \mathbb{H} zu beweisen. Es seien also α, φ Winkel mit $\varphi + 2\alpha < \pi$. Wir setzen $\psi := \frac{1}{2}\varphi$. Wir setzen $C = ci = (0, c)$ für ein $c > 0$ und wir wählen $x < 0$, so dass das Dreieck xOC am Punkt x den Winkel ψ besitzt. Es sei $r = |ci - x|$, d.h. r ist der Abstand zwischen den Eckpunkten C und x des Dreiecks xOC . Wir betrachten jetzt den Kreis um x mit Radius r . Genauer gesagt, für $t \in (0, \psi)$ betrachten wir die Punkte

$$A_t = x + re^{it} = (x + r \cos t, r \sin t).$$

Wir bezeichnen zudem mit B_t das Spiegelbild von A_t an der y -Achse.



Für einen Punkt $P \in \mathbb{C}$ und ein $s \in \mathbb{R}_+$ bezeichnen wir nun mit $K(P, s)$ den euklidischen Kreis um P mit Radius s . Es sei nun α_t der Innenwinkel vom Dreieck A_tCB_t am Punkt A_t . Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \text{Winkel zwischen den Tangentialvektoren der Kreise } K(0, |A_t|) \text{ und } K(x, r) \text{ am Punkt } A_t \\ &= \text{Differenz zwischen den Normalenwinkeln der Kreise } K(0, |A_t|) \text{ und Kreis } K(x, r) \text{ am Punkt } A_t \\ &= \arctan\left(\frac{r \sin t}{x + r \cos t}\right) - t. \end{aligned}$$

⁶Ein n -Eck E in \mathbb{D}^2 heißt regulär, wenn alle Kanten die gleiche Länge besitzen und wenn alle Innenwinkel gleich sind.

Die Funktion $t \mapsto \alpha_t$ ist also insbesondere stetig. Zudem gilt, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_t = \arctan \left(\frac{r \sin 0}{x + r \cos 0} \right) - 0 = 0.$$

Außerdem gilt $\lim_{t \rightarrow \psi} (x + r \cos \psi) = 0$, also ist $\lim_{t \rightarrow \psi} (x + r \cos \psi) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \psi} \alpha_t = \lim_{t \rightarrow \psi} \left(\arctan \left(\frac{r \sin t}{x + r \cos t} \right) - t \right) = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt nun, dass es ein t mit $\alpha_t = \alpha$ gibt. Wir betrachten das Dreieck $A_t C B_t$. Das Dreieck ist symmetrisch um die y -Achse, es folgt also, dass der Winkel bei B_t ebenfalls $\alpha = \alpha_t$ beträgt, und der Winkel am Punkt C ist gerade $2\psi = \varphi$. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Aus der Behauptung folgt insbesondere, dass es ein Dreieck Δ in \mathbb{D}^2 mit Innenwinkel $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{4}$ gibt. Aus Satz wissen wir, dass das Dreieck gleichseitig ist. Mithilfe von Isometrien von \mathbb{D} können wir nun ein Dreieck AOB in \mathbb{D} mit folgenden Eigenschaften finden:

- (1) ein Eckpunkt ist der Ursprung O ,
- (2) der Winkel am Punkt O beträgt $\frac{\pi}{4}$,
- (3) der Winkel am Punkt A beträgt $\frac{\pi}{8}$,
- (4) der Winkel am Punkt B beträgt $\frac{\pi}{8}$,
- (5) A ist das Spiegelbild von B an der x -Achse.

Wir erhalten nun das gewünschte Oktagon, in dem wir Δ um die Winkel $k\frac{\pi}{4}$ für $k = 1, \dots, 7$ rotieren und die acht Dreiecke zusammenfügen.

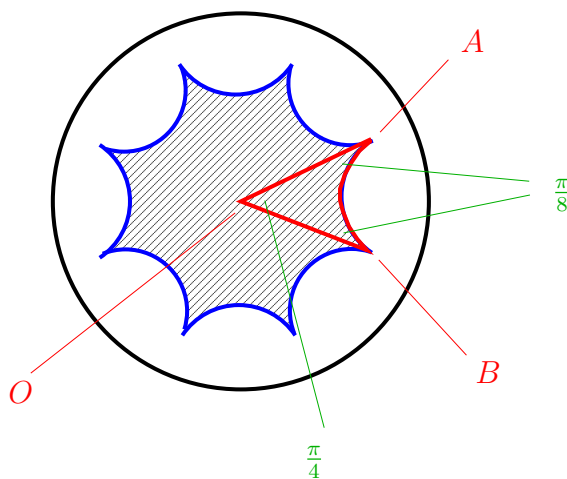


ABBILDUNG 32. Hyperbolisches Oktagon mit Innenwinkel $\frac{\pi}{4}$.

□

8.4. Hyperbolische Metriken auf Flächen. In diesem Kapitel wollen wir Flächen nicht mehr als Quotienten von euklidischen $4g$ -Ecken betrachten, sondern als Quotienten von hyperbolischen $4g$ -Ecken. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir wiederum nur den Fall $g = 2$. Der allgemeine Fall kann ganz analog durchgeführt werden.

Wir betrachten das reguläre hyperbolische Oktagon H_8 in \mathbb{D} , welches wir im Beweis von Lemma 8.3 konstruiert hatten. Die Eckpunkte des Oktagon sind die Punkte $Q_k = re^{2\pi i k/16}$ mit $k = 1, 3, \dots, 15$, wobei r so gewählt ist, dass die Innenwinkel alle gleich $\frac{\pi}{4}$ sind. Für Punkte $A, B \in \mathbb{D}^2$ bezeichnen wir wie mit \overline{AB} die hyperbolische Strecke von A nach B . Zudem bezeichnen wir für $z \in S^1$ mit $s_z: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ die Spiegelung an der hyperbolischen Geraden $\{tz \mid t \in (-1, 1)\}$. (Man beachte, dass in diesem Fall die hyperbolische Spiegelung nichts anderes als die euklidische Spiegelung ist.) Wir bezeichnen mit \sim die Äquivalenzrelation auf H_8 , welche definiert ist durch

$$P \in \overline{Q_{2k-1}Q_{2k+1}} \sim s_{e^{\pi i(k+1)/4}}(P) \in \overline{Q_{2k+3}Q_{2k+5}}$$

für $k = 0, 1, 4, 5$. Es ist offensichtlich, dass der topologische Raum H_8/\sim homöomorph zu

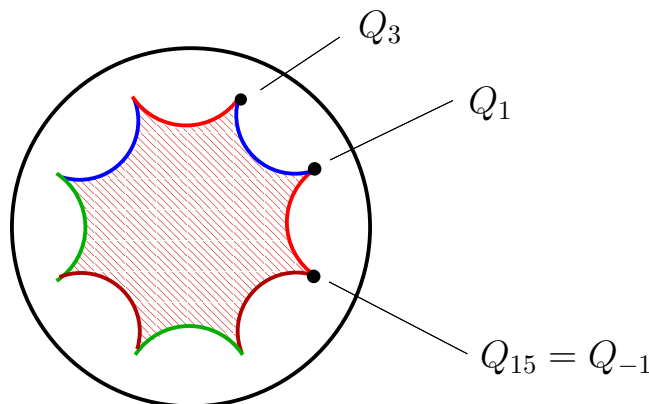


ABBILDUNG 33. Hyperbolisches Oktagon mit Innenwinkel $\frac{\pi}{4}$ mit identifizierten Seiten.

H_8/\sim ist. Der topologische Raum H_8/\sim beschreibt also die Fläche von Geschlecht 2.

Wir betrachten jetzt Karten auf H_8/\sim . Wir bezeichnen mit p die Projektionsabbildung $H_8 \rightarrow H_8/\sim$. Wenn P ein Punkt im Inneren von H_8 ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$U_\varepsilon(P) := \{Q \in D^2 \mid d_{\mathbb{D}}(P, Q) < \varepsilon\}$$

noch ganz im Inneren von H_8 enthalten ist. Es folgt, dass schon die Identität eine Karte um $p(P)$ ist. Wir bezeichnen dies wiederum als Karte vom 1. Typ.

Es sei nun P ein Punkt, welcher im Inneren einer Kante von H_8 liegt. Wir wollen eine Karte um $p(P)$ finden. O.B.d.A. sei $P \in \overline{Q_{-1}Q_1}$. Wir bezeichnen mit $P' = s_{e^{2\pi i/8}}(P)$ den Punkt, welcher mit P identifiziert wird. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(P)$ keinen Eckpunkt des Oktagon berührt. Wir schreiben $U := U_\varepsilon(P) \cap H_8$ und $U' := U_\varepsilon(P') \cap H_8$. Dann ist $p(U \cup U')$ eine offene Umgebung um P . Es sei $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ die Spiegelung an der

hyperbolischen Gerade, welche durch die Kante $\overline{Q_{-1}Q_1}$ definiert wird. Es folgt nun leicht aus den Definitionen, dass die Abbildung

$$p(U \cup U') \rightarrow U_\varepsilon(P)$$

$$p(X) \mapsto \begin{cases} X, & \text{wenn } X \in U, \\ f(s_{e^{\pi i/4}}(X)), & \text{wenn } X \in U' \end{cases}$$

wohl-definiert ist, und dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist

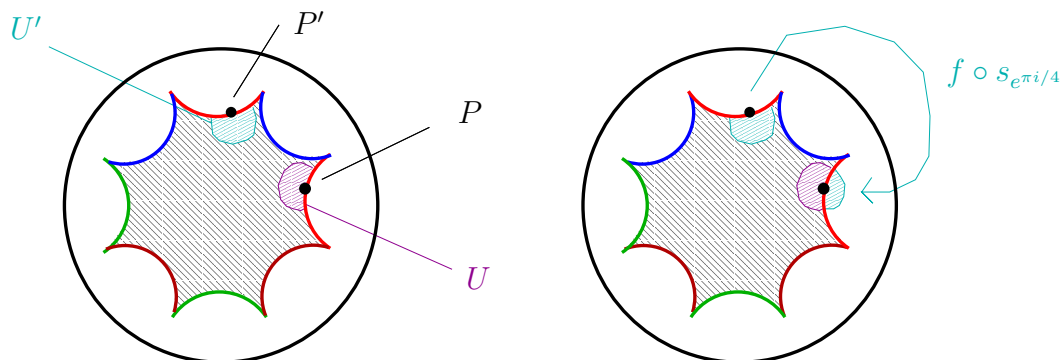


ABBILDUNG 34. Karte für einen Punkt im Inneren einer Kante von H_8 .

dies also eine Karte für H_8 um $p(P)$. Wir bezeichnen dies wiederum als Karte vom 2. Typ.

Wir betrachten nun noch $p(Q_1) = p(Q_3) = \dots = p(Q_{15})$, das Bild der Eckpunkte des Oktagon. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so dass 2ε kleiner als die Kantenlänge vom Oktagon H_8 ist. Für $k = 1, 3, \dots, 15$ betrachten wir dann $U_k = U_\varepsilon(Q_k) \cap H_8$. Die Mengen U_1, U_3, \dots, U_{15} sind disjunkt und es folgt aus den Definitionen, dass

$$p(U_1) \cup p(U_3) \cup \dots \cup p(U_{15})$$

eine offene Umgebung von $p(Q_1) = p(Q_3) = \dots = p(Q_{15})$ ist.

Wir wählen nun $\kappa \in \mathbb{R}_+$, so dass $d_{\mathbb{D}}(0, \kappa) = \varepsilon$. Für $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ bezeichnen wir dann mit

$$T(\varphi, \psi) := \{re^{i\varphi+t} \mid r \in [0, \kappa) \text{ und } t \in [0, \psi]\}$$

das hyperbolische ‘Tortenstück’ um den Ursprung mit hyperbolischer Seitenlänge $\varepsilon = d(0, \kappa e^{i\psi})$, Öffnungswinkel ψ , welches um den Winkel φ zur x -Achse verdreht ist.

In Übungsblatt 12 wird folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 8.4. Für jedes $k \in \{1, 3, \dots, 15\}$ und jedes φ gibt es eine eindeutige orientierungserhaltende Isometrie $f: U_k \rightarrow T(\varphi, \frac{\pi}{4})$.

Für $k \in \{1, 3, \dots, 15\}$ bezeichnen wir nun mit f_k die eindeutige orientierungserhaltende Isometrie $U_k \rightarrow T(\gamma(k), \frac{\pi}{4})$ wobei die $\gamma(k)$ durch folgende Tabelle gegeben sind:

k	1	3	5	7	9	11	13	15
$\gamma(k)$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$

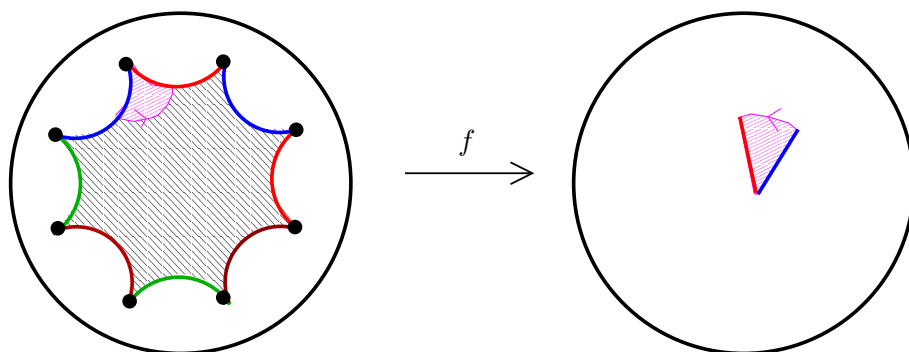


ABBILDUNG 35. Die Isometrie $f: U_k \rightarrow T(\varphi, \frac{\pi}{4})$.

Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: p(U_1) \cup \dots \cup p(U_{15}) &\rightarrow U_{\frac{1}{32}}(0) \\ p(X) &\mapsto f_k(X), \text{ wenn } X \in U_k. \end{aligned}$$

Diese Abbildung verschiebt also jedes U_i in den Ursprung und dreht es zum richtigen Winkel hin. Man kann nun leicht überprüfen, dass die Abbildung Φ wohl-definiert ist, und das dies in der Tat ein Homöomorphismus ist.

Wir bezeichnen diese als Karte vom 3. Typ.

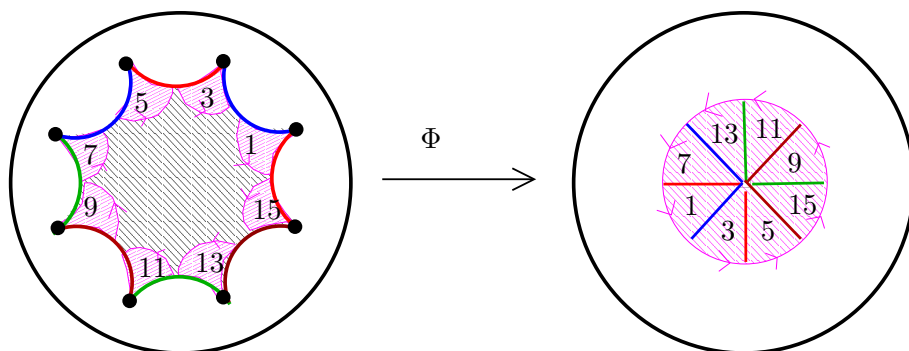


ABBILDUNG 36. Karte für die Projektion der Eckpunkte von H_8 .

Wir haben jetzt also wiederum bewiesen, dass H_8 / \sim eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit Mannigfaltigkeit ist. Dieses Mal jedoch haben wir nur mit Isometrien von \mathbb{D}^2 gearbeitet. Es folgt nun aus den Definitionen, dass alle Kartenwechsel gegeben sind durch Isometrien von \mathbb{D}^2 .

Es folgt daher aus Lemma 8.2, angewandt auf $(N, g) = (\mathbb{D}^2, \text{hyperbolische Metrik})$, dass H_8 / \sim eine Metrik besitzt, welche lokal isometrisch zu \mathbb{D}^2 ist.

8.5. Eigenschaften von hyperbolischen Metriken auf Flächen.

Satz 8.5. *Die Fläche F von Geschlecht $g \geq 2$ besitzt eine Riemannsche Metrik mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit F ist hyperbolisch.*
- (2) *Der Flächeninhalt von F beträgt $(4g - 4)\pi$.*
- (3) *Für jedes Dreieck in F gilt*

$$\text{Summe der Innenwinkel} = \pi - \text{Flächeninhalt des Dreiecks.}$$

Beweis. Die erste Aussage hatten wir für $g = 2$ gerade in diesem Kapitel bewiesen. Den allgemeinen Fall zeigt man ganz analog, in dem man ein reguläres $4g$ -gon mit Innenwinkeln $\frac{2\pi}{4g}$ konstruiert und dann die Seiten geeignet miteinander verklebt.

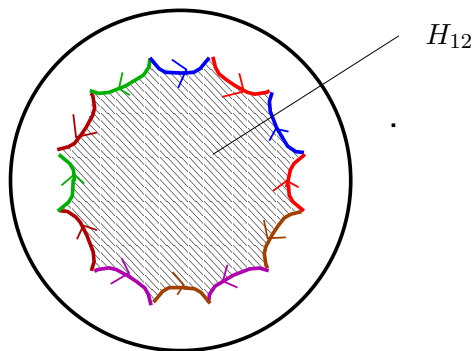


ABBILDUNG 37. Das 12-gon ergibt mit der angegebenen Identifikation der Seiten eine Fläche von Geschlecht 3.

Anders ausgedrückt, wir erhalten die Fläche von Geschlecht g , indem wir $4g$ Dreiecke in \mathbb{D}^2 mit Innenwinkeln $\frac{\pi}{4g}$, $\frac{\pi}{4g}$ sowie $\frac{2\pi}{4g}$ an den Seiten verklebt haben. Es folgt also, dass

$$\text{Fläche von } (F, g) = 4g \cdot \left(\pi - \left(\frac{\pi}{4g} + \frac{\pi}{4g} + \frac{2\pi}{4g} \right) \right) = (4g - 4)\pi.$$

Nachdem die Riemannsche Mannigfaltigkeit F lokal isometrisch zu \mathbb{D} ist, gilt die Gleichheit

$$\text{Summe der Innenwinkel} = \pi - \text{Fläche des Dreiecks}$$

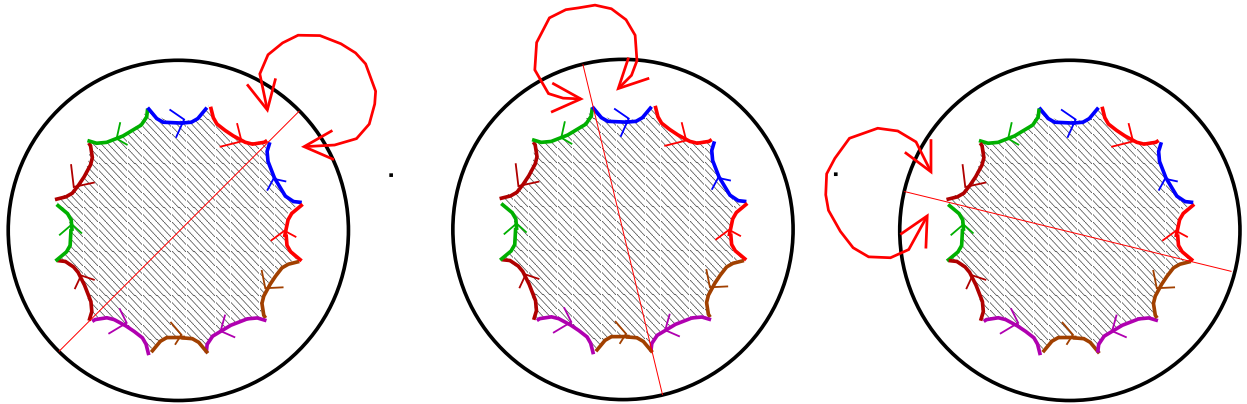
für genügend kleine Dreiecke, d.h. für Dreiecke, welche sich in einer offenen Menge von F befinden, welche isometrisch zu einer offenen Menge von \mathbb{D}^2 ist. Die allgemeine Aussage folgt nun dadurch, dass wir ein gegebenes Dreieck in genügend kleine Dreiecke unterteilen. \square

Für die Sphäre und den Torus hatten wir eine deutlich stärkere Symmetrie-Aussage: die Isometriegruppe operiert transitiv auf der Fläche, d.h. zu je zwei Punkten gibt es eine Isometrie der Fläche, welche den einen Punkt auf den anderen schickt. Es stellt sich nun

die Frage, ob die Isometriengruppe auch im Falle von hyperbolischen Flächen transitiv operiert.

Wir wollen nun also der Frage nachgehen, welche Symmetrien besitzt die hyperbolische Metrik, welche wir auf $F = H_{4g}/\sim$ konstruiert hatten. Wir betrachten dazu zuerst Spiegelungen entlang Geraden durch den Ursprung. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

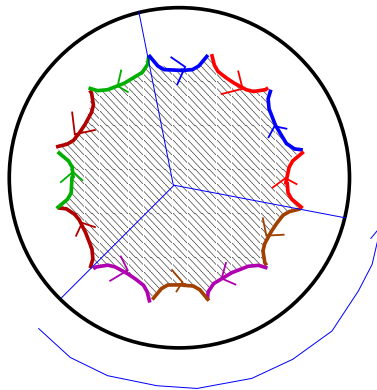
Spiegelung an Geraden durch gegenüberliegende Eckpunkte von H_{12}



$$\begin{aligned} \Phi_k: F = H_{4g}/\sim &\rightarrow F = H_{4g}/\sim \\ [P] &\mapsto \left[s_{e^{\frac{\pi i(4k+3)}{8g}}}(P) \right] \end{aligned}$$

eine wohl-definierte Isometrie von $F = H_{4g}/\sim$ ist. Wir können das $4g$ -gon zudem auch drehen, und man sieht, dass für jedes $l \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$



$$\begin{aligned} \Psi_l: F = H_{4g}/\sim &\rightarrow F = H_{4g}/\sim \\ [P] &\mapsto \left[e^{\frac{2\pi il}{g}} P \right] \end{aligned}$$

eine wohl-definierte Isometrie von $F = H_{4g}/\sim$ ist. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, dass jede beliebige Verknüpfung von den Isometrien Φ_k und Ψ_l wiederum entweder eine Spiegelung oder eine Drehung ist, d.h.

$$\{\Phi_{k_1} \circ \Psi_{l_1} \circ \cdots \circ \Phi_{k_m} \circ \Psi_{l_m} \mid k_i, l_i \in \mathbb{Z}\} = \{\Phi_0, \dots, \Phi_{g-1}\} \cup \{\Psi_0, \dots, \Psi_{g-1}\}.$$

Wir sehen also, dass die Isometriegruppe von $F = H_{4g}/\sim$ eine Untergruppe mit $g + g = 2g$ Elementen enthält.

Es stellt sich nun raus, dass es in der Tat nicht deutlich mehr Isometrien von hyperbolischen Flächen gibt. Genauer gesagt, es wird in [BP, Theorem B.4.23] folgender Satz bewiesen:

Satz 8.6. *Es sei F eine Fläche von Geschlecht $g \geq 2$ zusammen mit einer hyperbolischen Metrik. Dann besitzt die Isometriegruppe höchstens $168(g-1) + 1$ Elemente.*

Es ist offensichtlich, dass wenn die Isometriegruppe von F transitiv auf F operieren würde, dann müsste die Isometriegruppe überabzählbar sein. Wir erhalten also folgendes Korollar, welches eine negative Antwort zu unser oben gestellten Frage liefert.

Korollar 8.7. *Es sei F eine Fläche von Geschlecht $g \geq 2$ zusammen mit einer hyperbolischen Metrik. Dann operiert die Isometriegruppe nicht transitiv auf F .*

Es stellt sich auch die Frage wie eindeutig die Metrik aus Satz 8.5 bestimmt ist. Anders gefragt, können wir unsere Konstruktion der Riemannschen Metrik abwandeln, um andere hyperbolische Metriken zu finden?

In unserer Konstruktion hatten wir in einem regulären $4g$ -Eck mit Innenwinkel $\frac{2\pi}{4g}$ jeweils immer zwei Seiten mithilfe einer Isometrie verklebt und wir hatten eine Metrik erhalten, welche lokal isometrisch zu \mathbb{D} ist, weil die Summe der Innenwinkel gerade 2π beträgt. Anders ausgedrückt, die gleiche Konstruktion liefert uns eine hyperbolische Metrik für jedes $4g$ -Eck mit den Kantenlängen k_1, \dots, k_{4g} und den Innenwinkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_{4g}$, so dass

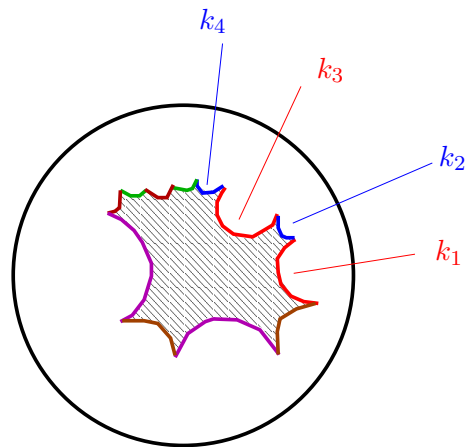
$$k_1 = k_3, k_2 = k_4, \dots, k_{4g-3} = k_{4g-1}, k_{4g-2} = k_{4g}$$

sowie mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_{4g} = 2\pi$.

Wieviele solche $4g$ -Ecke gibt es? Wir wollen diese Frage erstmal naiv betrachten. Für die Seitenlängen haben wir Parameter $k_1, k_3, \dots, k_{4g-1}$ und für die Innenwinkel haben wir die Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_{4g}$. Andererseits haben wir die Bedingung, dass $\alpha_1 + \dots + \alpha_{4g} = 2\pi$. Zudem gibt es noch eine weitere Bedingung, nämlich der Polygonzug mit den Kantenlängen k_1, k_2, \dots, k_{4g} und den Winkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_{4g-1}$ muss geschlossen sein. Wenn der Polygonzug geschlossen sein soll, dann ist der letzte Winkel und die letzte Kantenlänge durch die anderen Winkel und Kantenlängen festgelegt. Wir erhalten also zwei Bedingungen.

Zusammengefasst haben wir $2g + 4g = 6g$ Parameter mit $1 + 2 = 3$ zu erfüllenden Bedingungen. Etwas naiv betrachten erhalten wir also, dass die Menge

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isometrieklassen von geschlossenen } 4g\text{-Ecken} \\ \text{mit Kantenlängen } k_1 = k_3, k_2 = k_4, \dots, k_{4g-2} = k_{4g} \\ \text{und Summe der Innenwinkel ist gleich } 2\pi \end{array} \right\}$$



eine ‘ $6g - 3$ -dimensionale’ Menge ⁷ ist. Manche dieser $4g$ -Ecke ergeben möglicherweise isometrische Flächen und vielleicht gibt es ja auch noch andere Möglichkeiten, hyperbolische Metriken zu studieren.

Nichtsdestotrotz führt diese naive Diskussion erstaunlicherweise fast zum richtigen Ergebnis. Genauer gesagt gilt folgender Satz, welcher in [BP, Kapitel B.4] bewiesen wird.

Satz 8.8. *Die Menge der hyperbolischen Metriken auf der Fläche von Geschlecht g besitzt die Struktur einer Mannigfaltigkeit der Dimension $6g - 6$.*

8.6. Der Satz von Gauss-Bonnet. Wir hatten in Kapitel 8.5 nun viele hyperbolische Metriken auf Flächen eingeführt. Ein Argument wie im Beweis von Satz 8.5 besagt, dass für jede dieser Metriken die Fläche wiederum $(4g - 4)\pi$ beträgt. Wir werden im Folgenden den Satz von Gauss-Bonnet formulieren, und wir werden sehen, dass dieser impliziert, dass die obige Aussage über Flächeninhalte für alle hyperbolische Metriken auf Flächen gilt.

Um den Satz von Gauss-Bonnet zu formulieren benötigen, wir den Begriff der Krümmung einer Riemannschen Fläche an einem Punkt. Wir können die Krümmung nicht für alle Riemannsche Flächen einführen, aber wir wollen zumindest einen wichtigen Spezialfall betrachten.

Es sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und es sei g die Riemannsche Metrik auf F , welche durch das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 gegeben ist. Genauer gesagt gilt für $v, w \in T_P F \subset \mathbb{R}^3$, dass $g(v, w) = v \cdot w$. Wir wollen nun die Krümmung von (F, g) an einem Punkt $P \in F$ definieren. Wir wählen dazu eine orthogonale Matrix $A \in O(3)$, so dass

$$A \cdot T_P F = \mathbb{R}^2 \times 0 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

In dem wir F durch AF ersetzen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $T_P F = \mathbb{R}^2 \times 0$. Wir schreiben $P = (x_P, y_P, z_P)$. Es folgt beispielsweise aus dem Satz über implizite Funktionen, dass F lokal um P ein Graph ist, d.h. es gibt eine offene Umgebung U von (x_P, y_P) und

⁷Die Aussage ist natürlich denkbar vage, nachdem wir keine Topologie auf der Menge definiert haben.

eine C^∞ -Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$$

eine Teilmenge von F ist, welche zudem eine offene Umgebung von P ist. Wir definieren dann die Krümmung von (F, g) am Punkt P als

$$k(P) := \text{Determinante der Hesse-Matrix von } f \text{ am Punkt } (x_P, y_P).$$

Es ist relativ leicht zu sehen, dass diese Definition nicht von der Wahl der orthogonalen Matrix A abhängt. Mit etwas mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass die Krümmung k sich durch lokale Isometrien von (F, g) nicht ändert.

Wir betrachten nun mehrere Beispiele:

- (1) Wenn F eine Teilmenge einer Hyperebene ist, dann ist AF parallel zur xy -Ebene, d.h. die Funktion f ist konstant. Wir sehen also, dass $k(P) = 0$ für alle $P \in F$.
- (2) Es sei nun $F = S^2$ und $P = (0, 0, 1)$ der Nordpol. Dann können wir $A = \text{id}$ wählen und es ist $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Es ist nun leicht nachzurechnen, dass $k(P) = 1$. Wenn $P \neq (0, 0, 1)$, dann können wir durch Rotation um eine Orthogonale Matrix den Punkt P auf den Nordpol $(0, 0, 1)$ schicken. Nachdem orthogonale Matrizen die Sphäre erhalten, sehen wir wiederum, dass $k(P) = 1$.
- (3) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$F = S^1 \times I \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

ein Zylinder. Dann ist $k(P) = 0$ für alle Punkte P auf F .

- (4) Wir betrachten die Sattelfläche F in Abbildung 38. Es ist ziemlich offensichtlich,

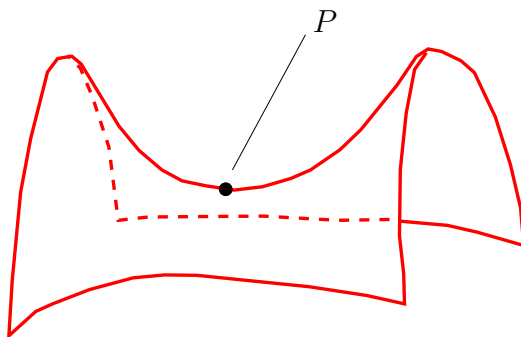


ABBILDUNG 38. Eine Sattelfläche.

dass am Punkt P die Hesse-Matrix der beschreibenden Funktion in etwa von der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ mit } a > 0 \text{ und } b < 0$$

ist. Die Krümmung am Punkt P ist also negativ. In der Tat ist die Krümmung an allen Punkten negativ.

Man kann nun allgemeiner für eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit (F, g) die Krümmung $k(P)$ an einem Punkt einführen. Die Krümmung hängt dabei nur vom lokalen Isometrietyp von (F, g) um den Punkt P ab. Wenn $F \subset \mathbb{R}^3$ und wenn g durch das Skalarprodukt definiert ist, dann stimmt die allgemeine Krümmung mit der obigen Definition überein.

Es folgt also aus der obigen Diskussion, dass die Krümmung an jedem Punkt von Σ gleich 1 ist, und dass die Krümmung an jedem Punkt von \mathbb{E} gleich 0 ist. Zudem kann man zeigen, dass die Krümmung an jedem Punkt von \mathbb{D} gleich -1 ist. Nachdem die Krümmung eine lokale Isometrieinvariante ist folgt nun, dass die Krümmung einer sphärischen Fläche an jedem Punkt wiederum 1 beträgt. Ganz analog gelten die Aussagen für euklidische und hyperbolische Flächen.

Wir können nun den Satz von Gauss-Bonnet formulieren.

Satz 8.9. (Gauss-Bonnet) *Es sei F eine Fläche von Geschlecht g zusammen mit einer Riemannschen Metrik, dann gilt*

$$\int_F k = (4 - 4g)\pi.$$

Nachdem sphärische Flächen konstante Krümmung 1 besitzen folgt sofort aus dem Satz, dass eine sphärische Fläche Geschlecht Null besitzt. Ganz analog folgt, dass eine euklidische Fläche das Geschlecht Eins besitzt, und es folgt, dass jede hyperbolische Fläche ein Geschlecht $g \geq 2$ besitzt.

Zudem erhalten wir auch noch folgendes Korollar, welches gerade der eingangs gemachten Behauptung über den Flächeninhalt von hyperbolische Flächen entspricht.

Korollar 8.10. *Es sei F eine hyperbolische Fläche, dann gilt*

$$\text{Flächeninhalt von } F = (4g - 4)\pi.$$

9. PARKETTIERUNGEN

Erinnern wir uns noch einmal an die Konstruktion der Karten für das hyperbolische Oktagon H_8 mit den Eckpunkten $Q_k = re^{2\pi k/16}$ mit $k = 1, 3, \dots, 15$. Für $k = 0, \dots, 7$ bezeichnen wir mit K_k die Kante $K_k = \overline{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$ und bezeichnen mit G_k die durch K_k definierte Gerade. Zur Erinnerung: Um die Fläche von Geschlecht 2 zu erhalten, identifizieren wir K_0 mit K_2 mithilfe der Abbildung

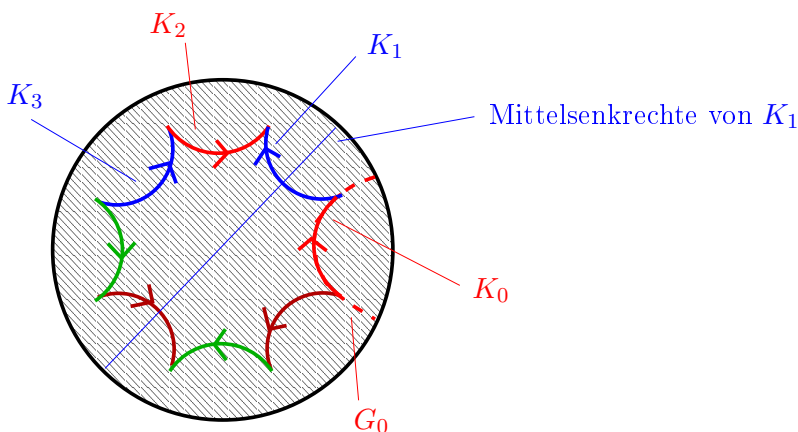
$$A_1 := \text{Spiegelung an der Mittelsenkrechten von } K_1 \circ \text{Spiegelung an } G_0$$

zudem identifizieren wir K_1 mit K_3 mithilfe der Abbildung

$$B_1 := \text{Spiegelung an der Mittelsenkrechten von } K_2 \circ \text{Spiegelung an } G_1$$

sowie K_4 mit K_6 mithilfe der Abbildung

$$A_2 := \text{Spiegelung an der Mittelsenkrechten von } K_5 \circ \text{Spiegelung an } G_4$$

ABBILDUNG 39. Die Isometrie A_1 .

und K_5 mit K_7 mithilfe der Abbildung

$$B_2 := \text{Spiegelung an der Mittelsenkrechten von } K_6 \circ \text{Spiegelung an } G_5.$$

Wir bezeichnen jetzt mit G die Untergruppe von $\text{Isom}(\mathbb{D})$, welche von den Isometrien A_1, B_1, A_2, B_2 erzeugt wird, d.h.

$$G := \{f_1 \circ \dots \circ f_k \mid f_1, \dots, f_k \in \{A_1^{\pm 1}, B_1^{\pm 1}, A_2^{\pm 1}, B_2^{\pm 1}\}\}.$$

Dann gilt folgender Satz, welcher in [B, Kapitel 6.5] bewiesen wird.

Satz 9.1. *Die Gruppe G operiert frei und transitiv auf \mathbb{D} , zudem induziert die Inklusionsabbildung $H_8 \rightarrow \mathbb{D}$ einen Homöomorphismus*

$$H_8 / \sim \rightarrow \mathbb{D} / G.$$

Wir erhalten dann folgendes Korollar.

Korollar 9.2. *Es gilt*

$$\bigcup_{g \in G} gH_8 = \mathbb{D}$$

und für alle $g \neq h \in G$ gilt, dass entweder $gH_8 \cap hH_8 = \emptyset$, oder $gH_8 \cap hH_8$ ist ein Eckpunkt von gH_8 , oder $gH_8 \cap hH_8$ ist eine Kante von gH_8 .

Das Korollar besagt also, dass wir \mathbb{D} als Vereinigung von Mengen schreiben können, welche alle isometrisch zu H_8 sind, und welche sich nur in Kanten oder Eckpunkten überschneiden. Eine solche Zerlegung von \mathbb{D} nennt man eine *Parkettierung von \mathbb{D}* . Parkettierungen von \mathbb{D} spielen beispielsweise eine große Rolle in den Werken von Escher.

Beweis. Aus Satz 9.1 folgt, dass es für jedes $P \in \mathbb{D}$ ein $g \in G$ mit $gP \in H_8$ gibt. Anders ausgedrückt, es ist $P \in g^{-1}H_8$. Es folgt also, dass

$$\bigcup_{g \in G} gH_8 = \mathbb{D}.$$

Andererseits, wenn $X \in gH_8 \cap hH_8$ wobei $g \neq h$, dann ist $X = gP = hQ$ mit $P, Q \in H_8$. Nachdem $H_8 / \sim \rightarrow \mathbb{D}/G$ eine Bijektion ist folgt, dass $P \sim Q$, d.h. P und Q liegen auf einem Eckpunkt oder einer Kante von H_8 . Dann liegt natürlich $X = gP$ auf einem Eckpunkt oder einer Kante von gH_8 . \square

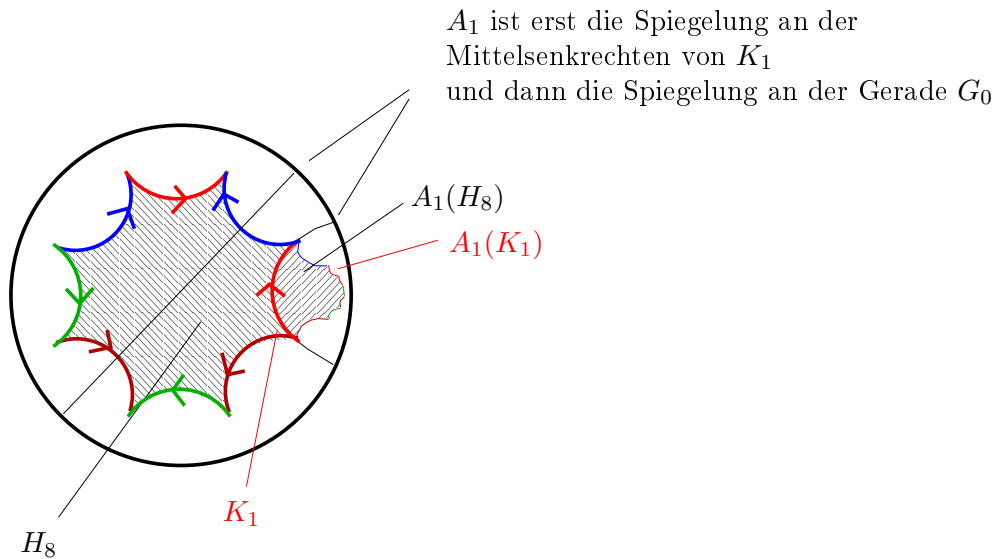


ABBILDUNG 40. Das Bild von H_8 unter der Isometrie A_1 .

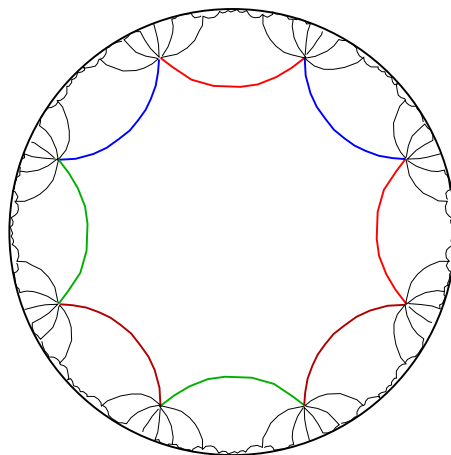


ABBILDUNG 41. Parkettierung von \mathbb{D} mithilfe von hyperbolischen Achtecken.

10. ALLGEMEINE FLÄCHEN

Bisher haben wir zumeist geschlossene orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten betrachtet. In diesem Kapitel wollen wir auch noch den Fall von nicht-orientierbaren 2-Mannigfaltigkeiten und von 2-Mannigfaltigkeiten mit Rand behandeln. Mit ‘Fläche’ bezeichnen wir ab sofort jede zusammenhängende, kompakte 2-Mannigfaltigkeit, möglicherweise mit Rand.

10.1. Nicht-orientierbare geschlossene Flächen. Wir haben nun also gesehen, dass jede geschlossene orientierbare 2-Mannigfaltigkeit eine Metrik besitzt, welche entweder sphärisch, euklidisch oder hyperbolisch ist. Wir wenden uns nun den nicht-orientierbaren geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten zu.

Für die topologische Klassifizierung von geschlossenen nicht orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten benötigen wir noch eine Definition: Es seien F, G zwei 2-Mannigfaltigkeiten und es seien $C \subset F$ und $D \subset G$ zwei offene Scheiben. Wir verkleben dann $F \setminus C$ und $G \setminus D$ entlang den Randkreisen, welche ∂C und ∂D entsprechen. Wir bezeichnen dann den neuen topologischen Raum $F \# G$ als die *zusammenhängende Summe von F und G* . Beispielsweise ist die zusammenhängende Summe von zwei Tori eine Fläche von Geschlecht 2. Für eine

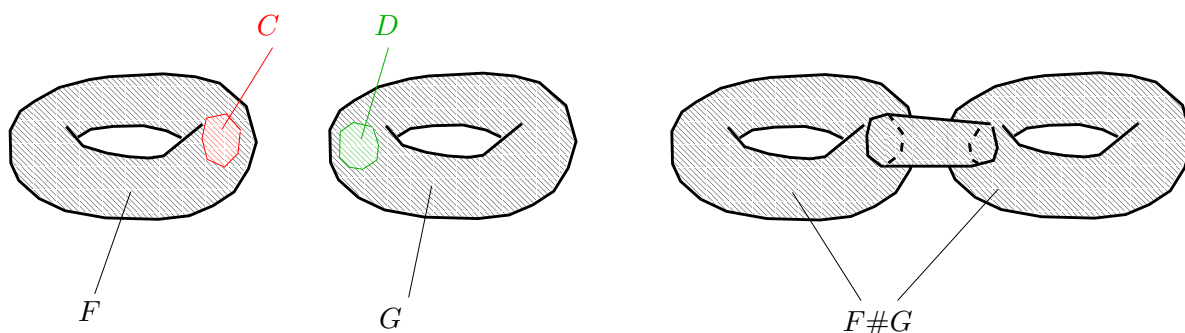


ABBILDUNG 42. Die zusammenhängende Summe von zwei Tori ist eine Fläche von Geschlecht 2.

Fläche F bezeichnen wir im Folgenden zudem mit kF die zusammenhängende Summe von k Kopien von F . Beispielsweise, wenn T der Torus ist, dann ist kT die Fläche von Geschlecht k .

Der folgende Satz, welcher beispielsweise in [M] bewiesen wird, gibt uns nun die topologische Klassifikation von geschlossenen nicht orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten.

Satz 10.1. *Jede geschlossene nicht orientierbare 2-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu $k\mathbb{R}P^2$ für ein $k \geq 0$. Zudem ist $k\mathbb{R}P^2$ homöomorph zu $l\mathbb{R}P^2$ genau dann, wenn $k = l$.*

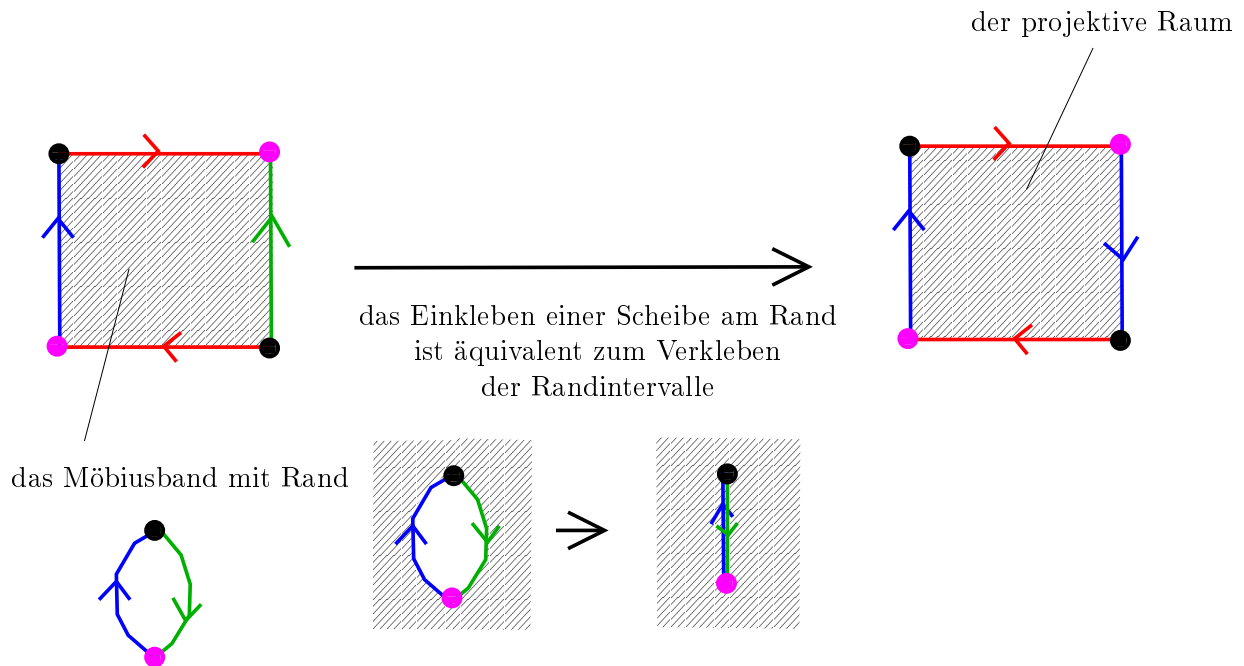
Wenn F eine geschlossene nicht orientierbare 2-Mannigfaltigkeit ist, welche homöomorph zu $k\mathbb{R}P^2$ ist, dann definieren wir

$$\text{Geschlecht von } F = k - 1.$$

Es folgt aus dem Satz, dass das Geschlecht wohl-definiert ist.

Wir können den Satz in dieser Vorlesung nicht beweisen, aber wir wollen zumindest nachvollziehen, warum die Aussage für die Kleinsche Flasche richtig ist. Das Argument teilt sich in zwei Teile auf:

- (1) Wenn wir aus dem projektiven Raum eine Scheibe entfernen, dann erhalten wir ein Möbiusband.
 In Abbildung 2 skizzieren wir den Beweis der äquivalenten Aussage, dass wenn wir an den Rand des Möbiusbands eine Scheibe ankleben, dann erhalten wir den projektiven Raum.
- (2) Die Kleinsche Flasche kann entlang einer geschlossenen Kurve zerlegt werden in zwei Möbiusbänder. Der Beweis dieser Aussage wird in Abbildung 2 skizziert.

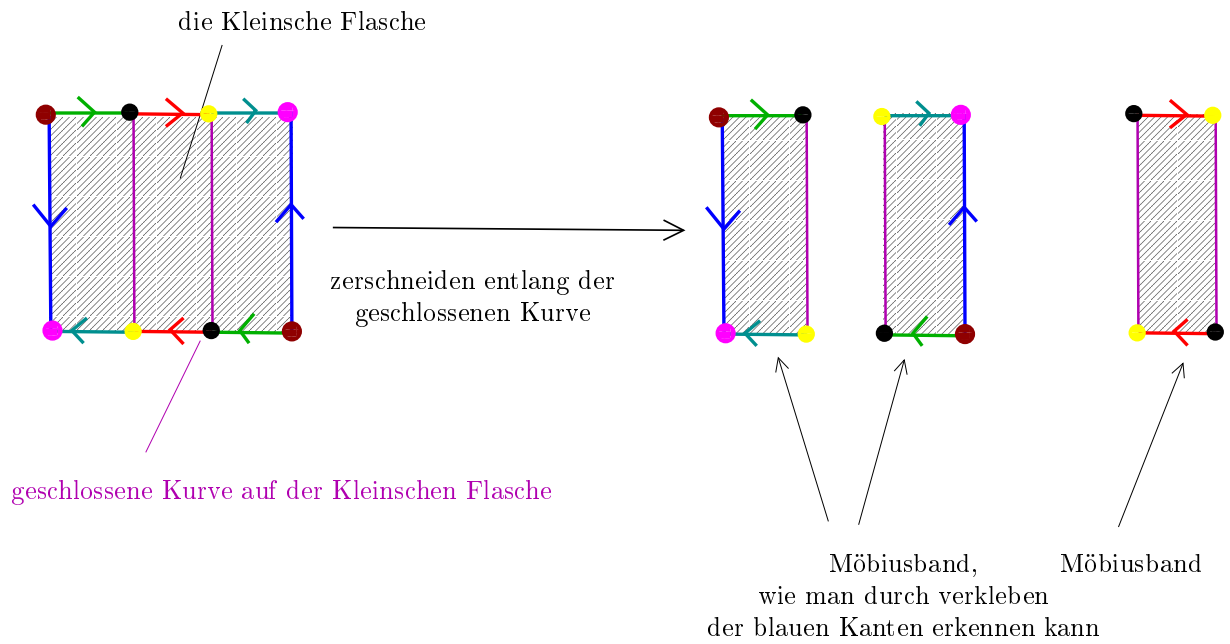


Wir hatten in Kapitel 8.2 schon gesehen, dass der $\mathbb{R}P^2$ eine sphärische Metrik besitzt, und dass die Kleinsche Flasche eine euklidische Metrik besitzt. Der folgende Satz besagt, zusammen mit Satz 10.1, dass alle anderen nicht-orientierbaren geschlossenen Flächen eine hyperbolische Metrik besitzen.

Satz 10.2. *Es sei F die nicht-orientierbare geschlossene Fläche, welche die zusammenhängende Summe von $k \geq 3$ projektiven Räumen ist. Dann besitzt F eine hyperbolische Metrik.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für den Fall $k = 3$. Die anderen Fälle werden fast genauso bewiesen.

Wir wählen ein Hexagon H_6 in \mathbb{D} , sodass die Summe der Innenwinkel 2π beträgt, und so dass die Kantenlängen k_1, \dots, k_6 die Eigenschaft haben, dass $k_1 = k_2$, $k_3 = k_4$ und $k_5 = k_6$.



Wir identifizieren dann die Kanten mithilfe einer Isometrie, so dass die Orientierung erhalten bleibt. Dies wird in Abbildung 43 auf der linken Seite skizziert. Das Argument von

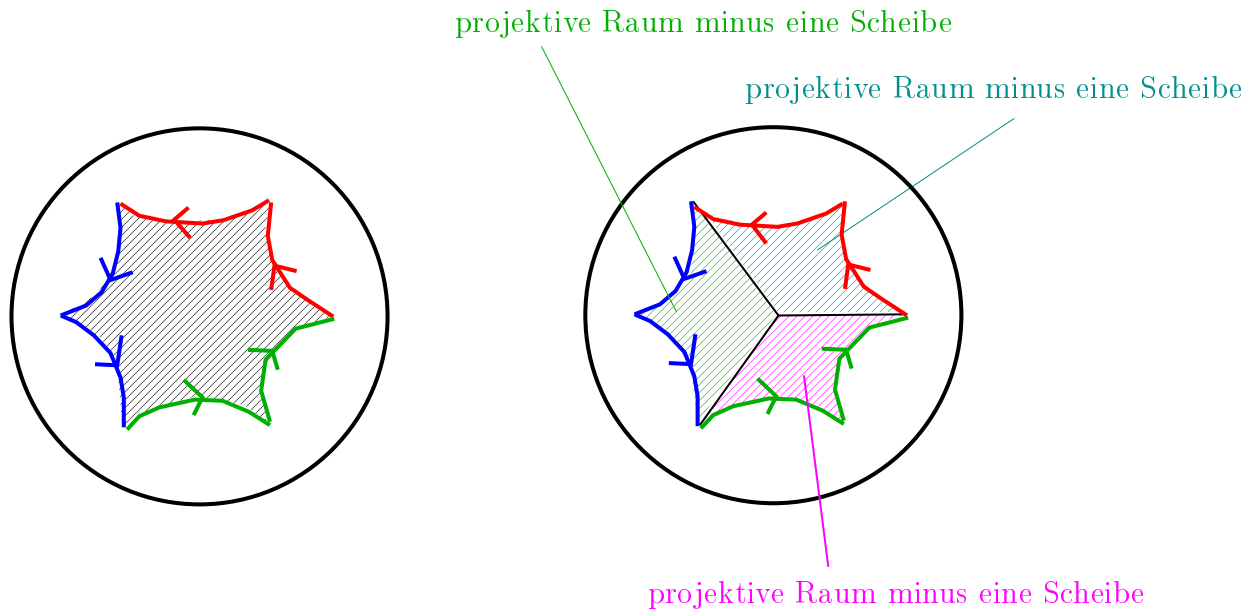


ABBILDUNG 43. Die zusammenhängenden Summe von drei projektiven Räumen.

Kapitel 8.4 kann nun wortwörtlich übernommen werden, um zu zeigen, dass der Quotient H_6/\sim wiederum eine hyperbolische Metrik besitzt.

Der topologische Raum H_6/\sim kann zudem als zusammenhängende Summe von drei projektiven Räumen beschrieben werden. Dies ist auf der rechten Seite von Abbildung 43 skizziert. Wir unterteilen dabei H_6 in drei Teile, so dass jedes Teilgebiet zwei Kanten enthält, welche identifiziert werden. Diese sind dann gerade der projektive Raum minus einer Scheibe. \square

10.2. Flächen mit Rand. Wir haben jetzt also gezeigt, dass jede geschlossene Fläche eine Metrik besitzt, welche entweder sphärisch, euklidisch oder hyperbolisch ist. Wir wollen nun Metriken auf Flächen mit Rand studieren. Die folgenden beiden Sätze geben die topologische Klassifikation von kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Satz 10.3. *Für jede Fläche F mit k Randkomponenten gibt es eine geschlossene Fläche S und disjunkte offene Scheiben D_1, \dots, D_k auf S , so dass F zu $S \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_k)$ diffeomorph ist.*

Wir hatten uns beispielsweise schon in Kapitel 10.1 davon überzeugt, dass wir das Möbiusband erhalten, indem wir aus dem $\mathbb{R}P^2$ eine offene Scheibe entnehmen.

Beweis. Es sei F eine Fläche, also eine kompakte zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit F , mit k Randkomponenten. Nachdem F eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, ist der Rand eine geschlossene 1-Mannigfaltigkeit, d.h. der Rand von F besteht aus k Kopien von S^1 . Wir kleben dann k Scheiben an die Randkomponenten und erhalten eine geschlossene Fläche S . Wir erhalten dann F aus S , indem wir diese offenen Scheiben wieder entfernen. \square

Es sei F eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit F , und es sei S eine geschlossene Fläche S , so dass F diffeomorph ist zu $S \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_k)$. Wir definieren das Geschlecht von F als das Geschlecht von S . Der folgende Satz gibt nun die topologische Klassifikation von Flächen mit oder ohne Rand.

Satz 10.4. *Zwei Flächen F und G sind genau dann homöomorph, wenn folgende drei Bedingungen gelten:*

- (1) *entweder sind beide Flächen orientierbar, oder beide Flächen sind nicht orientierbar,*
- (2) *F und G besitzen das gleiche Geschlecht,*
- (3) *F und G besitzen die gleiche Zahl von Randkomponenten.*

Beweis. Es seien also F und G zwei Flächen F und G , für welche die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind. Wir bezeichnen mit k die Zahl der Randkomponenten. Wir bezeichnen zudem mit F' und G' die Flächen, welche wir erhalten, in dem wir k Scheiben an F und G ankleben. Dann folgt aus (1) und (2), und aus der Klassifikation von geschlossenen Flächen, dass F' und G' homöomorph sind. Dann sind aber auch F und G homöomorph. \square

Nachdem unklar ist, was wir mit Metriken auf dem Rand meinen, betrachten wir nun Metriken, welche nur im Inneren einer Mannigfaltigkeit definiert sind. Zudem wollen wir vollständige Metriken betrachten.

Beispiel. Es sei $F = D^2$ die geschlossene 2-Scheibe. Dann ist das Innere von F die offene 2-Scheibe. Die Einschränkung der euklidischen Metrik auf das Innere von F ist dann keine vollständige Metrik. Wir hatten allerdings schon gesehen, dass das Innere einer 2-Scheibe eine vollständige hyperbolische Metrik besitzt. Zudem ist das Innere einer 2-Scheibe diffeomorph zu \mathbb{R}^2 , wir können also mithilfe des Diffeomorphismus die vollständige euklidische Metrik von \mathbb{R}^2 auf das Innere der 2-Scheibe zurückziehen. Wir sehen also, dass das Innere der 2-Scheibe sowohl eine vollständige hyperbolisch als auch eine vollständige euklidische Metrik besitzt.

Für die Formulierung des nächsten Satzes ist es hilfreich, noch folgende Definition einzuführen. Für eine orientierbare Fläche F bezeichnen wir im Folgenden

$$\chi(F) := 2 - 2 \cdot \text{Geschlecht von } F - \text{Anzahl der Randkomponenten}$$

als die Euler-Charakteristik von F . Für eine nicht-orientierbare Fläche F bezeichnen wir

$$\chi(F) := 1 - \text{Geschlecht von } F - \text{Anzahl der Randkomponenten}$$

als die Euler-Charakteristik von F .⁸

Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 10.5. *Es sei $F \neq D^2$ eine Fläche. Dann gilt:*

- (1) *Wenn $\chi(F) > 0$, dann besitzt das Innere von F eine vollständige sphärische Metrik.*
- (2) *Wenn $\chi(F) = 0$, dann besitzt das Innere von F eine vollständige euklidische Metrik.*
- (3) *Wenn $\chi(F) < 0$, dann besitzt das Innere von F eine vollständige hyperbolische Metrik.*

Beweis. Es sei $F \neq D^2$ eine orientierbare Fläche von Geschlecht g mit k Randkomponenten. Wenn F eine geschlossene Fläche ist, d.h. wenn $k = 0$, dann folgt der Satz sofort aus der Definition von $\chi(F)$ und unseren bisherigen Ergebnissen.

Wir betrachten nun den Fall, dass $k > 0$. Nachdem wir annehmen, dass $F \neq D^2$ folgt sofort, dass $\chi(F) \leq 0$. Nehmen wir nun zuerst an, dass $\chi(F) = 0$. Wenn F zudem orientierbar ist, dann ist F eine orientierbare Fläche von Geschlecht 0 mit 2 Randkomponenten, d.h. F ist diffeomorph zu einem Annulus. In diesem Fall ist das Innere diffeomorph zu

⁸Die Euler-Charakteristik einer Fläche kann auch kombinatorisch eingeführt werden. Wenn F eine kompakte Fläche ist, dann besitzt F eine Triangulierung, d.h. eine Zerlegung in Dreiecke, so dass zwei Dreiecke sich entweder gar nicht schneiden, oder in einer Vereinigung von Kanten und Eckpunkten. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Euler-Charakteristik von } F &= +\text{Anzahl der Dreiecke} \\ &= -\text{Anzahl der Kanten} \\ &= +\text{Anzahl der Eckpunkte.} \end{aligned}$$

$\mathbb{R} \times S^1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, und wir werden in Übungsblatt 13 zeigen, dass F eine vollständige euklidische Metrik besitzt. Andererseits, wenn F nicht orientierbar ist, dann ist F eine nicht-orientierbare Fläche von Geschlecht 0 mit einer Randkomponente, d.h. F ist diffeomorph zu einem Möbiusband. In diesem Fall werden wir ebenfalls in Übungsblatt 13 zeigen, dass das Innere von F eine vollständige euklidische Metrik besitzt.

Wir wenden uns nun dem Fall $\chi(F) < 0$ zu. Wir wählen nun eine Fläche G von Geschlecht g und k disjunkte offene Scheiben in F , so dass

$$F = G \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_k).$$

Es ist dann leicht ⁹ zu sehen, dass das Innere von F diffeomorph ist zu

$$G \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_k),$$

wobei P_1, \dots, P_k Punkte in G sind. ¹⁰

Betrachten wir nun als erstes den Fall, dass F eine orientierbare Fläche von Geschlecht Null und mit einer Randkomponente ist. Aus der obigen Diskussion folgt, dass das Innere von F gerade ein einfach punktiertes Torus ist. Wir wählen vier Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 auf S^1 , welche im Uhrzeigersinn angeordnet sind. Wir bezeichnen dann mit $g(Q_1, Q_2)$ die eindeutig bestimmte Gerade in \mathbb{D}^2 mit den Punkten Q_1 und Q_2 im Unendlichen. Ganz analog definieren wir auch $g(Q_2, Q_3)$, $g(Q_3, Q_4)$ sowie $g(Q_4, Q_1)$. Nachdem die Isometrien von

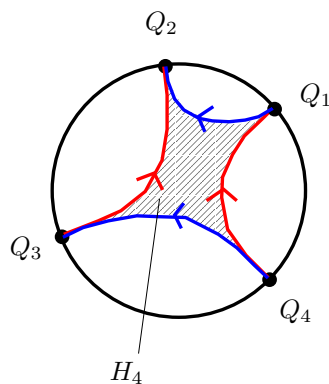


ABBILDUNG 44. Der einfach punktierte Torus.

\mathbb{D}^2 transitiv auf Tripeln von Punkten von S^1 operiert, gibt es insbesondere eine Isometrie A von \mathbb{D} , deren Fortsetzung auf S^1 die Punkte Q_1 und Q_4 sowie Q_2 und Q_3 vertauscht. Man beachte, dass A dann auch einen Homöomorphismus von $g(Q_1, Q_3)$ auf $g(Q_2, Q_4)$ definiert. Zudem gibt es eine Isometrie B von \mathbb{D} , deren Fortsetzung auf S^1 die Punkte Q_1

⁹Für $R > r$ bezeichnen wir mit $D(R, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid R > \|z\| > r\}$ den offenen Annulus. Dann ist $D(R, r)$ diffeomorph zu $D(R, 0)$.

¹⁰Eine Fläche aus der k verschiedene Punkte entfernt wurden nennt man auch eine *k-fach punktierte Fläche*.

und Q_2 sowie Q_3 und Q_4 vertauscht. Die Einschränkung von B auf $g(Q_2, Q_3)$ ist dann ein Homöomorphismus auf $g(Q_1, Q_4)$.

Wir bezeichnen nun mit H_4 das von den Geraden $g(Q_1, Q_2)$, $g(Q_2, Q_3)$, $g(Q_3, Q_4)$ sowie $g(Q_4, Q_1)$ abgegrenzte geschlossene Gebiet in \mathbb{D} . Wir bezeichnen mit \sim die Äquivalenzrelation auf H_4 , welche gegeben ist durch

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, & \text{oder} \\ x = A(y), & \text{für } x, y \in g(Q_1, Q_3) \cup g(Q_2, Q_4), \text{ oder} \\ x = B(y), & \text{für } x, y \in g(Q_2, Q_3) \cup g(Q_1, Q_4). \end{cases}$$

Der topologische Raum H_4/\sim ist dann homöomorph zum punktierten Torus. In der Tat, denn wir den Punkt $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$ noch hinzufügen würden, dann erhielten wir den normalen Torus. Nachdem die Abbildungen A und B Isometrien sind, zeigt das Argument von Kapitel 8.4, dass H_4/\sim eine hyperbolische Metrik besitzt.

Wir skizzieren jetzt den Fall, dass das Innere von F eine dreifach punktierte Sphäre ist. In diesem Fall betrachten wir Abbildung 45. Wir betrachten also wiederum die gleichen

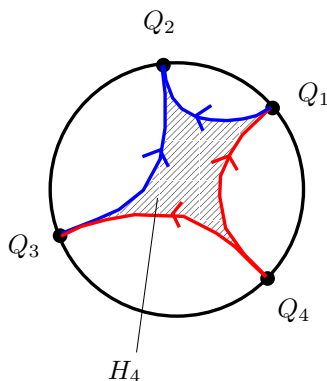


ABBILDUNG 45. Die dreifach punktierte Sphäre.

Punkte wie für den Torus, aber dieses mal verwenden wir eine andere Äquivalenzrelation. Wenn man die ‘fehlenden Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ’ hinzufügt, dann sieht man leicht, dass der topologische Raum eine Sphäre ist. Bei der Äquivalenzrelation werden nur Q_1 und Q_3 identifiziert. Wir sehen also, dass wir H_4/\sim dadurch erhalten, dass wir aus der Sphäre drei Punkte entfernen. Genau die gleichen Argumente wie zuvor zeigen nun, dass die dreifach punktierte Sphäre eine hyperbolische Metrik besitzt.

Wir überlassen den Beweis, dass alle anderen Flächen mit $\chi(F) < 0$ eine hyperbolisch Metrik besitzen als Übungsaufgabe. Einige Beispiele werden in Übungsblatt 13 behandelt. \square

Zum Abschluß dieses Kapitels über Flächen wollen wir den punktierten Torus mit der hyperbolischen Metrik geometrisch noch etwas besser verstehen. Zuerst wollen wir den

Flächeninhalt des punktierten Torus bestimmen. Die Formel

$$\text{Summe der Innenwinkel} = \pi - \text{Flächeninhalt}$$

gilt nicht nur für Dreiecke mit Eckpunkten in \mathbb{D}^2 , sondern auch für Dreiecke mit Punkten im Unendlichen. Ein *Dreieck mit einem Punkt im Unendlichen* ist gegeben durch zwei verschiedene Punkte A, B in \mathbb{D}^2 und einem Punkt C ein Punkt in S^1 . Wir betrachten dann die Menge

$$\Delta_{ABC} = \overline{AB} \cup s(A, C) \cup s(B, C)$$

wobei $s(A, C)$ der durch A und C eindeutig festgelegte Strahl ist, und $s(B, C)$ ist der durch B und C eindeutig festgelegte Strahl. Der Innenwinkel von Δ_{ABC} am Punkt C ist per Definition der Nullwinkel und wir erhalten dann wieder folgende Formel:

$$\text{Summe der Innenwinkel} = \pi - \text{Flächeninhalt.}$$

Diese Definitionen und Aussagen verallgemeinern sich auf offensichtliche Weise zu Dreiecken mit zwei und drei Punkten im Unendlichen. Wir unterteilen dann H_4 in die zwei Dreiecke $\Delta_{Q_1Q_2Q_3}$ und $\Delta_{Q_1Q_4Q_3}$ und erhalten, dass

$$\text{Flächeninhalt vom einfach punktierten Torus} = 2\pi.$$

¹¹

Es ist nicht möglich den einfach punktierten Torus isometrisch in \mathbb{R}^3 einzubetten. Die Abbildung 46 kann daher nur etwas als Anschauungshilfe fungieren. Der grüne und der

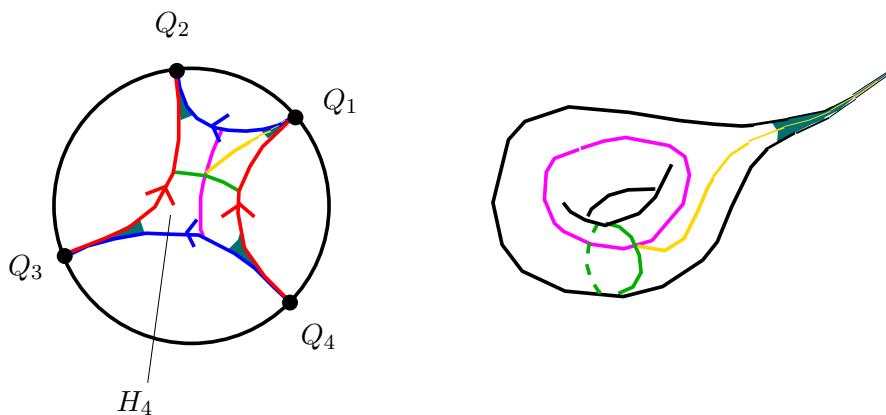


ABBILDUNG 46. Der einfach punktierte Torus.

rosa Weg in H_4 werden zu geschlossenen Kreisen unter der Identifizierung der roten und der blauen Seiten. Der Schnittpunkt des grünen und des rosa Wegs ist ‘unendlich weit weg’

¹¹In der Tat folgt aus einer Verallgemeinerung vom Satz von Gauss-Bonnet, dass für eine vollständige hyperbolische Metrik im Inneren einer kompakten Mannigfaltigkeit F folgende Gleichheit gilt:

$$\text{Flächeninhalt von } F = -2\pi\chi(F).$$

von dem Punkt Q_1 im Unendlichen. Wir skizzieren das in der Abbildung dadurch, dass der gelbe Weg in beiden Fällen ‘unendlich lang ist’.

11. DER DREIDIMENSIONALE HYPERBOLISCHE RAUM

Wir betrachten in diesem Kapitel den dreidimensionalen hyperbolischen Raum. Die meisten Aussagen und Beweise stammen hierbei aus [B]. Wir bezeichnen

$$\mathbb{H}^3 := \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid u > 0\}$$

zusammen mit der Riemannschen Metrik, welche an jedem Punkt $P \in \mathbb{H}^3$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} T_P \mathbb{H}^3 \times T_P \mathbb{H}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \frac{1}{u^2} v \cdot w, \end{aligned}$$

als den *dreidimensionalen hyperbolischen Raum*.

Der dreidimensionale hyperbolische Raum \mathbb{H}^3 ist also fast genauso definiert wie der zweidimensionale hyperbolische Raum \mathbb{H}^2 , außer dass wir jetzt noch eine ‘dritte Richtung y ’ eingeführt haben.

Ganz analog zum 2-dimensionalen Fall wollen jetzt in den folgenden Kapiteln folgenden zwei Fragen nachgehen:

- (1) Was sind die Isometrien von \mathbb{H}^3 ?
- (2) Was sind die Geodäten auf \mathbb{H}^3 .

11.1. Einige Isometrien von \mathbb{H}^3 . Wir betrachten jetzt auch

$$\overline{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}.$$

Wir fassen dies wiederum als topologischen Raum dadurch auf, dass eine Menge U eine Umgebung von ∞ ist, genau dann, wenn $\infty \in U$ und wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass

$$\{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, u)\| > C\} \subset U.$$

Wir betrachten nun folgende Diffeomorphismen von $\overline{\mathbb{R}^3}$.

- (1) Für alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ nennen wir

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}^3} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^3} \\ (x, y, u) &\mapsto (x + x_0, y + y_0, u) \\ \infty &\mapsto \infty \end{aligned}$$

eine *horizontale Translation*.

- (2) Für jedes $\lambda > 0$ nennen wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}^3} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^3} \\ (x, y, u) &\mapsto (\lambda x, \lambda y, \lambda u) \\ \infty &\mapsto \infty \end{aligned}$$

eine *Homothetie*.

(3) Die Spiegelung an der yu -Ebene ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}^3} &\mapsto \overline{\mathbb{R}^3} \\ (x, y, u) &\mapsto (-x, y, u) \\ \infty &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

(4) Die Spiegelung an der Einheitskugel ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}^3} &\mapsto \overline{\mathbb{R}^3} \\ (x, y, u) \neq (0, 0, 0) &\mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2+u^2}, \frac{y}{x^2+y^2+u^2}, \frac{u}{x^2+y^2+u^2} \right) \\ (0, 0, 0) &\mapsto \infty \\ \infty &\mapsto (0, 0, 0). \end{aligned}$$

(5) Für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}^3} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^3} \\ (x, y, u) &\mapsto (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), u) \\ \infty &\mapsto \infty \end{aligned}$$

die Rotation um die u -Achse mit Rotationswinkel θ .

Ganz analog zum zweidimensionalen Fall kann man nun zeigen, dass sich alle diese Abbildungen auf eine Isometrie von \mathbb{H}^3 einschränken.

Wir betrachten jetzt die vertikale Halbebene

$$H := \{(x, 0, u) \in \mathbb{R}^3 \mid u > 0\} \subset \mathbb{H}^3.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (x, 0, y) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion und es folgt sofort aus den Definitionen, dass diese Abbildung eine Isometrie ist. Wir benützen jetzt diese Abbildung um H mit \mathbb{H}^2 zu identifizieren.

Wie wir beispielsweise im Beweis vom nächsten Satz sehen werden, ermöglicht die Identifikation $H = \mathbb{H}^2$ viele Beweise für den 3-dimensionalen hyperbolischen Raum auf Aussagen über den 2-dimensionalen Fall zurückzuführen.

Satz 11.1. *Für alle Punkte $P, Q \in \mathbb{H}^3$ und alle Vektoren $v \in T_P\mathbb{H}^3$ und $w \in T_Q\mathbb{H}^3$ mit $\|v\| = \|w\|$ gibt es eine Isometrie φ von \mathbb{H}^3 mit $\varphi(P) = Q$ und $d_P\varphi(v) = w$.*

Beweis. Mithilfe von Rotationen um die u -Achse und horizontalen Translationen können wir o.B.d.A annehmen, dass P und Q in H liegen, und dass v und w tangential zu H sind.

Aus Lemma 5.19 folgt, dass es eine Isometrie $\psi: H = \mathbb{H}^2 \rightarrow H = \mathbb{H}^2$ mit $\psi(P) = Q$ und $d_P\psi(v) = w$ gibt. Jede Isometrie von \mathbb{H}^2 ist nach Lemma 3.30 eine Verknüpfung von Translationen entlang der x -Achse, Homothetien, Spiegelungen an der y -Achse und Spiegelungen an dem Einheitskreis. Alle diese drei Typen von Abbildungen lassen sich fortsetzen zu Isometrien auf \mathbb{H}^3 . Insbesondere gibt es also eine Isometrie φ von \mathbb{H}^3 mit $\varphi|_H = \psi$. Diese Isometrie φ hat dann die gewünschte Eigenschaft. \square

11.2. **Geodäten in \mathbb{H}^3 .** Im Folgenden identifizieren wir die xy -Ebene in \mathbb{R}^3 mit \mathbb{C} . Wir erinnern an die Definition $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit der üblichen Topologie. Wir betrachten jetzt auch

$$\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}} = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid u \geq 0\} \cup \{\infty\}.$$

Für eine Teilmenge X von \mathbb{H}^3 definieren wir die *Punkte im Unendlichen von X* als Teilmenge von $\overline{\mathbb{C}}$ ganz analog wie im zweidimensionalen Fall.

Eine *Gerade in \mathbb{H}^3* ist entweder eine Teilmenge von der Form

$$\{(x, y, u) \mid u > 0\}$$

für fest gewählte $x, y \in \mathbb{R}$, oder der Schnitt von \mathbb{H}^3 mit einem Kreis in \mathbb{R}^3 , dessen Mittelpunkt auf der xy -Ebene liegt, und welcher auf einer Ebene liegt, welche orthogonal zur xy -Ebene ist.

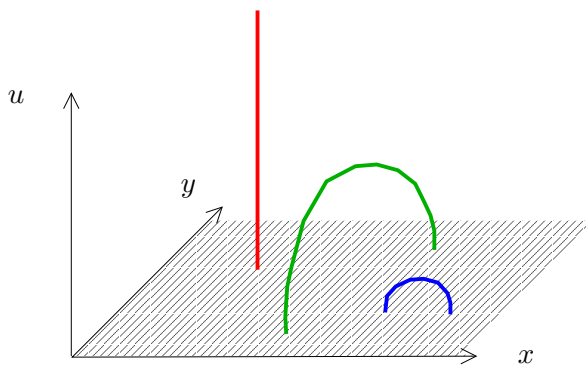


ABBILDUNG 47. Geraden in \mathbb{H}^3 .

Wir machen folgende Beobachtungen:

- (1) Für zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathbb{H}^3$ gibt es genau eine Gerade $g(A, B)$ in \mathbb{H}^3 durch A und B . Wir bezeichnen dann mit \overline{AB} das durch A und B definierte Teilstück von $g(A, B)$.
- (2) Jede Gerade in \mathbb{H}^3 besitzt zwei Punkte im Unendlichen und zu je zwei verschiedenen Punkten $A, B \in \overline{\mathbb{C}}$ gibt es genau eine Gerade $g(A, B)$ in \mathbb{H}^3 , für die A und B die Punkte im Unendlichen sind.

Satz 11.2. *Für zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathbb{H}^3$ gibt es genau eine Geodäte von P nach Q , und diese bewegt sich auf der durch P und Q definierten Strecke \overline{PQ} .*

Wir können die Geodäte in Satz 11.2 auch explizit beschreiben. Es seien $P, Q \in \mathbb{H}^3$. Wir bezeichnen mit P' und Q' die die Projektionen von P und Q auf die xy -Ebene. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Wenn $P' = Q'$, dann ist der offensichtliche vertikale Weg von P nach Q die eindeutige Geodäte von P nach Q .

- (2) Wenn $P' \neq Q'$, dann sei K der eindeutig bestimmte Euklidische Kreis durch P und Q , dessen Mittelpunkt auf $g(P', Q')$ liegt. Dann beschreibt das Kreisstück auf K von P nach Q die eindeutige Geodäte von P nach Q .

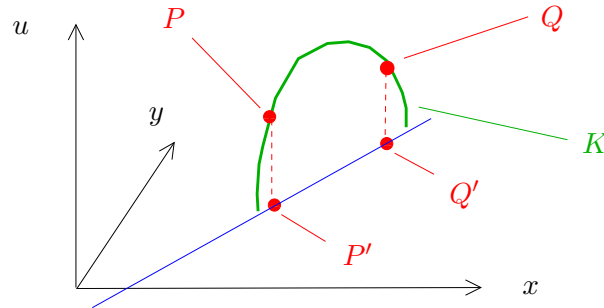


ABBILDUNG 48. Geodäten in \mathbb{H}^3 .

Beweis. Mithilfe von Rotationen um die u -Achse und horizontalen Translationen können wir o.B.d.A annehmen, dass P und Q in H liegen. Man kann dann, ganz analog zum 2-dimensionalen Fall, zeigen, dass eine Geodäte von P nach Q sich schon in H befinden muss. Nachdem H aber isometrisch zu \mathbb{H}^2 folgt die Aussage des Satzes nun sofort aus der entsprechenden Aussage, welche wir in Kapitel 4.2 bewiesen hatten, für Geodäten in \mathbb{H}^2 . \square

Wie im zweidimensionalen Fall kann man nun auch folgenden Satz beweisen.

Satz 11.3. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit \mathbb{H}^3 ist vollständig, und die Geodäten $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ werden gerade durch die Geraden in \mathbb{H}^3 beschrieben.

11.3. Die Isometriegruppe von \mathbb{H}^3 .

Definition. Eine isometrische Fortsetzung auf $\overline{\mathbb{H}^3}$ einer Möbiustransformation m von $\overline{\mathbb{C}}$ ist eine stetige Abbildung $h: \overline{\mathbb{H}^3} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^3}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Einschränkung von h auf $\overline{\mathbb{C}}$ ist gerade die Abbildung m .
- (2) Die Einschränkung von h auf \mathbb{H}^3 ist eine Isometrie.

Satz 11.4. Jede Möbiustransformation besitzt eine eindeutige isometrische Fortsetzung auf $\overline{\mathbb{H}^3}$.

Beweis. Es sei m eine Möbiustransformation m von $\overline{\mathbb{C}}$. Es folgt aus Lemma 3.30, dass m eine Verknüpfung von Translationen, Rotationen, Homothetien, Spiegelungen an der y -Achse und Spiegelungen am Einheitskreis ist. Jede dieser Möbiustransformationen lässt sich isometrisch auf $\overline{\mathbb{H}^3}$ fortsetzen.

Wir müssen noch zeigen, dass die isometrische Fortsetzung der Möbiustransformation m eindeutig ist. Es seien also φ eine isometrische Fortsetzung von m und es sei $P \in \mathbb{H}^3$. Wir wollen zeigen, dass $\varphi(P)$ nur von m und P abhängt.

Wir wählen zwei Geraden a und b in \mathbb{H}^3 , so dass P der einzige Schnittpunkt von a und b ist. Wir bezeichnen mit A_1, A_2 die Punkte im Unendlichen von a und wir bezeichnen mit B_1, B_2 die Punkte im Unendlichen von b . Anders ausgedrückt, es seien $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $a = g(A_1, A_2)$ und $b = g(B_1, B_2)$.

Nachdem φ eine Isometrie ist führt diese Geodäten über in Geodäten, und nachdem die Geodäten in \mathbb{H}^3 gerade die Geraden sind, führt φ die Geraden a und b wiederum in Geraden über. Aus der Stetigkeit von φ folgt zudem, dass φ auch die Punkte im Unendlichen von a, b überführt in die Punkte im Unendlichen von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$. Zusammengefasst erhalten wir also, dass

$$\begin{aligned} \varphi(P) = \varphi(a \cap b) &= \varphi(g(A_1, A_2) \cap g(B_1, B_2)) \\ &= \varphi(g(A_1, A_2)) \cap \varphi(g(B_1, B_2)) \\ &= g(\varphi(A_1), \varphi(A_2)) \cap g(\varphi(B_1), \varphi(B_2)) \\ &= g(m(A_1), m(A_2)) \cap g(m(B_1), m(B_2)). \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $\varphi(P)$ durch m eindeutig bestimmt ist. □

Wir haben jetzt also eine Abbildung $\text{Möb} \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ konstruiert. Wir zeigen jetzt, dass diese Abbildung sogar ein Isomorphismus ist.

Satz 11.5. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Möb} &\rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3) \\ m &\mapsto \text{die Einschränkung der isometrische Fortsetzung von } m \text{ auf } \mathbb{H}^3 \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung Φ ein Homomorphismus ist. In gewisser Weise folgt dies sofort aus der Definition der Abbildung, aber der Vollständigkeit halber führen wir das Argument aus. Es seien also $m, n \in \text{Möb}$. Es folgt aus Lemma 3.30, dass $m = f_1 \circ \dots \circ f_k$ und $n = g_1 \circ \dots \circ g_l$ eine Verknüpfung von Translationen, Rotationen, Homothetien, Spiegelungen an der y -Achse und Spiegelungen am Einheitskreis ist. Wir bezeichnen mit $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_l$ die isometrischen Fortsetzungen. Dann folgt aus der Definition von Φ , dass

$$\Phi(m) \circ \Phi(n) = \hat{f}_1 \circ \dots \circ \hat{f}_k \circ \hat{g}_1 \circ \dots \circ \hat{g}_l = \Phi(f_1 \circ \dots \circ f_k \circ g_1 \circ \dots \circ g_l) = \Phi(m \circ n).$$

Der Homomorphismus Φ ist injektiv. In der Tat, es sei $m \in \text{Möb}$ und es sei φ die isometrische Fortsetzung. Wenn $\Phi(m) = \varphi|_{\mathbb{H}^3}$ die Identität auf \mathbb{H}^3 ist, dann folgt aus der Stetigkeit auch, dass $\varphi|_{\overline{\mathbb{C}}}$ die Identität ist. Aber dann ist auch $m = \varphi|_{\overline{\mathbb{C}}}$ die Identität. Wir haben also gezeigt, dass Φ injektiv ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass Φ surjektiv ist. Es sei also ψ eine Isometrie von \mathbb{H}^3 . Wir werden jetzt mehrmals verwenden, dass die Isometrie ψ vollständige Geodäten auf vollständige Geodäten schickt, d.h. nach Satz 11.3 schickt ψ Geraden in \mathbb{H}^3 auf Geraden in \mathbb{H}^3 .

(1) Wir bezeichnen mit $g(O, \infty)$ die Gerade in \mathbb{H}^3 , deren Punkte im Unendlichen der Ursprung O und der Punkt ∞ sind. Nachdem ψ eine Isometrie ist, ist $\psi(g(O, \infty))$ wieder

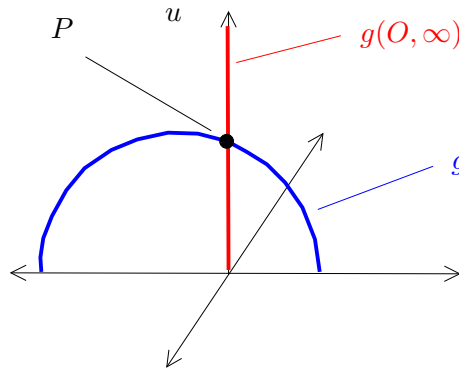
eine vollständige Geodäte in \mathbb{H}^3 , d.h. $g(O, \infty)$ ist eine Gerade g in \mathbb{H}^3 . Die Abbildung $\psi: g(O, \infty) \rightarrow g$ setzt sich fort auf eine stetige Abbildung

$$\psi: \overline{g(O, \infty)} \rightarrow \bar{g}$$

wobei $\overline{g(O, \infty)}$ und \bar{g} der jeweilige topologische Abschluß in $\overline{\mathbb{H}^3}$ sind. Wir schreiben jetzt $A := \psi(O)$ und $B := \psi(\infty)$. Es gilt dann insbesondere, dass $g = g(A, B)$. Nachdem Möb transitiv auf der Menge der Paare von Punkten in $\overline{\mathbb{C}}$ operiert, gibt es ein $m \in \text{Möb}$ mit $m(A) = O$ und $m(B) = \infty$. Es ist also $(m \circ \psi)(O) = O$ und $(m \circ \psi)(\infty) = \infty$, insbesondere gilt dann $(\Phi(m) \circ \psi)(g(O, \infty)) = g(O, \infty)$.

(2) Wir können nun o.B.d.A. annehmen, dass $\psi(g(O, \infty)) = g(O, \infty)$. Indem wir ψ zudem mit einer geeignet gewählten Homothetie $\Phi(n)$ verknüpfen, können wir erreichen, dass $\Phi(n) \circ \psi$ einen Punkt auf der Geodäte fixiert. Nachdem $\Phi(n) \circ \psi$ eine Isometrie ist, welche die Gerade $g(O, \infty)$ erhält, welche den Punkt O im Unendlichen auf O und den Punkt ∞ auf ∞ schickt, und welche einen Fixpunkt auf der Gerade besitzt, ist $\Phi(n) \circ \psi$ die Identität auf $g(O, \infty)$.

(3) Wir nehmen nun nun o.B.d.A. an, dass ψ schon die Identität auf $g(O, \infty)$ ist. Es sei nun g eine Gerade in \mathbb{H}^3 , welche in \mathbb{H}^2 verläuft, und welche die Gerade $g(O, \infty)$ in einem Punkt P schneidet. Dann ist $\psi(g)$ eine Gerade in \mathbb{H}^3 durch den Punkt P . Die



Teilmenge $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ können wir insbesondere beschreiben als die Vereinigung aller Geraden in \mathbb{H}^3 , welche sowohl $g(O, \infty)$ als auch $g \setminus \{P\}$ schneiden. Es folgt daraus, dass $\psi(\mathbb{H}^2)$ die Vereinigung aller Geraden in \mathbb{H}^3 ist, welche sowohl $g(O, \infty)$ als auch $\psi(g) \setminus \{\psi(P)\}$ schneiden. Man sieht nun leicht, dass die Menge $\psi(\mathbb{H}^2)$ gerade die vertikale Halbebene ist, welche $g(O, \infty)$ und $\psi(g)$ enthält. Indem wir ψ gegebenenfalls mit einer Drehung um die u -Achse verknüpfen können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\psi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$.

Die Einschränkung von ψ auf \mathbb{H}^2 ist ebenfalls eine Isometrie. Wir schreiben nun $\varphi := \psi|_{\mathbb{H}^2}$. Aus Satz folgt, dass φ eine Verknüpfung von Translationen entlang der x -Achse, von Homothetien usw ist. Alle diese Abbildungen lassen sich auf \mathbb{H}^3 fortsetzen und wir bezeichnen mit $\widehat{\varphi}$ die dadurch gegebene Fortsetzung von φ auf \mathbb{H}^3 . Die Abbildung $\widehat{\varphi}^{-1} \circ \psi$ ist dann die Identität auf \mathbb{H}^2 .

(4) Wir können nun also o.B.d.A. annehmen, dass ψ auf \mathbb{H}^2 die Identität ist. Wir bezeichnen nun mit

$$\begin{aligned}\sigma: \mathbb{H}^3 &\rightarrow \mathbb{H}^3 \\ (x, y, u) &\mapsto (x, -y, u)\end{aligned}$$

die Spiegelung an \mathbb{H}^2 . Wir zeigen nun, dass entweder $\psi = \text{id}$ oder $\psi = \sigma$.

Es sei nun $P \in \mathbb{H}^3 \setminus \mathbb{H}^2$. Man kann nun zeigen, dass es dann genau einen Punkt Q auf \mathbb{H}^2 gibt, so dass die Strecke \overline{PQ} orthogonal zu \mathbb{H}^2 ist. Dann ist $\psi(\overline{PQ})$ eine Strecke von $Q = \psi(Q)$ zum Punkt $\psi(P)$, welche orthogonal zu \mathbb{H}^2 ist, und so dass \overline{PQ} und $\psi(\overline{PQ})$ die gleiche Länge besitzen. Es folgt nun, dass entweder $\psi(P) = P$ oder $\psi(P) = \sigma(P)$. Wir bezeichnen nun mit K, K' die zwei Komponenten von $\mathbb{H}^3 \setminus \mathbb{H}^2$. Nachdem K und K' zusammenhängend sind und nachdem ψ als Isometrie stetig ist, folgt, dass für alle $P \in K$ entweder $\psi(P) \in K$ oder für alle $P \in K$ gilt $\psi(P) \in K'$. Im ersten Fall ist ψ die Identität auf K , im zweiten Fall ist $\psi = \sigma$ auf K . Ganz analog folgt, dass $\psi|_{K'} = \text{id}$ oder $\psi|_{K'} = \sigma$. Nachdem $\psi: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ insbesondere eine Bijektion ist folgt nun, dass entweder $\psi = \text{id}$ oder $\psi = \sigma$. \square

12. HOMOTOPIESPHÄREN UND DIE POINCARÉ-VERMUTUNG

Wir wenden uns in diesem kurzen Kapitel Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension zu. Wir wollen die Poincaré-Vermutung in allen Dimensionen diskutieren. Im darauffolgenden Kapitel werden wir uns dann den 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zuwenden und die Poincaré-Vermutung und die hyperbolische Geometrie in Verbindung bringen.

Im Folgenden bezeichnen wir für jedes k mit $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^k$ den ‘Nordpol’. Wir sagen ein topologischer Raum ist *k-nullhomotop* wenn es zu allen stetigen Abbildungen $f: S^k \rightarrow M$ eine stetige Abbildung $F: S^k \times [0, 1] \rightarrow M$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- (1) für alle $x \in S^k$ gilt $F(x, 0) = f(x)$,
- (2) für alle $t \in [0, 1]$ ist $F(N, t) = F(N, 0)$,
- (3) für alle $x \in S^k$ ist $F(x, 1) = F(N, 1)$.

Etwas vereinfacht gesprochen ist ein topologischer Raum *k-nullhomotop*, wenn alle *k*-Sphären zu einem Punkt zusammengezogen werden können. ¹²

Beispiel. (1) Der Raum \mathbb{R}^n ist *k-nullhomotop* für jedes *k*.

(2) Ein topologischer Raum X ist 0-nullhomotop genau dann, wenn X wegzusammenhängend ist.

(3) Die *n*-Sphäre S^n ist *k-nullhomotop* für alle $k < n$. Diese Aussage ist ziemlich überzeugend. Ein echter Beweis benötigt allerdings dann doch einigen Aufwand.

Definition. Eine *n-dimensionale Homotopiesphäre* ist eine geschlossene, orientierbare *n*-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche für alle $k < n$ die Eigenschaft besitzt, dass sie *k-nullhomotop* ist.

¹²Es folgt sofort aus den Definitionen, dass ein topologischer Raum X genau dann *k-nullhomotop* ist, wenn die *n*-te Homotopiegruppe $\pi_n(X)$ verschwindet.

Es ist nun offensichtlich, dass die Standardsphäre S^n eine Homotopiesphäre ist. Es stellt sich nun die Frage, ob die einzige Homotopiesphäre ist.

Hierbei muss man allerdings die Fragestellung präzisieren: Wenn wir schreiben ‘einzige Mannigfaltigkeit’ macht es a priori einen Unterschied, ob ‘bis auf einen Homöomorphismus’ oder ‘bis auf einen Diffeomorphismus’.

Für jedes n stellen sich also zwei Fragen:

Frage. Es sei X eine n -dimensionale Homotopiesphäre.

- (1) Ist X diffeomorph zu S^n ?
- (2) Ist X homöomorph zu S^n ?

Die Beantwortung der Fragen erfolgte in Sprüngen, welche man vielleicht so nicht erwarten würde. Wenn $n = 1$ oder $n = 2$, dann ist die Antwort auf beide Fragen in der Tat ‘Ja’. Der Fall $n = 1$ ist ¹³ eine interessante Übungsaufgabe. Der Fall $n = 2$ wurde im 19. Jahrhundert im Zuge der Klassifikation von Flächen bewiesen.

Der erste wichtige Satz wurde von John Milnor ¹⁴ in 1956 (Fieldsmedaille 1962) bewiesen:

Satz 12.1. (Milnor) *Es gibt eine geschlossene differenzierbare 7-Mannigfaltigkeit, welche homöomorph zu S^7 aber nicht diffeomorph zu S^7 ist.*

Eine differenzierbare n -Mannigfaltigkeit, welche homöomorph zu S^n , aber nicht diffeomorph zu S^n ist, wird *exotische n -Sphäre* genannt. Folgender Satz wurde kurze Zeit später von Kervaire und Milnor bewiesen:

Satz 12.2. (Kervaire-Milnor) *Es sei $n \geq 5$. Dann gibt es höchstens endlich viele exotische n -Sphären, zudem gibt es in den Dimensionen 5 und 6 überhaupt keine exotischen Sphären.*

Unabhängig davon hat Moise ¹⁵ schon in 1952 bewiesen, dass es in Dimension 3 keine exotischen Sphären geben kann. Kurze Zeit später wurde im Jahre 1961 folgender Satz von Smale ¹⁶ (Fieldsmedaille 1966) bewiesen:

Satz 12.3. (Smale) *Es sei $n \geq 5$, dann ist jede Homotopiesphäre homöomorph zu S^n .*

Nach diesen Durchbrüchen wurde es eine zeitlang ruhig bevor Freedman ¹⁷ (Fieldsmedaille 1986) in 1981 die Poincarévermutung in Dimension 4 bewies:

Satz 12.4. (Freedman) *Jede 4-dimensionale Homotopiesphäre ist homöomorph zu S^4 .*

Dieser Beweis ist so schwierig und kompliziert, dass es angeblich nur 5 Mathematiker gibt, die den Beweis jemals verstanden haben. Folgende Frage ist aber weiterhin offen:

¹³Vermutlich.

¹⁴http://de.wikipedia.org/wiki/John_Willard_Milnor

¹⁵ E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Ann. of Math. (2) 56 (1952), 96–114.

¹⁶http://de.wikipedia.org/wiki/Stephen_Smale

¹⁷http://de.wikipedia.org/wiki/Michael_Freedman

Frage. Ist jede 4-dimensionale Homotopiesphäre diffeomorph zu S^4 ?

Dies Frage ist sicher eine der schwierigsten Fragen der Topologie. In der Tat ist 4-dimensionale Topologie in vielerlei Beziehung deutlich schwieriger als 3-dimensionale Topologie, aber auch, überraschenderweise, deutlich schwieriger als Topologie in Dimension $n \geq 5$. Beispielsweise ist für $n \neq 4$ jede Mannigfaltigkeit, welche homöomorph zu \mathbb{R}^n ist, auch schon diffeomorph zu \mathbb{R}^n . Diese Aussage ist völlig falsch für $n = 4$.¹⁸

Im Jahr 2000 hat dann die Clay-Stiftung ein Preisgeld von 1 Million Dollar auf 7 große Vermutungen ausgesetzt. Zu diesen gehört beispielsweise die Riemannsche-Vermutung¹⁹ aber auch die Poincaré-Vermutung.²⁰

Vermutung 12.1. (Poincaré 1900) *Jede 3-dimensionale Homotopiesphäre ist homöomorph zu S^3 .*

Bevor wir uns der Poincaré-Vermutung wieder zuwenden, wollen wir im Folgenden erst einmal die Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten etwas genauer kennenlernen.

13. 3-DIMENSIONALE MANNIGFALTIGKEITEN

Wie hatten also jetzt die Poincaré-Vermutung in allen Dimensionen $n \neq 3$ behandelt. Bevor wir uns wieder der Poincaré-Vermutung für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten zuwenden, wollen wir erst einmal die Theorie der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten etwas genauer kennenlernen.

13.1. Beispiele von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Um überhaupt ein Gefühl für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten zu entwickeln wollen wir erstmal eine längere Liste von Beispielen von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten erstellen.

Die einfachste kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist natürlich die 3-Sphäre

$$S^3 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Die 3-Sphäre hat auch verschiedene Quotientenmannigfaltigkeiten. Beispielsweise ist

$$\mathbb{R}P^3 = S^3 / \sim$$

wobei $P \sim \pm P$ für alle $P \in S^3$, ebenfalls eine 3-Mannigfaltigkeit. Dieses Beispiel kann man noch etwas verallgemeinern. Es seien $p, q \in \mathbb{N}$ zwei teilerfremde Zahlen. Wir definieren auf S^3 die Äquivalenzrelation

$$(w_1, w_2) \sim (z_1, z_2) :\Leftrightarrow (w_1, w_2) = (e^{2k\pi/p} z_1, e^{2k\pi q/p} z_2) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

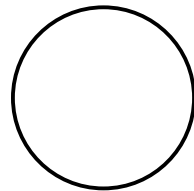
Dann ist $L(p, q) := S^3 / \sim$ eine Mannigfaltigkeit, welche wir als *Linsenmannigfaltigkeit* bezeichnen.

¹⁸http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_R4

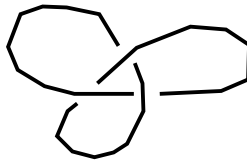
¹⁹http://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_Vermutung

²⁰<http://de.wikipedia.org/wiki/Millennium-Probleme>

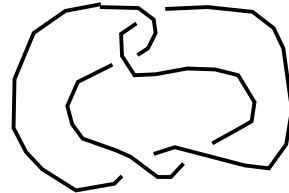
Eine wichtige Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten ist gegeben durch Knotenaußenräume. Genauer gesagt, es sei $K \subset S^3$ ein Knoten, d.h. K sei das Bild einer Einbettung $\varphi: S^1 \rightarrow S^3$. Man kann nun zeigen,²¹ dass es eine Einbettung $\Phi: S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ mit $\Phi(z, 0) = \varphi(z)$ gibt.



triviale Knoten



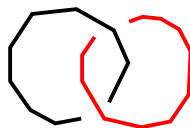
Kleeblattknoten



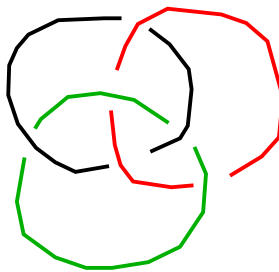
Achter-Knoten

Wir nennen das Bild von Φ die *geschlossene Tubenumgebung von K* und wir bezeichnen das Innere der geschlossenen Tubenumgebung als die *offene Tubenumgebung νK von K* . Wir bezeichnen dann $X(K) := S^3 \setminus \nu K$ als den Knotenaußenraum. Dies ist offensichtlich eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit einer Randkomponente, welche ein Torus ist. Es ist offensichtlich (aber nicht ganz so einfach zu beweisen), dass es unendlich viele verschiedene Isotopietypen von Knoten gibt. Die Knotenaußenräume bilden also eine große Klasse von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten.

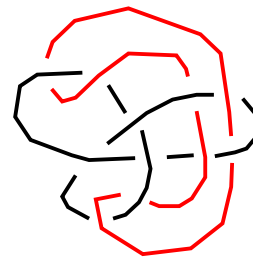
Eine *Verschlingung* ist die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Knoten in S^3 . Wie im



Hopf-Verschlingung



Borromäische Ringe



Falle von Knoten ist der Verschlingungsaußenraum $X(L) := S^3 \setminus \nu L$ eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand besteht dabei aus Tori, welche gerade den Komponenten der Verschlingung entsprechen.

Wir erhalten auch 3-Mannigfaltigkeiten, indem wir diese aus Flächen ‘zusammenbasteln’. Beispielsweise sei F eine kompakte Fläche mit Randkomponenten c_1, \dots, c_k , dann ist $S^1 \times F$ eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit Randkomponenten $S^1 \times c_1, \dots, S^1 \times c_k$.

²¹siehe beispielsweise Bredon: Geometry and Topology

Wir können aus Fläche auch interessantere 3-Mannigfaltigkeiten konstruieren. Es sei dazu F eine orientierbare Fläche und $\varphi: F \rightarrow F$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus. Wir betrachten dann den Abbildungstorus

$$M(F, \varphi) := F \times [0, 1] / \sim$$

wobei \sim die Äquivalenzrelation ist, welche durch

$$(z, 0) \sim (\varphi(z), 1)$$

definiert ist. Dann ist $M(F, \varphi)$ eine orientierbare 3-Mannigfaltigkeit, deren Rand aus Tori besteht. Die Mannigfaltigkeit $M(F, \varphi)$ besitzt eine Abbildung

$$\begin{aligned} p: M(F, \varphi) &\rightarrow S^1 \\ [(z, t)] &\mapsto e^{2\pi i t}, \end{aligned}$$

welche ein Faserbündel ist, insbesondere ist für jedes $z \in S^1$ das Urbild $p^{-1}(z)$ diffeomorph zur Fläche F . Wir nennen $M(F, \varphi)$ daher auch eine *gefaserte Mannigfaltigkeit*.

Wenn wir $\varphi = \text{id}$ wählen, dann ist $M(F, \varphi) = F \times S^1$. Man kann zudem zeigen, siehe beispielsweise Rolfsen: *Knots and Links*, dass der Knotenaußenraum vom Kleeblattknoten K gefasert ist. Genauer gesagt, es gibt einen Diffeomorphismus φ von

$$F := \text{Torus minus eine offene Scheibe},$$

so dass $X(K)$ diffeomorph ist zu $M(F, \varphi)$. Der Knotenaußenraum vom Achter-Knoten ist ebenfalls gefasert, aber die ‘meisten’ Knotenaußenräume sind nicht gefasert.

13.2. Konstruktionen von weiteren 3-Mannigfaltigkeiten. Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass wir aus gegebenen 3-Mannigfaltigkeiten durch einfache Operationen weitere 3-Mannigfaltigkeiten konstruieren können.

Es seien M, N zwei orientierte 3-Mannigfaltigkeiten. Wir wählen zwei geschlossene 3-Bälle $B \subset M$ und $C \subset N$. Die Sphären ∂B und ∂C sind dann Randkomponenten der Mannigfaltigkeiten $M \setminus \text{Inn}(B)$ und $N \setminus \text{Inn}(C)$. Die Orientierungen von M und N induzieren dann eine Orientierung auf ∂B und ∂C . Wir wählen jetzt einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus $f: \partial B \rightarrow \partial C$ und definieren

$$M \# N := (M \setminus \text{Inn}(B) \cup N \setminus \text{Inn}(C)) / \sim$$

wobei \sim die Äquivalenzrelation ist, welche gegeben ist durch

$$b \sim f(b) \text{ für alle } b \in \partial B.$$

Man kann nun zeigen, dass der Diffeomorphietyp von $M \# N$ nicht von der Wahl der Bälle B und C und nicht von der Wahl von f abhängt. Wir bezeichnen dann $M \# N$ als die *zusammenhängende Summe von M und N* . Diese Konstruktion ist ganz analog zur zusammenhängenden Summe von Flächen/

Es seien nun M, N zwei 3-Mannigfaltigkeiten und es sei T eine Toruskomponente von M und es sei U eine Torusrandkomponente von N . Es sei zu dem $f: T \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus. Wir definieren dann

$$M \cup_f N := (M \cup N) / \sim$$

wobei \sim die Äquivalenzrelation ist, welche gegeben ist durch

$$t \sim f(t) \text{ für alle } t \in T.$$

Bildlich gesprochen haben wir also die Mannigfaltigkeit N an M mithilfe der Abbildung $f: T \rightarrow U$ rangeklebt.

Wir haben jetzt schon alle Konstruktionen die man benötigt um geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten zu beschreiben. Genauer gesagt wurde 1962 der folgende Satz von Lickorish und Wallace bewiesen:

Satz 13.1. *Es sei M eine geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten. Dann existiert eine Verschlingung $L \subset S^3$ und es existieren Diffeomorphismen $f_i: S^1 \times S^1 \rightarrow T_i$, $i = 1, \dots, k$, wobei T_1, \dots, T_k die Randkomponenten von $X(L)$ sind, so dass*

$$M = X(L) \cup_{f_1} S^1 \times D^2 \dots \cup_{f_k} S^1 \times D^2.$$

Es gibt noch viele weitere Möglichkeiten neue 3-Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Es sei beispielsweise M eine 3-Mannigfaltigkeit und $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow G$ ein Epimorphismus auf eine endliche Gruppe. Dann besagt die Überlagerungstheorie, dass es eine endliche Überlagerung $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ mit $\pi_1(\widetilde{M}) = \ker(\varphi)$ gibt. Nachdem \widetilde{M} lokal diffeomorph zu M ist folgt auch, dass \widetilde{M} wiederum eine 3-Mannigfaltigkeit ist.

13.3. Der Primzerlegungssatz. Wir haben jetzt viele Beispiele und Konstruktionen von 3-Mannigfaltigkeiten gesehen, und die Aufgabe ist nun in diesen Zoo wieder eine Ordnung rein zu bringen.

Wir sagen im Folgenden, dass eine 3-Mannigfaltigkeit M *prim* ist, wenn M nicht als nicht-triviale zusammenhängende Summe geschrieben werden kann. Genauer gesagt, eine 3-Mannigfaltigkeit M ist prim, wenn aus $M = M_1 \# M_2$ folgt, dass $M_1 = S^3$ oder $M_2 = S^3$. Beispielsweise sind Knotenaußenräume und gefaserte Mannigfaltigkeiten prim.

Wir haben jetzt folgenden Satz.

Satz 13.2. *Es sei M eine orientierte 3-Mannigfaltigkeit. Dann existieren Primmannigfaltigkeiten M_1, \dots, M_k , so dass*

$$M = M_1 \# \dots \# M_k.$$

Darüber hinaus, wenn

$$M = N_1 \# \dots \# N_l$$

eine weitere Zerlegung in Primmannigfaltigkeiten ist, dann gilt $k = l$, und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_k$, so dass $M_i = N_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \dots, k$.

Die Existenz der Primzerlegung wurde 1929 von Kneser bewiesen, die Eindeutigkeit wurde von Milnor 1962 bewiesen. Für die Klassifikation von 3-Mannigfaltigkeiten genügt es daher Primmannigfaltigkeiten zu studieren.

13.4. Seifert gefaserte Mannigfaltigkeiten. Eine *Seifert gefaserte Mannigfaltigkeit* ist eine 3-Mannigfaltigkeit, welche eine disjunkte Zerlegung in Kreise besitzt. Beispielsweise ist für jede Fläche F die Mannigfaltigkeit $S^1 \times F$ Seifert gefasert, denn wir können $S^1 \times F$ als Vereinigung der disjunkten Kreise $\{S^1 \times P\}_{P \in F}$ beschreiben. Das nächste Lemma gibt ein etwas komplizierteres Beispiel von Seifert gefaserten Mannigfaltigkeiten.

Satz 13.3. *Die 3-Sphäre S^3 und die Linsenräume $L(p, q)$ sind Seifert gefasert.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}P^1$ den ein-dimensionalen komplexen projektiven Raum, d.h.

$$\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$$

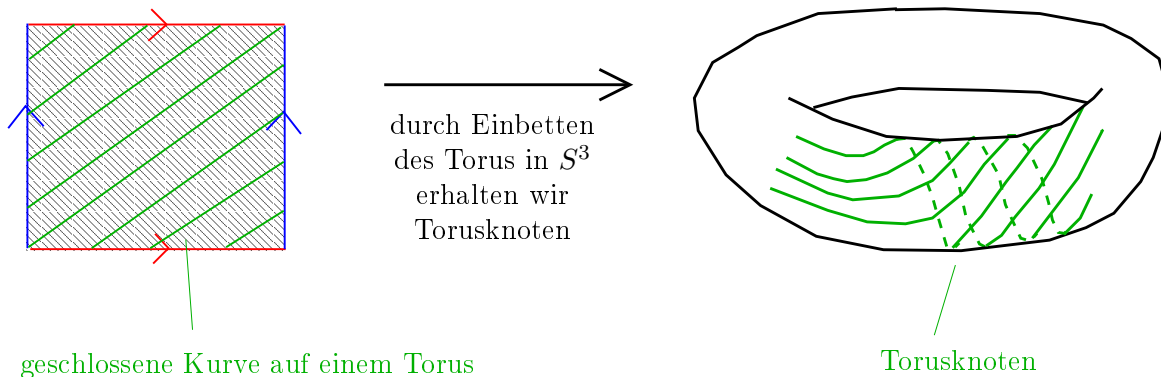
wobei $(w_1, w_2) \sim (z_1, z_2)$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $(w_1, w_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2)$ gibt. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (z_1, z_2) mit $[z_1 : z_2]$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} &\rightarrow \mathbb{C}P^1 \\ (z_1, z_2) &\mapsto [z_1 : z_2]. \end{aligned}$$

Man kann nun leicht zeigen, dass das Urbild von einem Punkt $[z_1 : z_2]$ immer ein Kreis ist. Wir haben also bewiesen, dass S^3 Seifert gefasert ist.

Es folgt auch leicht aus den Definitionen, dass die Bilder der oben konstruierten Kreise in S^3 unter der Projektionsabbildung $S^3 \rightarrow L(p, q)$ wiederum disjunkte Kreise sind. Es folgt also, dass auch die Linsenräume $L(p, q)$ Seifert gefasert sind. \square

Ein Torusknoten ist ein Knoten in S^3 , welcher eine Teilmenge der Oberfläche des Standardtorus in S^3 ist.



Satz 13.4. *Der Knotenaußenraum $X(K)$ ist Seifert gefasert genau dann, wenn K ein Torusknoten ist.*

Beweisskizze. Wir schreiben S^3 als die Vereinigung von zwei Volltori U und V , wobei der eine Volltorus der Standardtorus in $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ ist. Es sei nun $K \subset \partial U = \partial V$ ein Torusknoten. Wir schreiben dann $U \setminus K$ als Vereinigung von Kreisen, welche alle parallel zu K sind. Wir können diese Zerlegung in Kreise auf die Volltori U und V fortsetzen. \square

13.5. Die JSJ-Zerlegung einer 3-Mannigfaltigkeit. Es sei T ein Torus in einer Primmannigfaltigkeit M . Wir sagen T ist *inkompressibel*, wenn T nicht der Rand von einem Volltorus ist.

Beispiel. Es sei $M \neq S^1 \times D^2$ eine Primmannigfaltigkeit und T eine Torusrandkomponente von M , dann ist T inkompressibel.

Wir sagen ein Torus T in einer 3-Mannigfaltigkeit M ist *parallel zum Rand*, wenn es eine Isotopie $H: T \times [0, 1] \rightarrow M$ gibt, so dass $H(T, 0) = T$, und so dass $H(T, 1)$ ein Randtorus von M ist. Wir sagen eine 3-Mannigfaltigkeit M ist *atorisch*, wenn jeder inkompressible Torus parallel zum Rand von M ist.

Beispiel. Es sei K ein Knoten in einem Volltorus $S^1 \times D^2$, so dass sich K nicht in einem 3-Ball in $S^1 \times D^2$ befindet. Es sei nun J ein Knoten in S^3 . Wir wählen einen Diffeomorphismus

$$\varphi: \text{Volltorus } S^1 \times D^2 \xrightarrow{\cong} \text{geschlossene Tubenumgebung von } J.$$

Wir bezeichnen dann $S := \varphi(K) \subset S^3$ als *Satellitenknoten*. Wir betrachten nun $X = S^3 \setminus \nu S$. Der Torus $T = \varphi(S^1 \times S^1) \subset X$ berandet auf der einen Seite $S^1 \times D^2 \setminus \nu K$ und auf der anderen Seite $S^3 \setminus \nu J$. Der Torus T ist also inkompressibel und nicht parallel zum Rand.

Beispiel. Es folgt aus Dehns Lemma²², welches 1957 von Papakyriakopoulos bewiesen wurde, dass eine Homotopiesphäre insbesondere atorisch ist.

Folgender Satz wurde 1979 von Johannson und Jaco–Shalen bewiesen.

Satz 13.5. *Es sei M eine orientierbare Primmannigfaltigkeit, so dass M entweder geschlossen ist, oder so dass ∂M nur aus Tori besteht. Dann gibt es inkompressible Tori T_1, \dots, T_k in M , so dass jede der Komponenten von*²³

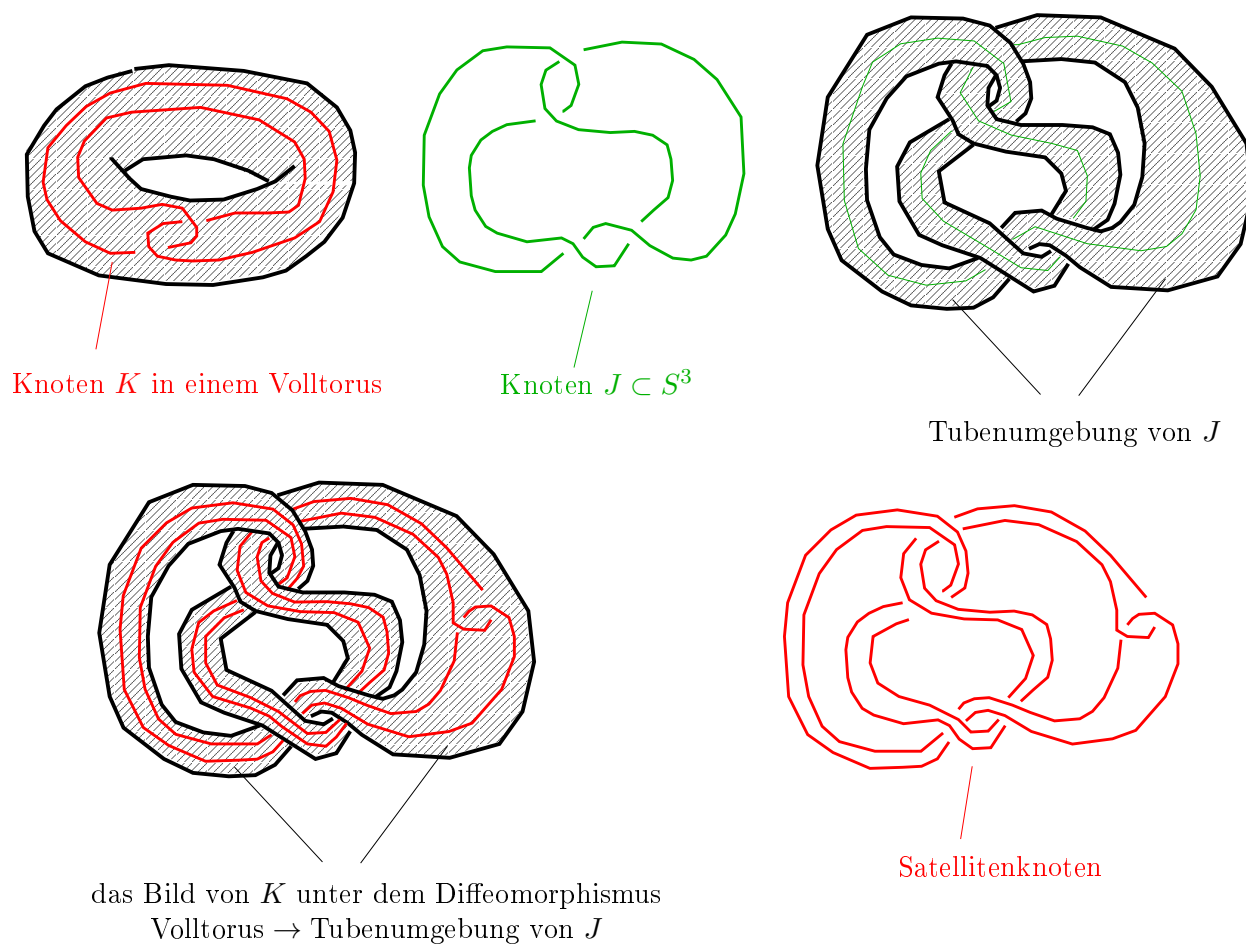
$$M \setminus \bigcup_{i=1}^k T_i \times (-1, 1)$$

entweder Seifert gefasert oder atorisch ist.

Betrachten wir beispielsweise noch einmal den Satellitenknoten, welchen wir oben konstruiert hatten. Wir bezeichnen mit M das Komplement des Knoten und wir bezeichnen mit T den in der Abbildung skizzierten inkompressible Torus. Dann besteht $M \setminus T \times (-1, 1)$ aus zwei Komponenten, welche in Abbildung 13.5 skizziert sind. Eine Komponente ist der

²²http://de.wikipedia.org/wiki/Dehns_Lemma

²³Wenn F eine Fläche in einer 3-Mannigfaltigkeit ist, dann kann man diese immer etwas ‘aufdicken’, d.h. es gibt immer eine Einbettung $i: F \times [-1, 1] \rightarrow M$, so dass $i(F \times 0) = F$.



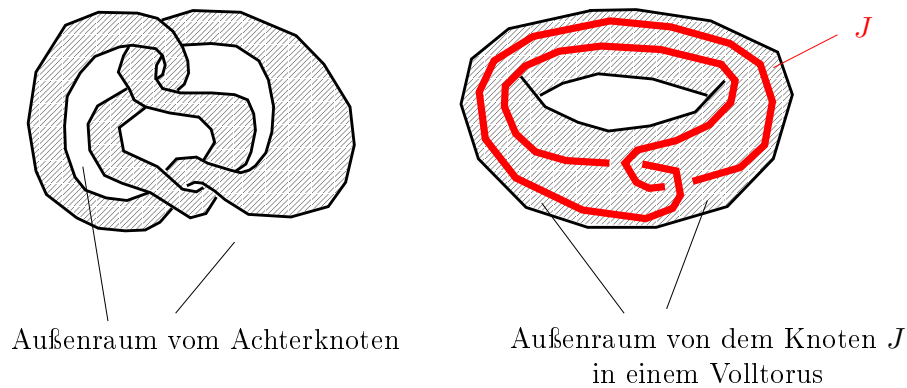
Außenraum vom Achter-Knoten, die andere Komponente erhalten wir dadurch, dass wir aus dem Volltorus eine offene Tubenumgebung um den Knoten J entfernen. Man kann nun zeigen, dass beide Komponenten atorisch sind.

13.6. Atorische Mannigfaltigkeiten. Nach Satz 13.5 stellt sich also folgende Frage.

Frage. Was sind denn die atorischen Primmannigfaltigkeiten?

Bevor wir eine Antwort geben verallgemeinern wir die Definitionen aus Satz 8.2. Zum einen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

- (1) \mathbb{E}^3 bezeichnet den Raum \mathbb{R}^3 zusammen mit der euklidischen Metrik.
- (2) \mathbb{S}^3 bezeichnet die Sphäre S^3 zusammen mit der sphärischen Metrik.
- (3) \mathbb{H}^3 bezeichnet $\{x, y, z \mid z > 0\}$ zusammen mit der hyperbolischen Metrik.



Wir sagen, eine 3-Mannigfaltigkeit M ist sphärisch, wenn M eine Riemannsche Metrik besitzt, so dass (M, g) an jedem Punkt im Inneren von M lokal isometrisch zu S^3 ist. Ganz analog definieren wir auch euklidische und hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten.

Man kann nun zeigen, dass eine 3-Mannigfaltigkeit genau dann sphärisch ist, wenn es eine Untergruppe von $\text{Isom}(S^3)$ gibt, welche diskret²⁴ auf S^3 operiert, so dass $M = S^3/G$. Die analogen Aussagen gelten auch für euklidische und hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten.

Es ist nun relativ leicht Beispiele von sphärischen 3-Mannigfaltigkeiten zu geben. Beispielsweise ist die Gruppe

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} e^{\pi i k/p} & 0 \\ 0 & e^{\pi i q k/p} \end{pmatrix} \mid k = 0, \dots, p-1 \right\}$$

eine Untergruppe von $U(2) \subset O(4) = \text{Isom}(S^3)$, welche diskret auf S^3 operiert. Wir sehen also, dass S^3/G eine sphärische Mannigfaltigkeit ist. Der Raum S^3/G ist natürlich gerade der Linsenraum $L(p, q)$. Wir haben also gezeigt, dass alle Linsenräume sphärisch sind. Mit elementarer Überlagerungstheorie²⁵ kann man zudem zeigen, dass wenn $M = S^3/G$ eine Homotopiesphäre ist, dann ist G die triviale Gruppe, d.h. jede sphärische Homotopiesphäre ist schon S^3 .

Beispiele von euklidischen 3-Mannigfaltigkeiten sind der 3-Torus $S^1 \times S^1 \times S^1$ und das Produkt $K \times S^1$ von der Kleinschen Flasche mit S^1 . Man kann sich leicht davon überzeugen,

²⁴Zur Erinnerung: Es G eine Gruppe, welche auf einem topologischen Raum X operiert. Wir sagen, G operiert diskret, wenn es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt, so dass

$$U \cap gU \neq \emptyset \text{ für alle } g \neq e.$$

²⁵Wenn M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist und G eine Gruppe ist, welche auf M diskret operiert, dann gilt $\pi_1(M/G) \cong G$. Insbesondere, wenn M/G einfach zusammenhängend ist, dann muss G die triviale Gruppe sein, d.h. $M/G = M$.

dass es, wie bei den Flächen, nicht allzu viele euklidische 3-Mannigfaltigkeiten gibt. In der Tat gibt es genau 10 verschiedene euklidische 3-Mannigfaltigkeiten.

Es ist sehr schwierig Untergruppen G von $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ explizit hinzuschreiben, welche diskret auf \mathbb{H}^3 operieren, und so dass \mathbb{H}^3/G das Innere von einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit ist. Bis etwa 1974 gab es genau ein Beispiel ²⁶ von einer kompakten orientierbaren hyperbolischen Mannigfaltigkeit. Im Jahre 1974 hat dann Riley explizit gezeigt, dass der Außenraum vom Achter-Knoten hyperbolisch ist. Weniger Jahre später hat dann Thurston ²⁷ folgenden Satz bewiesen, für den er 1982 die Fields-Medaille erhielt.

Satz 13.6. *Es sei $K \subset S^3$ ein Knoten, so dass der Außenraum $X(K)$ atorisch ist, dann ist $X(K)$ hyperbolisch.*

Wenden wir uns nun wieder Ausgangsfrage zu, nämlich, was sind den nun die atorischen Primmannigfaltigkeiten? Es folgt aus dem schon erwähnten Dehns Lemma, dass sphärische 3-Mannigfaltigkeiten atorisch sind. Ebenfalls mithilfe von Dehns Lemma und etwas hyperbolischer Geometrie kann man zeigen, dass hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten ebenfalls atorisch sind. Die Frage wurde dann 2003 von Perelman vollständig beantwortet. Genauer gesagt hat Perelman ²⁸ folgenden Satz bewiesen.

Satz 13.7. (Perelman) *Es sei M eine atorische Primmannigfaltigkeit, dann ist M entweder sphärisch, oder hyperbolisch.*

Wir haben schon gesehen, dass Homotopiesphären atorisch sind. Ein einfaches Überlagerungstheorieargument ²⁹ zeigt zudem, dass Homotopiesphären nicht hyperbolisch sein können. ³⁰ Aber wir hatten oben schon gesehen, dass S^3 die einzige Homotopiesphäre ist, welche sphärisch ist. Wir erhalten also aus dem obigen Satz folgendes Korollar.

Satz 13.8. (Perelman) *Jede 3-dimensionale Homotopiesphäre ist homöomorph zu S^3 .*

Anders ausgedrückt, Perelman hat ‘nebenbei’ auch noch die Poincaré-Vermutung bewiesen. Perelman hat damit eines der 7 Millennium-Probleme gelöst, auf welche die Clay-Stiftung ein Preisgeld von 1 Million Dollar ausgesetzt hat. Es verbleiben jetzt noch 6 Wege um mithilfe von Mathematik reich zu werden. Perelman hätte auch 2006 die Fields-Medaille bekommen, wenn er diese hätte annehmen wollen.

²⁶http://en.wikipedia.org/wiki/Seifert-Weber_space

²⁷http://de.wikipedia.org/wiki/William_Thurston

²⁸http://de.wikipedia.org/wiki/Grigori_Jakowlewitsch_Perelman

²⁹

³⁰Es sei M eine Homotopiesphäre. Dann ist $\pi_1(M) = 0$, also ist M schon seine eigene universelle Überlagerung, insbesondere ist die universelle Überlagerung von M kompakt. Andererseits, wenn $N = \mathbb{H}^3/G$ eine hyperbolische 3-Mannigfaltigkeit ist, dann ist \mathbb{H} die universelle Überlagerung. Insbesondere ist die universelle Überlagerung von N nicht kompakt.

13.7. Hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten. Wir wollen die Aussagen der wichtigsten Sätze über 3-Mannigfaltigkeiten noch einmal zusammenfassen. Mithilfe von Satz 13.2 können wir uns bei der Klassifikation von 3-Mannigfaltigkeiten auf Primmannigfaltigkeiten einschränken können. Satz 13.5 wiederum besagt, dass wir jede Primmannigfaltigkeit in Seifert gefaserte und atorische Mannigfaltigkeiten zerlegen können. Nachdem Seifert gefaserte Mannigfaltigkeit klassifiziert sind genügt es zumeist atorische Mannigfaltigkeiten zu studieren. Diese wiederum sind nach Satz 13.7 entweder sphärisch oder hyperbolisch. Die sphärischen Mannigfaltigkeiten sind ebenfalls klassifiziert³¹. Es stellt sich also folgende Frage:

Frage. Können wir hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten klassifizieren?

Oder, etwas bescheidener:

Frage. Können wir die topologischen und geometrischen Eigenschaften von hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeiten verstehen?

Diese Fragen sind umso wichtiger als man zeigen kann dass, wie im Falle von Flächen, ‘fast alle’ 3-Mannigfaltigkeiten hyperbolisch sind.

Erinnern wir uns noch einmal an die Theorie der hyperbolischen Flächen. Wir hatten gesehen, dass jede Fläche von Geschlecht $g \geq 2$ viele paarweise nicht-isometrische hyperbolische Strukturen besitzt. Für hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten ist die Lage ganz anders.

Genauer gesagt gilt folgender Satz, welcher 1973 von Mostow und Prasad bewiesen wurde.³²

Satz 13.9. *Es sei M eine hyperbolische 3-Mannigfaltigkeit, welche entweder geschlossen ist oder dessen Rand aus Tori besteht. Dann besitzt M bis auf Isometrie genau eine hyperbolische Metrik.*

Der Satz besagt also, dass wenn g und h hyperbolische Strukturen auf M sind, dann gibt es eine Isometrie $f: (M, g) \rightarrow (M, h)$. Insbesondere sind also alle geometrischen Invarianten schon topologische Invarianten. Beispielsweise, wenn M eine hyperbolische Mannigfaltigkeit ist, dann ist

$$\text{Vol}(M) := \text{Vol}(M, \text{hyperbolische Metrik})$$

wohl-definiert, und hängt nicht von der Wahl der hyperbolischen Metrik ab.

Betrachten wir noch einmal den Achter-Knoten. Dieser ist hyperbolisch und man kann zeigen, dass

$$\text{Vol}(S^3 \setminus \nu \text{Achter-Knoten}) \approx 2.02988 \dots$$

Cao–Meyerhoff hatten 2001 gezeigt, dass der Achter-Knoten der Knoten mit minimalen Volumen ist.

Es gibt weiterhin viele offene Fragen über hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten. Insbesondere ist folgende Frage, welche 1982 von Thurston gestellt wurde, weiterhin offen:

³¹Man kann unter Anderem zeigen, dass sphärische Mannigfaltigkeiten Seifert gefasert sind

³²<http://de.wikipedia.org/wiki/Mostow-Starrheit>

Frage. Sind die Volumina von hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten rationale oder irrationale Zahlen?