Les variétés fibrées de dimension trois et les variétés symplectiques de dimension quatre

Stefan Friedl
(avec Stefano Vidussi)

Paris VII, Mai 2009

pull back
induces an isomorphism

Les variétés fibrées.

Définition. Soit N une variété de dimension trois. Nous supposons que N est orientable, N est sans bord ou que le bord est torique. Soit $N \in H^1(N;\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(N),\mathbb{Z})$. Nous disons que le pair (N,ϕ) est fibré s'il existe une fibration $p : N \to S^1$ telle que $p_* = \phi$.

Lemme. Soit $\Sigma \subset N$ une surface dual à ϕ de genre minimal. Les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) (N,ϕ) est fibré
(2) il existe une forme η fermée telle que $\eta \neq 0$ partout et telle que $[\eta] = \phi$
(3) $N \setminus \nu\Sigma \cong \Sigma \times [0,1]$
(4) les applications $\pi_1(\Sigma) \xrightarrow{\iota_\pm} \pi_1(N \setminus \Sigma)$ sont des isomorphismes
(5) le revêtement qui correspond à $\mathrm{Ker}(\phi)$ est égale à $\Sigma \times \mathbb{R}$

Question. Comment est-ce qu'on peut déterminer si (N, ϕ) est fibré?

Le polynôme d'Alexander.

Soit (N, ϕ) comme au–dessus. Nous considerons le module d'Alexander:

$H_1(N; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) = H_1(C_*(\tilde{N}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(N)]} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) = H_1($revête

où $C_*(\tilde{N})$ est le complexe de chenes du revêtement universel de N et $\mathbb{Z}[\pi_1(N)]$ est l'algèbre du groupe $\pi_1(N)$. Si $H_1(N; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) = \oplus \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/p_i(t)$ alors nous définissons

$$\Delta_{N,\phi} = \prod p_i(t) \text{le polynôme d'Alexander}$$

Example. Si K est un noeud est $\phi : H_1(S^3 \backslash \nu K) \to \mathbb{Z}$ surjective, alors $\Delta_{S^3 \backslash \nu K, \phi} = \Delta_K$.

Le polynôme d'Alexander est les varietés fibrées.

Proposition. Soit (N,ϕ) fibré. Alors $\Delta_{N,\phi}$ est un polynôme unitaire (ça veut dire le coefficient du terme de plus haut degré est 1) est

$$\text{deg}(\Delta_{N,\phi}) = ||\phi||_T + 1\text{où}2.$$

Ici $||\phi||_T$ est la norme de Thurston de ϕ, ça veut dire (plus ou moins) que

$$||\phi||_T = \min(-\chi(\Sigma)\,|\,\Sigma \text{ dual à}\phi).$$

Dèmonstration. Soit (N,ϕ) fibré et soit Σ la fibre de la fibration. Alors

$H_1(N;\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) = H_1(\text{revêtement qui correspond à } \phi) =$

Soit M la matrice de l'action de t sur $H_1(\Sigma)$, alors

$$\Delta_{N,\phi} = \det(t \cdot \text{id} - A).$$

Maintenant c'est évident que $\Delta_{N,\phi}$ est un polynôme unitaire est

$$\text{deg}(\Delta_{N,\phi}) = 2\text{genre}(\Sigma) = ||\phi||_T + 1\text{où}2.$$

Exemple. Soit K le noeud de tréfle. Le tréfle est fibre est le genre de K est 1. Le polynôme d'Alexander de K est égale à $1-t+t^2$.

Exemple. Soit K le noeud de bretzel $(5,-3,5)$. Le genre de K est égale à 1 est $\Delta_K = 1-3t+t^2$, mais K n'est pas fibré.

Le polynôme d'Alexander twisté.

Soit (N,ϕ) comme au–dessus. Soit $\alpha : \pi_1(N) \to G$ un epimorphisme. (G est toujours un groupe G fini). Nous considerons le module d'Alexander twisté

$$H_1(N;\mathbb{Z}[G][t^{\pm 1}]) = H_1(C_*(\tilde{N}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(N)]} \mathbb{Z}[G][t^{\pm 1}])$$

Si $H_1(N;\mathbb{Z}[G][t^{\pm 1}]) = \oplus \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/p_i(t)$ alors nous définisson

$\Delta^\alpha_{N,\phi} = \prod p_i(t)$le polynôme d'Alexander twisté

Les polnômes d'Alexander twisté sont les polynômes d'Alexander ordinaires des revêvetements finies de N.

Proposition. (Cha, Goda–Kitano–Morifuji, Goda–Pajitnov, F–Kim) Soit (N,ϕ) fibré. Soit $\alpha : \pi_1(N) \to G$ un epimorphisme. Alors $\Delta^\alpha_{N,\phi}$ est un polynôme unitaire est

$$\deg(\Delta_{N,\phi}) = |G| \cdot ||\phi||_T + \dots .$$

Les computations ont démontré que les polynôme twistés déceles très souvent les pairs non–fibrés.

Théorème. (F–Vidussi 2008) Supposons que pour chaque epimorphisme $\alpha : \pi_1(N) \to G$ le polynoôme $\Delta^{\alpha}_{N,\phi}$ est unitaire est

$$\deg(\Delta^{\alpha}_{N,\phi}) = |G| \cdot ||\phi||_T + \dots .$$

Alors (N, ϕ) est fibré.

Avant d'expliquer la démonstration je voudrais donner une application.

Les variétés symplectiques.

Soit W une variété de dimension 4. Une forme symplectique est une 2-forme différentielle ω fermé et non dégénérée, ça veut dire que $\omega \wedge \omega \neq 0$ partout.

Théorème (Thurston) Soit N une variété de dimension trois fibrée, sans bord. Alors $S^1 \times N$ est symplectique.

Dèmonstration. Soit $p : N \to S^1$ une fibration. Nous posons $\phi = p^*(dt)$. Nous pouvons trouves une métrique telle que ϕ est harmonique. Considerons

$$\omega = ds \wedge \phi + *\phi.$$

C'est une 2-forme fermée est

$$\omega \wedge \omega = 2ds \wedge \phi \wedge *\phi \neq 0.$$

Question. Est-ce que la réciproque est vraie? Ça veut dire, si N est une variété de dimension trois est si $S^1 \times N$ est symplectique, est-ce que N est fibrée?

Le premier indice que la réponse à cette question est affirmative était le théorème suivant:

Théorème (Kronheimer, Vidussi) Soit N une variété telle que $S^1 \times N$ est symplectique. Alors il existe $\phi \in H^1(N)$ telle que $\Delta_{N,\phi}$ est unitaire est

$$\deg(\Delta_{N,\phi}) = \cdot||\phi||_T + \dots.$$

Dèmonstration. Si W est une varété symplectique de dimension 4, alors les invariants de Seiberg–Witten sont 'unitaires'. Si $W = S^1 \times N$, alors les invariants de Seiberg–Witten de W sont égale au polynôme d'Alexander de N en plusieurs variables.

Soit W symplectique est $p : \tilde{W} \to W$ un revêtement universel. Alors $p^*(\omega)$ est aussi une forme symplectique puisque les conditions sont locales.

Nous obtenons immédiatement le théorème suivant:

Théorème. Soit N une variété telle que $S^1 \times N$ est symplectique. Alors il existe $\phi \in H^1(N)$ telle que pour chaque epimorphisme $\alpha : \pi_1(N) \to G$ le polynoôme $\Delta^\alpha_{N,\phi}$ est unitaire est

$$\deg(\Delta^\alpha_{N,\phi}) = |G| \cdot ||\phi||_T + \dots.$$

Corollaire. Soit N une variété telle que $S^1 \times N$ est symplectique, alors N est fibrée.

La démonstration.

Rappelons que nous voudrions démontrer le théorème suivant:

Théorème. (F–Vidussi 2008) Supposons que pour chaque epimorphisme $\alpha : \pi_1(N) \to G$ le polynoôme $\Delta^\alpha_{N,\phi}$ est unitaire est

$$\deg(\Delta^\alpha_{N,\phi}) = |G| \cdot ||\phi||_T + \dots.$$

Alors (N, ϕ) est fibré.

Théorème A. Supposons que pour chaque epimorphisme $\alpha : \pi_1(N) \to G$ le polynoôme $\Delta^{\alpha}_{N,\phi}$ est unitaire est

$$\deg(\Delta^{\alpha}_{N,\phi}) = |G| \cdot ||\phi||_T + \dots .$$

Soit Σ une surface dual à ϕ de genre minimal, alors les application $\iota_{\pm} : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(N \setminus \nu\Sigma)$???? un isomorphisme des groupes pro–résolubles.

Ça veut dire, que pour chaque groupe S résoluble fini les applications

$$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), S) \to \text{Hom}(\pi_1(N \setminus \nu\Sigma), \Sigma)$$

est bijective.

Par example, si nous prenons les groupes abeliens, alors le théorème dit que les applications $H_1(\Sigma) \to H_1(N \setminus \nu\Sigma)$ sont des isomorphismes. Si K est un noeud alors c'est bien connu que $H_1(\Sigma) \to H_1(N \setminus \nu\Sigma)$ si et seulement si Δ_K est unitaire est $\deg(\Delta_K) = 2\text{genre}(K)$.

Ce théorème n'est pas suffisant puisque $\pi_1(N \setminus \nu\Sigma)$ en general n'est pas résiduellement résoluble. Rapelons qu'un groupe π est résiduellement résoluble s'il existe une filtration

$$\pi \supset \pi_1 \supset \pi_2 \supset \dots$$

telle que
(1) $\pi_i \subset \pi$ est normal est d'indice fini,
(2) $\cap \pi_i = \{e\}$,
(3) π/π_i est résoluble.

Théorème B. Soit N une variété de dimension trois quelconque. Alors $\pi_1(N)$ est virtuellement résiduellement p. Ça veut dire, il exist un sous-groupe $\pi' \subset pi_1(N)$ d'indice fini est un nombre premier p tel que π' est residuellement p.

Le théoréme est une generalization du fait bien–connu que les groupe linéaires (par exemple les groupes des variétés hyperboliques) sont virtuellement résiduellement p.

Desormais il suffit de considerer les variétés telles que $\pi_1(N)$ est résiduallement p (ce qui implique que $\pi_1(N)$ est résiduallement résoluble).

Théorème C. Soit $\Sigma \subset N$ une surface de genre minimal. Supposons que
(1) les application $\iota_\pm : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(N \setminus \nu\Sigma)$???? un isomorphisme des groupes pro–résolubles, (2) le groupe $\pi_1(N \setminus \nu\Sigma)$ est résiduellement résoluble, alors $N \setminus \nu\Sigma$ est un produit.

La réunion de Théorème A, B et C donne la démonstratio
du théorème.

Quelques remarques sur la démonstration du théorème C.

Définition. Soit π un group. Nous disons que π est RFRS (résiduellement fini, rationnellement résoluble) s'il existe une filtration

$$\pi \supset \pi_1 \supset \pi_2 \supset \dots$$

telle que
(1) $\pi_i \subset \pi$ est normal est d'indice fini,
(2) $\cap \pi_i = \{e\}$,
(3) l'application $\pi_i \to \pi_i/\pi_{i+1}$ se factorise par $\pi_i \to H_1(\pi_i)/\text{torsion} \to \pi_i/\pi_{i+1}$.

Par exemple les groupes libres et les groupes de surfaces sont RFRS.

Théoréme (Agol). Soit N une variété de dimension trois t. q. $\pi_1(N)$ est RFRS. et $\phi \in H^1(N;\mathbb{Z})$ une classe non–fibrée. Alors il existe un revêtement $p : N' \to N$ résoluble t.q. $p^*(\phi)$ est presque fibrée, plus exactement, $p^*(\phi)$ est au bord d'un cône fibré de N'.