Analysis III - Wintersemester 2015

Stefan Friedl

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skript. Die Vorlesung besteht aus zwei Teilen, der Funktionentheorie sowie der Integrations- und Maßtheorie. Die erste Teil der Vorlesung über Funktionentheorie orientiert sich an

Jänich: Funktionentheorie - Eine Einführung, und
Fritzsche: Grundkurs Funktionentheorie.

Der zweite Teil über Maß- und Integrationstheorie basiert auf

Forster: Analysis III.

KAPITEL 1

Funktionentheorie

1. Die komplexen Zahlen

Die Funktionentheorie behandelt die Theorie der komplexen Funktionen, das heißt der komplex-wertigen Funktionen auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$. In diesem Kapitel erinnern wir zuerst an die Definition der komplexen Zahlen, und wir erinnern uns dann an einige der Eigenschaften und Aussagen, welche wir schon in Analysis I und Analysis II nachgewiesen hatten.

1.1. **Der Körper der komplexen Zahlen.** Die *Menge der komplexen Zahlen* ist gegeben durch

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

dies ist die Menge aller formalen Summen $a + bi$, wobei i ein festgewähltes Symbol ist. Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir hierbei $a + 0i = a$ und $0 + ai = ai$. Wir fassen also die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen auf.

Wir können komplexe Zahlen wie folgt addieren

$$(x + yi) + (x' + y'i) := (x + x') + (y + y')i, \qquad \text{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R},$$

und wie folgt mit einem Skalar, d.h. mit einer reellen Zahl, multiplizieren

$$\lambda \cdot (x + yi) := \lambda x + \lambda yi, \qquad \text{wobei } x, y, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Man kann nun leicht überprüfen, dass $\mathbb{C}$ mit dieser Addition und dieser Skalarmultplikation ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum ist. Insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + yi \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von reellen Vektorräumen. Wir stellen uns deswegen die komplexen Zahlen bildlich auch als die 2-dimensionale Ebene vor.

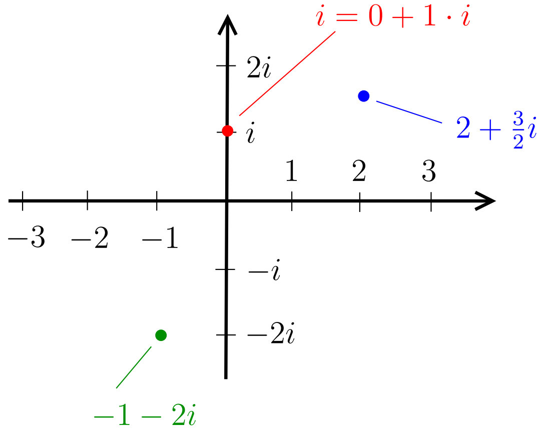
In Analysis I hatten wir folgenden Satz bewiesen, welcher besagt, dass man auf den komplexen Zahlen eine Multiplikation einführen kann, so dass alle Körperaxiome erfüllt sind.

Satz 1.1. *Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit der Addition*

$$(x + yi) + (x' + y'i) := (x + x') + (y + y')i, \qquad \textit{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R},$$

und der Multiplikation

$$(x + yi) \cdot (x' + y'i) := (xx' - yy') + (xy' + x'y)i, \quad \textit{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R}.$$



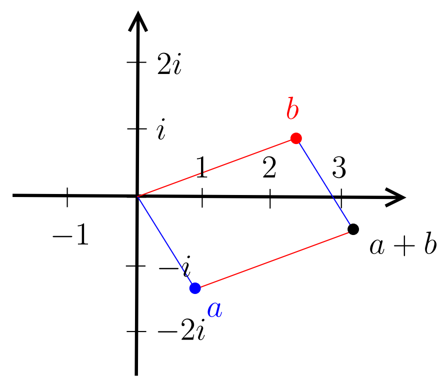


Abbildung 1. Graphische Darstellung von komplexen Zahlen und deren Addition.

ist ein Körper.

Die Multiplikation

$$(x + yi) \cdot (x' + y'i) \;=\; (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$$

erfolgt also durch Ausmultiplizieren und indem wir $i^2 = -1$ setzen. Der vielleicht überraschendste Aspekt ist, dass es zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ ein multiplikativ inverses Element gibt. In der gilt für $x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass

$$(x + iy) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) \;=\; \frac{1}{x^2 + y^2}(x + iy)(x - iy) \;=\; \frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2) \;=\; 1.$$

In anderen Worten, es ist

$$(x + iy)^{-1} \;=\; \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy).$$

Wir führen jetzt weitere Definitionen ein. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Re}(z) & := & x & \text{der } \textit{Realteil von } z, \\ \mathrm{Im}(z) & := & y & \text{der } \textit{Imaginärteil von } z, \\ \overline{z} & := & x - iy & \text{die } \textit{zu } z \textit{ konjugiert komplexe Zahl}. \end{array}$$

Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ wird oft als z *quer* bezeichnet. Die geometrische Bedeutung dieser Definitionen wird in Abbildung 2 skizziert. Durch elementares Nachrechnen kann man leicht zeigen, dass für $w, z \in \mathbb{C}$ folgende Aussagen gelten

$$\begin{array}{llcl@{\qquad\qquad}lrcl} (1) & \mathrm{Re}(z) & = & \frac{1}{2}(z + \overline{z}), & (3) & \overline{w + z} & = & \overline{w} + \overline{z}, \\ (2) & \mathrm{Im}(z) & = & \frac{1}{2i}(z - \overline{z}), & (4) & \overline{wz} & = & \overline{w} \cdot \overline{z}. \end{array}$$

Es sei $z = x + yi$ eine komplexe Zahl. Wir bezeichnen dann $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ als den *Betrag von* z.[1] Das folgende Lemma fasst einige Eigenschaften des Betrags von komplexen

[1]In anderen Wort, $|z|$ ist gerade die euklidische Norm von $z = x = iy$ aufgefasst als Punkt in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

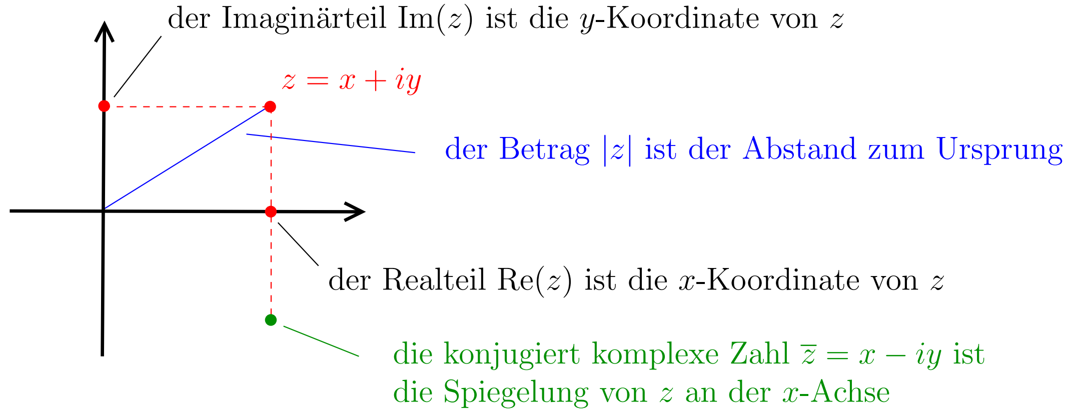


Abbildung 2. Die geometrische Bedeutung von Realteil, Imaginärteil und konjugiert komplexer Zahl.

Zahlen zusammen. Der Beweis des Lemmas ist elementar und verbleibt eine freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 1.2. *Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{llcll}
(1) & |z| & \geq & 0 & \textit{und } |z| = 0 \textit{ genau dann, wenn } z = 0, \\
(2) & |z| & = & \sqrt{z \cdot \overline{z}}, & \\
(3) & \textit{für } z \neq 0 \textit{ gilt } z^{-1} & = & \frac{1}{|z|^2}\overline{z} & \\
(4) & |w \cdot z| & = & |w| \cdot |z|, & \textit{insbesondere ist } |-z| = |z|, \\
(5) & |w + z| & \leq & |w| + |z| & (\textit{Dreiecksungleichung}), \\
(6) & |z| & \geq & |\operatorname{Re}(z)| & \textit{und } |z| \geq |\operatorname{Im}(z)|.
\end{array}$$

Aus den Eigenschaften (1), (4) und (5) erhalten wir sofort folgendes Korollar.

Korollar 1.3. *Der reelle Vektorraum $\mathbb{C}$ mit dem Betrag ist ein normierter Vektorraum. Insbesondere ist $\mathbb{C}$ mit der Abstandsfunktion $d(z, w) = |z - w|$ ein metrischer Raum.*

Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{C}$ durchgehend als metrischen Raum bezüglich der Abstandsfunktion $d(z, w) = |z - w|$. Insbesondere übertragen sich alle Aussagen aus der Analysis II für metrische Räume auf die komplexen Zahlen.

1.2. **Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$.** Wir erinnern noch an ein paar weitere Definitionen aus der Analysis II.

(1) Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen[2]

$$D_r(z) := \{ w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r \}$$

[2]In Analysis II hatten wir die gleiche Menge mit $B_r(z)$ bezeichnet. Der Wechsel von 'B' auf 'D' rührt daher, dass wir in Analysis II allgemeine metrische Räume betrachtet hatten, und wir uns die Menge als Kugeln oder Bälle vorgestellt haben. Im komplexen, d.h. im reell 2-dimensionalen Fall, sind diese Mengen jedoch Scheiben und wir bezeichnen diese mit 'D' für 'diskus' oder 'disk'.

als die *offene r-Scheibe um z*.

(2) Wir sagen eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist *offen*, wenn es zu jedem $z \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $D_r(z)$ noch ganz in U liegt. Beispielsweise sind $\mathbb{C}$ und die leere Menge offen. Zudem kann man leicht zeigen, dass jede offene Scheibe in der Tat offen im obigen Sinne ist.

(3) Wir sagen $U \subset \mathbb{C}$ ist eine *Umgebung von $z \in \mathbb{C}$*, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $D_r(z) \subset U$.

(4) Eine Menge $X \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $\mathbb{C} \setminus X$ offen ist. Beispielsweise sind $\mathbb{C}$ und $\emptyset$ auch wiederum abgeschlossene Mengen. Für $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir

$$\overline{D_r(z)} \;:=\; \big\{ w \in \mathbb{C} \,\big|\, |w - z| \le r \big\}$$

als die *abgeschlossene r-Scheibe um z*. In Übungsblatt 0 werden wir sehen, dass $\overline{D_r(z)}$ in der Tat eine abgeschlossene Teilmenge ist.

(5) Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir

$$\mathring{X} \;:=\; \big\{ z \in \mathbb{C} \,\big|\, \text{es gibt ein } \epsilon > 0, \text{ so dass } D_\epsilon(z) \subset X \big\}$$

als das *Innere von X*.

(6) Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir

$$\overline{X} \;:=\; \big\{ z \in \mathbb{C} \,\big|\, \text{für alle } \epsilon > 0 \text{ gilt } D_\epsilon(z) \cap X \ne \emptyset \big\}$$

als den *Abschluß von X*. In Übungsblatt 0 werden wir sehen, dass $\overline{D_r(z)}$ in der Tat der Abschluß von $D_r(z)$ ist. Zudem werden wir sehen, dass der Abschluß einer Menge immer abgeschlossen ist.

Wir führen nun den Rand einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ ein.[3]

Definition. Es sei Y eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist ein *Randpunkt von Y*, wenn jede Scheibe $D_r(z)$ um z sowohl einen Punkt von Y als auch einen Punkt vom Komplement $\mathbb{C} \setminus Y$ enthält. Die Menge aller Randpunkte von Y heißt der *Rand* von Y und wird mit ∂Y bezeichnet.

Beispiel. In Übungsblatt 1 werden wir sehen, dass der Rand einer Scheibe (offen oder abgeschlossen) der zugehörige 'Randkreis' ist. Genauer gesagt, für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ gilt

$$\partial D_r(z) \;=\; \big\{ w \in \mathbb{C} \,\big|\, |w - z| = r \big\}$$

sowie

$$\partial \overline{D_r(z)} \;=\; \big\{ w \in \mathbb{C} \,\big|\, |w - z| = r \big\}.$$

Es folgt leicht aus den Definitionen, dass für ein $X \subset \mathbb{C}$ der Abschluß$\overline{X}$ gegeben ist durch $\overline{X} = X \cup \partial X$. Ebenso leicht zeigt man, dass $X \setminus \partial X$ das Innere von X ist.

[3]Der Begriff vom Rand kann auch ganz analog für allgemeine metrische Räume eingeführt werden, in der Tat war dies der Bestandteil eines 'inoffiziellen' Kapitels der Analysis II Vorlesung. Der Einfachheit halber bleiben wir jetzt aber beim Spezialfall.

1.3. **Konvergenz von Folgen und Reihen von komplexen Zahlen.** Wir hatten gerade in Korollar 1.3 gesehen, dass $\mathbb{C}$ mit der Betragsfunktion $|-|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein normierter Vektorraum. Wir können nun die verschiedenen Definitionen und Ergebnisse aus der Analysis I und Analysis II über konvergente Folgen auf die komplexen Zahlen übertragen. Es sei beispielsweise (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Die Definition von Konvergenz im metrischen Raum $\mathbb{C}$ besagt, dass

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ |z_n - z| < \epsilon.$$

Für die Konvergenz von Folgen von komplexen Zahlen gelten fast die gleichen Aussagen wie für die Konvergenz von reellen Folgen. Insbesondere gilt:

(1) Wenn eine komplexe Folge konvergiert, dann ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.
(2) Eine komplexe Folge (z_n), welche konvergiert, ist auch beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen von komplexen Zahlen. Dann gilt mit den gleichen Beweis wie in Analysis I, dass

(3) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

(5) es sei $\lambda \in \mathbb{C}$, dann ist
$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n,$$

(6) wenn $b_n \neq 0$ für alle n und wenn zudem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

(7) es ist
$$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

Der folgende Satz aus der Analysis I besagt nun, dass man die Konvergenz von Folgen von komplexen Zahlen auf die Konvergenz von den Real- und Imaginärteilen zurückführen kann.

Satz 1.4. *Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt* [4]

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z).$$

Die Definition einer Cauchy-Folge von komplexen Zahlen ist wort-wörtlich die Gleiche wie für reelle Folgen, d.h.

$$(z_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n,m\geq N}{\forall}\ |z_n - z_m| < \epsilon.$$

[4] Die linke Seite betrifft die Konvergenz von einer Folge von komplexen Zahlen, während die rechte Seite von der Konvergenz von zwei Folgen von reellen Zahlen handelt.

Nachdem die reellen Zahlen vollständig sind, und nachdem wir die Konvergenz von Folgen von komplexen Zahlen auf die Konvergenz von Folgen von reellen Zahlen zurückführen kann, erhalten wir folgenden Satz.[5]

Satz 1.5. *Jede Cauchy-Folge von komplexen Zahlen konvergiert in $\mathbb{C}$.*

Für eine Folge (z_n) von komplexen Zahlen definieren wir wiederum die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ als die Folge der Partialsummen, d.h. es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \;:=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} z_n.$$

Beispielsweise hatten wir in Analysis I gesehen, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \;=\; \frac{1}{1-z} \qquad \text{‘geometrische Reihe’}$$

Für konvergente Reihen gelten dann die üblichen Rechenregeln. Zudem verträgt sich nach Lemma 1.4 Reihenbildung mit komplexer Konjugation. D.h. für eine konvergente $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ Reihe von komplexen Zahlen gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_n} \;=\; \overline{\sum_{n=0}^{\infty} z_n}.$$

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ von komplexen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ der Beträge konvergiert. In Analysis I hatten wir gesehen, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Zudem hatten wir das Majorantenkriterium und das Quotientenkriterium für die absolute Konvergenz von Reihen formuliert und bewiesen.

Beispielsweise folgt aus dem Quotientenkriterium, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Exponentialreihe

$$e^z \;:=\; \exp(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;\in \mathbb{C}$$

absolut konvergiert. Wir hatten zudem bewiesen, dass für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z+z') \;=\; \exp(z)\cdot\exp(z').$$

Außerdem folgt aus der obigen Aussage über die komplexe Konjugation, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(\overline{z}) \;=\; \overline{\exp(z)}.$$

Wir haben jetzt also gesehen, dass viele Definitionen und Aussagen über reelle Folgen und Reihen problemlos auf Folgen und Reihen von komplexen Zahlen übertragen werden können. Insbesondere alle Aussagen, welche nur mit dem Absolutbetrag $|\;|$ von reellen Zahlen formuliert wurden, übertragen sich problemlos. Allerdings können die Definitionen

[5] Der Satz wurde etwas ausführlicher in Analysis I bewiesen.

und Aussagen über reelle Zahlen, Folgen und Reihen, welche die Anordnung $>$ verwenden, *nicht* auf die komplexen Zahlen übertragen werden. Insbesondere gilt:

(1) es gibt *kein* Analogon vom Leibniz-Kriterium für komplexe Folgen,
(2) das Supremum und Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist *nicht* definiert,
(3) es macht keinen Sinn zu sagen, dass eine Folge von komplexen Zahlen (z_n) bestimmt gegen $-\infty$ oder $+\infty$ divergiert.

1.4. **Stetige Funktionen.** Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass wir ohne größere Probleme viele der Definitionen und Sätze von reellen Funktionen auf komplexe Funktionen übertragen können. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion und $z_0 \in D$. Wir definieren

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{z\,\in\, D \text{ mit} \\ |z-z_0|<\delta}}{\forall} \ |f(z)-f(z_0)|<\epsilon.$$

Durch einfaches Umschreiben der Beweise für reelle Funktionen erhalten wir folgende Aussagen:

(1) Es sei $c \in \mathbb{C}$, dann sind die Funktionen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & c \end{array} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$$

stetig.
(2) Die Summe, das Produkt, der Quotient und die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen sind stetig. Insbesondere sind Polynomfunktionen und rationale Funktionen stetig.
(3) Die Einschränkung einer stetigen Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf eine Teilmenge $E \subset D$ ist wiederum stetig.

Der Beweis von der Stetigkeit der reellen Exponentialfunktion überträgt sich auch wortwörtlich auf komplexe Zahlen. Wir erhalten daher, dass auch die komplexe Exponentialfunktion

$$\begin{array}{rccc} \exp\colon & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \exp(z) \end{array}$$

stetig ist.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma, welches ganz analog zum reellen Fall bewiesen wird. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 0. Wir werden dieses Lemma im späteren Verlauf der Vorlesung noch einmal verwenden.

Lemma 1.6. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig. Es sei $z_0 \in U$ mit $f(z_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D_\epsilon(z_0) \cap U$.*

1.5. **Grenzwerte von komplexen Funktionen.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Wir sagen $z \in \mathbb{C}$ ist ein *Häufungspunkt von* U, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $w \neq z \in U$ mit $|z - w| < \epsilon$ gibt.

Beispiel.

Menge	Häufungspunkte
$D_r(z)$	$\overline{D_r(z)}$
$\overline{D_r(z)}$	$\overline{D_r(z)}$
$\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$	$\mathbb{C}$
$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{0\}$

Menge	Häufungspunkte
$\mathbb{Z}$	$\emptyset$
(a,b)	$[a,b]$
$[a,\infty)$	$[a,\infty)$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$

Es sei nun $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von U. Für $w \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = w \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{z \neq z_0 \in D_\delta(z_0) \cap U}{\forall} |g(z) - w| < \epsilon.$$

Wenn solch ein w existiert, dann nennen wir diesen den *Grenzwert* von f am Punkt z_0. In Übungsblatt 0 werden wir sehen, dass der Grenzwert, wenn er existiert, eindeutig bestimmt ist. Wenn $z_0 \in U$, dann folgt zudem sofort aus den Definitionen, dass

$$g \text{ stetig im Punkt } z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0).$$

Zudem schreiben wir

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{C>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{z \neq z_0 \in D_\delta(z_0) \cap U}{\forall} |g(z)| \geq C.$$

Bemerkung. In der Definition von $\lim_{z \to z_0} g(z) = \infty$ betrachten wir nur den *Betrag* der Funktion $g(z)$. Dies führt zu der etwas verwirrenden Situation, dass

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} \quad = \quad -\infty, \quad \text{wenn } f \text{ als reelle Funktion aufgefasst wird,}$$

aber

$$\lim_{z \to 0} -\frac{1}{z^2} \quad = \quad \infty, \quad \text{wenn } f \text{ als komplexe Funktion aufgefasst wird.}$$

Zudem gilt

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \quad = \quad \infty, \quad \text{wenn } f \text{ als komplexe Funktion aufgefasst wird.}$$

In dieser Vorlesung werden wir nur den Grenzwertbegriff für komplexe Funktionen verwenden.

Im Folgenden führen wir noch den Grenzwert für $z \to \infty$ ein. Es sei also $f\colon U \to \mathbb{C}$ wiederum eine Funktion. Für $a \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{D \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{z \in U \text{ mit } |z| \geq D}{\forall} |f(z) - a| < \epsilon$$

und wir definieren

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{C>0}{\forall} \ \underset{D \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{z \in U \text{ mit } |z| \geq D}{\forall} |f(z)| \geq C.$$

Wir bezeichnen dann $\lim_{z\to\infty} f(z)$ als den *Grenzwert von* f *für* z *gegen* ∞.

Ein *Polynom von Grad* n ist eine Funktion der Form

$$f(z) \;=\; a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + z_0,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und wobei $a_n \neq 0$. Wir nennen a_n den *höchsten Koeffizienten von* $f(z)$. Zudem sagen wir, dass das Nullpolynom $f(z) = 0$ ein Polynom von Grad -1 ist. Eine *rationale Funktion* ist eine Funktion der Form

$$f(z) \;=\; \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei $p(z)$ und $q(z) \neq 0$ Polynome sind. Folgendes Lemma wird ganz ähnlich wie die analoge Aussage für reelle Polynome und reelle rationale Funktionen bewiesen.

Lemma 1.7. *Es sei* $p(z)$ *eine Polynom mit* $\mathrm{Grad}(p) \geq 1$. *Dann gilt*

$$\lim_{z\to\infty} p(z) \;=\; \infty.$$

Es seien $p(z), q(z) \neq 0$ *zwei Polynome. Dann gilt*

$$\lim_{z\to\infty}\frac{p(z)}{q(z)} \;=\; \begin{cases} 0, & \textit{wenn } \mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q), \\ \dfrac{\textit{höchster Koeffizient von } p}{\textit{höchster Koeffizient von } q}, & \textit{wenn } \mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Grad}(q), \\ \infty, & \textit{wenn } \mathrm{Grad}(p) > \mathrm{Grad}(q). \end{cases}$$

Beispielsweise gilt

$$\lim_{z\to\infty}\frac{3z^2+1}{5z^2-2z+7} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 1.7}}}{=} \frac{\text{höchster Koeffizient von } 3z^2+1}{\text{höchster Koeffizient von } 5z^2-2z+7} \;=\; \frac{3}{5}.$$

2. Holomorphe Funktionen

2.1. **Definition von holomorphe Funktionen und erste Eigenschaften.** Viele Definitionen übertragen sich ganz natürlich von den reellen Funktionen auf die komplexen Funktionen. Dies gilt beispielsweise auch für die Differenzierbarkeit.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $z_0 \in U$. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar im Punkt* $z_0 \in U$, wenn der Grenzwert

$$\frac{d}{dz}f(z_0) \;:=\; f'(z_0) \;:=\; \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \;\in \mathbb{C}$$

existiert. Wenn f in allen Punkten komplex differenzierbar ist, dann nennen wir die Funktion *komplex differenzierbar* oder kürzer, *holomorph*. Zudem nennen wir dann die Funktion

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f'(z) \end{array}$$

die *Ableitung von* f. Ganz analog führen wir auch k-mal komplex differenzierbar ein, und bezeichnen die k-te komplexe Ableitung mit $f^{(k)}$.

Genau wie in Analysis I zeigt man nun folgenden Satz.

Satz 2.1. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ holomorph, wobei*

$$\begin{array}{rcll} (f+g)' & = & f'+g' & \qquad (\textit{Summenregel}) \\ (f\cdot g)' & = & f'\cdot g + f\cdot g' & \qquad (\textit{Produktregel}). \end{array}$$

Wenn zudem $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ holomorph mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \;=\; \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (\textit{Quotientenregel})$$

Beispiel.

(1) Man kann leicht 'per Hand' zeigen, dass die konstanten Funktionen $f(z) = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und die Funktion $f(z) = z$ holomorph sind. Es folgt dann aus Satz 2.1, dass auch Polynome und rationale Funktionen holomorph sind.
(2) Mit Beispiel (1), der Produktregel und einem leichten Induktionsargument kann man zeigen, dass
$$\tfrac{d}{dz}z^n \;=\; nz^{n-1}.$$
(3) In Übungsblatt 1 werden wir sehen, dass die Funktion $f(z) = \overline{z}$ und $g(z) = |z|$ *nicht* holomorph sind.

Zudem gilt auch die Kettenregel. Der Beweis ist dabei wiederum ganz analog zum reellen Fall.

Satz 2.2. *Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen, es seien $f\colon U \to \mathbb{C}$ und $g\colon V \to \mathbb{C}$ holomorphe Abbildungen mit $f(U) \subset V$. Dann ist auch $g \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei*

$$(g\circ f)'(z) \;=\; g'(f(z))\cdot f'(z).$$

Wir erinnern nun noch an die 'klein-o' Notation aus der Analysis II.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung von 0 und es seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wir definieren

$$f(z) \;=\; o(g(z)) \quad\Longleftrightarrow\quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in D_\delta(0)\cap U}{\forall} |f(z)| \le \epsilon |g(z)|.$$

Für Funktionen $f, g, h\colon U \to \mathbb{R}$ definieren wir auch

$$f(z) \;=\; g(z) + o(h(z)) \quad :\Longleftrightarrow \quad f(z) - g(z) \;=\; o(h(z)).$$

Sehr vereinfacht gilt $f(z) = o(g(z))$, wenn $|f(z)|$ beliebig viel kleiner als $|g(z)|$ ist in kleinen Umgebungen von 0.

Beispiel. Auf $U = \mathbb{C}$ gilt beispielsweise, dass

$$z^3 \;=\; o(z^2),$$

denn für jedes $\epsilon > 0$ setzen wir $\delta = \epsilon$, und dann gilt für ein beliebiges $z \in D_\delta(0)$, dass

$$|z^3| \;=\; |z^2|\cdot|z| \;<\; |z^2|\cdot\delta \;=\; |z^2|\cdot\epsilon.$$

Folgendes Lemma gibt nun eine Umformulierung von komplexer Differenzierbarkeit. Der Beweis dazu folgt leicht aus den Definitionen und ist eine freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 2.3. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, es sei $z_0 \in U$ und es sei $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

f komplex differenzierbar im Punkt z_0 mit $f'(z_0) = a \Longleftrightarrow f(z_0 + h) = f(z_0) + h\cdot a + o(h)$.

2.2. **Potenzreihen.** Wir erinnern an den Begriff der Potenzreihen, welche wir schon in Analysis I eingeführt hatten. Im Folgenden sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von *komplexen Zahlen* und es sei $a \in \mathbb{C}$. Eine *Potenzreihe* ist ein formaler Ausdruck von der Form

$$f \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

wobei z eine Variable ist. Wir interessieren uns für die Menge der komplexen Zahlen, für welche die Potenzreihe konvergiert.

Beispiel.

(1) Betrachten wir die Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:
  (a) Wenn $|z| < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ nachdem die gerade die geometrische Reihe ist.
  (b) Wenn $|z| \ge 1$, dann ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, keine Nullfolge, das heißt die Reihe divergiert.

(2) Betrachten wir nun die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann können wir folgende Beobachtungen machen:
  (a) Wenn $|z| < 1$ dann konvergiert die Potenzreihe nach dem Quotientenkriterium.
  (b) Wenn $|z| > 1$ dann divergiert die Reihe, nachdem $\frac{z^n}{n}$ keine Nullfolge ist.
  (c) Für $z = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe.

(d) Für $z = -1$ konvergiert die Potenzreihe nachdem Leibniz-Kriterium.
(e) Für $z = i$ hatten wir in Übungsblatt 9 von Analysis I gesehen, dass die Reihe konvergiert.

Im allgemeinen ist es kniffelig zu bestimmen, für welche z's auf dem Einheitskreis die Reihe $f(z)$ konvergiert.[6]

Definition. Es sei $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann nennen wir

$$R := \sup \left\{ |z-a| \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ konvergiert } \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

den *Konvergenzradius der Potenzreihe* $f(z)$.

Beispiel. In der Diskussion oben und in Analysis I hatten wir folgende Konvergenzradien bestimmt.

(1) Der Konvergenzradius der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist eins.
(2) Der Konvergenzradius der Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist ∞.

Bemerkung. In Analysis I hatten wir die Hadamardsche Formel formuliert, welche es erlaubt, zumindest im Prinzip, den Konvergenzradius direkt aus den Koeffizienten abzulesen. Genauer gesagt, es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Dann besagt die Hadamardsche Formel, dass[7]

$$\text{Konvergenzradius der Potenzreihe } \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \;=\; \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}$$

Hier verwenden wir die Konvention, dass $0^{-1} := \infty$ und $\infty^{-1} := 0$. Wir werden die Hadamardsche Formel im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht verwenden.

In Kapitel 17 der Analysis I hatten wir folgenden Satz bewiesen.

Satz 2.4. *Es sei R der Konvergenzradius einer Potenzreihe*

$$f \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} |z-a| < R &\implies f(z) \text{ konvergiert}, \\ |z-a| > R &\implies f(z) \text{ divergiert}. \end{aligned}$$

---

[6] Es sei z eine k-te Einheitswurzel. Dann konvergiert die Potenzreihe wenn k gerade ist und die Potenzreihe divergiert wenn k ungerade.

[7] Hierbei ist der Limes superior einer Folge von reellen Zahlen a_n wie folgt definiert:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}.$$

Die Folge auf der rechten Seite ist monoton fallend. Die Folge konvergiert also gegen eine reelle Zahl oder sie divergiert bestimmt gegen $-\infty$.

Zudem gelten folgende Aussagen

(1) *für alle $s < R$ konvergiert $f(z)$* [8] *auf der abgeschlossenen Scheibe $\overline{D_s(a)}$ absolut und gleichmäßig,* [9]

(2) *die Funktion $z \mapsto f(z)$ ist auf der offenen Scheibe $D_R(a)$ stetig.*

Wie wir am Beispiel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ gesehen hatten, können wir keine allgemeine Aussage über die Konvergenz einer Reihe für komplexe Zahlen z mit $|z-a| = R$ treffen.

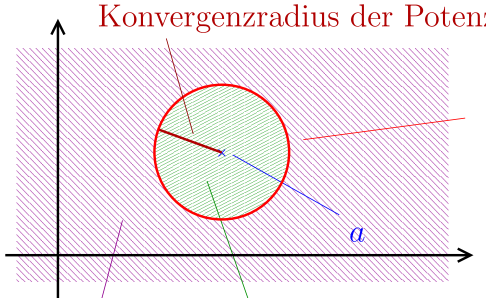


Abbildung 3. Illustration von Satz 2.4.

Das folgende Lemma zeigt, dass bestimmte Abänderungen einer Potenzreihe den Konvergenzradius nicht abändern. Die Aussagen folgen dabei entweder leicht aus den Definitionen oder aus Lemma 17.5 aus der Analysis I.

Lemma 2.5. *Es sei (c_n) eine Folge von komplexen Zahlen. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle Polynome $p(n)$, dass folgende Reihen den gleichen Konvergenzradius besitzen:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|(z-a)^n \text{ sowie } \sum_{n=0}^{\infty} p(n)c_n(z-a)^n.$$

Es sei nun $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Wir hatten gerade gesehen, dass die Funktion $f(z)$ auf $D_R(a)$ stetig ist. Im Folgenden werden wir die

[8] D.h. wir betrachten die Funktionenfolge $f_k(z) := \sum_{n=0}^{k} c_n(z-a)^n$.

[9] Für $D \subset \mathbb{C}$ und eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ definieren wir hierbei, ganz analog zu reellen Funktionen, die Norm von f als

$$\|f\| := \sup\big\{|f(z)| \,\big|\, z \in D\big\}.$$

Für eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n\colon U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ definieren wir nun, ganz analog zum Fall von reellen Funktionen, dass

$$(f_n) \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N}{\forall} \ \|f_n - f\| < \epsilon.$$

deutlich stärkere Aussage beweisen, dass f auch holomorph ist. Es folgt aus Lemma 2.5, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ ebenfalls R beträgt. Der folgende Satz besagt nun, dass diese Potenzreihe, wie man sich das naiv wünschen würde, in der Tat die Ableitung von f ist.

Satz 2.6. *Es sei*

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f auf $D_R(a)$ holomorph mit Ableitung

$$f'(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} \qquad \text{‘gliedweises ableiten’.}$$

Bemerkung. Für *reelle* Potenzreihen hatten wir in Analysis I Satz 17.7 gezeigt, dass die zugehörige *reelle* Funktion differenzierbar ist. Wir können diesen Beweis aus der Analysis I allerdings nicht auf den komplexen Fall übertragen, weil wir damals den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet hatten, welcher uns im jetzigen Fall nicht zur Verfügung steht.

Durch mehrfaches Anwenden von Satz 2.6 erhalten wir sofort folgendes Korollar, welches uns erlaubt die Koeffizienten einer Potenzreihe $f(z)$ durch Ableiten und Einsetzen abzulesen.

Korollar 2.7. *Es sei*

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad = \quad c_n.$$

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 2.6 zu.

Beweis von Satz 2.6. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir nur den Spezialfall $a = 0$. Es sei also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R.

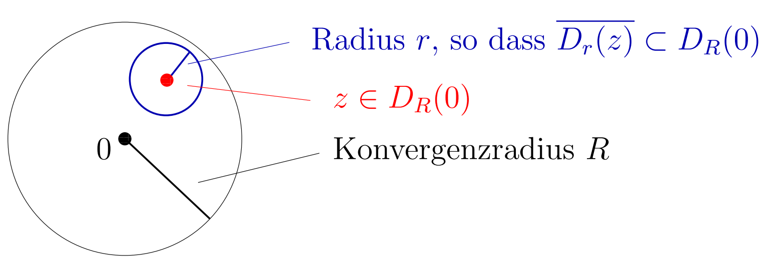


Abbildung 4.

Für den Rest des Beweises sei nun $z \in D_R(0)$ fest gewählt. Der Punkt z liegt also in der offenen Scheibe $D_R(0)$. Es gibt insbesondere ein $r > 0$, so dass $\overline{D_r(z)} \subset D_R(0)$.

Wir wollen zeigen, dass f im Punkt z holomorph ist mit $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$, d.h. wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}\right) \;=\; 0.$$

In der Tat gilt für beliebiges $h \neq 0 \in D_r(0)$, dass

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}\right| \\
= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n\frac{1}{h}\big((z+h)^n - z^n\big) - nc_n z^{n-1}\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} hc_n \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k} h^{n-2-k} z^k\right|
\end{aligned}$$

nachdem $(z+h)^n = z^n + nhz^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k} h^{n-k} z^k$

$$\leq\; |h|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\underbrace{\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}|h|^{n-2-k}|z|^k} \qquad \leq\; |h|\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot n(n-1)\cdot(|h|+|z|)^{n-2}}_{=:\varphi(|h|)}$$

der Term über der geschleiften Klammer erinnert etwas an $(|h|+|z|)^{n\text{-}2}$, in der Tat gilt

$$(|h|+|z|)^{n-2} \;=\; \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}|h|^{n-2-k}|z|^k \;\geq\; \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n(n-1)}\binom{n}{k}|h|^{n-2-k}|z|^k$$

Wir müssen also zeigen, dass dieser Ausdruck im Grenzwert $h \to 0$ verschwindet. Es genügt nun folgende Behauptung zu zeigen.

Behauptung. Die Funktion

$$\begin{aligned}
[0,r] &\;\to\; \mathbb{R}_{\geq 0} \\
s &\;\mapsto\; \varphi(s) := \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot n(n-1)\cdot(s+|z|)^{n-2}
\end{aligned}$$

ist beschränkt.

Wir betrachten nun die Potenzreihe $\varphi(s)$. Es ist

$$\text{Konvergenzradius}\big(\varphi(s)\big) \;\underset{\text{Lemma 2.5}}{=}\; \text{Konvergenzradius}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(s+|z|)^n\right) \;\geq\; R-|z| > r$$

da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ auf $D_{R-|z|}(|z|) \subset D_R(0)$ konvergiert

Es folgt aus Satz 2.4, dass φ auf dem kompakten Intervall $[0,r]$ stetig ist. Die Behauptung folgt nun daraus, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist. $\square$

Beispielsweise folgt nun aus Satz 2.6, dass die Exponentialfunktion

$$e^z \;:=\; \exp(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, und die Ableitung ist wiederum die Exponentialfunktion. Zudem sind die komplexen trigonometrischen Funktionen

$$\sin(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, wobei, wenig überraschend

$$\frac{d}{dz}\sin(z) \;=\; \cos(z) \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dz}\cos(z) \;=\; -\sin(z).$$

2.3. **Der Zusammenhang zwischen reeller Differenzierbarkeit und komplexer Differenzierbarkeit.** Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array}$$

definiert natürlich einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen. Wir werden im weiteren Verlauf der Vorlesung $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ mithilfe von diesem Isomorphismus identifizieren.

Das nächste Lemma besagt, auf welche Weise wir die Multiplikation mit komplexen Zahlen durch Matrizen ausdrücken können.

Lemma 2.8. *Es sei $a+bi$ eine komplexe Zahl. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (a+bi)\cdot z \end{array}$$

eine lineare Abbildung vom reellen Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Bezüglich der Basis $\{1, i\}$ wird diese lineare Abbildung durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

repräsentiert.

Beweis. Der Beweis vom Lemma besteht nur darin, die Definition von einer Matrix, welche eine lineare Abbildung bezüglich einer gegebenen Basis repräsentiert hinzuschreiben. In diesem Fall ist die Basis $\{1, i\}$ und die lineare Abbildung ist die Multiplikation mit $a+bi$. Wir berechnen, dass

$$(a+bi)\cdot \begin{array}{c} 1 \\ + \\ 0\cdot i \end{array} \;=\; \begin{array}{c} a \\ + \\ b\cdot i \end{array} \qquad \text{und } (a+bi)\cdot \begin{array}{c} 0 \\ + \\ 1\cdot i \end{array} \;=\; \begin{array}{c} -b \\ + \\ a\cdot i \end{array}.$$

Wir erhalten nun die gesuchte Matrix aus den Koeffizienten, welche jeweils rechts stehen. $\square$

Es sei nun $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Mit der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ können wir also f auch als Abbildung $U \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Es sei $z_0 \in U$. Wir haben nun zwei verschiedene Begriffe von Differenzierbarkeit am Punkt z_0.

(1) Wir hatten gerade den Begriff von komplex differenzierbar eingeführt.
(2) In Analysis II hatten wir auch den Begriff von reell differenzierbar eingeführt. In unserem jetzigen Zusammenhang ist $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ im Punkt z_0 reell differenzierbar, wenn es eine reelle 2×2–Matrix A gibt, so dass
$$\lim_{v \to 0} \frac{f(z_0 + v) - f(z_0) - Av}{\|v\|} = 0.$$
Wir nennen dann die Matrix A das *Differential* $Df(z_0)$ *von* f *am Punkt* z_0.

Der folgende Satz zeigt nun den Zusammenhang zwischen den beiden Formulierungen von Differenzierbarkeit.

Satz 2.9. *Es sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine Funktion, es sei $z_0 \in U$ und es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*
$$\begin{matrix} f \text{ ist komplex differenzierbar} \\ \text{am Punkt } z_0 \text{ mit Ableitung } a+bi \end{matrix} \iff \begin{matrix} f \text{ ist reell differenzierbar am Punkt } z_0 \\ \text{mit Differential } Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{matrix}$$

In anderen Worten, die Funktion ist komplex differenzierbar, wenn die Funktion reell differenzierbar ist, und das Differential entspricht, im Sinne von Lemma 2.8, gerade der Multiplikation mit einer komplexen Zahl.

Beweis. Das Lemma folgt leicht aus den Definitionen. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument aus. Es gilt
$$\begin{aligned}
\begin{matrix} f \text{ komplex differenzierbar} \\ \text{mit Ableitung } a+bi \end{matrix} &\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - (a+bi)h}{h} = 0 \\
&\iff \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - (a+bi)h}{|h|}}_{\text{komplexer Grenzwert}} = 0 \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 2.8}}}{\iff} \underbrace{\lim_{v \to 0} \frac{f(z_0+v) - f(z_0) - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} v}{\|v\|}}_{\text{reeller Grenzwert}} = 0 \\
&\iff f \text{ reell differenzierbar mit } Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$
□

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f = u + iv\colon U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine reell differenzierbare Funktion mit $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$. Dann gilt

$$Df \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Das Differential ist also von der Form wie in Satz 2.9 genau dann, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Diese Differentialgleichung werden manchmal die *Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen* genannt.

Wir können nun auch die Umkehrregel für holomorphe Funktionen beweisen.

Satz 2.10. (Umkehrregel für holomorphe Funktionen) *Es sei $f\colon U \to V$ eine holomorphe bijektive Abbildung zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Wenn $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} holomorph mit*

$$\big(f^{-1}\big)'(z) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung.

Behauptung. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist holomorph.

Aus Satz 2.9 folgt, dass f insbesondere reell differenzierbar ist mit invertierbaren Differentialen. Es sei nun $z \in V$. Aus Kapitel 9 der Analysis II Vorlesung wissen wir, dass die Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt z reell differenzierbar ist mit Differential

$$Df^{-1}(z) \;=\; Df(f^{-1}(z))^{-1}.$$

Nach Satz 2.9 gibt es $c, d \in \mathbb{R}$, so dass

$$Df(f^{-1}(z)) \;=\; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Es folgt also, dass

$$Df^{-1}(z) \;=\; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{c^2 + d^2} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist also von der Form wie auf der rechten Seite von Satz 2.9. Es folgt daher aus Satz 2.9, dass f^{-1} im Punkt z holomorph ist. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Behauptung. Es ist

$$\big(f^{-1}\big)'(z) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Wir wenden die Kettenregel auf $z = f(f^{-1}(z))$ an. Wir erhalten, dass [10]

$$1 = \big(f(f^{-1}(z))\big)' = f'(f^{-1}(z)) \cdot (f^{-1})'(z) \text{ und damit } \big(f^{-1}\big)'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

□

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma.

Lemma 2.11. *Es sei $f\colon D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. Wenn $f'(z) = 0$ für alle z, dann ist die Funktion $f(z)$ konstant.*

Beweis. Wir fassen f auf als Abbildung von $D_r(z_0) \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Nach Satz 2.9 und der Voraussetzung, dass $f' \equiv 0$ folgt nun, dass das Differential Df dieser Abbildung überall verschwindet. Es folgt dann aus Analysis II Lemma 8.3, dass die Funktion f konstant ist. □

[10] Warum haben wir jetzt eigentlich die erste Behauptung bewiesen?

3. Wegintegrale

3.1. **Komplexwertige Funktionen in einer reellen Variablen.** In Analysis II hatten wir eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (stetig) differenzierbar genannt, wenn die Koordinatenfunktionen (stetig) differenzierbar sind. Zudem hatten wir das Integral von f koordinatenweise eingeführt. Wir verfahren nun ganz analog für Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ indem wir anstatt den Koordinaten nun den Realteil und den Imaginärteil getrennt betrachten.

Genauer gesagt, es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion von dem kompakten Intervall $[a,b]$ nach $\mathbb{C}$. Wir sagen f ist *(stetig) differenzierbar*, wenn der Realteil und der Imaginärteil von f (stetig) differenzierbar sind. Wenn dies der Fall ist, dann schreiben wir

$$f'(t) \quad = \quad \mathrm{Re}(f(t))' + i\,\mathrm{Im}(f(t))'.$$

Beispielsweise gilt

$$(e^{it})' \quad = \quad (\cos(t) + i\sin(t))' = \cos(t)' + i\sin(t)' = -\sin(t) + i\cos(t) = ie^{it}.$$

Zudem definieren wir das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ indem wir den Realteil und den Imaginärteil getrennt integrieren. Genauer gesagt wir definieren

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt \quad := \quad \int\limits_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int\limits_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt \;\in\; \mathbb{C}.$$

Folgendes Lemma gibt eine hilfreiche Abschätzung für Integrale.

Lemma 3.1. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\,dt\right| \;\le\; \int\limits_a^b |f(t)|\,dt.$$

Beweis. Lemma 8.2 aus der Analysis II besagt, dass für eine beliebige stetige Abbildung $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\left\|\int\limits_a^b g(t)\,dt\right\| \;\le\; \int\limits_a^b \|g(t)\|\,dt$$

gilt. Das Lemma folgt nun aus dieser Aussage angewandt auf $n = 2$, denn unter dem Isomorphismus $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ entspricht die euklidische Norm von $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gerade dem Betrag von $x + iy \in \mathbb{C}$. $\square$

3.2. **Die Definition von Wegintegralen.** Wir erinnern zuerst an den Begriff von einem Weg (oder auch Kurve genannt) in einem metrischen Raum. Es sei also X ein metrischer Raum, z.B. $X = \mathbb{C}$ oder $X = \mathbb{R}^n$. Ein *Weg* ist eine stetige Abbildung

$$\gamma\colon [a,b] \to X.$$

Wir verwenden hierbei folgende Notationen und Sprechweisen:

(1) Ein Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.
(2) Für einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to X$ bezeichnen wir mit $|\gamma| = \gamma([a,b])$ die Menge der Bildpunkte von γ.

(3) Für einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $-\gamma$ den Weg, welcher durch

$$\begin{array}{rcl} -\gamma\colon [-b,-a] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (-\gamma)(t) := \gamma(-t) \end{array}$$

gegeben ist.[11]

Wir wenden uns nun Wegen in $\mathbb{C}$ zu.

Definition. Ein *Integrationsweg* ist ein Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, welcher abschnittsweise stetig differenzierbar ist. Dies bedeutet, dass es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ gibt, so dass die Einschränkungen auf die Intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ jeweils stetig differenzierbar sind. (Ein Beispiel von einem Integrationsweg ist in Abbildung 5 skizziert.) [12] Wir definieren die *Länge von* γ[13] als

$$\text{Länge}(\gamma) \;:=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)|\, dt.$$

Es sei nun $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und wir nehmen an, dass γ in U liegt. Wir definieren das *Wegintegral von* f *über* γ als

$$\int_\gamma f(z)\, dz \;:=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \;\in\; \mathbb{C}.$$

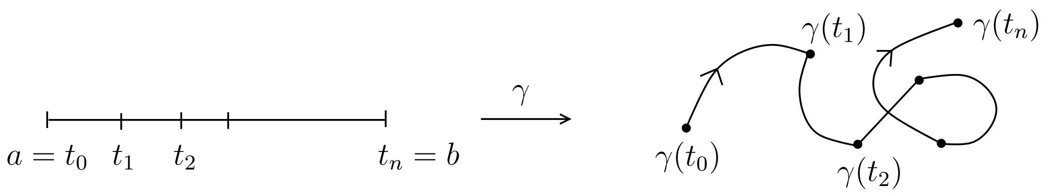


Abbildung 5. Skizze von einem Integrationsweg.

Beispiel. Es sei $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $r > 0$. Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{z}$ und es sei

$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & re^{it} \end{array}$$

der geschlossene Integrationsweg, welcher sich auf dem Kreis von Radius r einmal gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung bewegt. Dann ist γ ein geschlossener Integrationsweg

[11] Der Weg $-\gamma$ durchläuft also die gleichen Bildpunkte, in umgekehrter Richtung.

[12] Der Name Integrationsweg rührt daher, dass man entlang von Integrationswegen stetige Funktionen integrieren kann.

[13] In Analysis II hatten wir eine andere Definition von Länge, und wir hatten dann gezeigt, dass wir die Länge mithilfe dieser Formel bestimmen können. Mit anderen Worten, die jetzige Definition von Länge ist äquivalent zur Definition in Analysis II für abschnittsweise stetig differenzierbare Wege.

mit

$$\text{Länge}(\gamma) \;=\; \int_0^{2\pi} \underbrace{|\gamma'(t)|}_{=|ire^{it}|=r}\,dt \;=\; 2\pi r$$

und das Wegintegral von f über γ beträgt

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \;=\; \int_0^{2\pi} \underbrace{f(\gamma(t))}_{=\frac{1}{re^{it}}}\cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=ire^{it}}\,dt \;=\; \int_0^{2\pi} i\,dt \;=\; 2\pi i.$$

Beispiel. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion und es sei γ der Weg

$$\begin{aligned} \gamma\colon [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto t, \end{aligned}$$

welcher die Punkte a und b auf der reellen Achse von $\mathbb{C}$ verbindet. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{=f(t)}\cdot\underbrace{\gamma'(t)}_{=1}\,dt \;=\; \int_a^b f(t)\,dt.$$

Wir erhalten also das gleiche Integral wie in Kapitel 3.1.

Lemma 3.2. (Standardabschätzung von Wegintegralen) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig, und es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Integrationsweg. Wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass $|f(\gamma(t))| \leq C$ für alle $t \in [a,b]$, dann gilt*

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \;\leq\; \text{Länge}(\gamma)\cdot C.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg ist. In diesem Fall gilt

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \;=\; \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\Big| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 3.1}}}{\leq} \int_a^b \underbrace{\big|f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\big|}_{\leq C\cdot|\gamma'(t)|}\,dt \;=\; C\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \;=\; C\cdot\text{Länge}(\gamma).$$

Der allgemeine Fall kann leicht auf den differenzierbaren Fall zurückgeführt werden. Die Details dazu werden in Übungsblatt 2 ausgeführt. □

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und es sei $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma\circ\varphi\colon [c,d] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(\varphi(t)) \end{aligned}$$

ebenfalls ein Integrationsweg, welcher genau die gleichen Punkte annimmt wie γ. Wir sagen, dieser Integrationsweg geht aus dem Integrationsweg γ durch *Parametertransformation* φ

hervor. Wir sagen die Parametertransformation ist *orientierungserhaltend*, wenn $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Andernfalls sagen wir, dass φ *orientierungsumkehrend* ist.

Folgendes Lemma besagt nun, dass Umparametrisierungen Wegintegrale höchstens um ein Vorzeichen abändern.

Lemma 3.3. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig, und es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Integrationsweg. Zudem sei $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare, bijektive Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz \;=\; \int_{\gamma} f(z)\,dz \quad \textit{wenn } \varphi \textit{ orientierungserhaltend ist}$$

und

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz \;=\; -\int_{\gamma} f(z)\,dz \quad \textit{wenn } \varphi \textit{ orientierungsumkehrend ist.}$$

Etwas vereinfacht gesagt besagt das Lemma, dass sich das Wegintegral nicht verändert, wenn man die Bildpunkte mit einer anderen Geschwindigkeit in der gleichen Richtung 'durchfährt'. Das Wegintegral wechselt das Vorzeichen, wenn man den Weg in der umgekehrten Richtung 'durchfährt'.

Der Beweis von Lemma 3.3 ist ähnlich zum Beweis von Lemma 4.4 in Analysis II.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass der Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to U$ auf dem ganzen Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Definition vom Wegintegral}}}{=} \int_c^d f((\gamma\circ\varphi)(t))\cdot(\gamma\circ\varphi)'(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\cdot\gamma'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach der Substitutionsregel mit } u=\varphi(t)}}{=} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)\,du \;=$$

$$= \begin{cases} \int_a^b f(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)\,du = \int_\gamma f(z)\,dz, & \text{wenn } \varphi \text{ orientierungerhaltend,} \\ \int_b^a f(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)\,du \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vertauschen der Grenzen ändert das Vorzeichen}}}{=} -\int_\gamma f(z)\,dz, & \text{wenn } \varphi \text{ orientierungsumkehrend.} \end{cases}$$

Der Fall, dass γ nur abschnittsweise stetig differenzierbar ist wird ganz analog behandelt, man muss die gleiche Rechnung nur für die verschiedenen Abschnitte durchführen und dann wieder aufaddieren. $\square$

Definition. Es seien $\alpha\colon [a,a+p]\to\mathbb{C}$ und $\beta\colon [b,b+q]\to\mathbb{C}$ zwei Wege mit $\alpha(a+p)=\beta(b)$. Wir bezeichnen dann

$$\begin{array}{rcl}\alpha\cdot\beta\colon [a,a+p+q] & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & \begin{cases}\alpha(t), & \text{wenn } t\in[a,a+p]\\ \beta(t-a-p+b), & \text{wenn } t\in(a+p,a+p+q]\end{cases}\end{array}$$

als die *Verknüpfung von* α *und* β.

In anderen Worten, der Wege $\alpha\cdot\beta$ ist der Weg, welchen man dadurch erhält, dass man zuerst entlang α und danach entlang β läuft.

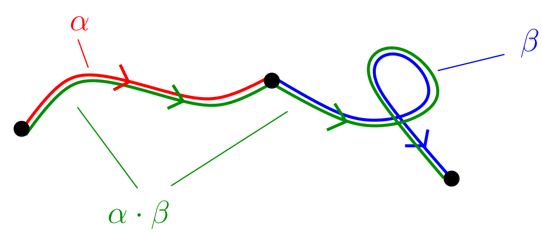


Abbildung 6. Die Verknüpfung von zwei Wegen.

Folgendes Lemma folgt leicht aus den Definitionen. Wir überlassen den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 3.4. *Es sei* $U\subset\mathbb{C}$ *offen und* $f\colon U\to\mathbb{C}$ *eine stetige Funktion. Zudem seien* $\alpha\colon[a,a+p]\to\mathbb{C}$ *und* $\beta\colon[b,b+q]\to\mathbb{C}$ *zwei Integrationswege mit* $\alpha(a+p)=\beta(b)$. *Dann gilt*

$$\int_{\alpha\cdot\beta} f(z)\,dz \;=\; \int_\alpha f(z)\,dz \;+\; \int_\beta f(z)\,dz.$$

Es sei nun $U\subset\mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f\colon U\to\mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen, eine holomorphe Funktion $F\colon U\to\mathbb{C}$ ist eine *Stammfunktion von* f, wenn $F'=f$. Beispielsweise ist für jedes $n\in\mathbb{Z}$ mit $n\neq-1$ eine Stammfunktion von $f(z)=z^n$ gegeben durch die Funktion $F(z)=\frac{z^{n+1}}{n+1}$.

In Analysis I hatten wir gesehen, dass sich Stammfunktionen von reellen Funktionen auf einem Intervall um höchstens eine additive Konstante unterscheiden. Das folgende Lemma, welches sofort aus Lemma 2.11 folgt, besagt nun, dass die analoge Aussage auch für komplexe Funktionen gilt.

Lemma 3.5. *Es sei* $f\colon D\to\mathbb{C}$ *eine Funktion auf einer offenen Scheibe* D. *Stammfunktionen von* f *unterscheiden sich um höchstens eine additive Konstante. Genauer gesagt, wenn* F *und* G *zwei Stammfunktionen sind, dann gibt es ein* $C\in\mathbb{C}$, *so dass* $F(z)=G(z)+C$ *für alle* $z\in D$.

Der folgende Satz besagt, dass man Stammfunktionen von Potenzreihen 'ganz naiv' bestimmen kann.

Satz 3.6. *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann besitzt

$$F(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} \qquad \text{‘gliedweises integrieren’}$$

den gleichen Konvergenzradius R und definiert auf $D_R(a)$ eine Stammfunktion von f. Zudem ist dies die einzige Stammfunktion mit $F(a) = 0$.

Beweis. Es folgt aus Lemma 2.5, dass die Potenzreihe F wiederum den Konvergenzradius R besitzt. Es folgt dann aus Satz 2.6, dass F in der Tat eine Stammfunktion von f ist. Durch Einsetzen sehen wir, dass $F(a) = 0$. Die Eindeutigkeit von F folgt nun aus Lemma 3.5. □

Folgender Satz erlaubt es nun Wegintegrale mithilfe von Stammfunktionen, falls diese existieren, zu bestimmen.

Lemma 3.7. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, welche eine Stammfunktion F besitzt. Dann gilt für jeden Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to U$, dass*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere gilt für einen geschlossenen Integrationsweg γ, dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Beispiel. Auf Seite 25 hatten wir den geschlossenen Integrationsweg

$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & re^{it} \end{array}$$

betrachtet, und wir hatten gesehen, dass

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \;=\; 2\pi i,$$

also insbesondere nicht null ist. Es folgt also aus Lemma 3.7, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *keine* Stammfunktion besitzt.

Beweis. Es sei $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ eine Zerlegung, so dass die Einschränkungen von γ auf die Intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ jeweils stetig differenzierbar sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt &&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\
&\underset{\uparrow}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F \circ \gamma)'(t)\,dt &&\underset{\uparrow}{=} \sum_{i=0}^{n-1} F(\gamma(t_{i+1})) - F(\gamma(t_i)) \;=\; F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

nach der Kettenregel — Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewandt auf den Realteil und den Imaginärteil

Die Aussage über die geschlossenen Integrationswege folgt sofort aus dem ersten Teil und den Definitionen. □

Für $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned}
\gamma(z_0, \ldots, z_n)\colon [0,n] &\to \mathbb{C} \\
t &\mapsto (k+1-t)z_k + (t-k)z_{k+1} \text{ für } t \in [k, k+1]
\end{aligned}$$

den Integrationsweg, welcher für jedes $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ auf dem Intervall $[k, k+1]$ die Punkte z_k und z_{k+1} direkt verbindet. Wenn $z_n = z_0$, dann ist der Integrationsweg natürlich geschlossen. In Analysis II hatten wir einen solchen Integrationsweg auch als Polygonzug bezeichnet.

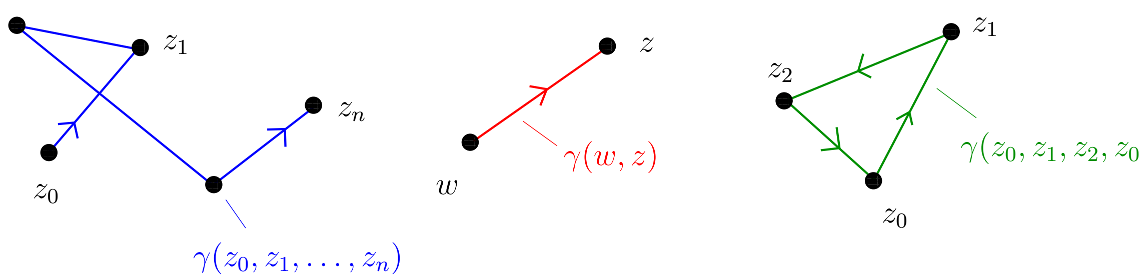


Abbildung 7.

Interessanterweise gilt auch eine Umkehrung von Lemma 3.7. Genauer gesagt, es gilt folgender Satz.

Satz 3.8. *Es sei $U = D_r(a)$ eine offene Scheibe in $\mathbb{C}$ und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) *f besitzt eine Stammfunktion,*
(2) *für jeden geschlossenen Dreiecksweg der Form $\gamma(z_0, z_1, z_2, z_0)$ in U gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Beweis. Es sei also $U = D_r(a)$ eine offene Scheibe in $\mathbb{C}$ und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) hatten wir gerade in Lemma 3.7 bewiesen. Wir nehmen nun an, dass (2) gilt.

> Der Gedanke ist nun, ganz analog zu Analysis I, eine Funktion F durch Wegintegrale einzuführen. Nachdem wir den Hauptsatz über die Differential- und Integralrechnung nicht zur Verfügung haben, müssen wir dann 'per Hand' zeigen, dass die Funktion F holomorph ist mit $F' = f$.

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} F\colon U & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & F(z) := \int\limits_{\gamma(a,z)} f(\xi)\, d\xi. \end{array}$$

Wir wollen nun zeigen, dass F holomorph ist mit $F' = f$. Es sei also $z_0 \in U$. Wir müssen beweisen, dass $F'(z_0) = f(z_0)$. Für $h \in \mathbb{C}$ betrachten wir dazu erst einmal

$$\begin{aligned} F(z_0+h) - F(z_0) &= \int\limits_{\gamma(a,z_0+h)} f(\xi)\, d\xi - \int\limits_{\gamma(a,z_0)} f(\xi)\, d\xi \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.3}}}{=} \int\limits_{\gamma(a,z_0+h)} f(\xi)\, d\xi + \int\limits_{\gamma(z_0,a)} f(\xi)\, d\xi \;=\; (*) \end{aligned}$$

Wir wollen nun verwenden, dass das Integral über den Dreiecksweg $\gamma(a, z_0, z_0+h, a)$ verschwindet. Wir führen dazu den Term für die dritte Kante ein.

$$\begin{aligned} (*) &= \underbrace{\int\limits_{\gamma(a,z_0+h)} f(\xi)\, d\xi + \int\limits_{\gamma(z_0,a)} f(\xi)\, d\xi + \int\limits_{\gamma(z_0+h,z_0)} f(\xi)\, d\xi}_{=0 \text{ nach Voraussetzung}} - \int\limits_{\gamma(z_0+h,z_0)} f(\xi)\, d\xi \\ &= \int\limits_{\gamma(z_0,z_0+h)} f(\xi)\, d\xi \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \gamma(z_0,z_0+h) = z_0(1-t)+(z_0+h)t = z_0+th.}}{=} \int_0^1 f(z_0+th)\cdot h\, dt. \end{aligned}$$

Es folgt nun, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(F(z_0+h) - F(z_0)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z_0+th)\cdot h\, dt = \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z_0+th)\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } f \text{ stetig, siehe Übungsblatt 2}}}{=} f(z_0).$$

□

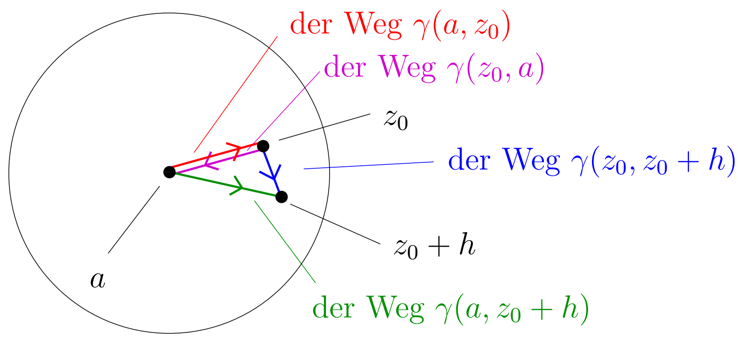
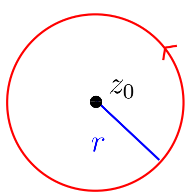


ABBILDUNG 8.

3.3. **Wegintegrale und die Koeffizienten von Potenzreihen.** Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ schreiben wir

$$\int_{|z-z_0|=r} f(x)\,dz \;=\; \int_\gamma f(x)\,dz,$$

wobei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. In anderen Worten, γ umläuft einmal den Rand der Scheibe $D_r(z_0)$ gegen den Uhrzeigersinn. Noch einmal anders ausgedrückt, γ durchläuft den Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r einmal gegen den Uhrzeigersinn.



$\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$ ist das Wegintegral über die Kreisbahn um z_0 mit Radius r entgegen dem Uhrzeigersinn

ABBILDUNG 9.

Lemma 3.9. *Für alle $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n\,dz \;=\; \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{wenn } n = -1. \end{cases}$$

BEWEIS. Wenn $n \neq -1$, dann besitzt die Funktion $f(z) = (z - z_0)^n$ die Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$. Lemma 3.7 besagt dann also, dass das Wegintegral verschwindet. Den Fall $n = -1$ hatten wir auf Seite 25 explizit berechnet. $\square$

Der folgende Satz besagt, dass man die Koeffizienten einer Potenzreihe durch Wegintegrale bestimmen kann.

Satz 3.10. *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann gilt für jedes $r \in (0,R)$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$c_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

In dem Beweis von Satz 3.10 werden wir verwenden, dass wir bei gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen 'Integral und Grenzwert vertauschen können'. Genauer gesagt verwenden wir folgenden Satz, welcher leicht aus Satz 16.6 aus der Analysis I folgt.

Satz 3.11. (Konvergenzsatz für Wegintegrale) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Integrationsweg und es sei $f_n\colon U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stetigen Funktionen, welche gleichmäßig konvergiert. Dann gilt*

$$\int\limits_{\gamma} \lim_{n\to\infty} f_n(z)\, dz \;=\; \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\, dz.$$

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 3.10 zu.

Beweis von Satz 3.10. Es sei $r \in (0,R)$ und $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \;&=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\, dz \\ &=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-n-1}\, dz \;=\; (*) \end{aligned}$$

Nach Satz 2.4 konvergiert die Reihe auf $\overline{D_r(z_0)}$ gleichmäßig. Der Konvergenzsatz 3.11 für Wegintegrale besagt nun, dass wir die Reihe mit dem Integral vertauschen können. Wir erhalten also, dass

$$(*) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{|z-z_0|=r} c_k (z-z_0)^{k-n-1}\, dz.$$

Die gewünschte Aussage folgt nun aus Lemma 3.9. □

3.4. **Der komplexe Logarithmus.** Für $\varphi \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\overline{S}_\varphi \;=\; \left\{ r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi} \,\middle|\, r \geq 0 \right\}$$

den abgeschlossenen Strahl in φ-Richtung. In Analysis I hatten wir sehen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \left\{x+iy \,\middle|\, x\in\mathbb{R} \text{ und } y\in(\varphi,\varphi+2\pi)\right\} & \to & \mathbb{C}\setminus\overline{S}_\varphi \\ z=x+iy & \mapsto & \exp(z)=\exp(x)\cdot(\cos(y)+i\sin(y)) \end{array}$$

bijektiv ist. Wir bezeichnen mit

$$\begin{array}{rcl} \ln_\varphi\colon \mathbb{C}\setminus\overline{S}_\varphi & \to & \left\{x+iy \,\middle|\, x\in\mathbb{R} \text{ und } y\in(\varphi,\varphi+2\pi)\right\} \\ z & \mapsto & \ln_\varphi(z)=\exp^{-1}(z) \end{array}$$

die zugehörige Umkehrfunktion. Diese Funktion wird der *durch φ bestimmte Logarithmuszweig* benannt. In anderen Worten, wenn $z=re^{it}$, wobei $r>0$ und $t\in(\varphi,\varphi+2\pi)$, so ist $\ln_\varphi(z)$ definiert und es gilt

$$\ln_\varphi(z) \;=\; \ln(r)+t\cdot i.$$

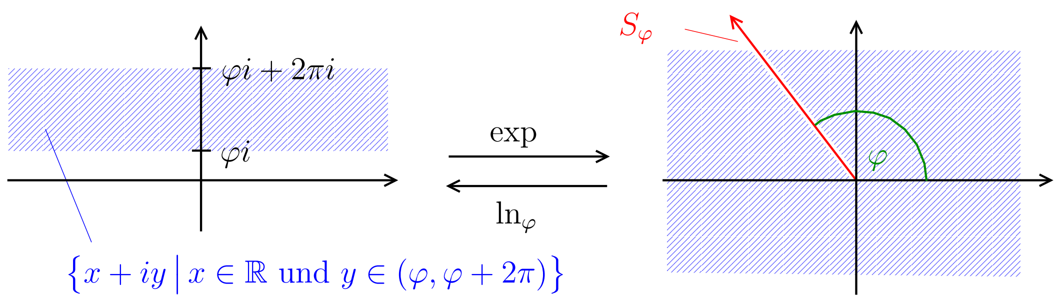


Abbildung 10.

Aus Satz 2.10, d.h. aus der Umkehrregel für holomorphe Funktionen folgt, dass $\ln_\varphi$ holomorph ist mit

$$\frac{d}{dz}\ln_\varphi(z) \;=\; \frac{1}{\exp'(\ln_\varphi^{-1}(z))} \;=\; \frac{1}{\exp(\ln_\varphi^{-1}(z))} \;=\; \frac{1}{z}.$$

In anderen Worten, auf $\mathbb{C}\setminus\overline{S}_\varphi$ ist $\ln_\varphi$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$. Auf Seite 29 hatten wir andererseits gesehen, dass $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion besitzt, welche auf ganz $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiert ist. Die Logarithmusfunktionen $\ln_\varphi$ haben also in gewisser Weise den 'größtmöglichen Definitionsbereich' einer Stammfunktion von $\frac{1}{z}$.

Im Folgenden bezeichnen wir

$$\begin{array}{rcl} \ln\colon \mathbb{C}\setminus\overline{S_{-\pi}}=\{x+iy\,|\,y\neq 0 \text{ oder } x>0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \ln(z):=\ln_{-\pi}(z) \end{array}$$

als die *Standardlogarithmusfunktion*. Diese stimmt auf den reellen Zahlen mit der üblichen Logarithmusfunktion aus Analysis I überein.

4. Der Cauchysche Integralsatz

4.1. **Randkurven von Rechtecken und der Durchmesser von Teilmengen in $\mathbb{C}$.** In diesem Kapitel werden wir zuerst verschiedene elementare Begriffe einführen, welche wir im Folgenden immer wieder verwenden werden.

Definition. Es seien $z \in \mathbb{C}$ und es seien a, b positive reelle Zahlen. Wir bezeichnen

$$\big\{ z + (x + iy) \,\big|\, x \in [0, a] \text{ und } y \in [0, b] \big\}$$

als *Rechteck in $\mathbb{C}$ mit Kantenlängen a und b*. Für solch ein Rechteck Q bezeichnen wir

$$\begin{aligned} \partial Q \colon [0, 2a + 2b] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \begin{cases} z + t, & \text{wenn } t \in [0, a), \\ z + a + (t - a)i, & \text{wenn } t \in [a, a + b) \\ z + a + bi - (t - (a + b)), & \text{wenn } t \in [a + b, 2a + b) \\ z + bi - (t - (2a + b))i, & \text{wenn } t \in [2a + b, 2a + 2b] \end{cases} \end{aligned}$$

als die *Randkurve ∂Q von Q*.

Bildlich gesprochen umfährt die Randkurve das Rechteck einmal gegen den Uhrzeigersinn. Wir bezeichnen die Länge $2a + 2b$ der Randkurve des Rechtecks manchmal als *Umfang* des Rechtecks.

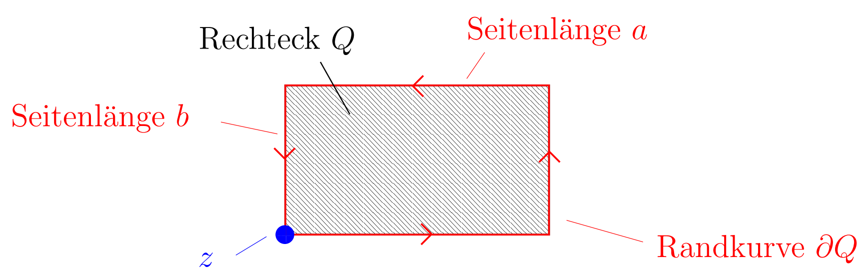


Abbildung 11.

Definition. Für eine beschränkte, nichtleere Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir

$$\sup \big\{ |z - w| \,\big|\, z, w \in X \big\}$$

als den *Durchmesser von X*.

Wenn X kompakt ist, dann kann man relativ leicht zeigen, dass das Supremum ein Maximum ist, d.h. der Durchmesser von X ist

$$\max \big\{ |z - w| \,\big|\, z, w \in X \big\},$$

d.h. der Durchmesser ist der maximale Abstand von zwei Punkten in X. Beispielsweise gilt

$$\text{Durchmesser von der geschlossenen Scheibe } \overline{D_r(z_0)} \;=\; 2r,$$

sowie

$$\text{Durchmesser von Rechteck mit Seitenlängen } a \text{ und } b \;=\; \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definition. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$ heißt *konvex*, wenn für alle $z, w \in X$ die Verbindungsstrecke $z(1-t) + wt$, $t \in [0,1]$ ebenfalls in X liegt.

Es ist offensichtlich, dass jede Scheibe und jedes Rechteck konvex ist. Weitere Beispiele von konvexen und nicht-konvexen Teilmengen sind in Abbildung 12 skizziert.

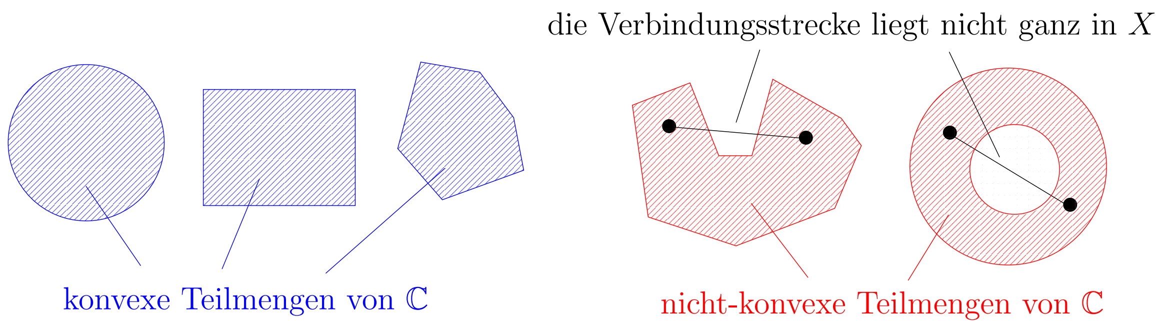


Abbildung 12. Beispiele von konvexen und nicht-konvexen Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Lemma 4.1. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $X \subset \mathbb{C}$ eine konvexe, nichtleere, beschränkte Teilmenge und es sei zudem $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetig reell differenzierbare*[14] *Abbildung. Es sei $D \in \mathbb{R}$ mit* [15]

$$D \;\geq\; \max\big\{\|D\varphi(p)\| \,\big|\, p \in X\big\}.$$

Dann gilt

$$\textit{Durchmesser von } \varphi(X) \;\leq\; D \cdot \textit{Durchmesser von } X.$$

Wenn $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beispielsweise geben ist durch Multiplikation mit $l \in \mathbb{R}_{>0}$, dann ist $\|D\varphi\| = \|l\,\mathrm{id}\,\| = l$, und der Durchmesser multipliziert sich mit dem Faktor λ.

Beweis. Es seien $z, w \in X$. Nachdem nach Voraussetzung die Verbindungsstrecke von z nach w in X liegt, folgt aus Korollar 8.4 aus der Analysis II, dass

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \;\leq\; D \cdot |z - w|.$$

Das Lemma folgt nun sofort aus dieser Ungleichung und der Definition von Durchmesser. □

[14] Wir sagen φ ist stetig reell differenzierbar, wenn die Abbildung, aufgefasst als Abbildung zwischen $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ stetig reell differenzierbar ist.

[15] Zur Erinnerung, die Norm einer reellen $n \times n$-Matrix ist definiert als

$$\|A\| \;:=\; \max\big\{\|Av\| \,\big|\, v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1\big\}.$$

Aber eigentlich ist die Definition der Norm von der Matrix $D\varphi$ ist im Moment gar nicht so wichtig. Die Hauptsache ist, dass diese Norm existiert, dass sie stetig von der Matrix abhängt. Insbesondere existiert das Maximum der Normen $\|D\varphi)\|$ auf der kompakten Menge X.

4.2. **Der Cauchysche Integralsatz für Rechtecke.** Wir können jetzt den ersten wichtigen Satz der Funktionentheorie formulieren und beweisen.

Satz 4.2. (Cauchysche Integralsatz für Rechtecke) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $Q \subset U$ ein Rechteck. Dann gilt*

$$\int_{\partial Q} f(z)\, dz \;=\; 0.$$

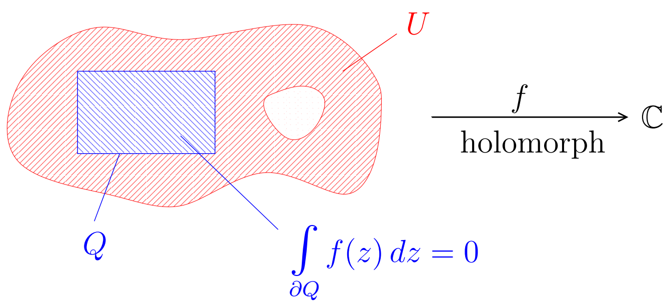


ABBILDUNG 13. Die Aussage vom Cauchyschen Integralsatz für Rechtecke.

BEWEIS. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $Q \subset U$ ein Rechteck mit Umfang ℓ und Durchmesser d. Wenn f eine Stammfunktion besitzt, dann folgt die Aussage sofort aus Lemma 3.7.

Selbst wenn f auf ganz U keine Stammfunktion besitzen sollte, so besitzt f doch um jeden Punkt eine gute Approximation einer Stammfunktion. Genauer gesagt, nachdem f holomorph ist können wir für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ schreiben

$$f(z_0+h) \;=\; f(z_0) + f'(z_0)\cdot h + \chi(h), \text{ wobei } \chi(h) = o(h).$$

Die ersten beiden Summanden haben natürlich eine Stammfunktion. Wir müssen also nur noch den kleinen Ausdruck $\chi(h)$ kontrollieren. In einer kleinen Menge, z.B. einem kleinen Rechteck, ist $\chi(h)$ dabei auch sehr klein.

Wir führen jetzt den allgemeinen Fall auf den Fall eines 'kleinen' Rechtecks zurück, indem wir das große Rechteck in genügend kleine Rechtecke aufteilen.

Wir unterteilen das Rechteck $Q_0 := Q$ durch vertikales und horizontales Halbieren in vier kleine Rechtecke $R_1, \dots, R_4$, siehe Abbildung 14. Nachdem sich die inneren Wegintegrale wegheben gilt

$$\int_{\partial Q} f(z)\, dz \;=\; \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f(z)\, dz.$$

Es sei nun Q_1 das Rechteck aus $R_1, \dots, R_4$, dessen Wegintegral den größten Betrag besitzt. Dann ist

$$\left| \int_{\partial Q} f(z)\, dz \right| \;\le\; 4 \cdot \left| \int_{\partial Q_1} f(z)\, dz \right|.$$

Wir unterteilen jetzt wiederum Q_1 in vier Rechtecke und führen das gleiche Verfahren

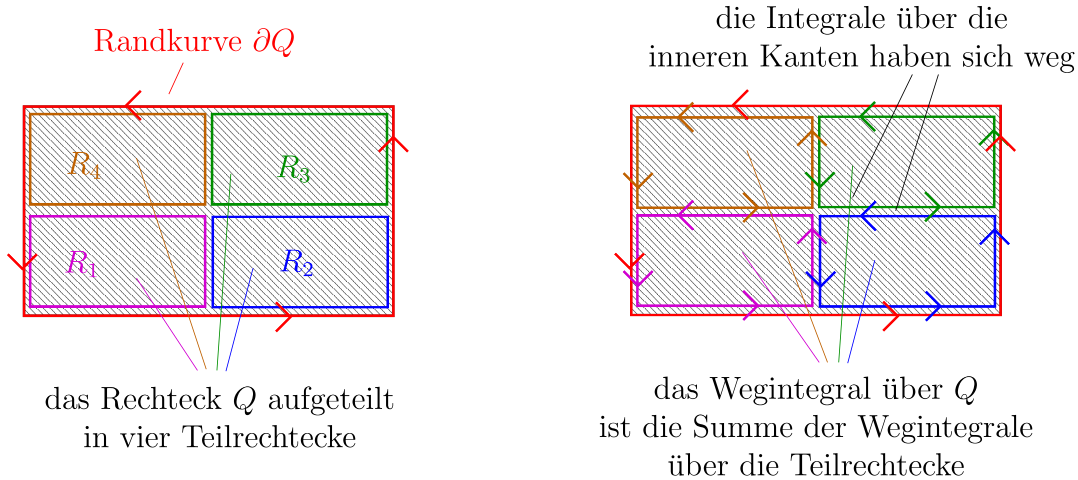


Abbildung 14.

durch. Wir erhalten eine Folge von Rechtecken $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$ mit der Eigenschaft, dass für alle n gilt

$$\left| \int_{\partial Q} f(z)\, dz \right| \;\leq\; 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} f(z)\, dz \right|.$$

In diesem Verfahren halbieren wir natürlich jedes Mal den Umfang und den Durchmesser des Rechtecks. In anderen Worten, der Umfang von ∂Q_n beträgt $\frac{1}{2^n}\ell$ und der Durchmesser beträgt $\frac{1}{2^n}d$.

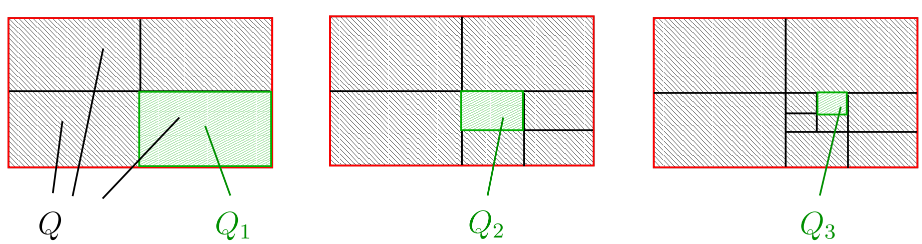


Abbildung 15.

Für jedes n sei nun p_n der Mittelpunkt von Q_n. In Übungsblatt 2 werden wir zeigen, dass die Folge von Mittelpunkten (p_n) eine Cauchy-Folge ist, und dass zudem der Grenzpunkt $z_0 := \lim_{n\to\infty} p_n$ in allen Rechtecken Q_n enthalten ist.

Um den Satz zu bewiesen genügt es zu zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\left| \int_{\partial Q} f(z)\, dz \right| \;\leq\; \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Nachdem f im Punkt z_0 holomorph ist gilt nach Lemma 2.3, dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + \chi(z - z_0), \text{ wobei } \chi(z - z_0) = o(z - z_0).$$

Wir setzen nun

$$\epsilon' := \frac{\epsilon}{\ell d}$$

Aus der Definition von $\chi(h) = o(h)$ folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|\chi(z - z_0)| \leq \epsilon' \cdot |z - z_0| \quad \text{für alle } z \in D_\delta(z_0).$$

Nachdem für alle n gilt $z_0 \in Q_n$ und nachdem der Durchmesser von jedem Q_n gegeben ist durch $\frac{1}{2^n}d$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $Q_n \subset D_\delta(z_0)$.

Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial Q} f(z)\,dz \right| &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach der obigen Abschätzung}}}{\leq} 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} f(z)\,dz \right| \\
&= 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + \chi(z - z_0)\,dz \right| \\
&\leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} \underbrace{f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0)}_{\substack{\text{Integrand besitzt Stammfunktion} \\ F(z) = f(z_0) \cdot z + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 \cdot f'(z_0) \\ \text{also ist } \int_{\partial Q_n} = 0, \text{ nach Lemma 3.7}}} dz \right| + 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} \chi(z - z_0)\,dz \right| \\
&= 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} \underbrace{\chi(z - z_0)}_{\substack{\leq \epsilon' \cdot |z - z_0| \leq \epsilon' \cdot \frac{1}{2^n}d \\ \text{da } \partial Q_n \subset Q_n \subset D_\delta(z_0)}} dz \right| \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.2}}}{\leq} 4^n \cdot \text{Länge}(\partial Q_n) \cdot \epsilon' \cdot \frac{1}{2^n}d = 4^n \cdot \frac{1}{2^n}\ell \cdot \frac{\epsilon}{\ell d} \cdot \frac{1}{2^n}d = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Der Name des vorherigen Satzes, Cauchysche Integralsatz für Rechtecke, legt schon nahe, dass es wohl Verallgemeinerungen dieses Satzes gibt. In der Tat, war die Tatsache, dass wir mit einem Rechteck arbeiten gar nicht so wichtig. Was wir hauptsächlich verwendet hatten war, dass wir ein Rechteck systematisch in kleinere Rechtecke zerlegen können.

Wir können diese Idee auch für Teilmengen von $\mathbb{C}$ durchführen, welche wir als Bilder von Rechtecken unter geeigneten Abbildungen beschreiben können. Genauer gesagt, wir haben folgenden Satz.

Satz 4.3. (Cauchysche Integralsatz für Bilder von Rechtecken) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $\varphi\colon Q \to U$ eine stetig reell* *differenzierbare Abbildung von einem Rechteck Q nach U. Dann gilt*[16]

$$\int_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

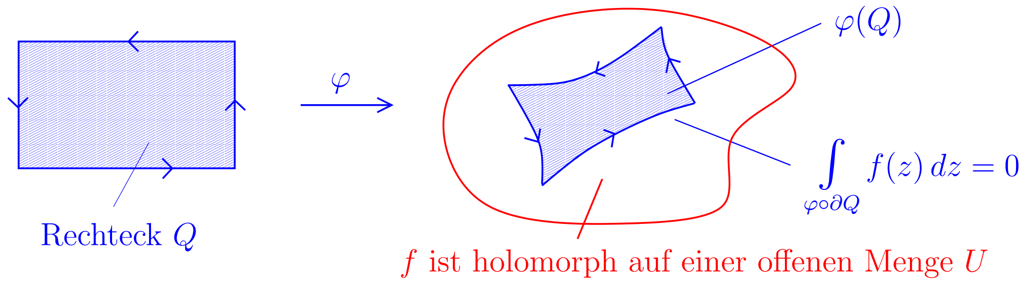


ABBILDUNG 16.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 4.3 zuwenden, wollen wir erst eine wichtige Anwendung betrachten.

Korollar 4.4. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ eine abgeschlossene Kreisscheibe. Dann gilt*

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

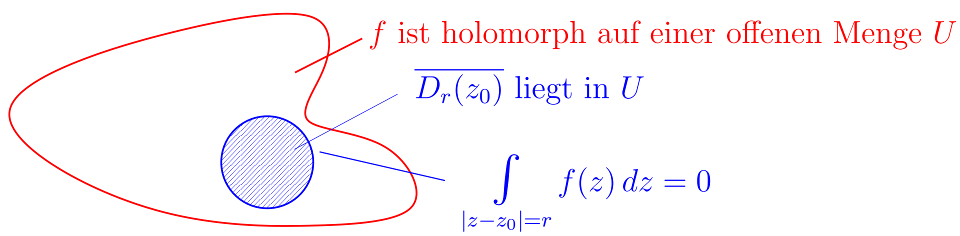


ABBILDUNG 17. Illustration von Korollar 4.4.

BEWEIS. Es sei also $\overline{D_r(z_0)}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe in der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph.

> Wir wollen hier natürlich den Cauchyschen Integralsatz für Bilder von Rechtecken verwenden. Wir müssen dazu eine Abbildung φ wählen, welche die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$ als Bild von einem Rechteck beschreibt.

[16] Mit $\varphi\circ\partial Q$ bezeichen wir hierbei die Verknüpfung von dem Integrationsweg ∂Q von Seite 35 mit der Abbildung φ.

Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon Q := [0,r]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ (s,t) & \mapsto & z_0 + se^{it}. \end{array}$$

Das Bild $\varphi(Q)$ ist dann die Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$. Nach Voraussetzung ist $\varphi(Q)\subset U$. Aus

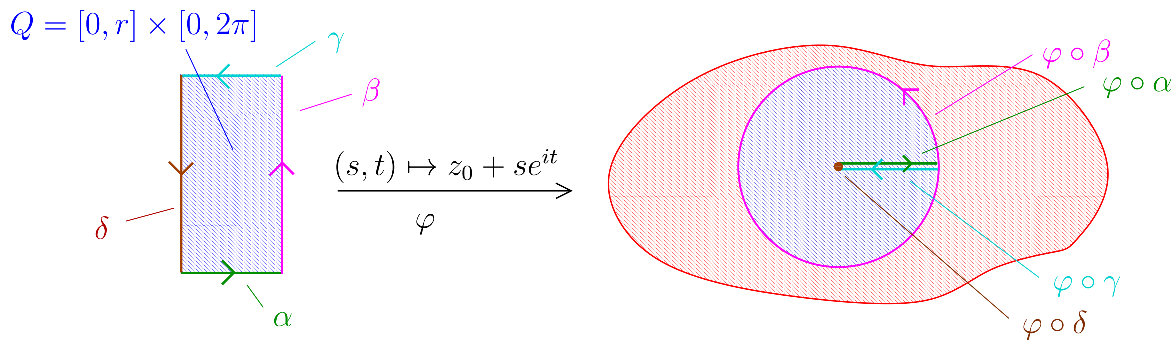


Abbildung 18.

Satz 4.3 folgt, dass

$$\int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Wir wollen nun dieses Wegintegral etwas genauer studieren. Wir bezeichnen dazu mit α,β,γ und δ die Wege, welche in Abbildung 18 skizziert sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 3.4}}}{=} \int\limits_{\varphi\circ\alpha} f(z)\,dz + \int\limits_{\varphi\circ\beta} f(z)\,dz + \int\limits_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,dz + \int\limits_{\varphi\circ\delta} f(z)\,dz \\ &\underset{\uparrow}{=} \int\limits_{\varphi\circ\beta} f(z)\,dz \end{aligned}$$

nach Lemma 3.3 heben sich die beiden Integrale über $\varphi\circ\alpha$ und $\varphi\circ\gamma$ weg, zudem verschwindet das Wegintegral über den konstanten Weg $\varphi\circ\delta$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 3.3}}}{=} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz.$$

Wir haben also gezeigt, dass das Wegintegral über den Kreis wie gewünscht verschwindet. $\square$

Bevor wir uns weiteren Anwendungen von Satz 4.3 betrachten, wollen wir den Satz nun doch erst einmal beweisen.

Beweis von Satz 4.3. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zudem sei Q ein Rechteck mit Umfang ℓ und Durchmesser d und es sei zudem $\varphi\colon Q \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

Es genügt zu zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\left| \int_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \right| \;\leq\; \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Wie im Beweis von Satz 4.2 konstruieren wir eine Folge von Rechtecken $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$, so dass für alle n folgende Aussagen gelten

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \text{Durchmesser von } Q_n & = & \frac{1}{2^n} d \\ (2) & \text{Umfang von } Q_n & = & \frac{1}{2^n} \ell \\ (3) & \left| \int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \right| & \leq & 4^n \cdot \left| \int\limits_{\varphi\circ\partial Q_n} f(z)\,dz \right|. \end{array}$$

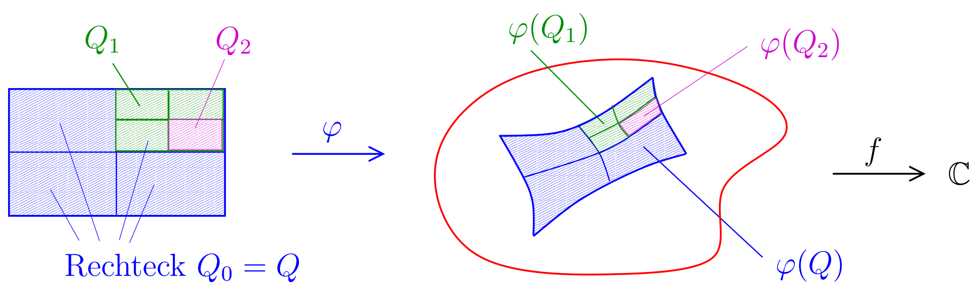


Abbildung 19.

Um mit der gleichen Idee wie im Beweis von Satz 4.2 fortzufahren müssen wir nun jedoch den Durchmesser der Bilder $\varphi(Q_n)$ und die Länge der Wege $\varphi \circ \partial Q_n$ kontrollieren. Nachdem Q kompakt ist existiert

$$D \;:=\; \sup\left\{ \|D\varphi(q)\| \,\middle|\, q \in Q \right\}.$$

Lemma 4.1 besagt, dass

$$\text{Durchmesser von } \varphi(Q_n) \;\leq\; D \cdot \text{Durchmesser von } Q_n \;=\; \tfrac{1}{2^n} d \cdot D.$$

Das gleiche Argument wie im Beweis von Lemma 4.1, angewandt auf die Definition von Länge aus Analysis II, zeigt zudem, dass

$$\text{Länge von } \varphi \circ \partial Q_n \;\leq\; D \cdot \text{Länge von } \partial Q_n \;=\; \tfrac{1}{2^n} \ell \cdot D.$$

Wir bezeichnen mit p den einzigen Punkt, welcher in allen Rechtecken Q_n enthalten ist. Wir setzen $z_0 = \varphi(p)$. Nachdem f im Punkt z_0 holomorph ist gilt nach Lemma 2.3, dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + \chi(z - z_0), \text{ wobei } \chi(z - z_0) = o(z - z_0).$$

Wir setzen nun
$$\epsilon' := \frac{\epsilon}{D^2 d\ell}.$$
Aus der Definition von $\chi(z-z_0) = o(z-z_0)$ folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass
$$|\chi(z-z_0)| \le \epsilon' \cdot |z-z_0| \text{ für alle } z \in D_\delta(z_0).$$
Nachdem für alle n gilt, $z_0 \in \varphi(Q_n)$ und der Durchmesser von $\varphi(Q_n)$ gegen null konvergiert, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi(Q_n) \subset D_\delta(z_0)$.

Wie im Beweis von Satz 4.2 folgt nun, dass
$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial Q} f(z)\,dz \right| &\le 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} f(z_0) + (z-z_0)\cdot f'(z_0) + \chi(z-z_0)\,dz \right| \\
&\le 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} \underbrace{f(z_0) + (z-z_0)\cdot f'(z_0)}_{\substack{\text{Integrand besitzt Stammfunktion, also} \\ \text{verschwindet das Integral nach Lemma 3.7}}} dz \right| + 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} \underbrace{\chi(z-z_0)}_{|\chi(z-z_0)|\le\epsilon'|z-z_0|} dz \right| \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.2}}}{\le} 4^n \cdot \text{Länge von}\, \varphi\circ\partial Q_n \cdot \epsilon' \cdot \text{Durchmesser von } \varphi(\partial Q_n) \\
&\le 4^n \cdot \frac{1}{2^n}\ell D \cdot \frac{\epsilon}{D^2 d\ell} \cdot \frac{1}{2^n} dD = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Wir werden im Folgenden noch zwei weitere Korollare zu Satz 4.3 formulieren und beweisen.

Korollar 4.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \le R$ zwei nicht-negative reellen Zahlen, so dass der Ring*
$$\left\{ se^{it} \,\middle|\, s \in [r,R] \text{ und } t \in [0,2\pi] \right\}$$
in U enthalten ist. Dann gilt
$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \int_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz.$$

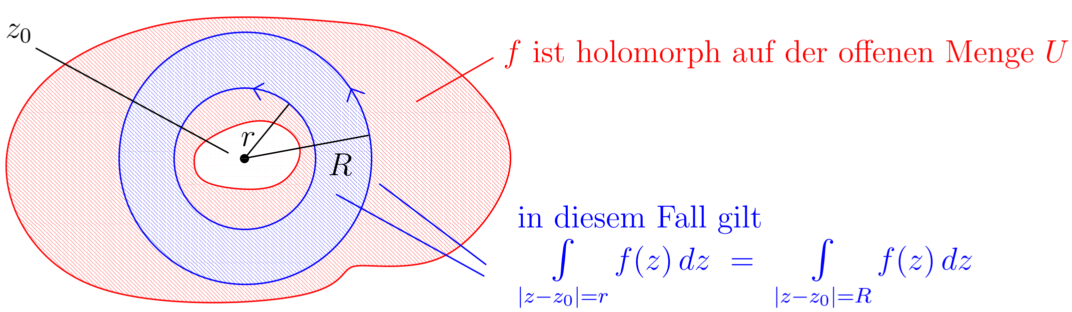


ABBILDUNG 20. Illustration von Korollar 4.5.

Beispiel. Auf Seite 25 hatten wir schon gesehen, dass für alle $r > 0$ gilt, dass

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{1}{z}\, dz \;=\; 2\pi i,$$

d.h. wir hatten insbesondere gesehen, dass das Wegintegral nicht vom Radius vom Kreis um 0 abhängt. Die Tatsache, dass das Wegintegral nicht vom Radius abhängt ist gerade die Aussage von Korollar 4.5.

Indem wir Korollar 4.5 auf $r = 0$ anwenden, erhalten wir insbesondere Korollar 4.4 als Spezialfall. In der Tat ist der Beweis von Korollar 4.5 ganz ähnlich zum Beweis von Korollar 4.4.

Beweis. Wir wollen nun den Ring als Bild von einem Rechteck beschreiben. Wir betrachten dazu die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon Q := [r,R]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ (s,t) & \mapsto & z_0 + se^{it}. \end{array}$$

Das Bild von Q ist dann der durch die Radien r und R bestimmte Ring um z_0. Nach Voraussetzung ist $\varphi(Q) \subset U$. Aus Satz 4.3 folgt, dass

$$\int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\, dz \;=\; 0.$$

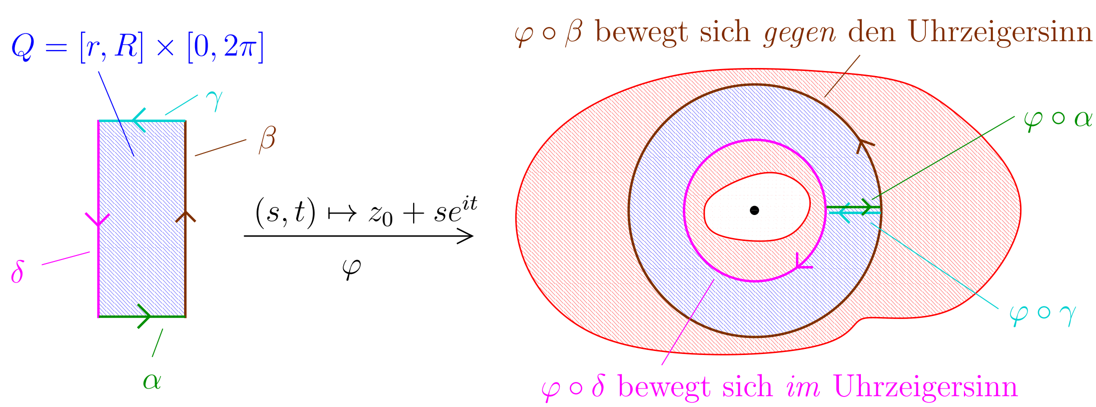


Abbildung 21.

Wir bezeichnen nun mit α, β, γ und δ die Wege, welche in Abbildung 21 skizziert sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \\ &= \int_{\varphi\circ\alpha} f(z)\,dz + \int_{\varphi\circ\beta} f(z)\,dz + \int_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,dz + \int_{\varphi\circ\delta} f(z)\,dz \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.3 heben sich die beiden Integrale über } \alpha \text{ und } \gamma \text{ weg}}}{=} \int_{\varphi\circ\beta} f(z)\,dz + \int_{\varphi\circ\delta} f(z)\,dz \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.3}}}{=} \int_{|z|=R} f(z)\,dz - \int_{|z|=r} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

$\square$

Auf ganz ähnliche Weise kann man zudem auch folgendes Korollar beweisen.

Korollar 4.6. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es seien $w_0, z_0 \in \mathbb{C}$ und $r, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\overline{D_s(w_0)} \subset D_r(z_0)$ und so dass der Ring*

$$\overline{D_r(z_0)} \setminus D_s(w_0)$$

in U enthalten ist. Dann gilt

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \;=\; \int_{|z-w_0|=s} f(z)\,dz.$$

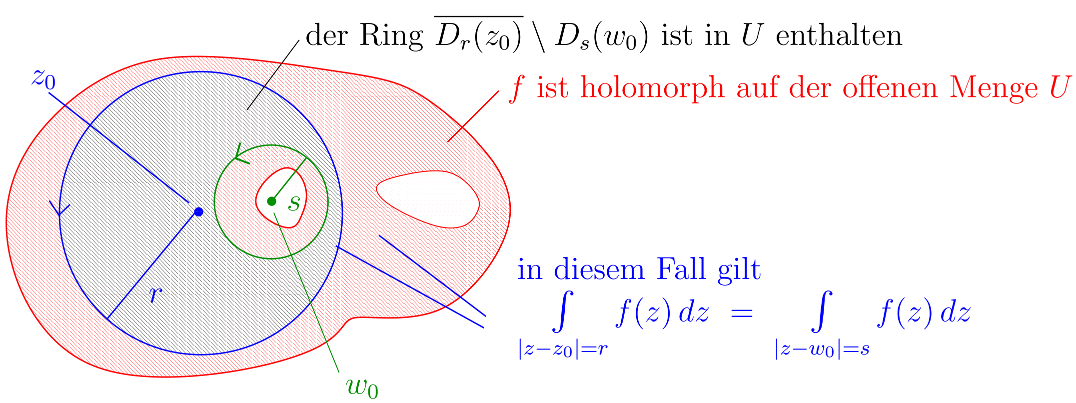


Abbildung 22. Illustration von Korollar 4.6.

5. Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

In diesem Kapitel werden wir eine lange Liste von Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz herleiten. Insbesondere werden wir den Fundamentalsatz der Algebra beweisen.

5.1. Der Potenzreihenentwicklungssatz.

Der folgende Satz besagt, dass man lokal[17] jede holomorphe Funktion als Potenzreihe schreiben kann.

Satz 5.1. (Potenzreihenentwicklungssatz) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $z_0 \in U$. Es sei $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \subset U$. Dann gibt es eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen, so dass*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \textit{für alle } z \in D_r(z_0).$$

Hierbei können die Koeffizienten c_n auf zwei verschiedene Weisen bestimmt werden:

(1) *für alle n ist*

$$c_n \;=\; \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

(2) *für alle n und alle $s > 0$ mit $\overline{D_s(z_0)} \subset U$ ist*

$$c_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Wir werden den Potenzreihenentwicklungssatz erst im nächsten Kapitel beweisen. Wir wollen nun erst einmal die Aussage des Potenzreihenentwicklungssatzes etwas besser verstehen und zudem verschiedene Korollare beweisen.

Beispiel.

(1) Es sei $a \neq 0$. Wir können dann $f(z) = \frac{1}{a-z}$ auf der offenen Scheibe $D_{|a|}(0)$ wie folgt als Potenzreihe schreiben

$$f(z) \;=\; \frac{1}{a-z} \;=\; \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische Reihe, denn } |\frac{z}{a}|<1}}{=}\; \frac{1}{a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}} z^n.$$

(2) Wir betrachten die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Es sei nun $D_r(z_0)$ eine beliebige Scheibe in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Nachdem $0 \notin D_r(z_0)$ ist $r \le |z_0|$. Für alle $z \in D_r(z_0)$

[17] Wenn E eine Eigenschaft von Funktionen ist (z.B. stetig, konstant, konvex, in eine Potenzreihe entwickelbar), dann sagt man eine Funktion f auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt *lokal die Eigenschaft E*, wenn es zu jedem $z \in U$ eine offene Umgebung V besitzt, so dass die Einschränkung von f auf V die Eigenschaft E besitzt.

gilt nun

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 - (z_0 - z)} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{z_0}) \cdot (z - z_0)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische Reihe, denn} \\ \text{aus } |z - z_0| < r \leq |z_0| \text{ folgt} \\ \left|\left(-\frac{1}{z_0}\right) \cdot (z - z_0)\right| < 1}}{=} \frac{1}{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z_0}\right)^n (z - z_0)^n.$$

Wir haben nun also $f(z) = \frac{1}{z}$ explizit als Potenzreihe auf der Scheibe $D_r(z_0)$ geschrieben.

Satz 5.2. (Satz von Goursat) *Jede holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist beliebig oft komplex differenzierbar.*

Bemerkung. Wir sehen nun, dass sich holomorphe Funktionen anders verhalten als differenzierbare Funktionen. Wir hatten gerade gesehen, dass jede holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. Die analoge Aussage für reelle Funktionen ist natürlich völlig falsch. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -x^2, & \text{wenn } x \leq 0, \\ x^2, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar, geschweige den beliebig oft differenzierbar.

Beweis vom Satz von Goursat. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $z_0 \in U$. Nachdem U offen ist gibt es ein $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \subset U$. Nachdem Potenzreihenentwicklungssatz kann f auf $D_r(z_0)$ durch eine Potenzreihe beschrieben werden. Nach Satz 2.6 ist jede Potenzreihe beliebig oft komplex differenzierbar, also ist auch f im Punkt z_0 beliebig oft komplex differenzierbar. $\square$

Satz 5.3. (Existenz von Stammfunktionen auf Scheiben) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann besitzt die Einschränkung von f auf eine beliebige offene Scheibe $D \subset U$ eine Stammfunktion.*

Beweis. Es sei also $D_r(z_0)$ eine Scheibe in U. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 5.1 können wir dann $f(z)$ auf $D_r(z_0)$ als Potenzreihe in z_0 schreiben. In Satz 3.6 hatten wir gesehen, dass jede Potenzreihe $f(z)$ in z_0 eine Stammfunktion besitzt. $\square$

Eine *ganze Funktion* ist eine holomorphe Funktion, welche auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist. Beispielsweise sind Polynome, die trigonometrischen Funktionen und die Exponentionalfunktion ganze Funktion. Für $U = \mathbb{C}$ und $z_0 = 0$ erhalten wir folgenden wichtigen Spezialfall vom Potenzreihenentwicklungssatz.

Satz 5.4. *Jede ganze Funktion ist durch eine Potenzreihe gegeben.*

Bemerkung. Der Potenzreihenentwicklungssatz impliziert also, dass jede holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ durch eine Potenzreihe gegeben ist. Die analoge Aussage für reelle Funktionen ist natürlich falsch, sie ist sogar falsch für reelle Funktionen, welche beliebig oft differenzierbar sind. Beispielsweise hatten wir in Lemma 14.15 von Analysis I gesehen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \le 0 \end{cases} \end{array}$$

beliebig oft differenzierbar ist, und dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir f durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ beschreiben könnten, dann müsste hierbei gelten $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = 0$. Aber dann definiert die Potenzreihe die Nullfunktion, aber f ist nicht null für $x > 0$.

5.2. **Der Beweis vom Potenzreihenentwicklungssatz.** Das Ziel von diesem Kapitel ist nun den Potenzreihenentwicklungssatz zu beweisen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist hierbei folgender Satz.

Satz 5.5. (Cauchysche Integralformel) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $z_0 \in U$. Zudem sei $r > 0$, so dass $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt für jedes $z \in D_r(z_0)$, dass*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

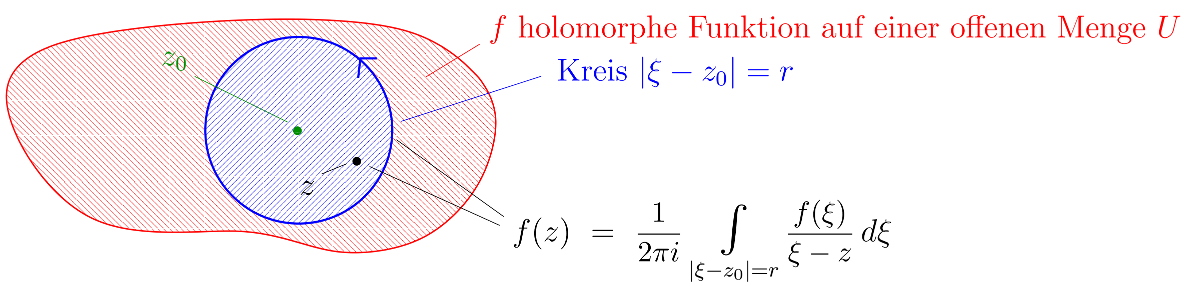


Abbildung 23. Illustration von Satz 5.5.

Die Cauchysche Integralformel besagt insbesondere, dass man die Funktionswerte einer holomorphen Funktion im Inneren einer Scheibe $D_r(z_0)$ durch die Funktionswerte auf den Randkreis $\partial \overline{D_r(z_0)}$ bestimmen kann. Insbesondere ist die holomorphe Funktion f im Inneren durch die Funktion auf dem Randkreis eindeutig festgelegt.

Beweis von Satz 5.5. Es folgt aus Korollar 4.5, dass für genügend kleine s[18] gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z| = s} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Es folgt, dass

[18] Genauer gesagt, die Aussage gilt für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\overline{D_s(z)} \subset D_r(z_0)$.

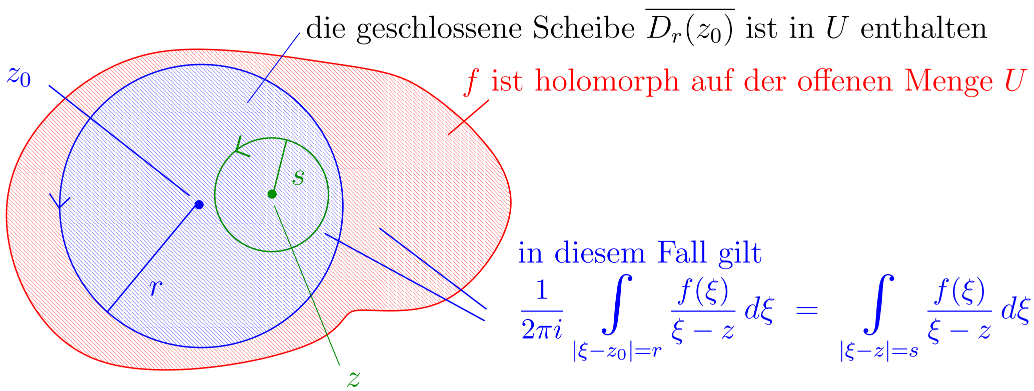


Abbildung 24. Abbildung zum Beweis von Satz 5.5.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-z_0|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-z|=s}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-z|=s}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi + \lim_{s\to 0}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-z|=s}\frac{f(z)}{\xi-z}\,d\xi}_{\substack{=f(z),\text{ nach der Rechnung}\\ \text{auf Seite 25}}}.
\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist also $f(z)$, also verbleibt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es ist

$$\lim_{s\to 0}\int\limits_{|\xi-z|=s}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi = 0.$$

Für alle s mit $\overline{D_s(z)}\subset\overline{D_r(z_0)}$ gilt die Ungleichung

$$\left|\int\limits_{|\xi-z|=s}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Standardabschätzung von Lemma 3.2}}}{\leq} \underbrace{\text{Umfang von Kreis mit Radius } s}_{=2\pi s}\cdot\underbrace{\sup\left\{\left|\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\right|\,\middle|\,\xi\in\overline{D_r(z_0)}\setminus\{z\}\right\}}_{\text{endlich, weil } f \text{ in } z \text{ holomorph}}$$

Wir sehen also, dass der Betrag vom Integral im Grenzwert $s\to 0$ gegen 0 konvergiert. Wir haben damit die Behauptung bewiesen. □

Wir erinnern auch noch an das Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen, welches wir in Satz 16.5 in der Analysis I bewiesen hatten.[19]

[19]Streng genommen hatten wir das Majoranten-Kriterium nur für Funktionen auf $D\subset\mathbb{R}$ bewiesen, aber der Beweis geht wort-wörtlich auch durch für den Fall $D\subset\mathbb{C}$.

Satz 5.6. (Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen) *Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge und es sei $g_n : K \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stetigen Funktionen. Es sei zudem $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen mit $\|g_n\| \le d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_n \text{ konvergiert gleichmäßig.}$$

Wir können uns nun endlich dem Beweis vom Potenzreihenentwicklungssatz zuwenden.

Beweis vom Potenzreihenentwicklungssatz. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Fall $z_0 = 0$. Es sei also $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $r > 0$, so dass $D_r(0) \subset U$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_r(0)}$ auch noch in U enthalten ist.

> Auf Seite 46 hatten wir explizit $g(z) = \frac{1}{a-z}$ als Potenzreihe entwickelt. Nach Satz 5.5 können wir jetzt unsere ursprüngliche Funktion $f(z)$ als Integral von solchen Funktionen, welches sich als Potenzreihen entwickeln lassen, schreiben. Dies wollen wir nun verwenden.

Es sei nun $z \in D_r(0)$ festgewählt. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} f(z) \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 5.5}}}{=} \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \; = \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{1-\frac{z}{\xi}}\, d\xi \; &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn aus } |\frac{z}{\xi}| = |\frac{z}{r}| < 1 \text{ folgt } \frac{1}{1-\frac{z}{\xi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n}}{=} \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{z}{\xi}\right)^n d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n \, d\xi. \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Integral mit der Reihe vertauschen. Nach dem Konvergenzsatz 3.11 für Wegintegrale ist dies möglich, wenn die Funktionenreihe gleichmäßig konvergiert. Wir beweisen daher als nächstes folgende Behauptung.

Behauptung. Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n$ konvergiert auf $K := \big\{\xi \in \mathbb{C} \,\big|\, |\xi| = r\big\}$ gleichmäßig.[20]

Um die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen, wollen wir das Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen anwenden. Die Funktion $|f|$ ist auf der kompakten Menge K stetig, insbesondere durch ein $C \ge 0$ beschränkt. Also gilt für alle $\xi \in K$, dass

$$\left| \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n \right| \; = \; \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n \right| \; \le \; \frac{C}{r} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{|z|}{r}}_{=:s}\Bigg)^n \; = \; \frac{C}{r} \cdot s^n.$$

Da $z \in D_r(0)$ gilt, dass $s = \frac{|z|}{r} \in [0,1)$. Insbesondere konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{r} s^n$. Die Behauptung folgt nun aus dem Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen.

[20] Folgt die Aussage schon aus Satz 2.4?

Zusammengefasst folgt nun für $z \in D_r(0)$, dass

$$f(z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{obige Rechnung}}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n \, d\xi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konvergenzsatz 3.11} \\ \text{angewandt auf } g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} z^n}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n \, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \, d\xi}_{=:c_n} \cdot z^n.$$

Wir haben also bewiesen, dass wir die Funktion $f(z)$ auf $D_r(0)$ als Potenzreihe schreiben können. Die beiden Formeln für c_n folgen direkt aus Korollar 2.7 und aus Korollar 3.10.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Wir können also nicht mehr annehmen, dass die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_r(0)}$ auch noch in U enthalten ist. Es sei nun $s \in (0, r)$ beliebig. Dann ist die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_s(0)}$ noch ganz in U enthalten. Wir haben also gerade eben gezeigt, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n \quad \text{für alle } z \in D_s(0).$$

Nachdem diese Gleichheit auf allen Scheiben $D_s(0)$ mit $s \in (0, r)$ gilt, gilt diese wie gewünscht auch auf ganz $D_r(0)$. □

5.3. **Der Satz von Liouville und der Fundamentalsatz der Algebra.** Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 5.7. (Satz von Liouville) *Eine ganze Funktion, welche beschränkt ist, ist konstant.*

Bemerkung. Die reelle Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

ist beliebig oft differenzierbar, beschränkt, aber natürlich nicht konstant. Wir sehen also wiederum, dass sich die holomorphen Funktionen ganz anders als die differenzierbaren Funktionen verhalten. Die analoge komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ist kein Gegenbeispiel zum Satz von Liouville, denn $f(z)$ ist nicht auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Genauer gesagt, $f(z)$ ist bei den Nullstellen des Nenners, d.h. bei $z = \pm i$ nicht definiert.

Beispiel. Die Einschränkung der holomorphen Funktion $\sin(z)$ auf den Definitionsbereich $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist natürlich beschränkt und nicht konstant. Der Satz von Liouville besagt nun, dass die ganze Funktion $\sin(z)$ auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt ist. In der Tat werden wir in Übungsblatt 3 sehen, dass

$$\lim_{t \to \infty} |\sin(it)| = \infty.$$

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche beschränkt ist. Wir wählen ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 5.4 gilt auf ganz $\mathbb{C}$, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $c_n =$ für $n \geq 1$. Für jedes $r > 0$ können wir c_n bestimmen durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \cdot \left| \int\limits_{|\xi|=r} \underbrace{\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}}_{\substack{\text{Betrag} \\ \text{ist } \leq \frac{M}{r^{n+1}}}} d\xi \right| \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.2}}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot \text{Umfang von Kreis mit Radius } r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} \qquad \text{für alle } r > 0$$

Dies ist jedoch nur möglich, wenn $|c_n| = 0$ für alle $n \geq 1$. Wir sehen also, dass $f(z) = c_0$ eine konstante Funktion ist. □

Der folgende Satz ist eine der wichtigsten Sätze der Mathematik überhaupt.

Satz 5.8. (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom $f(z)$ von Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.*

Bemerkung. Wenn $f(z)$ ein Polynom von Grad $n = 2$ ist, dann kann man natürlich die Nullstellen explizit bestimmen und man sieht, dass jedes solche Polynom eine komplexe Nullstelle besitzt. Für Polynome von Grad 3 und 4 gibt es ebenfalls, deutlich komplizierte Lösungsformeln, welche in

`https://de.wikipedia.org/wiki/Kubische_Gleichung`

und

`https://de.wikipedia.org/wiki/Quartische_Gleichung`

beschrieben sind. Man kann mithilfe dieser Formeln auch die Existenz von Nullstellen beweisen. In der Algebra-Vorlesung wird jedoch gezeigt, dass es für Polynome von Grad ≥ 5 keine allgemeine Lösungsformel gibt. Wir können also den Fundamentalsatz der Algebra nicht dadurch beweisen, dass die Nullstellen explizit mithilfe einer Formel 'hinschreiben'.

Beweis. Wenn $f(z) = 0$, dann gibt es nichts zu beweisen. Es sei also

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + z_0$$

ein komplexes Polynom, welches nicht null ist. Wir nehmen an, dass f keine komplexe Nullstelle besitzt. Wir wollen zeigen, dass $n = 0$, d.h. dass $f(z)$ konstant ist.

> Die gewünschte Aussage klingt so, als wollten wir den Satz von Liouville anwenden. Allerdings können wir den Satz von Liouville nicht direkt auf $f(z)$ anwenden, denn ein Polynom ist ja im Allgemeinen unbeschränkt. Anstattdessen wollen wir, wie sich im Beispiel $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ schon angedeutet hat, den Satz von Liouville auf $\frac{1}{f(z)}$ anwenden.

Nachdem $f(z)$ keine komplexe Nullstelle besitzt, ist die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Zudem ist diese Funktion holomorph. Außerdem ist die Funktion $f(z)$ konstant, genau dann, wenn $\frac{1}{f(z)}$ konstant ist. Im Hinblick auf den Satz von Liouville genügt es nun folgende Aussage zu beweisen.

Behauptung. Die auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion $\frac{1}{f(z)}$ ist beschränkt.

Wenn $n = 0$ gibt es nichts zu beweisen. Wir betrachten nun den Fall, dass $n \geq 1$. Nach Lemma 1.7 gilt

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty.$$

Dies bedeutet insbesondere, dass es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(z)| \quad \geq 1 \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \geq M.$$

Mit anderen Worten, es ist

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \quad \leq 1 \qquad \text{für alle } z \notin D_M(0).$$

Andererseits ist die stetige Funktion $\frac{1}{f(z)}$ auf der kompakten Menge $\overline{D_M(0)}$ beschränkt. Zusammengefasst sehen wir, dass $\frac{1}{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Wir haben also die Behauptung bewiesen. ☐

Das folgende Korollar gibt eine etwas genauere Aussage, nämlich es besagt, dass jedes komplexe Polynom als Produkt von linearen Polynomen (oft auch Linearfaktoren genannt) geschrieben werden kann.

Korollar 5.9. *Es sei $f(z)$ ein Polynom von Grad $n \geq 1$, dann existieren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass*

$$f(z) \;=\; b(z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n).$$

Bevor wir das Korollar beweisen erinnern wir noch an den Satz über die Polynomdivision, welcher in der Algebra[21] bewiesen wird.

[21] Oder in guten Schulen.

Satz 5.10. (Satz über die Polynomdivision) *Es seien $f(z)$ und $g(z)$ Polynome, wobei $g(z) \neq 0$. Dann existieren Polynome $p(z)$ und $q(z)$ mit $\operatorname{Grad}(q(z)) < \operatorname{Grad}(g(z))$, so dass*[22]

$$f(z) \;=\; g(z) \cdot p(z) + q(z).$$

Insbesondere, wenn $\operatorname{Grad}(p(z)) = 1$, d.h. wenn $p(z)$ ein lineares Polynom ist, dann gibt es eine Polynom $p(z)$ und eine Konstante $C \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) \;=\; g(z) \cdot p(z) + C.$$

Beispiel. Der Beweis von Satz 5.10 ist nicht Bestandteil dieser Vorlesung. Wir führen daher nur ein Beispiel aus, welches hoffentlich den Grundgedanken der Polynomdivision deutlich macht. Wir betrachten also

$$f(z) = 4z^3 - 2z + 1 \text{ und } g(z) = z^2 - 2z + 1,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) = 4z^3 - 2z + 1 \;&=\; \underbrace{4z^3 - 2z + 1 - 4z(z^2 - 2z + 1)}_{=8z^2-6z+1} + 4z(z^2 - 2z + 1) \\ &=\; \underbrace{8z^2 - 6z + 1 - 8(z^2 - 2z + 1)}_{=-14z-7} + (4z + 8)(z^2 - 2z + 1) \\ &=\; \underbrace{(4z + 8)}_{=p(z)} g(z) + \underbrace{(-14z - 7)}_{=q(z)} \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun dem Beweis von Korollar 5.9 zu.

Beweis von Korollar 5.9. Wir beweisen die Aussage mithilfe von Induktion nach dem Grad vom Polynom $f(z)$. Wenn $\operatorname{Grad}(f(z)) = 1$, dann ist die Aussage trivialerweise wahr.

Nehmen wir nun an, dass die Aussage schon für alle Polynome von Grad $< n$ gilt. Es sei nun $f(z)$ eine Polynom mit $\operatorname{Grad}(f(z)) = n \geq 2$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt $f(z)$ eine Nullstelle $a \in \mathbb{C}$. Wir wenden nun Satz 5.10 auf $f(z)$ und $g(z) = z - a$ an. Es gibt also eine Polynom $p(z)$ und eine Konstante $C \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) \;=\; g(z) \cdot (z - a) + C.$$

Durch Einsetzen von $z = a$ sehen wir, dass $C = 0$. Also folgt

$$f(z) \;=\; g(z) \cdot (z - a).$$

Nachdem $\operatorname{Grad}(g(z)) = \operatorname{Grad}(f(z)) - 1 = n - 1$ können wir die Induktionsvoraussetzung auf $g(z)$ anwenden, und erhalten die gewünschte Aussage für $f(z)$. $\square$

5.4. **Der Satz von Morera und das Spiegelungsprinzip.** Es seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ drei verschiedene Punkte. Wir schreiben

$$\Delta(u, v, w) \;=\; \big\{ u + s(v - u) + t(w - u) \,\big|\, s, t \in [0, 1] \text{ mit } s + t \leq 1 \big\}.$$

[22] Zur Erinnerung, dass Nullpolynom hat per Definition den Grad -1.

Dies ist das von u, v, w aufgespannte Dreieck. Zudem bezeichnen wir die Kurve $\gamma(u, v, w, u)$ als *Randkurve* $\partial\Delta(u, v, w)$. In Übungsblatt 3 beweisen wir, mithilfe vom Cauchyschen In-

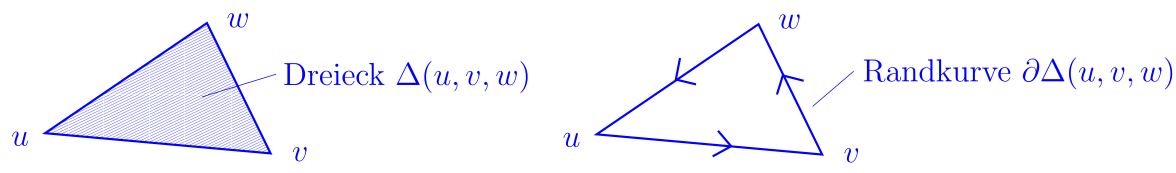


Abbildung 25.

tegralsatz 4.3 für Bilder von Rechtecken, folgenden Satz.

Satz 5.11. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für alle Dreiecke $\Delta \subset U$, dass*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0.$$

Viel interessanter ist nun die Aussage, dass Satz 5.11 folgende Umkehrung besitzt.

Satz 5.12. (Satz von Morera) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Wenn für alle Dreiecke $\Delta \subset U$ gilt, dass*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0,$$

dann ist f holomorph.

Beweis. Es sei $z_0 \in U$. Wir wollen zeigen, dass f im Punkt z_0 holomorph ist. Nachdem U offen ist gibt es ein $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \subset U$. Es folgt nun aus der Voraussetzung und aus Satz 3.8, dass f auf $D_r(z_0)$ eine Stammfunktion F besitzt.

Mit anderen Worten, es gibt auf $D_r(z_0)$ eine holomorphe Funktion F mit $F' = f$. Nach dem Satz 5.2 von Goursat ist dann aber F beliebig oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist $F' = f$ auf $D_r(z_0)$, insbesondere im Punkt z_0, komplex differenzierbar. ☐

Satz 5.13. *Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, es sei $z_0 \in U$ und es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, welche auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph ist, und welche in z_0 stetig ist. Dann ist f sogar auf ganz U holomorph.*

Bemerkung. Die Aussage von Satz 5.13 widerspricht der Intuition von Analysis I. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

stetig und zudem in allen Punkten von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, aber f ist natürlich nicht auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, dass f im Punkt z_0 komplex holomorph ist. Wir wählen ein $r > 0$, so dass die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_r(z_0)}$ noch ganz in U enthalten ist.

Nach dem Satz 5.12 von Morera genügt es folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Für jedes Dreieck $\Delta \subset D_r(z_0)$ gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0.$$

Wir wollen diese Behauptung mithilfe von folgenden zwei Aussagen beweisen:

(a) Für jedes Dreieck Δ in $D_r(z_0)$, welches den Punkt z_0 nicht enthält, verschwindet nach Satz 5.11 das zugehörige Wegintegral.

(b) Nachdem $\overline{D_r(z_0)}$ kompakt ist, und nachdem f nach Voraussetzung stetig ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \overline{D_r(z_0)}$. Insbesondere folgt aus der Standardabschätzung von Wegintegralen aus Lemma 3.2, dass für jeden Integrationsweg γ in $\overline{D_r(z_0)}$ gilt, dass

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \;\le\; M \cdot \text{Länge}(\gamma).$$

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Beweis der obigen Behauptung zu. Es sei also $\Delta = \Delta(u,v,w) \subset D_r(z_0)$ ein beliebiges Dreieck. Wir unterscheiden vier Fälle:

1. Fall. Der Punkt z_0 liegt nicht in Δ. Dann folgt aus (a), dass das Wegintegral verschwindet.

2. Fall. Der Punkt z_0 ist ein Eckpunkt von Δ. O.B.d.A. sei $u = z_0$. Für $s > 0$ klein genug[23] bezeichnen wir mit v_s den Punkt auf der Strecke von $z_0 = u$ nach v, welcher den Abstand s zu u besitzt. Ganz analog definieren wir w_s. Dann gilt für alle solche s, dass

$$\int_{\partial\Delta(z_0,v,w)} f(z)\, dz \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Abbildung 26}}}{=}\; \underbrace{\int_{\Delta(v_s,v,w)} f(z)\, dz}_{=\,0,\ \text{nach (a)}} + \underbrace{\int_{\Delta(v_s,w,w_s)} f(z)\, dz}_{=\,0,\ \text{nach (a)}} + \underbrace{\int_{\Delta(u_s,v,w_s)} f(z)\, dz}_{\substack{\text{der Betrag ist} \\ \le 4s\cdot M \text{ nach (b)}}}$$

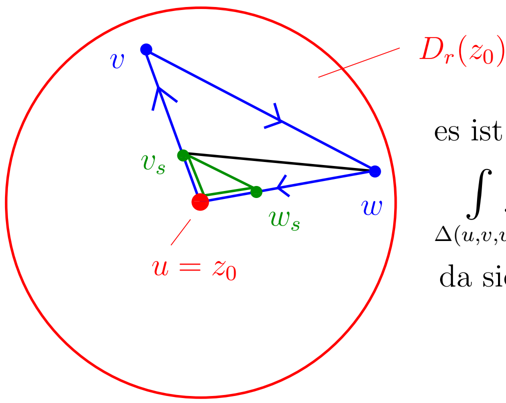
Wir sehen also, dass der Betrag von unserem Wegintegral kleiner als jede positive Zahl ist, also muss das Wegintegral schon null sein.

3. Fall. Der Punkt z_0 liegt im Inneren von Δ. In diesem Fall können wir, wie in Abbildung 27 auf der linken Seite skizziert, das Dreieck $\Delta(u,v,w)$ in drei kleinere Dreiecke zerlegen, bei denen jeweils z_0 ein Eckpunkt ist. Wir haben gerade gezeigt, dass die Wegintegrale über diese kleineren Dreiecke verschwinden, also verschwindet auch das Wegintegral über das ursprüngliche Dreieck.

4. Fall. Der Punkt z_0 liegt auf einer Kante von Δ. In diesem Fall zerlegen wir, wie in Abbildung 27 auf der rechten Seite skizziert, das Dreieck in zwei kleinere Dreiecke, bei denen jeweils z_0 ein Eckpunkt ist und wir verfahren wie im 3. Fall.

$\square$

[23] Beispielsweise gilt die Aussage für $s \in (0, \min\{|v-u|, |w-u|\})$.

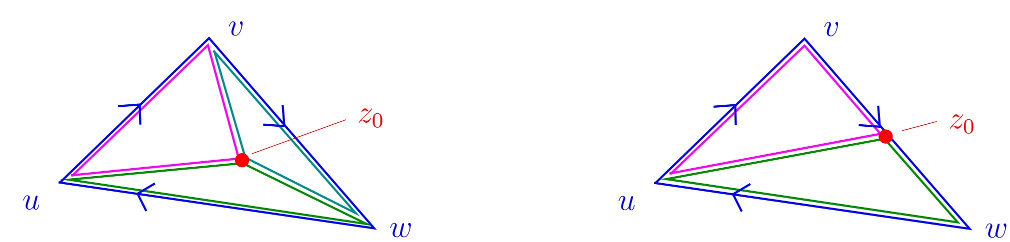


es ist

$$\int_{\Delta(u,v,w)} f(z)\,dz = \int_{\Delta(u,v_s,w_s)} f(z)\,dz + \int_{\Delta(v_s,v,w)} f(z)\,dz + \int_{\Delta(v_s,w,w_s)} f(z)\,dz$$

da sich alle inneren Wegintegrale wegheben

Abbildung 26.



Zerlegung von $\Delta(u, v, w)$, wenn z_0 im Inneren liegt

Zerlegung von $\Delta(u, v, w)$, wenn z_0 auf einer Kante liegt

Abbildung 27.

Definition. Es sei $f: X \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf einer Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$. Wir sagen f *lässt sich zu einer holomorphen Funktion fortsetzen*, wenn es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ mit $X \subset U$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{f}: U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass die Einschränkung von $\tilde{f}$ auf X gerade der Funktion f entspricht.

Beispielsweise lassen sich sich die reelle Sinusfunktion $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und alle Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ zu einer holomorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Zudem lässt sich die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ fortsetzen.

Das nächste Lemma besagt nun, dass sich nicht jede unendlich oft differenzierbare Funktionen $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Interval zu einer holomorphen Funktion fortsetzen lässt.

Lemma 5.14. *Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Funktionen $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall, welche sich nicht zu einer holomorphen Funktion fortsetzen lässt.*

Beweis. Wir betrachten wiederum die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \le 0, \end{cases} \end{array}$$

welche uns schon auf Seite 48 behilflich war. Zur Erinnerung, diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar, alle Ableitungen am Punkt $x = 0$ verschwinden und zudem gilt noch $f(x) > 0$ für $x > 0$. Wir werden nun zeigen, dass sich f nicht zu einer holomorphen Funktion fortsetzen lässt. Nehmen wir an, es gäbe eine solche Fortsetzung $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge U. Dann gibt es insbesondere ein $r > 0$ mit $D_r(0) \subset U$. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 5.1 gibt es dann eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen, so dass für alle $z \in D_r(0)$ gilt

$$\tilde{f}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Wir zerlegen nun $c_n = a_n + ib_n$, wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt insbesondere für alle $x \in (-r, r)$, dass

$$f(x) \;=\; \tilde{f}(x) \;=\; \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{\text{reell}} + \underbrace{i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}_{\text{rein imaginär}}.$$

Nachdem $f(x)$ auf $(-r, r)$ nur reelle Werte annimmt sind also alle $b_n = 0$. Zudem folgt aus $f^{(n)}(0) = 0$, dass alle $a_n = 0$. Wir haben also gezeigt, dass $c_n = 0$ für alle n. Insbesondere verschwindet die Potenzreihe auf ganz $(-r, r)$, sie kann also auf dem Intervall $(0, r)$ nicht mit der ursprünglichen Funktion f übereinstimmen. Wir haben also einen Widerspruch erhalten. $\square$

Wir erinnern noch an folgende Definition aus der Analysis II. Es sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir sagen, eine Menge $U \subset A$ *ist offen in* A, wenn es eine offene Teilmenge $V \subset X$ gibt, so dass $U = V \cap A$. Wir betrachten beispielsweise den Fall $A = [0, 2] \subset X = \mathbb{C}$. Dann ist das Intervall $U = [0, 1)$ eine offene Teilmenge von $A = [0, 2]$, denn $U = A \cap D_1(0)$.

Der folgende Satz gibt nun ein Kriterium dafür, dass man gewisse Funktionen auf einer Teilmenge holomorph fortsetzen kann.

Satz 5.15. (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) *Es sei U eine offene Teilmenge der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$*[24]*. Zudem sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *f ist holomorph auf $U' := \{z \in U \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$,*
(2) *f nimmt nur reelle Werte auf $U \cap \mathbb{R}$ an.*

[24] Dies bedeutet, dass es eine offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass $U = V \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$.

Dann ist die Funktion[25]

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon U \cup \overline{U} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} f(z), & \textit{wenn } z \in U, \\ \overline{f(\overline{z})}, & \textit{wenn } z \in \overline{U}, \end{cases} \end{aligned}$$

holomorph. Insbesondere lässt sich also f *zu einer holomorphen Funktion fortsetzen.*

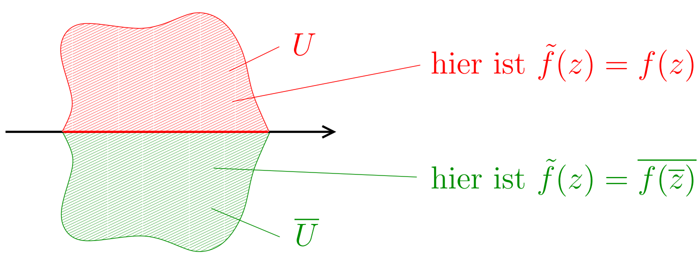


Abbildung 28. Illustration der Aussage vom Schwarzschen Spiegelungsprinzip.

Wir werden das Schwarzsche Spiegelungsprinzip im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht mehr verwenden, wir skizzieren deswegen nur den Beweis.

Beweisskizze. In Übungsaufgabe 4 von Übungsblatt 1 hatten wir schon gesehen, dass die Funktion $z \mapsto \tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ auf der offenen Menge $\overline{U'}$ holomorph ist.

Wir wollen nun mithilfe vom Satz 5.12 von Morera zeigen, dass $\tilde{f}$ sogar auf ganz $U \cup \overline{U}$ holomorph ist. Es sei also $\Delta(u,v,w) \subset U \cup \overline{U}$ ein Dreieck. Wenn $\Delta(u,v,w)$ ganz in U' oder

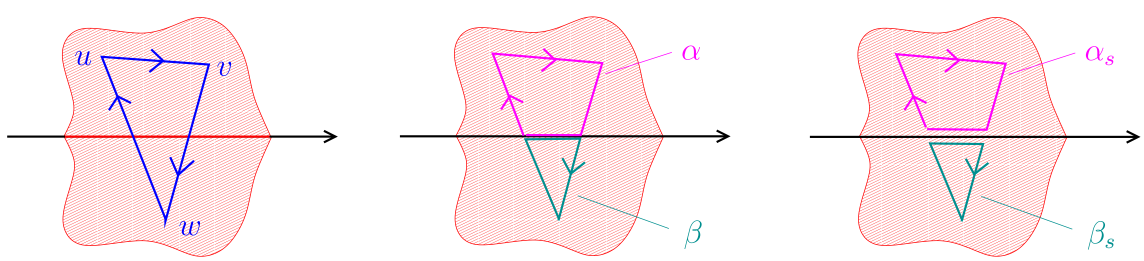


Abbildung 29. Illustration zum Beweis vom Schwarzschen Spiegelungsprinzip.

$\overline{U'}$ liegt, dann folgt aus Satz 5.11, dass das Wegintegral verschwindet.

Es sei nun $\Delta = \Delta(u,v,w) \subset U \cup \overline{U}$ ein Dreieck, welches sowohl U als auch $\overline{U}$ schneidet. Wir bezeichnen mit α und β die Wege, welche man, wie in Abbildung 29 skizziert, durch

[25]Hierbei bezeichnet

$$\overline{U} \;=\; \{\overline{z} \,|\, z \in U\},$$

die komplexe Konjugation von U, d.h. die Spiegelung von U an der reellen Achse. In diesem Fall handelt es sich bei $\overline{U}$ also nicht um Abschluß von U.

'schneiden von Δ entlang der reellen Achse' erhält. Zudem wählen wir eine 'stetige' Familie von Integrationswegen $\alpha_s, s \in [0,1]$ und β_s, $s \in [0,1]$, so dass $\alpha_0 = \alpha$ und $\beta_0 = \beta$, und so dass für $s > 0$ die Wege α_s in U' und die Wege β_s in $\overline{U'}$ liegen. Dann gilt

$$\int_\Delta f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{die Wegintegrale entlang} \\ \text{der reellen Achse} \\ \text{heben sich weg}}}{=} \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus der} \\ \text{Stetigkeit von } f \\ \text{und der Stetigkeit von} \\ \alpha_s \text{ und } \beta_s \text{ im Parameter } s}}{=} \lim_{s\to 0}\int_{\alpha_s} f(z)\,dz + \lim_{s\to 0}\int_{\beta_s} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach dem Cauchyschen} \\ \text{Integralsatz verschwinden} \\ \text{beide Wegintegrale}}}{=} 0.$$

$\square$

5.5. **Der lokale Darstellungssatz.**

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ aber } f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

dann nennen wir z_0 eine *Nullstelle k-ter Ordnung von f*. Eine Nullstelle erster Ordnung nennen wir auch eine *einfache Nullstelle*.

Beispielsweise ist $z_0 = 0$ eine Nullstelle k-ter Ordnung von $f(z) = z^k$. Etwas allgemeiner, es sei $g(z)$ eine holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$. Dann besitzt $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ eine Nullstelle k-ter Ordnung in z_0. Der folgende Satz besagt nun, dass zumindest auf einer offenen Scheibe alle Nullstellen k-ter Ordnung von der obigen Form sind.

Satz 5.16. (Lokaler Darstellungssatz) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle k-ter Ordnung von f. Dann gibt es eine offene Umgebung V von z_0 und eine holomorphe Funktion $g\colon V \to \mathbb{C}$, so dass*

(1) *$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ für alle $z \in V$,*
(2) *$g(z_0) \neq 0$.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von k-ter Ordnung von f. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 5.1 gibt es ein $r > 0$ und eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von komplexen Zahlen, so dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in V := D_r(z_0).$$

Es folgt nun aus der Voraussetzung und aus Satz 2.6, dass $c_0 = \cdots = c_{k-1} = 0$ und $c_k \neq 0$. Dann gilt

$$f(z) \;=\; (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad \text{wobei } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z - z_0)^n.$$

Offensichtlich ist $g(z_0) = c_k \neq 0$. Es verbleibt zu zeigen, dass die Potenzreihe $g(z)$ ebenfalls auf $D_r(z_0)$ konvergiert. Dies folgt aus der Beobachtung, dass nach Lemma 2.5 die Potenzreihen $g(z)$ und $f(z)$ den gleichen Konvergenzradius besitzen. $\square$

6. Zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$

6.1. **Zusammenhängende und wegzusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$.** In diesem Kapitel werden wir zwei verwandte Begriffe von 'zusammenhängenden' Teilmengen von metrischen Räumen einführen. Die erste Definition ist dabei anschaulicher, aber die zweite ist in Anwendungen oft hilfreicher. Wir verwenden in diesem Kapitel die Sprache der metrischen Räume, welche wir in Analysis II eingeführt hatten. Im weiteren Verlauf der Vorlesung betrachten wir dann aber nur die metrischen Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, und Teilmengen davon.

Wir beginnen mit der ersten Definition.

Definition. Ein metrischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $P, Q \in X$ einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma(1) = Q$ gibt.

Beispiel. Es ist leicht zu sehen, dass alle Scheiben in $\mathbb{C}$ wegzusammenhängend sind. Andererseits hatten wir in Übungsblatt 8 von Analysis II gesehen, dass die Menge

$$X \;:=\; \overline{D_1(0)} \;\cup\; \overline{D_1(1+i)},$$

welche aus zwei disjunkten abgeschlossenen Scheiben besteht, nicht wegzusammenhängend ist.

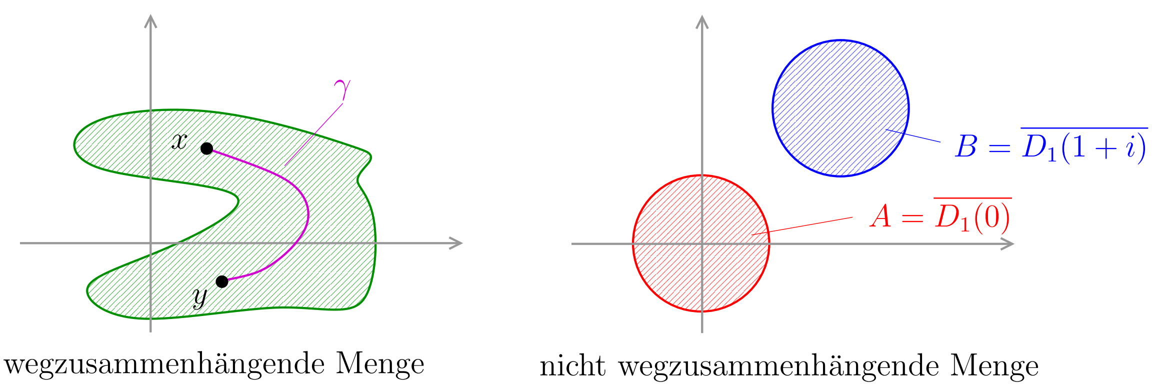


Abbildung 30.

Definition. Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn folgende Aussage gilt: wenn immer $X = U \cup V$ die Vereinigung von zwei disjunkten offenen Mengen U und V ist, dann ist entweder $U = X$ oder $V = X$.

Beispiel. Die obige Menge

$$X \;:=\; \underbrace{\overline{D_1(0)}}_{=:A} \;\cup\; \underbrace{\overline{D_1(1+i)}}_{=:B},$$

ist nicht zusammenhängend, denn A und B sind disjunkte nichtleere offene Teilmengen von X, mit $X = A \cup B$.

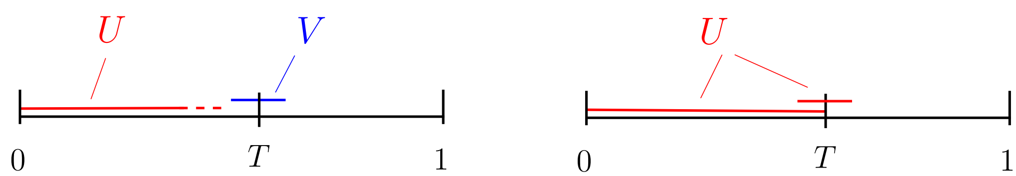
Lemma 6.1. *Das Intervall* $[0, 1]$ *ist zusammenhängend.*

Beweis. Es seien U, V offene disjunkte Teilmengen von $[0, 1]$ mit $U \cup V = [0, 1]$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $0 \in U$. Wir wollen nun zeigen, dass $U = [0, 1]$. Wir betrachten dazu

$$A \ := \ \big\{ t \in [0,1] \, \big| \, [0,t] \subset U \big\}.^{26}$$

Die Menge A ist nicht leer da sie $t = 0$ enthält. Die Menge A ist zudem offensichtlich beschränkt. Es macht also Sinn, dass Supremum $T := \sup A$ zu betrachten. Wir müssen zeigen, dass $T = 1$ und $T \in U$.

Nehmen wir zuerst an, dass $T \notin U$. Dann ist $T \in V$, und es folgt aus der Offenheit von V, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass auch $(T - \epsilon, T + \epsilon) \cap [0, 1]$ in V liegt. Dann gilt insbesondere, dass $(T - \epsilon, T + \epsilon) \cap A = \emptyset$, d.h. $\sup A \leq T - \epsilon$. Wir haben damit einen Widerspruch erhalten.



wenn $T \in V$, dann liegt auch $(T - \epsilon, T + \epsilon) \cap [0, 1]$ in V

nachdem also $T \in U$ liegt auch $[0, T + \epsilon) \cap [0, 1]$ in U

Abbildung 31. Illustration zum Beweis von Lemma 6.1.

Wir wissen also jetzt, dass $T \in U$. Aus der Offenheit von U folgt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $(T - \epsilon, T + \epsilon) \cap [0, 1] \subset U$. Also ist $[0, T + \epsilon] \cap [0, 1] \subset U$. Im Hinblick auf die Definition von T ist dies nur möglich, wenn $T = 1$. □

Lemma 6.2. *Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist auch zusammenhängend.*

Beweis. Es sei also X ein wegzusammenhängender metrischer Raum. Nehmen wir an, dass X nicht zusammenhängend ist. Dann existiert eine Zerlegung $X = U \cup V$ in zwei offene disjunkte nichtleere Teilmengen U und V. Es sei nun $x \in U$ und $y \in V$. Nachdem X nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist existiert ein Weg $\gamma \colon [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Dann ist $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung von dem Intervall $[0, 1]$ in zwei offene, nichtleere Teilmengen. Dies ist aber nach Lemma 6.1 nicht möglich.

□

Korollar 6.3. *Jedes Intervall* (*offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt*), *jede Scheibe* (*offen oder abgeschlossen*), *jedes Rechteck und ganz* $\mathbb{C}$ *sind zusammenhängend.*

[26]Mit anderen Worten, es ist

$$A \ = \ \text{alle } t \in [0,1], \text{ so dass das Intervall } [0,t] \text{ noch in } U \text{ enthalten ist.}$$

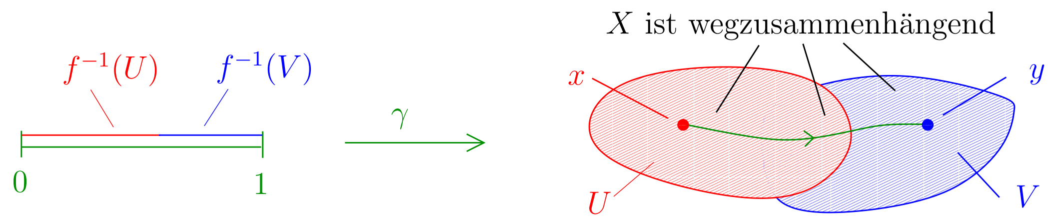


Abbildung 32. Skizze zum Beweis von Lemma 6.2

.

Beweis. Alle diese Mengen sind offensichtlich wegzusammenhängend. Das Korollar folgt nun aus Lemma 6.2. □

Bemerkung. Es stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung von Lemma 6.2 gilt. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall, d.h. es gibt Mengen, welche zusammenhängend sind, aber nicht wegzusammenhängend sind. Wir betrachten dazu folgendes Beispiel:

$$X \;:=\; \big\{(0,y)\,\big|\,y\in[-1,1]\big\}\;\cup\;\big\{(x,\sin(\tfrac{1}{x}))\,\big|\,x\in(0,\pi]\big\}\;\subset\;\mathbb{R}^2.$$

In anderen Worten, X besteht aus dem Graphen der Funktion $x\mapsto\sin(\frac{1}{x})$ für $x\in(0,\pi]$, zusammen mit einem Intervall auf der y-Achse. Die Menge X wird in Abbildung 33 skizziert. In Übungsblatt 4 werden wir sehen, dass X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

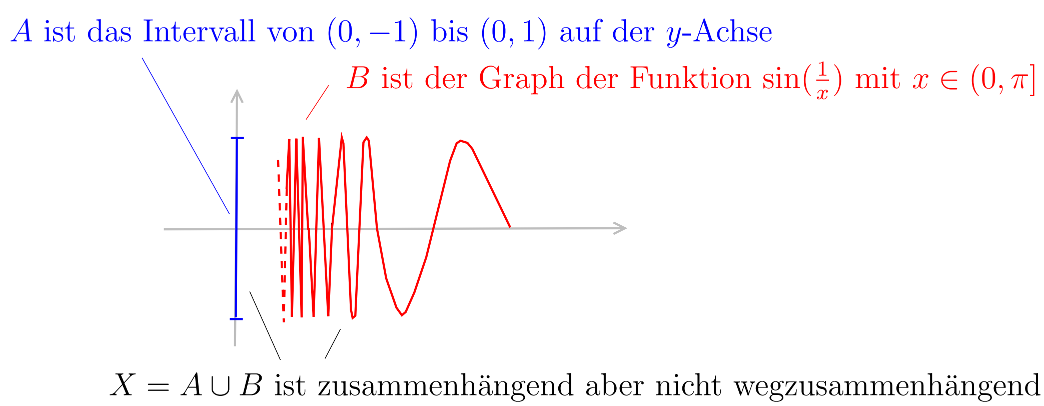


Abbildung 33.

Lemma 6.4. *Es sei $f\colon X\to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Dann gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & X \text{ wegzusammenhängend} & \Longrightarrow & f(X) \text{ wegzusammenhängend} \\ (2) & X \text{ zusammenhängend} & \Longrightarrow & f(X) \text{ zusammenhängend} \end{array} .$$

Beweis. Wir beweisen zuerst (1). Wir nehmen also an, dass X wegzusammenhängend ist. Wir wollen nun zeigen, dass $f(X)$ ebenfalls wegzusammenhängend ist. Es seien also $y, y' \in f(X)$. Dann gibt es $x, x' \in X$ mit $f(x) = y$ und $f(x') = y'$. Nachdem X wegzusammenhängend ist gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$, welcher x und x' verbindet. Dann verbindet der Weg $f \circ \gamma\colon [0,1] \to Y$ die Punkte $f(x) = y$ und $f(x') = y'$.

Wir beweisen nun (2). Es sei also $f(X) = U \cup V$ eine Zerlegung in zwei offene disjunkte Teilmengen. Wir wollen zeigen, dass $f(X) = U$ oder $f(X) = V$. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offene Teilmengen von X sind. Zudem sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offensichtlich disjunkt. Nach Voraussetzung gilt also, dass entweder $X = f^{-1}(U)$ oder $X = f^{-1}(V)$. Dann gilt aber auch, dass entweder $f(X) = f(f^{-1}(U)) = U$ oder $f(X) = f(f^{-1}(V)) = V$. □

6.2. **Diskrete Teilmengen.** In diesem kurzen Kapitel führen wir die diskreten Teilmengen von einem metrischen Raum ein. Diesen werden wir in dieser, und auch in weiteren Vorlesungen immer wieder begegnen.

Definition. Wir sagen eine Teilmenge D eines metrischen Raums ist *diskret*, wenn es zu jedem Punkt $x \in D$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass [27] $B_\epsilon(x) \cap D = \{x\}$.

Beispiel.

(1) Jede endliche Teilmenge $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ von einem metrischen Raum ist diskret, denn für jedes a_i mit $i \in \{1, \dots, k\}$ hat
$$\epsilon \;=\; \min\{d(a_i, a_j) \mid j \neq i\}$$
die gewünschte Eigenschaft.

(2) Die Teilmenge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ist diskret, denn für jeden Punkt können wir $\epsilon = 1$ wählen.

(3) Man kann leicht zeigen dass $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, aber dass $B = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Folgende Eigenschaft von diskreten Mengen wird im weiteren Verlauf der Vorlesung eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 6.5. *Es sei X ein metrischer Raum, es sei $K \subset X$ kompakt und es sei $D \subset X$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge. Dann ist $D \cap K$ endlich.*[28]

Beweis. Nachdem D diskret ist gibt es zu jedem Punkt $z \in D \cap K$ ein $\epsilon_z > 0$, so dass $B_{\epsilon_z}(z) \cap D = \{z\}$. Zudem ist nach Voraussetzung $X \setminus D$ offen. Also ist
$$\bigcup_{z \in D} B_{\epsilon_z}(z) \;\cup\; (X \setminus D)$$

---

[27] Nachdem wir jetzt einen beliebigen metrischen Raum verwenden wir jetzt wieder die Notation $B_\epsilon(x)$ anstatt $D_\epsilon(x)$.

[28] Gilt die Aussage von diesem Lemma auch, wenn D nicht abgeschlossen ist?

eine offene Überdeckung von K. Nachdem K kompakt ist, ist K schon durch endlich viele dieser Mengen überdeckt. Aber nachdem jede dieser Mengen höchstens einen Punkt von D enthält, kann K nur höchstens endlich viele Punkte aus D enthalten. $\square$

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem elementaren Lemma, welches in Übungsblatt 4 bewiesen wird.

Lemma 6.6. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Wenn X zusammenhängend ist und wenn $f(X)$ diskret ist, dann ist f eine konstante Abbildung.*

Beispiel. Es folgt beispielsweise aus Lemma 6.6, dass jede stetige Funktion auf einem Intervall, deren Werte in $\mathbb{Z}$ liegen, konstant ist. Psychologen, Biologen, Geologen usw. führen gerne Entwicklungsstufen für Kinder, Menschen, Pflanzen, die Natur als ganzes usw. ein, hierbei handelt sich um Abbildungen

$$\text{Zeitintervall} \;\to\; \{0, 1, \ldots, \text{höchste Entwicklungsstufe}\}.$$

Das Lemma besagt also, dass entweder solche Abbildungen konstant sind (also uninteressant) oder unstetig (und damit sehr bedenklich).

6.3. **Der Identitätssatz und das Maximumprinzip.** Im Folgenden nennen wir eine zusammenhängende, nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ein *Gebiet*. Beispielsweise sind $\mathbb{C}$ und alle offenen Scheiben Gebiete. Man kann auch leicht zeigen, dass die ‘geschlitzte Ebene’

$$H \;:=\; \{x + iy \,|\, x \geq 0 \text{ oder } y \neq 0\},$$

d.h. der Definitionsbereich der komplexen Logarithmusfunktion, ebenfalls ein Gebiet ist.

Satz 6.7. (Identitätssatz) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es seien $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *es ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$,*
(2) *f und g stimmen auf einer Teilmenge M von G überein, welche einen Häufungspunkt in G besitzt,*
(3) *es gibt ein $z_0 \in G$, so dass*

$$f^{(m)}(z_0) \;=\; g^{(m)}(z_0) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0.$$

Beispielsweise erhalten wir aus dem Identitätssatz und den Beispielen von Häufungspunkten auf Seite 12 folgende Aussage: es seien f und g zwei holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$, welche auf einer der folgenden Teilmengen übereinstimmen:

(1) einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$,
(2) einer Scheibe,
(3) einem Kreis,[29]

[29] Wir hatten schon auf Seite 48 gesehen, dass die Cauchysche Integralformel impliziert, dass eine holomorphe Funktion auf einer Scheibe durch die Funktionswerte am Rand eindeutig festgelegt ist. Der Identitätssatz ist nun eine deutliche Verallgemeinerung dieser Aussage.

(4) $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,

dann stimmen die Funktionen f und g schon auf ganz $\mathbb{C}$ überein. Für differenzierbare reelle Funktionen ist solch eine Aussage natürlich falsch, beispielsweise stimmen die auf $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktionen

$$f(x) \;=\; 0 \quad \text{und} \quad g(x) \;=\; \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$$

auf dem Intervall $[-1, 0]$ überein, aber nicht auf ganz $\mathbb{R}$. [30]

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2) Diese Implikation ist trivial, nachdem jeder Punkt in G auch ein Häufungspunkt von G ist.

(2) $\Rightarrow$ (3) Wir setzen $h = f - g$. Es gibt also nach Voraussetzung eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ auf der h verschwindet und einen Häufungspunkt z_0 von M, welcher in G liegt. Wir wollen zeigen, dass $h^{(m)}(z_0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. Es sei dann $m \in \mathbb{N}_0$ die kleinste natürliche Zahl mit $h^{(m)}(z_0) \neq 0$. Nach dem lokalen Darstellungssatz 5.16 gibt es eine offene Umgebung V von z_0, so dass

$$h(z) \;=\; (z - z_0)^m \cdot k(z)$$

auf V, wobei $k \colon V \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $k(z_0) \neq 0$ ist.

Nachdem z_0 ein Häufungspunkt von M ist, gibt es eine Folge von Punkten $a_n \neq z_0$ in M, welche gegen z_0 konvergiert.[31] Aus $h(a_n) = 0$ und $a_n \neq z_0$ folgt nun aus der Gleichung $h(a_n) = (a_n - z_0)^m \cdot k(a_n)$, dass auch $k(a_n) = 0$. Nachdem k stetig ist gilt dann auch, dass

$$k(z_0) \;=\; k\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} k(a_n) \;=\; 0,$$

im Widerspruch zur obigen Aussage über $k(z_0)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Wir setzen wiederum $h = f - g$. Nach Voraussetzung gibt es ein z_0, so dass $h^{(m)}(z_0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Wir müssen zeigen, dass $h(z) = 0$ für alle $z \in G$. Wir betrachten dazu

$$U \;=\; \{z \in G \,|\, h^{(m)}(z) = 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0\}$$

und das Komplement

$$V \;=\; \{z \in G \,|\, \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass } h^{(m)}(z) \neq 0\}.$$

[30] Dies gibt auch einen weiteren Beweis für die Aussage von Lemma 5.14, dass sich die obige Funktion f nicht zu einer holomorphen Funktion fortsetzen lässt. Denn wenn man f zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f} \colon U \to \mathbb{C}$ fortsetzen könnte, dann müsste nach dem Identitätssatz diese Fortsetzung mit der holomorphen Funktion $g(z) = 0$ auf U, insbesondere auf $\mathbb{R}$, übereinstimmen. Aber dies ist natürlich nicht der Fall.

[31] In der Tat, denn für jedes n gibt es einen Punkt $a_n \neq z_0 \in M$ mit $|a_n - z_0| < \frac{1}{n}$, also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = z_0$.

Wir wollen zeigen, dass $U = G$. Wir wissen schon, dass $z_0 \in U$, d.h. U ist nichtleer. Nachdem G zusammenhängend ist, genügt es nun zu zeigen, dass sowohl U als auch V offen sind.

Wir zeigen zuerst, dass V offen ist. Es sei also $z \in V$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $h^{(m)}(z) \neq 0$. Nachdem $h^{(m)}$ stetig ist, gibt es nach Lemma 1.6 aber auch ein $\epsilon > 0$, so dass $h^{(m)}$ auf $D_\epsilon(z)$ nicht verschwindet. Also ist $D_\epsilon(z) \subset V$.

Wir müssen nun noch beweisen, dass U ebenfalls offen ist. Es sei also $z \in U$. Nach dem Potenzreihentwicklunggsatz 5.1 gibt es dann ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $w \in D_\epsilon(z)$ gilt, dass

$$h(w) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}h^{(n)}(0)}_{=0} \cdot (w-z)^n \;=\; 0.$$

Also liegt auch $D_\epsilon(z)$ in U.

□

Lemma 6.8. *Es sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet G. Wenn die Funktion $|f(z)|$ konstant ist, dann ist auch schon die Funktion f konstant.*

Beweis. Es sei also $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet G, so dass die Funktion $|f(z)|$ konstant ist. Wir beweisen erst einmal folgende Behauptung.

Behauptung. Für alle $z \in G$ mit $f(z) \neq 0$ gilt $f'(z) = 0$.

Es sei also $z \in G$ mit $f(z) \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass $f'(z) = 0$. Wir schreiben im Folgenden $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$, d.h. es ist $f = u + iv$. Aus der Diskussion von Kapitel 2.3 folgt, dass es genügt zu beweisen, dass die partiellen Ableitungen von $u(z) = u(x+iy)$ und von $v(z) = v(x+iy)$ bezüglich den Variablen x und y verschwinden.

Wir wenden hierzu einen kleinen Trick an. Nach unserer Voraussetzung ist die Funktion $|f|^2 = (u+iv)(u-iv) = u^2+v^2$ konstant. Es folgt, dass

$$0 \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2) \;=\; 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}$$

und ganz analog

$$0 \;=\; \frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2) \;=\; 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy–Riemann} \\ \text{Differentialgleichungen}}}{=}\; -2u\frac{\partial v}{\partial x} + 2v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Zusammengefasst erhalten wir also am Punkt z, dass

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}}_{\substack{\text{die Determinant ist} \\ u^2+v^2 = |f(z)|^2 \neq 0}} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nachdem die Determinante der Matrix auf der linken Seite nicht null ist, folgt, dass die beiden partiellen Ableitungen verschwinden. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis der Aussage zu. Wenn f die Nullfunktion ist, dann gibt es nichts zu beweisen. Wir nehmen nun an, dass f nicht die Nullfunktion ist. Es gibt also ein $z_0 \in G$ mit $a := f(z_0) \neq 0$. Wir betrachten dazu

$$U \;=\; \big\{ z \in G \,\big|\, f(z) = a \big\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $U = G$. Wir betrachten auch das Komplement

$$V \;=\; \big\{ z \in G \,\big|\, f(z) \neq a \big\}.$$

Es folgt aus Lemma 1.6, dass V offen ist. Nachdem G zusammenhängend, und nachdem $U \neq \emptyset$ genügt es nun zu zeigen, dass auch U offen ist.

Es sei also $z \in U$. Nachdem f stetig ist gibt es nach Lemma 1.6 ein $r > 0$, so dass $f(w) \neq 0$ für alle $w \in D_r(z)$. Dann folgt aber aus der Behauptung, dass auch die Ableitung von f auf $D_r(z)$ verschwindet. Es folgt aus Lemma 2.11, dass f auf der Scheibe $D_r(z)$ konstant, also gleich $f(z) = a$ ist. Wir haben also gezeigt, dass $D_r(z) \subset U$. $\square$

Satz 6.9. (Maximumprinzip) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn der Betrag $|f|$ in G ein lokales Maximum besitzt, dann ist f konstant.*

Bemerkung. Auch dieser Satz stimmt mit unserer Erfahrung mit reellen Funktionen nicht überein. Betrachten wir beispielsweise die Funktion $f(x) = 4 - x^2$ auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$, dann nimmt $|f(x)| = 4 - x^2$ ein lokales Maximum in $x = 0$ an, aber f ist natürlich nicht konstant. [32]

Im Beweis vom Maximumprinzip werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 6.10. (Mittelwerteigenschaft) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zudem sei $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt*

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\big(z_0 + re^{it}\big)\, dt.$$

Das Lemma besagt also, dass wir jeden Funktionswert $f(z_0)$ durch 'mitteln' der Funktionswerte über einen Kreis um den Punkt z_0 bestimmen können.

[32] Warum ist die Funktion $f(z) = 4 - z^2$ auf der offenen Scheibe $D_1(0)$ kein Gegenbeispiel zum Maximumprinzip?

Beweis. Es sei also $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zudem sei $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt

$$f(z_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchysche} \\ \text{Integralformel}}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parametrisierung} \\ \gamma(t)=z_0+re^{it}}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}} \cdot ire^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\big(z_0+re^{it}\big)\,dt.$$

□

Wir wenden uns nun dem Beweis vom Maximumprinzip zu.

Beweis vom Maximumprinzip. Nehmen wir an, dass $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum annimmt. Dann gibt es also ein $s > 0$, so dass

$$|f(z)| \le |f(z_0)| \text{ für alle } z \text{ mit } |z-z_0| \le s.$$

Wir wollen zuerst folgende, etwas schwächere Behauptung beweisen.

Behauptung. Die Funktion f ist auf der Scheibe $D_s(z_0)$ konstant.

Es sei $0 < r < s$. Dann gilt

$$|f(z_0)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mittelwerteigenschaft}}}{=} \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\big(z_0+re^{it}\big)\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 3.1}}}{\le} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\big|f\big(z_0+re^{it}\big)\big|}_{\substack{\le |f(z_0)|,\text{ da } z_0 \\ \text{lokales Maximum}}}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gleichheit gilt nur, wenn} \\ |f(z_0+re^{it})| = |f(z)| \text{ für alle } t^{33}}}{\le} |f(z_0)|.$$

Nachdem links und rechts der gleiche Term steht müssen alle Ungleichungen schon Gleichungen sein. Dies ist nur möglich, wenn $|f(z)| = |f(z_0)|$ auf dem Kreis $|z-z_0| = r$. Nachdem r frei in $(0,s)$ gewählt war, folgt, dass $|f|$ auf der Scheibe $D_s(z_0)$ konstant ist. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 6.8.

Die holomorphe Funktion f stimmt also mit der konstanten Funktion $z \mapsto f(z_0)$ auf der Scheibe $D_s(z_0)$ überein. Es folgt nun aus dem Identitätssatz 6.7, dass die Funktion f auf ganz G mit der konstanten Funktion übereinstimmt. □

[33]Hierbei verwenden wir folgende Aussage aus der Analysis I: es sei $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion und $C \in \mathbb{R}$, so dass $h(t) \le C$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b h(t)\,dt \le C(b-a) \text{ und Gleichheit gilt genau dann, wenn } h(t) = C \text{ für alle } t \in [a,b].$$

Korollar 6.11. *Es sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet X und es sei $G \subset X$ ein beschränktes Gebiet,*[34] *so dass $\overline{G} \subset X$. Dann nimmt die Einschränkung von $|f|$ auf $\overline{G}$ sein Maximum auf dem Rand ∂G an.*

Beweis. Die Menge $\overline{G} \subset \mathbb{C}$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt nach dem Satz von Heine-Borel. Die stetige Funktion $|f|$ nimmt also auf $\overline{G}$ ein Maximum an. Nach der Voraussetzung und nach dem Identitätssatz 6.7 ist f auf G nicht konstant. Es folgt nun aus dem Maximumprinzip, dass $|f|$ sein Maximum nicht in G annimmt, es kann es also nur auf dem Rand ∂G annehmen. □

In Übungsblatt 4 werden wir, ohne größere Probleme, aus dem Maximumprinzip auch noch das sogenannte Minimumprinzip herleiten.

Satz 6.12. (Minimumprinzip) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn der Betrag $|f|$ in G ein lokales Minimum besitzt, dann ist entweder f konstant oder f besitzt eine Nullstelle.*

Ganz analog zu Korollar 6.11 kann man aus dem Minimumprinzip auch leicht folgendes Korollar herleiten.

Korollar 6.13. *Es sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet X und es sei $G \subset X$ ein beschränktes Gebiet, so dass $\overline{G} \subset X$. Wenn die Einschränkung von $|f|$ auf $\overline{G}$ sein globales Minimum im Inneren, also in G annimmt, dann besitzt f eine Nullstelle in G.*

Bemerkung. Aus Korollar 6.13 erhalten wir auch einen weiteren Beweis vom Fundamentalsatz 5.8 der Algebra. Es sei also $f(z) = a_0 + a_1 + \dots + a_n z^n$ ein Polynom von Grad $n \geq 1$. Nach Lemma 1.7 folgt, dass $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$. Dies bedeutet insbesondere, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass $|f(z)| \geq 2|a_0|+1$ für alle z mit $|z| = r$. Wir wenden nun Korollar 6.13 an auf die nicht-konstante Funktion $f\colon X = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und auf $G = D_r(0)$. Nachdem für alle $z \in \partial D_r(0)$ gilt, dass $|f(z)| > |f(0)|$ kann $|f|\colon \overline{D_r(0)} \to \mathbb{R}$ sein globales Minimum nicht auf dem Rand annehmen, es muss es also im Inneren der Scheibe annehmen. Dann folgt aber aus Korollar 6.13, dass das Polynom f im Inneren der Scheibe eine Nullstelle besitzt.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 6.14. (Satz von der Gebietstreue) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet.*

Bemerkung. Auch in diesem Fall ist die analoge Aussage für differenzierbare Funktionen falsch. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon (-1,1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

differenzierbar und $(-1,1)$ ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, aber $f((-1,1)) = [0,1)$ ist nicht offen.

[34] In den meisten Anwendungen ist $X = \mathbb{C}$ und G ist eine offene Scheibe.

Beweis. Es sei also $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, d.h. eine nichtleere, zusammenhängende, offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zudem sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Es folgt aus Lemma 6.4, dass $f(G)$ ebenfalls zusammenhängend ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass $f(G)$ offen ist. Es sei nun $w_0 \in f(G)$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $D_\epsilon(w_0) \subset G$. Wir wählen ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = w_0$.

Wir beweisen zuerst folgende Behauptung.

Behauptung. Es gibt ein $r > 0$, so dass f auf dem Kreis $\{z \,|\, |z - z_0| = r\}$ den Wert w_0 nicht annimmt.

Wir beweisen die Behauptung mit einem Widerspruchsbeweis. Wenn die Aussage nicht gilt, dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \neq z_0$ mit $|z_n - z_0| \leq \frac{1}{n}$ und $f(z_n) = w_0 = f(z_0)$. Aus dem Identitätssatz 6.7[35] folgt dann aber, dass $f(z)$ mit der konstanten Funktion w_0 übereinstimmt. Aber nach Voraussetzung ist f nicht konstant. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

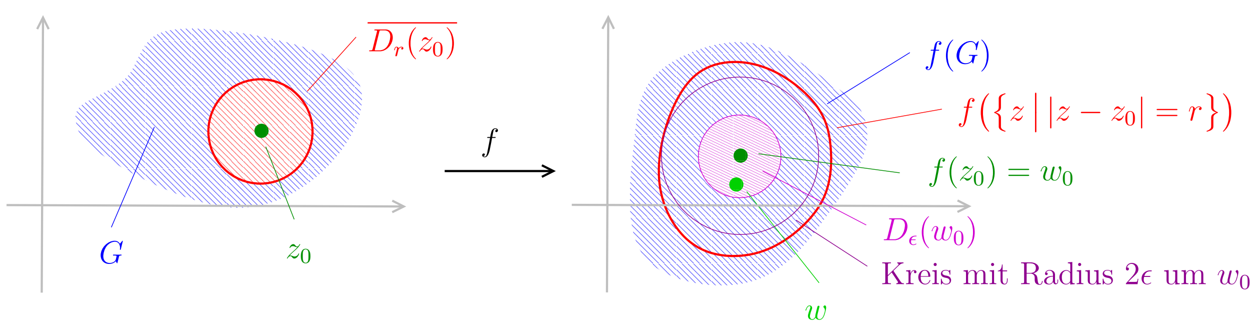


Abbildung 34. Illustration zum Beweis vom Satz von der Gebietstreue.

Wir setzen
$$\epsilon \;:=\; \tfrac{1}{2}\min\big\{|f(z) - w_0| \,\big|\, |z - z_0| = r\big\}.$$
Aus der Behauptung folgt, dass $\epsilon > 0$. Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die offene Scheibe $D_\epsilon(w_0)$ liegt in $f(G)$.

Es sei also $w \in D_\epsilon(w_0)$. Wir wollen zeigen, dass es ein $z \in D_r(z_0)$ mit $f(z) = w$ gibt. In anderen Worten, wir wollen zeigen, dass $h(z) = f(z) - w$ eine Nullstelle in $D_r(z_0)$ besitzt. Wir wollen die Existenz der Nullstelle mithilfe von Korollar 6.13, angewandt auf die nicht-konstante Funktion[36] $h(z)$ auf $G = D_r(z_0)$, beweisen.

[35] Wir wenden den Identitätssatz 6.7 an auf $M = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$, hierbei ist z_0 ein Häufungspunkt von M.

[36] Nachdem f auf dem Gebiet G nicht konstant ist, kann f nach dem Identitätssatz 6.7 auch auf keiner Scheibe in G konstant sein.

Wir betrachten dazu erst einmal die Werte von $|h|$ auf dem Rand der Scheibe $\overline{D_r(z)}$. Es sei also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = r$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} |h(z)| = |f(z) - w| & \geq & |(f(z) - w_0) + (w_0 - w)| \\ & \geq & \underbrace{|f(z) - w_0|}_{\geq 2\epsilon} - \underbrace{|w - w_0|}_{<\epsilon} \geq \epsilon. \end{array}$$

Andererseits gilt

$$|h(z_0)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \epsilon.$$

Wir sehen also, dass $|h(z)|$ sein globales Minimum nicht auf dem Rand der Scheibe annehmen kann. Es nimmt dieses Minimum also in $D_r(z_0)$ an. Also besitzt die Funktion $h(z)$ nach Korollar 6.13 in $D_r(z_0)$ eine Nullstelle. □

7. Isolierte Singularitäten

7.1. Die drei Typen von isolierten Singularitäten.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir sagen $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine *isolierte Singularität* oder auch eine *Definitionslücke* von f, wenn $z_0 \notin U$, aber wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$.

Mit anderen Worten, z_0 ist eine isolierte Singularität von einer Funktion f, wenn f, bis auf den Punkt z_0, in einer kleinen Scheibe um z_0 definiert ist.

Beispiel. Im Folgenden geben wir drei Beispiele von Funktionen, welche jeweils auf der offenen Menge $U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiert sind, und eine isolierte Singularität bei $z_0 = 0$ besitzen:

$$\begin{array}{lrcll} (1) & f_1(z) & = & \frac{\sin(z)}{z}, & \\ (2) & f_2(z) & = & \frac{1}{z^m}, & \text{wobei } m \geq 1, \\ (3) & f_3(z) & = & \sin\left(\frac{1}{z}\right). & \end{array}$$

Im Folgenden unterscheiden wir drei verschiedene Typen von Singularitäten.

Definition. Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$.

(1) Wir sagen z_0 ist eine *hebbare Singularität*, wenn es ein $w \in \mathbb{C}$ gibt, so dass
$$\begin{array}{rcl} U \cup \{z_0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \begin{cases} f(z), & \text{wenn } z \in U, \\ w, & \text{wenn } z = z_0 \end{cases} \end{array}$$
eine holomorphe Funktion ist. In anderen Worten, z_0 ist hebbar, wenn es eine holomorphe Funktion g auf $U \cup \{z_0\}$ gibt, welche auf U mit f übereinstimmt. Wir nennen dann g eine *holomorphe Fortsetzung von f auf* $U \cup \{z_0\}$.

(2) Wir sagen z_0 ist ein *Polstelle* von f, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber wenn es ein $m \geq 1$ gibt, so dass $(z - z_0)^m \cdot f(z)$ eine hebbare Singularität in z_0 besitzt. Das kleinste derartige m nennen wir die *Ordnung der Polstelle* z_0. Eine Polstelle erster Ordnung nennen wir auch eine *einfache Polstelle*.

(3) Wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist, dann nennen wir z_0 eine *wesentliche Singularität von f*.

Bevor wir uns den obigen Beispielen zuwenden halten wir zuerst folgende zwei elementare Aussage als Lemmas fest.

Lemma 7.1. *Wenn z_0 eine hebbare Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist, dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $g\colon U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung von f. Dann gilt
$$\lim_{z\to z_0} f(z) \;=\; \lim_{z\to z_0} g(z) \;=\; g(z_0).$$
$\square$

Der Beweis vom folgenden Lemma ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 5.

Lemma 7.2. *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ und $k \geq 1$. Dann gilt*

$$\begin{array}{c} z_0 \text{ ist eine Polstelle} \\ k\text{-ter Ordnung} \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{es gibt ein } r > 0 \text{ und eine holomorphe} \\ \text{Funktion } g\colon D_r(z_0) \to \mathbb{C} \text{ mit } g(z_0) \neq 0, \text{ so dass} \\ (z - z_0)^k \cdot f(z) = g(z) \text{ auf } D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \end{array}$$

Wir wenden uns nun wieder den obigen Beispielen zu.

Beispiel.

(1) Der Punkt $z_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität von $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, denn für $z \neq 0$ gilt

$$f_1(z) \;=\; \frac{1}{z}\sin(z) \;=\; \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}}_{=:g(z)}.$$

Nach Lemma 2.5 besitzt die Potenzreihe $g(z)$ den gleichen Potenzradius wie $\sin(z)$, d.h. die Potenzreihe $g(z)$ konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$. Insbesondere ist g holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Wir sehen also, dass der Punkt z_0 eine hebbare Singularität der Funktion $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ ist.

(2) Es sei nun $m \geq 1$. Wir betrachten die Funktion $f_2(z) = \frac{1}{z^m}$. Es folgt sofort aus Lemma 7.2, dass $z_0 = 0$ eine Polstelle m-ter Ordnung von $f_2(z)$ ist.

(3) Wir wollen nun noch, wenig überraschend, zeigen, dass der Punkt $z_0 = 0$ eine wesentliche isolierte Singularität von $f_3(z) = \sin(\frac{1}{z})$ ist. Nehmen wir, an dass dies nicht der Fall ist. Dann gibt es ein $m \geq 0$, so dass $f_3(z) \cdot z^m$ eine holomorphe Fortsetzung $g(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt. Wir betrachten die Folge $z_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$g(z_n) \;=\; z_n^m \cdot \underbrace{\sin(\tfrac{1}{z_n})}_{=\sin(2\pi n)=0} \;=\; 0.$$

Es folgt aus dem Identitätssatz 6.7, angewandt auf $M = \{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ mit Häufungspunkt 0, dass $g(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ mit der Nullfunktion übereinstimmt. Aber dies ist offensichtlich nicht der Fall.

Das nächste Lemma gibt einen Zusammenhang zwischen Nullstellen und Polstellen.

Lemma 7.3. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, es sei $z_0 \in U$ und es sei $k \geq 1$. Dann gilt*

$$\begin{array}{c} z_0 \text{ ist eine Nullstelle} \\ k\text{-ter Ordnung von } f(z) \end{array} \iff \begin{array}{c} z_0 \text{ ist eine Polstelle} \\ k\text{-ter Ordnung von } \frac{1}{f(z)}. \end{array}$$

Beweis. Die Aussage des Lemmas folgt sofort aus dem lokalen Darstellungssatz 5.16 und aus Lemma 7.2. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument auch noch sorgfältig aus.

Wir beweisen zuerst die '$\Rightarrow$'–Richtung. Es sei also z_0 eine Nullstelle k-ter Ordnung von f. Nach dem lokalen Darstellungssatz 5.16 gibt es eine offene Umgebung V von z_0 und eine holomorphe Funktion $h\colon V \to \mathbb{C}$ mit $h(z_0) \neq 0$, so dass

$$f(z) \;=\; (z-z_0)^k \cdot h(z) \quad \text{für alle } z \in V,$$

Es folgt, dass

$$(z-z_0)^k \frac{1}{f(z)} \;=\; \frac{1}{h(z)} \qquad \text{für alle } z \in V \setminus \{z_0\}.$$

Es folgt aus Lemma 7.2, dass z_0 eine Polstelle k-ter Ordnung von $\frac{1}{f(z)}$ ist.

Wir beweisen nun die '$\Leftarrow$'–Richtung. Es sei also z_0 eine Polstelle k-ter Ordnung von $\frac{1}{f(z)}$. Dann gibt es nach Lemma 7.2 auf einer Umgebung V von z_0 eine holomorphe Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$, so dass

$$(z-z_0)^k \cdot \frac{1}{f(z)} \;=\; h(z), \qquad \text{für alle } z \in V.$$

Aber daraus folgt

$$f(z) \;=\; (z-z_0)^k \frac{1}{h(z)}, \quad \text{für alle } z \in V.$$

Es folgt nun, dass z_0 eine Nullstelle k-ter Ordnung von $f(z)$ ist. □

Im Folgenden charakterisieren wir jetzt die drei Typen von isolierten Singularitäten durch das Werteverhalten der Funktion f in einer Umgebung von z_0.

Satz 7.4. (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann gilt*

z_0 ist eine hebbare Singularität	$\Longleftrightarrow$	*es gibt ein $r > 0$, so dass f auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.*

Beweis. Die '$\Rightarrow$'–Richtung ist offensichtlich.[37] Wir wenden uns jetzt der '$\Leftarrow$'–Richtung zu.

Die Funktion f ist also in einer Umgebung von z_0 beschränkt. Dies bedeutet allerdings noch nicht, dass der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ notwendigerweise existiert. Wir multiplizieren deswegen $f(z)$ mit $z - z_0$ um sicher zu stellen, dass der Grenzwert mit $z \to z_0$ auch wirklich existiert.

[37] In der Tat, denn wenn f hebbar ist, dann gibt es ein $r > 0$, so dass $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ und eine holomorphe (insbesondere stetige) Funktion g, welche auf $\overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt. Nachdem stetige Funktionen auf kompakten Teilmengen beschränkt sind, ist g auf auf $\overline{D_r(z_0)}$ beschränkt. Also ist auch f auf $\overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ beschränkt.

Wir betrachten dazu die Funktion

$$\begin{array}{rcl} F\colon U\cup\{z_0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & F(z) \;:=\; \begin{cases} f(z)\cdot(z-z_0), & \text{für } z\neq z_0, \\ 0, & \text{für } z=z_0. \end{cases} \end{array}$$

Aus der Beschränktheit von f folgt, dass F in $U\cup\{z_0\}$ zumindest stetig ist. Nachdem F zudem offensichtlich homomorph auf U ist folgt nun aus Satz 5.13, dass F sogar auf ganz $U\cup\{z_0\}$ holomorph ist.

Wir betrachten nun

$$\begin{array}{rcl} g\colon U\cup\{z_0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \begin{cases} f(z)=\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}, & \text{wenn } z\neq z_0, \\ F'(z_0), & \text{wenn } z=z_0. \end{cases} \end{array}$$

Die Funktion g ist außerhalb von z_0 holomorph, und sie ist in z_0 stetig. Also ist nach Satz 5.13 die Funktion g sogar auf ganz $U\cup\{z_0\}$ holomorph. Insbesondere ist g die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf $U\cup\{z_0\}$. □

Satz 7.5. *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U\to\mathbb{C}$. Dann gilt*

$$z_0 \text{ ist eine Polstelle} \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass z_0 eine k-fache Polstelle ist. Dann können wir nach Lemma 7.2 schreiben $f(z)\cdot(z-z_0)^k=g(z)$, wobei g eine holomorphe Funktion auf $U\cup\{z_0\}$ ist mit $g(z_0)\neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \;=\; \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(z-z_0)^k}\cdot g(z) \;=\; \infty.$$

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Dann ist $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 7.4 und dem lokalen Darstellungssatz 5.16 gibt es ein $r>0$, ein $k\geq 1$ und eine holomorphe Funktion g auf $D_r(z_0)$ mit $g(z_0)\neq 0$, so dass

$$\frac{1}{f(z)} \;=\; (z-z_0)^k\cdot g(z) \quad \text{auf } D_r(z_0)\setminus\{z_0\}.$$

Dank Lemma 1.6 können wir, nach eventuellem Übergang zu einem kleineren r, annehmen, dass $g(z)\neq 0$ auf $D_r(z_0)$. Aber dies bedeutet gerade, dass

$$(z-z_0)^k\cdot f(z) \;=\; \underbrace{\frac{1}{g(z)}}_{\text{holomorph}} \qquad\qquad \text{auf } D_r(z_0)\setminus\{z_0\}.$$

Wir haben also nach Lemma 7.2 gezeigt, dass z_0 eine Polstelle k-ter Ordnung von f ist. □

Definition. Wir sagen eine Teilmenge Y von einem metrischen Raum ist *dicht*, wenn es zu jedem $x \in X$ und $\epsilon > 0$ ein $y \in Y$ mit $d(x, y) < \epsilon$ gibt. In Quantoren ausgedrückt gilt

$$Y \text{ ist dicht in } X \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{x\in X}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{y\in Y}{\exists}\ d(x, y) < \epsilon.$$

Beispielsweise ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ und $\{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist dicht in $\mathbb{C}$. Andererseits ist $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1\}$ nicht dicht in $\mathbb{C}$.

Bemerkung. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass eine Teilmenge $Y \subset X$ genau dann dicht ist, wenn $\overline{Y} = X$.

Der letzte Satz von diesem Kapitel gibt nun noch ein Kriterium dafür, dass eine wesentliche Singularität vorliegt.

Satz 7.6. (Satz von Casorati–Weierstraß) *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\begin{array}{c} z_0 \textit{ ist eine wesentliche} \\ \textit{Singularität} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \textit{für jedes } r > 0 \textit{ mit } D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U \textit{ ist} \\ f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \textit{ dicht in } \mathbb{C}. \end{array}$$

Bemerkung. Es gilt sogar eine deutlich stärkere Aussage. Genauer gesagt, der Satz von Picard besagt, dass wenn z_0 eine wesentliche isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist, dann gibt es zu jedem $r > 0$ höchstens einen Punkt, welcher nicht in $f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ enthalten ist. Mehr Informationen dazu kann man auf

`https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Picard`

finden.

Beweis. Wir beweisen die äquivalente Aussage

$$\begin{array}{c} z_0 \text{ ist keine wesentliche} \\ \text{Singularität} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{es gibt ein } r > 0 \text{ mit } D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U, \text{ so dass} \\ f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \text{ nicht dicht in } \mathbb{C} \text{ ist.} \end{array}$$

Der Beweis der '$\Rightarrow$'–Richtung folgt leicht aus den Definition. Die genaue Ausführung des Arguments ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 5.

Wir wenden uns nun der '$\Leftarrow$'–Richtung zu. Wir nehmen also an, dass

$$\underset{r>0}{\exists}\ \underset{w\in\mathbb{C}}{\exists}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ \underset{z\neq z_0\in D_r(z_0)}{\forall}\ |f(z) - w| \geq \epsilon.$$

Wir wollen zeigen, dass z_0 keine wesentliche Singularität ist, d.h. wir wollen zeigen, dass z_0 entweder hebbar ist oder eine Polstelle ist.

Wir betrachten nun

$$g(z) \ := \ \frac{1}{f(z) - w} \qquad \text{auf } D_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Die Funktion $g(z)$ ist holomorph und es folgt aus unserer Annahme, dass der Betrag von $g(z)$ auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ durch $\frac{1}{\epsilon}$ beschränkt ist. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 7.4 gibt es also eine holomorphe Fortsetzung $h(z)$ von $g(z)$ auf $D_r(z_0)$. Dann gilt

$$f(z) \ = \ w + \frac{1}{g(z)} = w + \frac{1}{h(z)} \quad \text{auf } D_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

1. Fall $h(z_0) \neq 0$. In diesem Fall besitzt $f(z) = w + \frac{1}{h(z)}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $D_r(z_0)$. Insbesondere ist z_0 keine wesentliche Singularität.
2. Fall $h(z_0) = 0$. In diesem Fall besitzt $f(z) = w + \frac{1}{h(z)}$ in z_0 eine Polstelle[38], insbesondere ist z_0 keine wesentliche Singularität.

$\square$

[38]In der Tat, dies folgt aus $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \left(w + \frac{1}{h(z)}\right) = \infty$ und aus Satz 7.5.

8. Der Laurent-Reihenentwicklungssatz

8.1. **Laurent-Reihen.** Es sei $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität einer holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Wenn die Singularität hebbar ist, dann können wir f als Potenzreihe schreiben, d.h. es gibt $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \;=\; c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

Wenn $z_0 = 0$ hingegen eine Polstelle k-ter Ordnung ist, dann können wir $z^k \cdot f(z)$ als Potenzreihe beschreiben, d.h. es gibt $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \;=\; c_0 z^{-k} + c_1 z^{-k+1} + \dots + c_k + c_{k+1} z + c_{k+2} z^2 + \dots$$

Betrachten wir zuletzt noch die Funktion $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$. In Übungsblatt 5 werden wir sehen, dass $z_0 = 0$ eine wesentlichen Singularität ist. Hierbei gilt

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n \;=\; 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-3} + \dots$$

Wir sehen also, dass wir die Funktionen im Allgemeinen nicht mehr durch Potenzreihen beschreiben können, aber wir können diese durch Reihen beschreiben, in denen auch negative Exponenten von z auftauchen.

Definition. Eine *Laurent-Reihe* um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine Funktion der Form[39]

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \;=\; \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n}_{\substack{\text{Hauptteil der} \\ \text{Laurent-Reihe}}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\substack{\text{Nebenteil der} \\ \text{Laurent-Reihe}}}.$$

Die Laurentreihe heißt konvergent (bzw. absolut konvergent, gleichmäßig konvergent etc.), wenn dies sowohl für Hauptteil als auch den Nebenteil zutrifft. Wenn der Nebenteil verschwindet, dann nennen wir $f(z)$ eine *reine Laurent-Reihe*.

Wir beweisen zuerst einige Eigenschaften von reinen Laurent-Reihen, bevor wir uns den allgemeinen Laurent-Reihen zuwenden. Es sei

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$$

[39]Für eine Folge $c_-1, c_-2, c_-3, \dots$ von komplexen Zahlen bezeichnen wir mit

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{-1} c_k$$

wie üblich die Folge und den Grenzwert (wenn er existiert) der Partialsummen.

eine reine Laurent-Reihe. Wir bezeichnen[40]

$$s \;=\; \Big(\text{Konvergenzradius von } \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^n\Big)^{-1}$$

als den *Konvergenzradius der reinen Laurent-Reihe.*

Satz 8.1. *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$$

eine reine Laurent-Reihe mit Konvergenzradius r. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Die Laurent-Reihe konvergiert für alle z mit $|z-z_0|>r$ und sie divergiert für alle z mit $|z-z_0|<r$.*
(2) *Für alle $s>r$ konvergiert die reine Laurent-Reihe auf $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-z_0|\geq s\}$ gleichmäßig.*
(3) *Die Laurent-Reihe ist auf $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-z_0|>r\}$ holomorph, wobei*

$$f'(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} nc_n(z-z_0)^{n-1} \qquad \text{‘gliedweises ableiten’.}$$

(4) *Wenn $c_{-1}=0$, dann besitzt die Laurent-Reihe auf $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-z_0|>r\}$ die Stammfunktion*

$$F(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \qquad \text{‘gliedweises integrieren’.}$$

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Spezialfall $z_0=0$. Es sei also

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$$

eine reine Laurent-Reihe um $z_0=0$ mit Konvergenzradius r. Wir betrachten auch

$$k(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n.$$

Per Definition von r hat $k(z)$ nun den Konvergenzradius $r^{-1}=\frac{1}{r}$. Dann ist zudem offensichtlich $f(z)=k(z^{-1})=k(\frac{1}{z})$. Es folgt, dass

$$|z|>r \;\Longrightarrow\; \frac{1}{|z|}<\frac{1}{r} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 2.4.}}}{\Longrightarrow}\; k\big(\tfrac{1}{z}\big)=f(z) \text{ konvergiert .}$$

[40]Hierbei verwenden wir die Konvention, dass $\frac{1}{\infty}=0$ und $\frac{1}{0}=\infty$.

Die anderen Aussagen von (1) und (2) folgen ganz ähnlich aus den Aussagen über Potenzreihen. Zudem folgt aus $f(z) = k(\frac{1}{z})$, dass

$$f'(z) = \frac{d}{dz}k\left(\frac{1}{z}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} k'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Satz 2.6}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n}\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n)c_{-n}z^{-n-1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitution } k=-n}}{=} \sum_{k=-\infty}^{-1} kc_k z^{k-1}.$$

Die vierte Aussage folgt aus der dritten, den gliedweises Ableiten der Laurent-Reihe $F(z)$ ergibt, unter der Voraussetzung, dass $c_{-1} = 0$, die ursprüngliche Laurent-Reihe. ☐

Für $0 \le r < R \le \infty$ bezeichnen wir mit

$$K_{r,R}(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, r < |z - z_0| < R \right\}$$

den *offenen Kreisring* um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R.

Satz 8.2. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

eine Laurent-Reihe. Wir setzen

$$\begin{aligned} R &= \textit{Konvergenzradius vom Nebenteil} \\ r &= \textit{Konvergenzradius vom Hauptteil.} \end{aligned}$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\begin{array}{rcccl} & |z| & < & r & \Longrightarrow f(z) \textit{ divergiert} \\ r < & |z| & < & R & \Longrightarrow f(z) \textit{ konvergiert} \\ R < & |z| & & & \Longrightarrow f(z) \textit{ divergiert.} \end{array}$$

(2) *Für alle $r < s < S < R$ konvergiert die Laurent-Reihe f auf dem abgeschlossenen Kreisring* [41]

$$\overline{K_{s,S}(z_0)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, s \le |z - z_0| \le S \right\}$$

gleichmäßig.

Bemerkung. Der Satz besagt also, dass der Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ der maximale offene Kreisring ist, auf dem $f(z)$ konvergiert. Wie im Fall von Potenzreihen kann man keine allgemeine Aussagen über die Konvergenz von $f(z)$ auf den Kreisen $|z - z_0| = r$ und $|z - z_0| = R$ machen.

[41] Der abgeschlossene Kreisring ist in der Tat der Abschluß, des offenen Kreisrings $K_{r,R}(z_0)$, im Sinne von Kapitel 1.2.

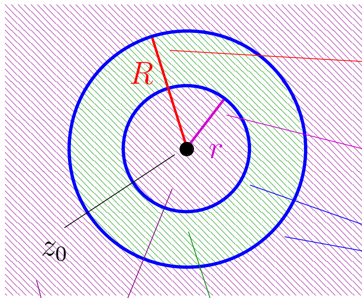


Abbildung 35. Illustration von Satz 8.2.

Beispiel. Wir setzen $c_n = (\frac{1}{2})^n$ für $n \geq 0$ und $c_n = 3^n$ für $n \leq -1$. Wir betrachten die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n z^n}_{\text{Hauptteil der Reihe}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n z^n}_{\text{Nebenteil der Reihe}}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} R &= \text{Konvergenzradius von } \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n z^n && = 2 \\ r &= \Big(\text{Konvergenzradius von } \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{3^{-n}}_{=(\frac{1}{3})^n} z^n\Big)^{-1} && = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also aus Satz 8.2, dass die Laurent-Reihe auf dem offenen Kreisring $K_{\frac{1}{3},2}(0)$ konvergiert. Mit anderen Zahlenwerten für c_n kann man auch Laurent-Reihen erhalten mit $R < r$, in diesem Fall konvergiert dann die Laurent-Reihe nirgendwo.

Beweis von Satz 8.2. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Spezialfall $z_0 = 0$. Es sei also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

eine Laurent-Reihe. Wir setzen

$$\begin{aligned} R &= \text{Konvergenzradius vom Nebenteil} \\ r &= \text{Konvergenzradius vom Hauptteil.} \end{aligned}$$

Dann folgt, dass

$$f(z) \;=\; \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n}_{\substack{\text{nach Satz 8.1 gilt:}\\ \text{konvergiert für } |z|>r\\ \text{divergiert für } |z|<r}} \;+\; \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n}_{\substack{\text{nach Satz 2.4 gilt:}\\ \text{konvergiert für } |z|<R\\ \text{divergiert für } |z|>R}}.$$

Die Aussage über die Konvergenz der Laurent-Reihe folgt nun aus der Tatsache, dass per Definition die Laurent-Reihe genau dann konvergiert, wenn sowohl der Hauptteil als auch der Nebenteil konvergieren.

Die Aussage über die gleichmäßige Konvergenz folgt aus den Aussagen über die gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen in Satz 2.4 und Satz 8.1 (2). □

Viele Ergebnisse, welche wir für Potenzreihen formuliert und bewiesen hatten, übertragen sich ohne größere Probleme auf Laurent-Reihen. Beispielsweise haben wir folgenden Satz.

Satz 8.3. *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

eine Laurent-Reihe, welche auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ konvergiert. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Die Funktion $f(z)$ ist auf dem Kreisring holomorph mit*

$$f'(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}.$$

(2) *Wenn $c_{-1}=0$, dann besitzt $f(z)$ auf dem Kreisring die Stammfunktion*

$$F(z) \;=\; \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty} \tfrac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}.$$

(3) *Für alle $s\in(r,R)$ und alle $n\in\mathbb{Z}$ gilt*

$$c_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt indem wir Satz 2.6 auf den Nebenteil und Satz 8.1 auf den Hauptteil anwenden. Ganz analog folgt die zweite Aussage indem wir Satz 2.6 auf den Nebenteil und Satz 8.1 auf den Hauptteil anwenden. Die dritte Aussage wird genauso wie Satz 3.10 bewiesen. □

8.2. **Der Laurent-Reihenentwicklungssatz.** Der Potenzreihenentwicklungssatz 5.1 besagt, dass man jede holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe als Potenzreihe beschreiben kann.

Der folgende Satz besagt nun, dass man jede holomorphe Funktion, welche auf einem offenen Kreisring definiert ist, als Laurent-Reihe schreiben kann.

Satz 8.4. (Laurent-Reihenentwicklungssatz) *Es $z_0 \in \mathbb{C}$, es seien $0 < r < R \leq \infty$ und es sei f eine holomorphe Funktion auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, so dass auf dem Kreisring gilt, dass*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Wie wir gleich sehen werden besitzt der Beweis vom Laurent-Reihenentwicklungssatz natürlich eine gewisse Ähnlichkeit zum Beweis vom Potenzreihenentwicklungssatz 5.1.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $z_0 = 0$. Es sei nun f eine holomorphe Funktion auf $K_{R,R}(0)$ und es sei $z \in K_{r,R}(0)$. Wir wählen r', R' und $\epsilon > 0$ mit $r < r' < R' < R$ und $\overline{D_\epsilon(z)} \subset K_{r',R'}(0)$. Diese Wahl wird in Abbildung 36 illustriert. Wir bezeichnen zudem mit

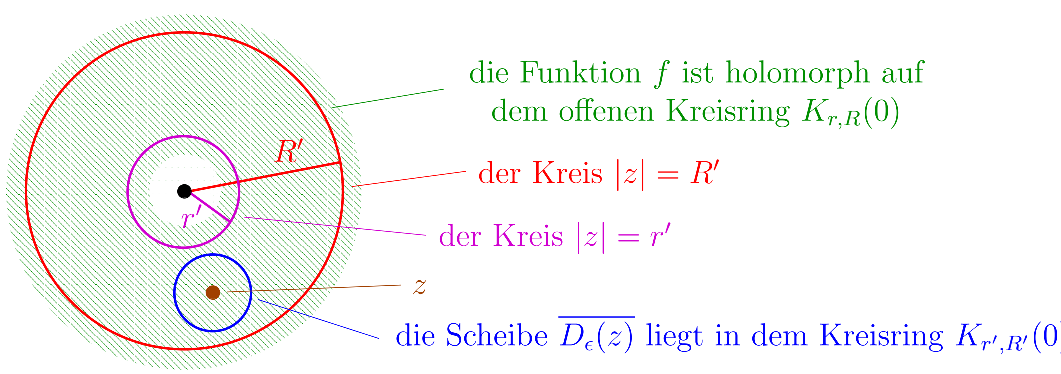


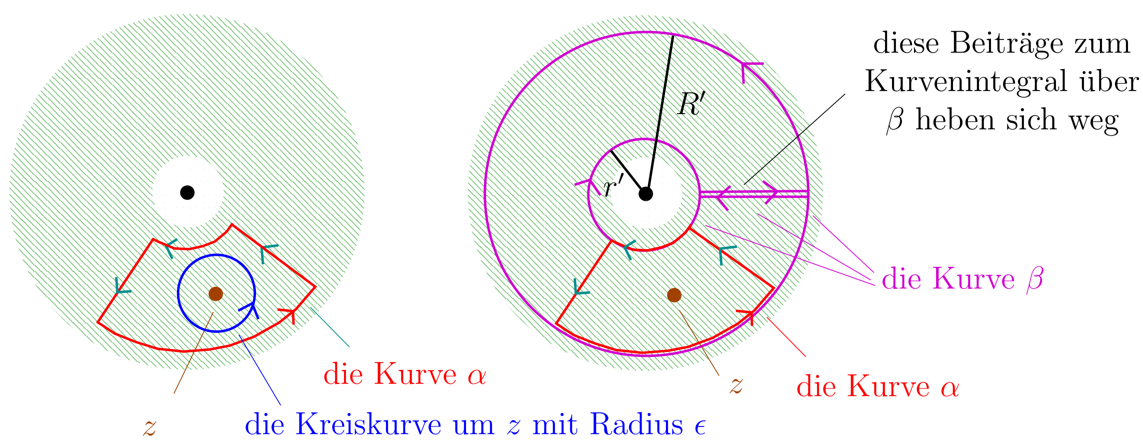
Abbildung 36. Die Wahl von r', R' und ϵ im Beweis vom Laurent-Reihenentwicklungssatz.

α und β die Wege, welche in Abbildung 37 skizziert sind. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(z) \; & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchysche Integralformel}}}{=} \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z| = \epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gleiches Argument wie in Korollar 4.5}}}{=} \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \; \underset{\uparrow}{=} \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\
& \underset{\uparrow}{=} \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi .
\end{aligned}
$$

die beiden horizontalen Beiträge zum Integral über γ heben sich weg,
der äußere Kreisbogen wird gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen
und der innere Kreisbogen wird im Uhrzeigersinn durchlaufen

Im Beweis vom Potenzreihenentwicklungssatz hatten wir schon gesehen, dass



analog zu Korollar 4.5 gilt

$$\int\limits_{|\xi - z| = \epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int\limits_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

analog zu Korollar 4.5 gilt

$$\int\limits_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int\limits_{\beta} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Abbildung 37. Die Wege α und β im Beweis vom Laurent-Reihenentwicklungssatz.

$$\int\limits_{|\xi| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \; = \int\limits_{|\xi| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}}\, d\xi \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische Reihe, da } \left|\frac{z}{\xi}\right| < 1}}{=} \int\limits_{|\xi| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n d\xi \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konvergenzsatz 3.11}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{|\xi| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi}_{=: c_n} \cdot z^n .$$

Ein ganz ähnliches Argument zeigt nun, dass

$$-\int_{|\xi|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \;=\; \int_{|\xi|=r'} \frac{f(\xi)}{z} \frac{1}{1-\frac{\xi}{z}}\, d\xi \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische Reihe, da } |\frac{\xi}{z}|<1}}{=}\; \int_{|\xi|=r'} \frac{f(\xi)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{z}\right)^n d\xi \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{|\xi|=r'} f(\xi)\cdot \xi^n\, d\xi}_{=:c_{-n-1}} \cdot z^{-n-1}.$$

Wir haben also $f(z)$ auf dem Kreisring $K_{r',R'}(0)$ als Laurent-Reihe geschrieben. Die Koeffizienten der Laurent-Reihe sind hierbei nach Satz 8.3 (3) eindeutig bestimmt. Nachdem die Funktion mit der Laurent-Reihe auf allen Kreisringen $K_{r',R'}(0)$ mit $r < r' < R' < R$ gilt, muss diese Übereinstimmung auch auf dem ganzen Kreisring $K_{r,R}(0)$ gelten. $\square$

Wir können nun anhand der Laurent-Reihe den Typ einer isolierten Singularität ablesen. Genauer gesagt, es gilt folgender Satz:

Satz 8.5. *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $r > 0$ und eine eindeutig bestimmte Laurent-Reihe, so dass*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad \textit{für alle } z \in K_{0,r}(z_0) = D_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Zudem gilt

(1)	*z_0 ist hebbar*	$\iff$	*die Laurent-Reihe ist eine Potenzreihe d.h. es ist $c_n = 0$ für alle $n < 0$.*
(2)	*z_0 ist Polstelle k-ter Ordnung*	$\iff$	*es ist $c_{-k} \neq 0$ aber $c_n = 0$ für $n < -k$*
(3)	*z_0 ist wesentlich*	$\iff$	*es ist $c_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.*

Beispiel. Für $z \neq 0$ ist

$$\sin\left(\tfrac{1}{z}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{z})^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{-2n-1} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution } m=-n}}{=}\; \sum_{m=-\infty}^{0} (-1)^m \frac{1}{(-2m+1)!} z^{2m-1}.$$

Es folgt also aus Satz 8.5 (3), dass $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität von $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ ist. Wir hatten diese Aussage natürlich auch schon auf Seite 74 mit anderen Methoden bewiesen.

Beweis. Nachdem $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist, gibt es per Definition ein $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$. Die Existenz und die Eindeutigkeit der Laurent-Reihe folgt nun aus dem Laurent-Reihenentwicklungssatz 8.4.

Wir beweisen zunächst die erste Äquivalenz. In der Tat gilt

$$
\begin{array}{rcl}
z_0 \text{ ist hebbar} & \Longleftrightarrow & \begin{array}{c}\text{es gibt eine holomorphe Funktion } g\text{, welche} \\ \text{auf } D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \text{ mit } f \text{ übereinstimmt}\end{array} \\
& \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Potenzreihenentwicklungssatz 5.1}}}{\Longleftrightarrow} & \begin{array}{c}\text{es gibt eine Potenzreihe, welche auf} \\ D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \text{ mit } f \text{ übereinstimmt}\end{array} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{array}{c}\text{es gibt eine Potenzreihe, welche auf} \\ D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \text{ mit } f \text{ übereinstimmt}\end{array} \\
& \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eindeutigkeit der Laurent-Reihe}}}{\Longleftrightarrow} & \text{die Laurent-Reihe ist eine Potenzreihe.}
\end{array}
$$

Die zweite Äquivalenz folgt aus der ersten Äquivalenz und Lemma 7.2, welches besagt, dass z_0 eine Polstelle k-ter Ordnung ist, genau dann, wenn $f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z)$, wobei g eine holomorphe Funktion auf $U \cup \{z_0\}$ ist mit $g(z_0) \neq 0$.

Die letzte Äquivalenz folgt aus den ersten beiden, nachdem sowohl die linke als auch die rechte Seite das Komplement der vorherigen beiden Aussagen links bzw. rechts sind. $\square$

Definition. Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Nach Satz 8.5 gibt es ein $r > 0$ und eine eindeutig bestimmte Laurent-Reihe, so dass

$$
f(z) \;=\; \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n}_{\text{genannt Hauptteil der Singularität}} \;+\; \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{genannt Nebenteil der Singularität}} \qquad \text{für alle } z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}.
$$

Lemma 8.6. *Es sei f und g zwei holomorphe Funktion auf U mit einer isolierten Singularität bei z_0. Wenn f und g im Punkt z_0 den gleichen Hauptteil besitzen, dann ist z_0 eine hebbare Singularität von $f - g$.*

Beweis. Die Funktion $f - g$ kann in einer Umgebung von z_0 durch die Differenz der Nebenteile, also durch eine Potenzreihe beschrieben werden. Also ist z_0 nach Satz 8.5 eine hebbare Singularität von $f - g$. $\square$

Beispiel. Die Funktionen

$$
f(z) \;=\; \frac{1}{z}
$$

und

$$
g(z) \;=\; \frac{1}{z}\cos(z) \;=\; \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \;=\; \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \ldots
$$

besitzen bei $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität mit Hauptteil $\frac{1}{z}$, also besitzt $\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\cos(z)$ bei $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität.

9. Wegintegrale über beliebige stetige Wege

9.1. **Das Lemma von Lebesgue.** Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir mehrmals folgende Aussage verwenden, welche einen harmlosen Namen trägt, es aber in sich hat.

Lemma 9.1. (Lemma von Lebesgue) *Es sei K ein kompakter metrischer Raum und es sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass es für jede Teilmenge A mit Durchmesser$(A) < \delta$ ein $i \in I$ gibt, so dass $A \subset U_i$.*

Beweis. Nachdem K kompakt ist können wir K schon durch endlich viele der U_i's überdecken. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $I = \{1, \dots, n\}$.

Wenn $K = U_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, dann hat jedes $\delta > 0$ die gewünschte Eigenschaft. Wir nehmen nun an, dass für alle i gilt, dass $U_i \subsetneq K$. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Die Funktion[42]

$$\begin{aligned} f\colon K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, K \setminus U_i) \end{aligned}$$

ist stetig und nimmt nur positive Werte an.

Es folgt leicht aus den Definitionen und der Dreiecksungleichung, dass f stetig ist. Es sei nun $x \in K$. Wir wollen zeigen, dass $f(x) > 0$. Nachdem $K = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ gibt es ein i mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset U_i$. Dann gilt aber $d(x, K \setminus U_i) \geq r$. Insbesondere ist dann $f(x) \geq \frac{r}{n}$. Wir haben also die Behauptung bewiesen.

Nachdem f stetig ist und nachdem K kompakt ist nimmt f sein globales Minimum δ auf K an. Aus der Behauptung folgt, dass dieses Minimum δ größer als 0 ist. Wir wollen nun zeigen, dass dieses δ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Genauer gesagt wollen wir folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Es sei A eine Teilmenge von K mit Durchmesser$(A) < \delta$. Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $A \subset U_i$.

Es sei $x \in A$ beliebig. Wir wählen $m \in \{1, \dots, n\}$, so dass $d(x, K \setminus U_m)$ maximal ist. Dann gilt

$$\delta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Wahl von } \delta}}{\leq} f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{d(x, K \setminus U_i)}_{\leq d(x, K \setminus U_m)} \leq d(x, K \setminus U_m).$$

[42]Für $x \in K$ und eine nichtleere Teilmenge $C \subset K$ schreiben wir hierbei

$$d(x, C) := \inf\{d(x, y) \mid y \in C\}.$$

Also gilt $B_\delta(x) \subset U_m$. Nachdem der Durchmesser von A kleiner als δ ist gilt auch $A \subset B_\delta(x)$, insgesamt gilt also $A \subset U_m$. Wir haben damit die Behauptung bewiesen. $\square$

9.2. **Wegintegrale über beliebige stetige Wege.** Wir erinnern zuerst an folgende zwei Definitionen:

(1) ein Weg ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$,
(2) ein Integrationsweg ist ein Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, welcher abschnittsweise stetig differenzierbar ist.

Auf Seite 25 hatten wir das Wegintegral einer holomorphen Funktion über einen Integrationsweg eingeführt. Wir wollen jetzt den Begriff von Wegintegralen auf beliebige Wege fortsetzen.

Wir benötigen dazu folgende Definition.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und es sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Wir sagen, eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ ist *fein*, wenn es offene Scheiben $D_0, \dots, D_{k-1}$ in U gibt, so dass für alle $i = 0, \dots, k-1$ gilt $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset D_i$.

Das folgende Lemma besagt nun, dass es immer feine Zerlegungen gibt.

Lemma 9.2. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Jeder Weg $\gamma\colon [a, b] \to U$ besitzt eine feine Zerlegung.*

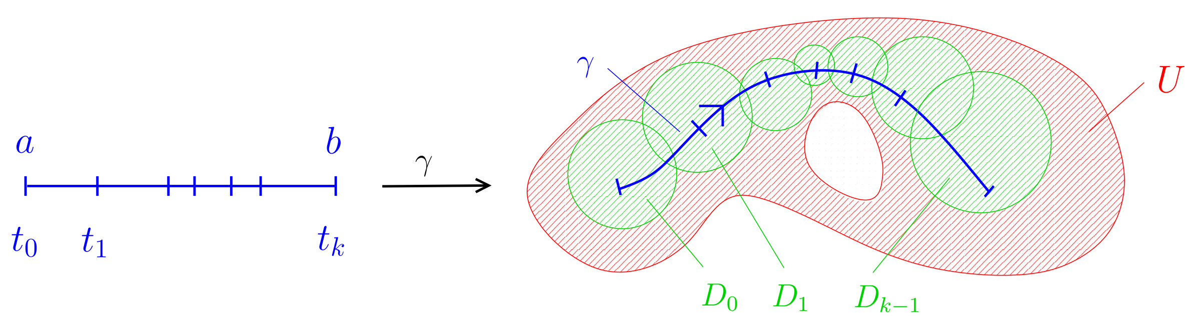


Abbildung 38. Illustration von Lemma 9.2.

Beweis. Nachdem U offen ist gibt es zu jedem $t \in [a, b]$ eine offene Scheibe D_t in U, so dass $\gamma(t) \in D_t$. Inbesondere ist dann $\gamma^{-1}(D_t)$, $t \in [a, b]$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a, b]$. Es folgt also aus dem Lemma 9.1 von Lebesgue, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jedes Teilintervall in $[a, b]$ mit Länge $\le \frac{b-a}{k}$ schon ganz in einem $\gamma^{-1}(D_t)$ liegt. Also ist $t_i = a + \frac{b-a}{k} \cdot i$ mit $i = 0, \dots, k$ eine feine Zerlegung. $\square$

Es sei nun $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Nach Satz 9.2 gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ und offene Scheiben $D_0, \dots, D_{k-1}$ in U, so dass für alle $i = 0, \dots, k-1$ gilt $\gamma([t_i, t_i+1]) \subset D_i$.

Nach Satz 5.3 gibt es für $i = 1, \ldots, k$ jeweils eine Stammfunktion F_i für die Einschränkung von f auf D_i. Wir definieren nun

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;:=\; \sum_{i=0}^{k-1} \big(F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))\big).$$

Lemma 9.3. *Die Definition von* $\int_\gamma f(z)\,dz$ *hängt nicht von den verschiedenen Wahlen ab.*

Beweis. Es sei eine feine Zerlegung Z der Form $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ gegeben. Dann gibt es offene Scheiben $D_0, \ldots, D_{k-1}$ in U, so dass für alle $i = 0, \ldots, k-1$ gilt $\gamma([t_i, t_i + 1]) \subset D_i$ und nach Satz 5.3 gibt es für $i = 1, \ldots, k$ jeweils eine Stammfunktion F_i für die Einschränkung von f auf D_i. Wir schreiben

$$I(Z) \;:=\; \sum_{i=0}^{k-1} \big(F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))\big).$$

Stammfunktionen auf Scheiben unterscheiden sich nach Lemma 3.5 nur um eine additive Konstante. Nachdem solch eine Konstante in der Summe zweimal, mit entgegengesetztem Vorzeichen auftritt, hängt $I(Z)$ nicht von der Wahl der Stammfunktionen F_i und auch nicht von der Wahl der Größe der Scheiben D_i ab.

Wir müssen nun noch zeigen, dass wenn Z und Z' zwei feine Zerlegungen von $[a, b]$ sind, dann gilt $I(Z) = I(Z')$.

Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass wir eine feine Zerlegung Z von der Form $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ durch Hinzufügen von einem Punkt t' zwischen t_i und t_{i+1} zu einer Zerlegung Z' verfeinern. In diesem Fall gilt $I(Z') = I(Z)$, denn die Summanden von $I(Z')$ sind die gleichen wie von $I(Z)$, außer das noch der Summand $F_i(\gamma(t'))$ einmal mit positiven und einmal mit negativen Vorzeichen auftaucht. Aber diese beiden Extra-Summanden heben sich weg.

Es seien nun Z und Z' zwei feine Zerlegungen. Wir betrachten die Zerlegung $Z'' = Z \cup Z'$. Diese Zerlegung entsteht aus Z durch eine mehrfache Verfeinerung, also ist $I(Z'') = I(Z)$. Genauso gilt $I(Z'') = I(Z')$. Es folgt, wie gewünscht, dass $I(Z) = I(Z'') = I(Z')$. □

Für eine beliebige *holomorphe* Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und einen beliebigen Weg $\gamma : [a, b] \to U$ haben wir nun also einen wohldefinierten Begriff vom Wegintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$. Es folgt leicht aus Lemma 3.4 und Lemma 3.7, dass für Integrationswege, d.h. für Wege, welche abschnittsweise stetig differenzierbar sind, diese Definition vom Wegintegral mit der ursprünglichen Definition auf Seite 25 übereinstimmt.

Bemerkung. Das Wegintegral hatten wir ursprünglich auf Seite 25 für abschnittsweise stetig differenzierbare Weg (d.h. für Integrationswege) und für beliebige *stetige* Funktionen f eingeführt. Wenn wir die Definition erweitern wollen auf beliebige Wege, dann müssen wir eine stärkere Bedingung an f stellen, nämlich f muss *holomorph* sein.

Folgendes Lemma werden wir mehrmals verwenden.

Lemma 9.4. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge U und es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein geschlossener Weg, so dass γ in einer offenen Scheibe D in U enthalten ist. Dann ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Beweis. In diesem Fall ist $a = t_0 < t_1 = b$ schon eine feine Zerlegung. Wir wählen eine Stammfunktion F für die Einschränkung von f auf die offene Scheibe D. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per Definition}}}{=} F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \gamma \text{ geschlossen}}}{=} 0.$$

□

Viele Aussagen von Wegintegralen über Integrationswege übertragen sich zu Wegintegralen über Wegen. Beispielsweise gilt folgende Verallgemeinerung von Lemma **??**.

Lemma 9.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph*[43]*, und es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Weg. Zudem sei $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine stetige, bijektive Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \quad \textit{wenn } \varphi \textit{ orientierungserhaltend ist}$$

und

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz \quad \textit{wenn } \varphi \textit{ orientierungsumkehrend ist.}$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass φ orientierungserhaltend ist. Es sei nun $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$ eine feine Zerlegung von $[a,b]$ für den Weg γ. Dann ist $c = \varphi^{-1}(t_0) < \varphi^{-1}(t_1) < \varphi^{-1}(t_2) < \cdots < \varphi^{-1}(t_k) = d$ eine feine Zerlegung von $[c,d]$ für $\gamma \circ \varphi$. Per Definition gilt dann, dass

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz &= \sum_{i=0}^{k-1}\Big(F_i\big((\gamma\circ\varphi)(\varphi^{-1}(t_{i+1}))\big) - F_i\big((\gamma\circ\varphi)(\varphi^{-1}(t_i))\big)\Big)\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\big(F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))\big) = \int_\gamma f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Der Fall, dass φ orientierungsumkehrend ist wird ganz ähnlich bewiesen und verbleibt eine freiwillige Übungsaufgabe. □

Zudem gilt folgende Verallgemeinerung von Lemma 3.4.

Lemma 9.6. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zudem seien $\alpha\colon [a, a+p] \to \mathbb{C}$ und $\beta\colon [b, b+q] \to \mathbb{C}$ zwei Wege mit $\alpha(a+p) = \beta(b)$. Dann gilt*

$$\int_{\alpha\cdot\beta} f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz.$$

[43] Im Gegensatz zu Lemma **??** müssen wir nun voraussetzen, dass f holomorph ist, ansonsten ist das Wegintegral über γ gar nicht definiert.

Beweis. Die Aussage folgt leicht aus den Definitionen. In der Tat, eine feine Zerlegung von $[a, a+p]$ für α und eine feine Zerlegung von $[b, b+q]$ für β ergeben eine feine Zerlegung von $[a, a+p+q]$ für $\alpha \cdot \beta$. Die gewünschte Gleichheit folgt dann sofort aus der Definition vom Wegintegral. □

9.3. **Der Cauchysche Integralsatz für stetige Bilder von Rechtecken.** Es gilt auch folgende Verallgemeinerung von Satz 4.3.

Satz 9.7. (Cauchysche Integralsatz für stetige Bilder von Rechtecken) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $\varphi\colon Q \to U$ eine stetige Abbildung von einem Rechteck Q nach U. Dann gilt*

$$\int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\, dz \;=\; 0.$$

Wenn φ stetig differenzierbar ist, dann hatten wir die Aussage schon in Satz 4.3 formuliert und bewiesen. Der Beweis von Satz 4.3 überträgt sich aber nicht zum Fall, dass φ nur stetig ist.

Beweis.

> Wenn $f(Q)$ ganz in einer Kreisscheibe innerhalb von U liegt, dann folgt aus Lemma 9.4, dass das Wegintegral verschwindet. Den allgemeinen Fall führen wir nun auf den Spezialfall zurück, in dem wir wiederum das Rechteck Q geschickt unterteilen.

Nachdem U offen ist gibt es für jedes $z \in f(Q)$ eine offene Scheibe $D_z \subset U$, welche z enthält. Es folgt aus Lemma 9.1 von Lebesgue, angewandt auf $K = Q$ und die offene Überdeckung $\varphi^{-1}(D_z)$, $z \in f(Q)$, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass jede Teilmenge A von Q mit Durchmesser $\leq \delta$ ganz in einem $\varphi^{-1}(D_z)$ liegt. Wir wählen nun $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle Rechtecke

$$Q_{ij} \;:=\; \left[a + \tfrac{i(b-a)}{n}, a + \tfrac{(i+1)(b-a)}{n}\right] \times \left[\tfrac{j}{n}, \tfrac{j+1}{n}\right] \;\text{ mit } i = 0, \dots, n-1 \text{ und } j = 0, \dots, n-1$$

der Durchmesser kleiner als δ ist. Mit anderen Worten, für jedes Q_{ij} ist $\varphi(Q_{ij})$ ganz in einer Scheibe in U enthalten. Dann gilt

$$\int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\, dz \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{alle inneren}\\ \text{Wegintegrale}\\ \text{heben sich weg}}}{=}\; \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\int\limits_{\varphi\circ\partial Q_{ij}} f(z)\, dz}_{\substack{=0 \text{ nach Lemma 9.4,}\\ \text{denn } \varphi(Q_{ij}) \text{ liegt}\\ \text{in einer Scheibe in } U}} \;=\; 0.$$

□

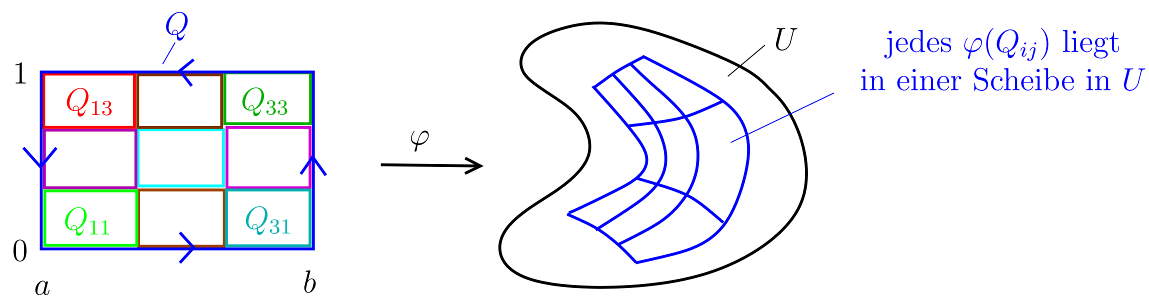


Abbildung 39. Skizze zum Beweis von Satz 9.7

10. Umlaufszahlen

Wir hatten im bisherigen Verlauf der Vorlesung mehrmals gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen, Wegintegrale verschwinden, oder etwas allgemeiner, verschiedene Wegintegrale das gleiche Ergebnis ergeben. Beispielsweise hatten wir in Korollar 4.5 gezeigt, dass wenn $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, so dass der abgeschlossene Kreisring $\overline{K_{r,R}(z_0)}$ in U enthalten ist, dann gilt

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \;=\; \int\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz.$$

Die Aussage hatten wir auch in Abbildung 20 illustriert.

Im nächsten Kapitel werden wir den 'Residuensatz' formulieren und beweisen, welcher eine starke Verallgemeinerung der bisherigen Aussagen ist. Um diesen Satz zu formulieren brauchen wir allerdings den Begriff der Umlaufszahl.

10.1. **Homotope Wege.**

Die folgende Definition wird uns auch in den höheren Vorlesungen immer wieder über den Weg laufen.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ und es seien $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt $z_a := \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und gleichem Endpunkt $z_b := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Wir sagen γ_0 *und* γ_1 *sind homotop in* U, geschrieben $\gamma_0 \sim \gamma_1$, wenn es eine *Homotopie zwischen* γ_0 *und* γ_1 gibt, d.h. eine stetige Abbildung

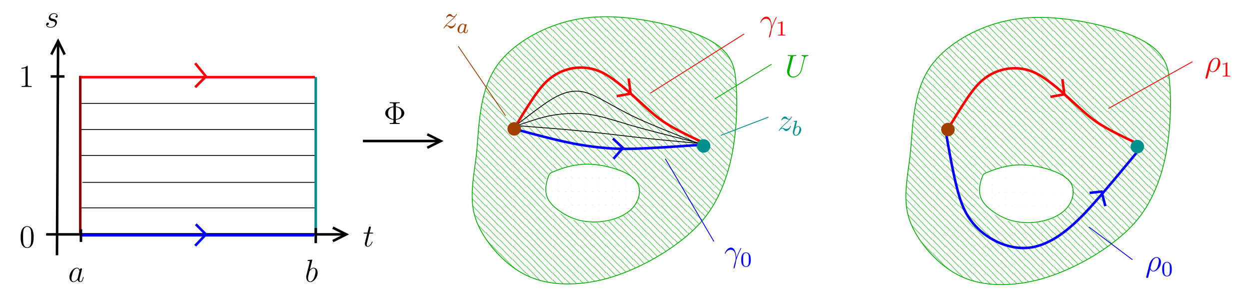
$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon [a,b]\times[0,1] & \to & U \\ (t,s) & \mapsto & \Phi_s(t), \end{array}$$

so dass gilt

(1) für alle $t \in [a,b]$ ist
$$\Phi_0(t) \;=\; \gamma_0(t) \text{ und } \Phi_1(t) \;=\; \gamma_1(t),$$

(2) für alle $s \in [0,1]$ ist
$$\Phi_s(a) \;=\; z_a \text{ und } \Phi_s(b) \;=\; z_b.$$

Etwas vereinfacht gesagt gilt, zwei Wege sind homotop, wenn man bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt, den einen Weg stetig in den anderen überführen kann.



Φ ist eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1

es gibt keine Homotopie in U zwischen ρ_1 und ρ_2

Abbildung 40.

Wir führen noch zwei weitere Definitionen ein.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge.

(1) Ein geschlossener Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$[44] in U heißt *nullhomotop*, wenn dieser in U homotop zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma(a) = \gamma(b)$ ist.
(2) Wir sagen U ist *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg in U nullhomotop ist.

Anschaulich ausgedrückt gilt, ein geschlossener Weg ist nullhomotop, wenn man diesen zu einem Punkt zusammenziehen kann.

Lemma 10.1. *Jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.*

Es folgt also beispielsweise, dass $\mathbb{C}$, aber auch jede Scheibe und jedes Rechteck einfach zusammenhängend sind.

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine konvexe Teilmenge. Zur Erinnerung, konvex bedeutet, dass für alle $z, w \in U$ die Verbindungsstrecke $(1-s)z + sw$, $s \in [0,1]$ ebenfalls in U liegt. Es sei nun $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein geschlossener Weg. Wir bezeichnen mit z den Anfangs- und den Endpunkt von γ. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon [a,b] \times [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ (t,s) & \mapsto & \gamma(t)\cdot(1-s) + z\cdot s \end{array}$$

eine Homotopie zwischen γ und dem konstanten Weg $\delta(t) = z$. Nachdem U konvex ist, liegt die Bildmenge von Φ in U. Mit anderen Worten, Φ ist in der Tat eine Homotopie in U. $\square$

[44]Zur Erinnerung, der Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt geschlossen, wenn der Anfangspunkt $\gamma(a)$ mit dem Endpunkt $\gamma(b)$ übereinstimmt.

Satz 10.2. (Homotopie-Invarianz des Wegintegrals) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es seien $\mu_0, \mu_1\colon [a,b] \to U$ zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Wenn μ_0 und μ_1 homotop sind, dann gilt*

$$\int_{\mu_0} f(z)\,dz \;=\; \int_{\mu_1} f(z)\,dz.$$

Beweis. Es sei

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon Q := [a,b]\times[0,1] & \to & U \\ (t,s) & \mapsto & \Phi_s(t) \end{array}$$

eine Homotopie zwischen μ_0 und μ_1. Wir bezeichnen mit α, β, γ und δ die orientierten Randkurven von dem Rechteck Q, welche in Abbildung 41 skizziert sind. Nachdem hier

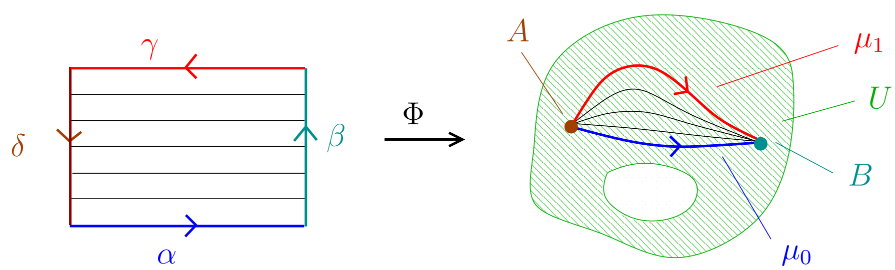


Abbildung 41.

eine Abbildung von einem Rechteck nach U vorliegt, erinnern wir uns an den Cauchyschen Integralsatz 9.7 für stetige Bilder von Rechtecken aus dem vorherigen Kapitel. Dieser besagt in diesem Fall, dass

$$\int_{\phi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Nachdem wir den Rand in die 4 Teilkurven α, β, γ und δ zerlegt haben, erhalten wir, dass

$$0 \;=\; \underbrace{\int_{\phi\circ\alpha} f(z)\,dz}_{=\int_{\mu_0} f(z)\,dz} + \underbrace{\int_{\phi\circ\beta} f(z)\,dz}_{\substack{=0,\text{ denn der}\\ \text{Weg } \phi\circ\beta\\ \text{ist konstant}}} + \underbrace{\int_{\phi\circ\gamma} f(z)\,dz}_{\substack{=-\int_{\rho_1} f(z)\,dz\\ \text{denn } \mu_1 \text{ und } \phi\circ\gamma\\ \text{haben entgegengesetzte}\\ \text{Orientierung}}} + \underbrace{\int_{\phi\circ\delta} f(z)\,dz}_{\substack{=0,\text{ denn der}\\ \text{Weg } \phi\circ\delta\\ \text{ist konstant}}}$$

Zusammengefasst erhalten wir also die gewünschte Aussage, dass

$$\int_{\mu_0} f(z)\,dz \;=\; \int_{\mu_1} f(z)\,dz.$$

$\square$

Wir erhalten insbesondere folgendes Korollar, welches eine Verallgemeinerung von Korollar 4.4 ist.

Korollar 10.3. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei γ ein geschlossener Weg, welcher in U nullhomotop ist. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Insbesondere verschwinden alle Wegintegrale über geschlossenen Wegen auf einfach zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Beispiel. Für $r > 0$ betrachten wir die Kreiskurve α in $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, welche sich gegen den Uhrzeigersinn mit Radius r um den Ursprung dreht. Wir hatten auf Seite 25 gesehen, dass

$$\int_\alpha \frac{1}{z}\,dz \;=\; \int_{|z|=r} \frac{1}{z}\,dz \;=\; 2\pi i \;\neq\; 0,$$

wir sehen also, dass die Schleife α in U nicht null-homotop ist. Wir können diese also in U nicht zu einem Punkt zusammenziehen. Dies deckt sicht natürlich mit unserer Intuition.

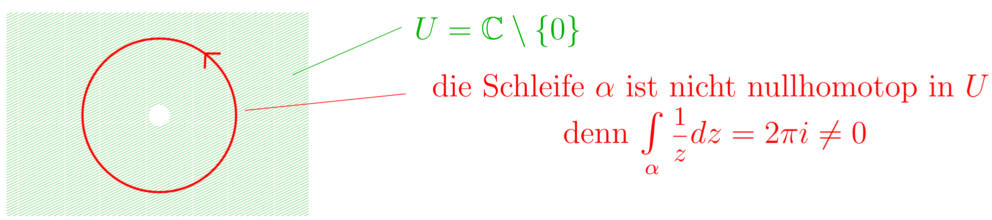


Abbildung 42.

Wir sagen eine Menge $X \subset \mathbb{C}$ ist *sternförmig*, wenn es ein $x \in X$ gibt, so dass für alle $z \in X$ die Verbindungsstrecke $(1-s)x + sz$, $s \in [0,1]$ von x nach z ebenfalls ganz in X liegt. Beispielsweise sind konvexe Teilmengen von $\mathbb{C}$ sternförmig. Weitere Beispiele sind in Abbildung 43 skizziert.

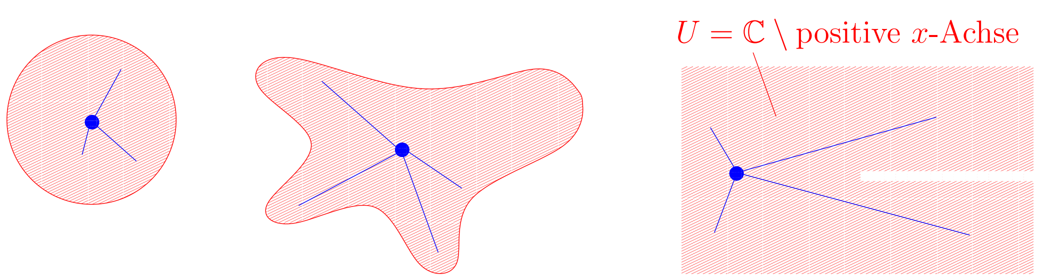


Abbildung 43. Sternförmige Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz, welcher eine Verallgemeinerung von Korollar 10.3 ist.

Lemma 10.4. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn U sternförmig ist, dann verschwindet das Wegintegral über jeden geschlossenen Weg in U.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine sternförmige offene Teilmenge. Dies bedeutet, dass es einen Punkt $x \in U$ gibt, so dass für jedes $z \in U$ die Verbindungsstrecke $(1-s)x + sz$, $s \in [0,1]$ ebenfalls in U liegt. Es sei nun $\gamma \colon [a,b] \to U$ ein geschlossener Integrationsweg. Wir bezeichnen mit z den Anfangs- und den Endpunkt von γ.

Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass $x = z$. In diesem Fall zeigt der Beweis von Korollar 10.3, dass γ nullhomotop ist, also verschwindet das Wegintegral nach Korollar 10.3.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Wir wählen einen Integrationsweg β von x nach z, beispielsweise könnte β der direkte Weg von x nach z sein. Dann ist $\beta \cdot \gamma \cdot (-\beta)$

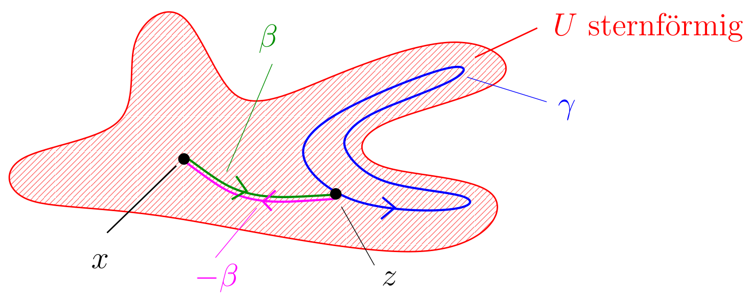


Abbildung 44. Skizze zum Beweis von Lemma 10.4.

ein geschlossener Integrationsweg, wobei nun x der Anfangs- und Endpunkt ist. Aus dem vorherigen Fall folgt nun, dass

$$\int\limits_{\beta\cdot\gamma\cdot(-\beta)} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Andererseits gilt

$$\int\limits_{\beta\cdot\gamma\cdot(-\beta)} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 3.4}}}{=} \int\limits_{\beta} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \underbrace{\int\limits_{-\beta} f(z)\,dz}_{= -\int\limits_{\beta} f(z)\,dz \text{ nach Lemma 3.3}} = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen. □

10.2. Die Definition der Umlaufszahl.

Definition. Es sei $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und z ein Punkt, welcher nicht auf dem Weg liegt. Dann heißt

$$n(\gamma, z) \;:=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\xi - z}\,d\xi$$

die *Umlaufszahl von γ bezüglich z*.

Beispiel. Wenn γ eine geschlossener Weg ist, dann folgt aus Lemma 3.3, dass

$$n(-\gamma, z) \ = \ -n(\gamma, z).$$

In anderen Worten, wenn wir die Orientierung wechseln, wechselt das Vorzeichen der Umlaufszahl. Mithilfe der Berechnung auf Seite 25 und Korollar 4.6 erhalten wir viele Beispiele von Umlaufszahlen, welche in Abbildung 45 skizziert sind.

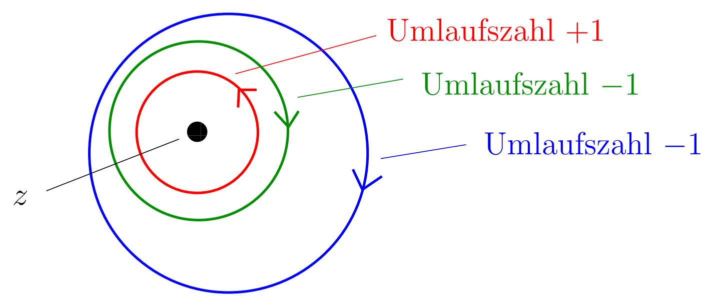


Abbildung 45.

Der Name 'Umlaufszahl' legt nahe, dass es sich dabei um eine ganze Zahl handelt. Dies ist ausgehend von der Definition nicht unbedingt offensichtlich, und wird im folgenden Lemma bewiesen.

Satz 10.5. *Umlaufszahlen von Integrationswegen sind ganzzahlig.*

Beweis. Es sei also $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und es sei z ein Punkt, welcher nicht auf dem Weg liegt. In dem wir γ und z jeweils um $-z$ verschieben können wir o.B.d.A. annehmen, dass $z = 0$.

Wir wollen also zeigen, dass

$$n(\gamma, 0) \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \tfrac{1}{\xi}\, d\xi$$

ganzzahlig ist.

Wir müssen also das Wegintegral von $f(z) = \frac{1}{z}$ über den Weg γ bestimmen. Wir möchten gerne verwenden, dass der Logarithmus eine Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$ ist. Das einzige Problem ist nun, dass der Logarithmus nicht auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert ist.

Wir müssen uns also einschränken auf Wertebereiche von γ, auf denen jeweils ein Logarithmuszweig definiert ist. Wir schaffen dies, indem wir das Intervall $[a, b]$ in kleinere Intervalle zerlegen.

Wir erinnern an die beiden Logarithmuszweige [45]

$$\begin{aligned} \ln_- := \ln_{-\pi}\colon U_- := \mathbb{C}\setminus \overline{S}_{-\pi} &\to \{x+iy\,|\, x\in\mathbb{R} \text{ und } y\in(-\pi,\pi)\} \\ z &\mapsto \ln_{-\pi}(z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \ln_+ := \ln_0\colon U_+ := \mathbb{C}\setminus \overline{S}_0 &\to \{x+iy\,|\, x\in\mathbb{R} \text{ und } y\in(0,2\pi)\} \\ z &\mapsto \ln_0(z). \end{aligned}$$

Dann ist $U_-\cup U_+ = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Zudem gilt für alle $z\in U_-\cap U_+$, dass entweder $\ln_-(z)=\ln_+(z)$ oder $\ln_-(z)=\ln_+(z)-2\pi i$. [46]

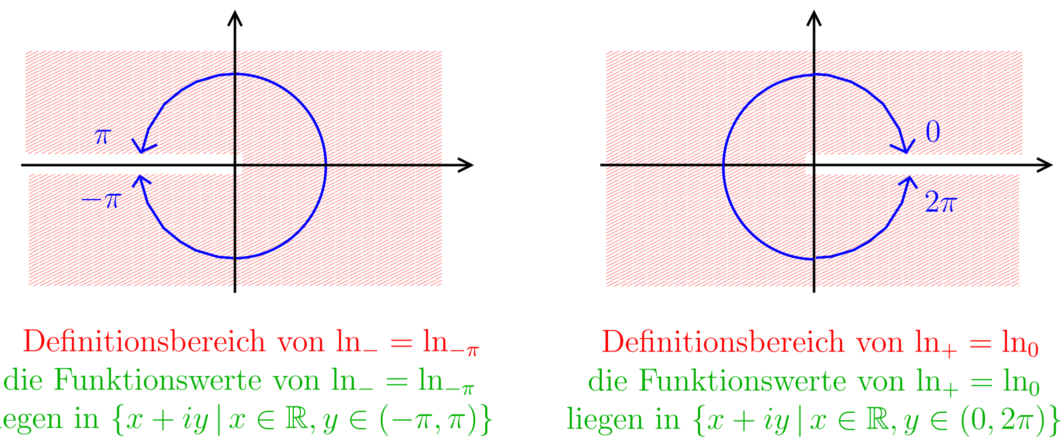


Abbildung 46. Die Definitionsbereiche der beiden Logarithmusfunktionen $\ln_- = \ln_{-\pi}$ und $\ln_+ = \ln_0$.

Behauptung. Es gibt eine Zerlegung $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, so dass für alle $j=0,\ldots,n-1$ gilt, dass $\gamma([s_j,s_{j+1}])\subset U_-$ oder $\gamma([s_j,s_{j+1}])\subset U_+$.

Wir wenden das Lemma 9.1 von Lebesgue auf die kompakte Menge $K=[a,b]$ und die offene Überdeckung durch $\gamma^{-1}(U_-)$ und $\gamma^{-1}(U_+)$ an. Es gibt dann ein $n\geq 1$, so dass jedes Teilintervall von $[a,b]$ der Länge $\leq \frac{a-b}{n}$ in $\gamma^{-1}(U_-)$ oder $\gamma^{-1}(U_+)$ liegt. Wenn wir $[a,b]$ in n Intervalle gleicher Länge zerlegen erhalten wir nun die gewünschte Zerlegung. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

[45]Zur Erinnerung, für $\varphi\in\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\overline{S}_\varphi \;=\; \{r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}\,|\,r\geq 0\}$$

den abgeschlossenen Strahl in φ-Richtung.

[46]In der Tat, wenn $z\in U_-\cap U_+$, dann ist $\operatorname{Im}(z)\neq 0$ und es gilt

$$\ln_-(z) \;=\; \begin{cases} \ln_+(z) & \text{wenn } \operatorname{Im}(z)>0, \\ \ln_+(z)-2\pi i & \text{wenn } \operatorname{Im}(z)<0. \end{cases}$$

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis zu. Für $j = 0, \ldots, n-1$ wählen wir nun jeweils $\epsilon_j \in \{-,+\}$, so dass $\gamma([s_j, s_{j+1}]) \subset U_{\epsilon_j}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi}\,d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{\gamma|_{[s_j,s_{j+1}]}} \frac{1}{\xi}\,d\xi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.7, denn } \ln_{\epsilon_j}(\xi) \text{ ist eine} \\ \text{Stammfunktion von } \frac{1}{\xi} \text{ auf } \gamma([s_j,s_{j+1}]) \subset U_{\epsilon_j}}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \ln_{\epsilon_j}(\gamma(s_{j+1})) - \ln_{\epsilon_j}(\gamma(s_j)) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Umsortieren der Terme}}}{=} \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{\ln_{\epsilon_{j-1}}(\gamma(s_j)) - \ln_{\epsilon_j}(\gamma(s_j))}_{=0 \text{ oder } = \pm 2\pi i} + \frac{1}{2\pi i}\Big(\underbrace{\ln_{\epsilon_{n-1}}(\gamma(s_n)) - \ln_{\epsilon_0}(\gamma(s_0))}_{=0 \text{ oder } = \pm 2\pi i, \text{ da } \gamma(s_n) = \gamma(s_0)}\Big).
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass das Integral, wie gehofft, ganzzahlig ist. □

Einschub: Äquivalenzrelationen. Bevor wir mit der Funktionentheorie fortfahren führen wir den Begriff der Äquivalenzrelation ein.

Es sei X eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* auf X ist eine Teilmenge $M \subset X \times X$, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{array}{rcll}
 & & (x,x) \in M & \\
(x,y) \in M & \Longrightarrow & (y,x) \in M & \text{(Symmetrie)} \\
(x,y) \in M \text{ und } (y,z) \in M & \Longrightarrow & (x,z) \in M & \text{(Transitivität).}
\end{array}$$

Wir schreiben im Folgenden

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in M,$$

und wir sagen *x und y sind äquivalent*. Mithilfe dieser Notation können wir die obigen definierenden Eigenschaften wie folgt umformulieren: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt

$$\begin{array}{rcll}
 & & x \sim x & \\
x \sim y & \Longrightarrow & y \sim x & \text{(Symmetrie)} \\
x \sim y \text{ und } y \sim z & \Longrightarrow & x \sim z & \text{(Transitivität).}
\end{array}$$

Beispiel.

(1) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x-y) \in 3\mathbb{Z}.$$

Man kann nun leicht nachprüfen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

(2) Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann ist

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x^{-1}y \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G.

(3) Es sei X die Menge aller Dreiecke in $\mathbb{R}^2$. Für zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2 schreiben wir

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \Delta_1 \text{ und } \Delta_2 \text{ besitzen die gleichen Innenwinkel.}$$

Dies ist dann eine Äquivalenzrelation auf X.

(4) Es sei X die Menge aller Funktionen auf $\mathbb{R}$. Wir schreiben

$$f \sim g \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt ein } \epsilon > 0, \text{ so dass } f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Man kann nun leicht zeigen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Eine *Äquivalenzklasse* ist eine nichtleere Teilmenge $Y \subset X$, so dass gilt[47]

(1) für alle $y, y' \in Y$ gilt: $y \sim y'$,
(2) wenn $z \sim y$ für ein $y \in Y$, dann gilt auch $z \in Y$.

Im ersten Beispiel gibt es genau drei Äquivalenzklassen, diese sind gegeben durch die drei Mengen

$$\begin{aligned} 3\mathbb{Z} &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \\ 3\mathbb{Z}+1 &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \\ 3\mathbb{Z}+2 &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}. \end{aligned}$$

Im zweiten Beispiel sind die Äquivalenzklassen gerade die Linksnebenklassen G/H.

In Übungsblatt 6 werden wir folgendes Lemma beweisen:

Lemma 10.6. *Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Dann ist X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen, d.h.*

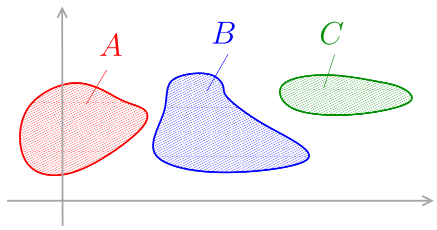
(1) *jedes $x \in X$ liegt in einer Äquivalenzklasse,*
(2) *wenn A und B Äquivalenzklassen sind, dann gilt entweder $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$.*

Wir betrachten zuletzt noch ein Beispiel, welches wieder näher an unserem Interessensgebiet liegt. Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Für $x, y \in X$ definieren wir

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{es gibt einen Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y, \\ \text{d.h. es gibt einen Weg } \gamma\colon [a,b] \to X \\ \text{mit } \gamma(a) = x \text{ und } \gamma(b) = y. \end{array}$$

In Übungsblatt 6 werden wir sehen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation ist. Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen von X als die *Komponenten von X*. Wenn X aus nur einer Äquivalenzklasse besteht, dann ist X per Definition wegzusammenhängend.

[47]In Worten heißt dies, alle Elemente einer Äquivalenzklasse S sind zu einander äquivalent und jedes Element, welches äquivalent zu einem Element in S ist, liegt auch schon in der Äquivalenzklasse.



A, B und C sind die Komponenten von $X = A \cup B \cup C$

Abbildung 47.

10.3. **Die Berechnung der Umlaufszahl.** In diesem Kapitel wollen wir für einen gegebenen Integrationsweg γ die Umlaufszahlen für alle Punkte im Komplement von γ bestimmen. Wir werden dazu im Folgenden verschiedene Methoden kennenlernen um Umlaufszahlen zu berechnen. Wir werden diese für Berechnungen verwenden, aber nicht in Beweisen. Wir werden daher die Beweise streckenweise nur skizzieren.

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Wir sagen ein Punkt z liegt *außerhalb von* γ, wenn es einen Strahl $S = \{z + tv \,|\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ mit $v \neq 0$ gibt, welcher γ nicht schneidet, d.h. es ist $S \cap |\gamma| = \emptyset$.[48]

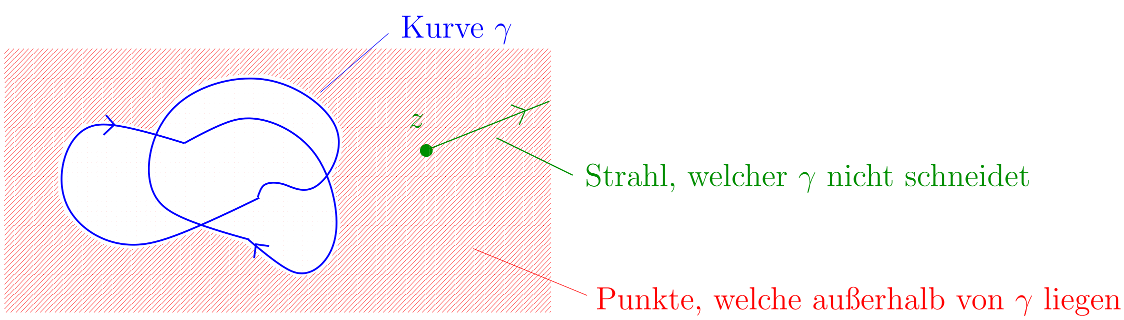


Abbildung 48.

Lemma 10.7. *Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und z ein Punkt außerhalb von γ. Dann ist*

$$n(\gamma, z) \;=\; 0.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen Strahl $\{z + tv \,|\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ mit $v \neq 0$, so dass sich das Bild vom Integrationsweg γ in der Menge

$$U \;:=\; \mathbb{C} \setminus \{z + tv \,|\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

[48] Zur Erinnerung, für einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ bezeichen wir mit $|\gamma| = |\gamma|$ die Menge der Punkte auf dem Weg.

befindet. Die Menge U ist offensichtlich sternförmig[49]. Es folgt, dass

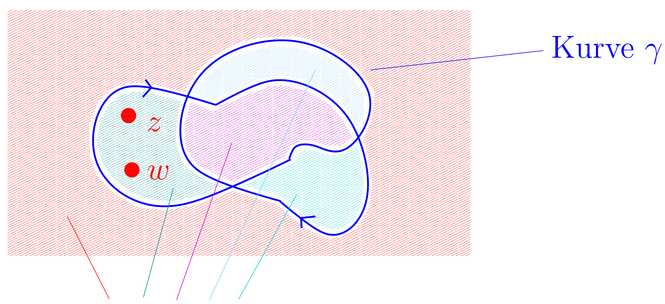
$$n(\gamma, z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - w}\, d\xi \;\underset{\uparrow}{=}\; 0.$$

nach Lemma 10.4, da $|\gamma| \subset U$ und da der
Integrand auf dem sternförmigen U holomorph ist

□

Lemma 10.8. *Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und es seien w, z zwei Punkte, welche in der gleichen Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ liegen. Dann gilt*

$$n(\gamma, w) \;=\; n(\gamma, z).$$



die Umlaufszahl ist konstant auf den fünf Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$

Abbildung 49. Illustration von Lemma 10.8.

Beweis. Es sei also $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg. In Übungsblatt 6 wird folgende Behauptung bewiesen.

Behauptung. Die Funktion[50]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} \setminus |\gamma| \;&\to\; \mathbb{Z} \\ z \;&\mapsto\; n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi \end{aligned}$$

ist stetig.

Es seien nun w, z zwei Punkte, welche in der gleichen Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ liegen. Dies bedeutet, dass es einen Weg $\rho\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\rho(a) = w$ und $\rho(b) = z$ gibt, welcher γ nicht schneidet. Die Funktion

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] \;&\to\; \mathbb{Z} \\ t \;&\mapsto\; n(\gamma, \rho(t)) = f(\rho(t)) \end{aligned}$$

[49] In der Definition von sternförmig könnte man beispielsweise $x = z - v$ wählen

[50] Nach Satz 10.5 nimmt diese Funktion in der Tat Werte in $\mathbb{Z}$ an.

ist die Verknüpfung der stetigen Abbildungen ρ und f, also wiederum stetig. Nachdem $[a,b]$ zusammenhängend ist, und nachdem die Funktion nur Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, muss die Funktion F nach Lemma 6.6 konstant sein. Insbesondere gilt

$$n(\gamma,w) \;=\; n(\gamma,\rho(a)) \;=\; F(a) \;=\; F(b) \;=\; n(\gamma,\rho(b)) \;=\; n(\gamma,z).$$

$\square$

Es seien nun v und w zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, welche linear unabhängig sind. Wir sagen v *und* w *sind positiv orientiert*, wenn es ein $\varphi \in (0,\pi)$ gibt, so dass

$$\frac{w}{\|w\|} \;=\; e^{i\varphi}\cdot\frac{v}{\|v\|}.$$

Andernfalls sagen wir, dass v und w negativ orientiert sind. Etwas salopp gesprochen sind v und w positiv orientiert, wenn man die w-Richtung aus der v-Richtung durch Drehen gegen den Uhrzeigersinn erhält.

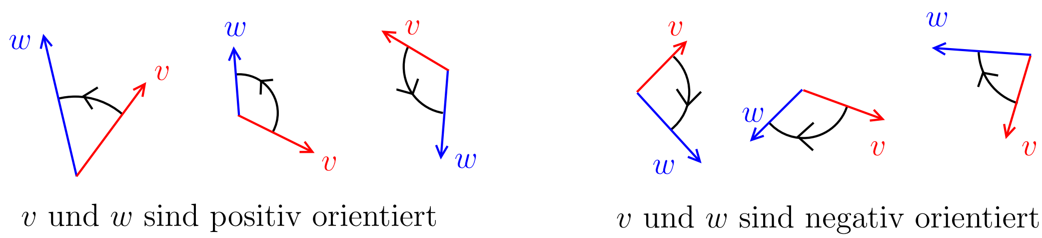


Abbildung 50.

Das folgende Lemma gibt nun an, wie sich die Umlaufszahl ändert, wenn wir von einer Komponent von $\mathbb{C}\setminus|\gamma|$ zur nächsten wechseln. Das Lemma ist bewußt etwas vage gehalten. Wir werden es nur in Berechnungen, aber nicht in Beweisen verwenden. Eine saubere Formulierung ist beispielsweise in Satz 3.2.11 von Fritsche: Funktionentheorie gegeben.

Lemma 10.9. *Es sei* $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ *ein geschlossener Integrationsweg und es sei zudem* $D = D_r(z)\subset\mathbb{C}$ *eine offene Scheibe, welche* γ *in genau einem Durchmesser*

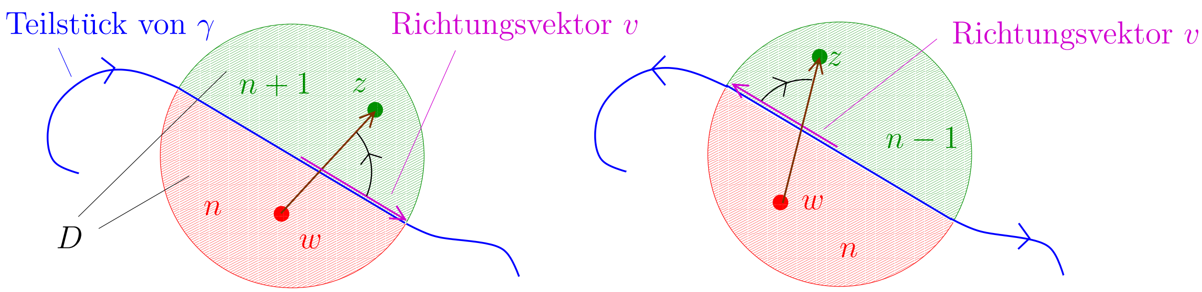
$$\{p+sv\,|\,s\in(-r,r)\}$$

schneidet, wobei $v\in\mathbb{C}$ *ein Vektor ist, welcher in die Orientierung von* γ *zeigt. Es seien* w *und* z *je ein Punkt aus den beiden Hälften von* $D\setminus|\gamma|$*. Dann gilt*

$$n(\gamma,z) \;=\; \begin{cases} n(\gamma,w)+1, & \text{wenn } v \text{ und } z-w \text{ positiv orientiert sind,}\\ n(\gamma,w)-1, & \text{wenn } v \text{ und } z-w \text{ negativ orientiert sind.}\end{cases}$$

Die Aussage von Lemma 10.9 ist in Abbildung 51 skizziert. Die Aussage ist zudem noch etwas salopper und etwas allgemeiner in Abbildung 52 illustriert.

Mithilfe von Lemmas 10.7, 10.8 und 10.9 können wir in der Praxis Umlaufszahlen problemlos bestimmen. Beispiele von Umlaufszahlen für zwei verschiedene Wege sind in Abbildung 53 skizziert.



$n(\gamma, z) = n(\gamma, w) + 1$, d.h.
die Umlaufszahl erhöht sich beim
Übergang von w zu z um eins

$n(\gamma, z) = n(\gamma, w) - 1$, d.h.
die Umlaufszahl erniedrigt sich beim
Übergang von w zu z um eins

Abbildung 51. Illustration von Lemma 10.9.

die Umlaufszahl erhöht sich um +1,
wenn der Weg von einer Komponente
zur anderen Vorfahrt (‘rechts vor links’)
hat vor dem Weg γ

die Umlaufszahl erniedrigt sich um 1,
wenn der Weg von einer Komponente
zur anderen nicht Vorfahrt
hat vor dem Weg γ

Abbildung 52.

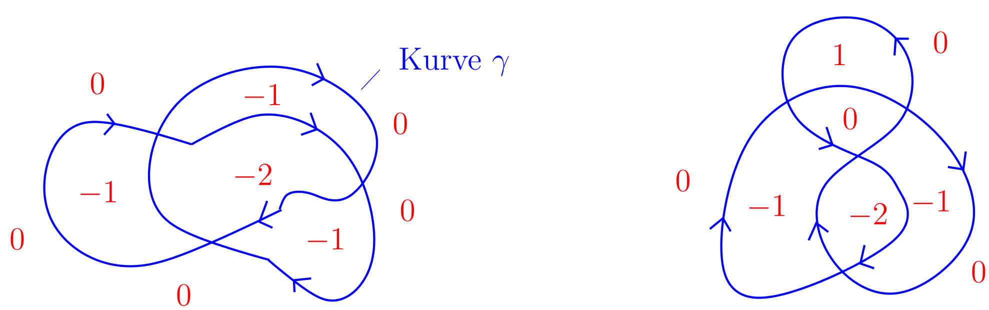


Abbildung 53. Beispiele für Umlaufszahlen.

Beweisskizze für Lemma 10.9. Um die Notation etwas zu vereinfachen, nehmen wir im Folgenden an, dass $D = D_r(0)$, dass γ horizontal von links nach rechts geht, dass

w unterhalb der x-Achse liegt, und dass z oberhalb der x-Achse liegt. Wir wollen zeigen, dass $n(\gamma, z) = n(\gamma, w) + 1$.

Im Folgenden seien γ', β, δ, β' und α die Wege, welche in Abbildung 54 skizziert sind. Den Weg γ' erhalten wir dabei dadurch, dass wir aus γ den Weg α 'herausschneiden'. Dann

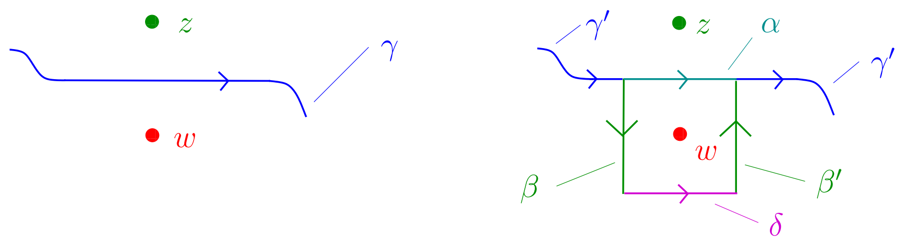


Abbildung 54. Illustration zum Beweis von Lemma 10.9.

ist

$$\begin{aligned}
2\pi i \cdot n(\gamma, z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \gamma \text{ und } \beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma' \text{ sind homotop in } \mathbb{C}\setminus\{z\}}}{=} & \; 2\pi i \cdot n(\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma', z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 10.8}}}{=} 2\pi i \cdot n(\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma', w) \\
= & \int\limits_{\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma'} \frac{1}{\xi - w}\, d\xi \quad = \int\limits_{\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot(-\alpha)\cdot\alpha\cdot\gamma'} \frac{1}{\xi - w}\, d\xi \\
= & \underbrace{\int\limits_{\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot(-\alpha)} \frac{1}{\xi - w}\, d\xi}_{\substack{= 2\pi i, \text{ denn wie in Korollar 4.6} \\ \text{ist dies gerade das Integral} \\ \text{über den Kreis um } w}} + \underbrace{\int\limits_{\alpha\cdot\gamma'} \frac{1}{\xi - w}\, d\xi}_{= 2\pi i \cdot n(\gamma, w)} \\
= & \; 2\pi i \cdot (1 + n(\gamma, w))
\end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir damit also wie erhofft bewiesen, dass

$$n(\gamma, z) \;=\; n(\gamma, w) + 1.$$

□

11. Der Residuensatz

Das Ziel von diesem Kapitel ist den sogenannten Residuensatz zu formulieren und zu beweisen. Dieser erlaubt es uns viele Wegintegrale nur mithilfe von Umlaufszahlen und 'Residuen' zu bestimmen. Wir kennen schon die Umlaufszahlen. Wir führen daher als nächstes die Residuen ein, und wir wollen dann verschiedene Methoden kennenlernen, um diese zu berechnen.

11.1. **Das Residuum.** Wir führen also nun erst einmal das Residuum einer Funktion an einer isolierten Singularität ein.

Definition. Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Wir wählen ein $r > 0$, so dass $\overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset U$. Wir bezeichnen dann

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \;:=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$$

als das *Residuum von f im Punkt z_0*.[51]

Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität z_0 wie oben. Nach dem Laurent-Reihenentwicklungssatz 8.4 gilt auf $\overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$, dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

wobei $c_n \in \mathbb{C}$. Also ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\,dz \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konvergenzsatz 3.11}}}{=}\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n \underbrace{\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n\,dz}_{\substack{=0, \text{ wenn } n \neq -1, \\ = 2\pi i, \text{ wenn } n = -1}} \;=\; c_{-1}$$

$$= \text{der Koeffizient von } (z-z_0)^{-1} \text{ der Laurent-Reihe.}$$

Wir sehen insbesondere, dass $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$, wenn z_0 eine hebbare Singularität ist.

Beispiel. Es ist

$$\operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) \;=\; \operatorname{res}_0\left(\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right) \;=\; \text{der } z^{-1}\text{-Koeffizient von } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-4}}{n!} \;=\; \frac{1}{3!}.$$

Wir wollen nun im Folgenden die Residuen einer Funktion an einer Polstelle mit möglichst geringem Aufwand bestimmen.

---

[51] Es folgt aus Korollar 4.5, dass diese Definition nicht von der Wahl von r abhängt.

Lemma 11.1. *Es sei f eine holomorphe Funktion, welche in z_0 eine Polstelle der Ordnung $\leq k$ besitzt. Dann gilt*

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \;=\; \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\underbrace{\big((z-z_0)^k\cdot f(z)\big)}_{\substack{\text{holomorph auf eine}\\ \text{offene Scheibe um } z_0\\ \text{fortgesetzt}}}\Big|_{z=z_0}.$$

Beispiel. Die Funktion $f(z)=\frac{\cos(z)}{z^2}$ besitzt eine Polstelle zweiter Ordnung bei $z_0=0$. Es folgt aus Lemma 11.1, dass

$$\operatorname{res}_0(f) \;=\; \frac{d}{dz}\big(z^2\cdot f(z)\big)\Big|_{z=0} \;=\; \frac{d}{dz}\cos(z)\Big|_{z=0} \;=\; -\sin(z)\Big|_{z=0} \;=\; -\sin(0) \;=\; 0.$$

Beweis. Es sei also f eine holomorphe Funktion, welche am Punkt z_0 eine Polstelle der Ordnung $\leq k$ besitzt. Dann gibt es nach Satz 8.5 eine Folge $c_n, n\in\mathbb{Z}$ von komplexen Zahlen und ein $r>0$, so dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

auf $D_r(z_0)\setminus\{z_0\}$. Also ist

$$(z-z_0)^k\cdot f(z) \;=\; \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+k} \;=\; \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{m-k}(z-z_0)^m}_{\text{holomorphe Funktion in } z_0}$$

Eine holomorphe Funktion und es folgt aus Korollar 2.7[52], dass

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_0}(f) \;=\; c_{-1} \;&=\; \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\sum_{m=0}^{\infty} c_{m-k}(z-z_0)^m\Big|_{z=z_0}\\ &=\; \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\underbrace{\big((z-z_0)^k\cdot f(z)\big)}_{\substack{\text{holomorph auf}\\ D_r(z_0)\text{ fortgesetzt}}}\Big|_{z=z_0}.\end{aligned}$$

□

Folgendes Lemma ist oft auch sehr hilfreich um Residuen zu bestimmen.

Lemma 11.2. *Es seien g,h zwei holomorphe Funktionen in einer Umgebung von z_0. Es sei $g(z_0)\neq 0$ und es sei z_0 eine Nullstelle erster Ordnung von $h(z)$. Dann ist*

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) \;=\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

[52]Korollar 2.7 besagt, dass für

$$g(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} d_m(z-z_0)^m \text{ mit Konvergenzradius } R>0 \text{ gilt, dass } \frac{1}{m!}g^{(m)}(z_0) \;=\; d_m.$$

In unserem Fall ist $d_m=c_{m-k}$ und wir wollen $d_{k-1}=c_{-1}$ bestimmen.

Beweis. Die Funktion h besitzt nach Voraussetzung bei z_0 eine Nullstelle erster Ordnung. Nach dem lokalen Darstellungssatz 5.16 gilt in einer Umgebung von z_0, dass

$$h(z) \;=\; (z - z_0) \cdot k(z),$$

wobei $k(z)$ eine holomorphe Funktion ist mit $k(z_0) \neq 0$. Die Funktion

$$\frac{g(z)}{h(z)} \;=\; \frac{1}{z - z_0} \cdot \underbrace{\frac{g(z)}{k(z)}}_{\substack{\text{holomorph in } z_0 \\ \text{mit Funktionswert} \\ \text{bei } z_0 \text{ nicht null}}}$$

besitzt einen Pol erster Ordnung in z_0, und es folgt aus Lemma 11.1, dass

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) \;=\; \underbrace{(z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)}}_{=\frac{g(z)}{k(z)}}\Big|_{z=z_0} \;=\; \frac{g(z_0)}{k(z_0)} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nachdem} \\ h'(z) = (z-z_0)\cdot k'(z) + k(z)}}{=}\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

□

Beispiel. Die Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{z^2}{1 + z^4}$$

hat vier einfache Polstellen in

$$z_k \;=\; \exp\left(i\tfrac{\pi}{4} + 2\pi i \tfrac{k}{4}\right), \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3.$$

Wir setzen $g(z) = z^2$ und $h(z) = 1 + z^4$. Für die Polstelle z_k erhalten wir aus Lemma 11.2, dass

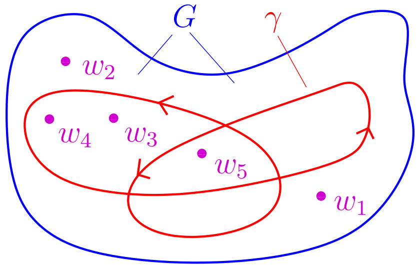
$$\operatorname{res}_{z_k}(f) \;=\; \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} \;=\; \frac{z_k^2}{4z_k^3} \;=\; \frac{1}{4z_k} \;=\; \frac{1}{4}\exp\left(-i\tfrac{\pi}{4} - 2\pi i\tfrac{k}{4}\right).$$

11.2. **Der Residuensatz.** Der folgende Satz ist eine der Höhepunkte der Funktionentheorie. Er besagt, dass man viele Kurvenintegrale ganz einfach durch das Bestimmen von Residuen und Umlaufszahlen bestimmen kann, ohne dass man sich jemals Gedanken um Stammfunktionen machen muss.

Satz 11.3. (Residuensatz) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $D \subset G$ eine abgeschlossene diskrete Teilmenge*[53] *und es sei γ ein geschlossener Integrationsweg in G, welcher D nicht trifft. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$, dass*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \sum_{w \in D} n(\gamma, w) \cdot \operatorname{res}_w(f).$$

[53] In den meisten Anwendungen ist $G = \mathbb{C}$ und D ist eine endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$.



für jede holomorphe Funktion $f\colon G \setminus \{w_1, \dots, w_5\} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{5} n(\gamma, w_k) \cdot \operatorname{res}_{w_k}(f) \\ &= \operatorname{res}_{w_3}(f) + \operatorname{res}_{w_4}(f) + 2\operatorname{res}_{w_5}(f). \end{aligned}$$

ABBILDUNG 55. Illustration vom Residuensatz.

Bemerkung. Die Summe im Residuensatz ist endlich. Genauer gesagt, es gibt nur endlich viele Punkte in $w \in D$, mit $n(\gamma, w) \neq 0$. Dies sieht man wie folgt. Das Bild $|\gamma|$ der Kurve ist kompakt, insbesondere ist $|\gamma|$ enthalten in einer abgeschlossenen Scheibe $\overline{D_r(0)}$. Da D abgeschlossen und diskret ist und da $\overline{D_r(0)}$ kompakt ist, folgt aus Lemma 6.5, dass $D \cap \overline{D_r(0)}$ nur endlich viele Punkte enthält. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass alle Punkte außerhalb von $\overline{D_r(0)}$ auch außerhalb von γ liegen. Insbesondere können nach Lemma 10.7 nur die Punkte in $D \cap \overline{D_r(0)}$ eine nicht verschwindende Umlaufszahl besitzen.

Bemerkung. Die Aussage vom Residuensatz gilt nicht, wenn G nicht einfach zusammenhängend ist. Betrachten wir beispielsweise $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 3\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \emptyset$ und γ die Kreisbahn von Radius 2 um den Ursprung. In diesem Fall beträgt die linke Seite vom Residuensatz 1, aber die rechte Seite verschwindet, denn $D = \emptyset$.

BEWEIS VOM RESIDUENSATZ WENN D ENDLICH IST. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $D = \{w_1, \dots, w_k\} \subset G$ eine endliche Teilmenge und es sei γ ein geschlossener Integrationsweg in G, welcher D nicht trifft.

Wir wollen nun zeigen, dass für jede holomorphe Funktion $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$ gilt, dass

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} n(\gamma, w_j) \cdot \operatorname{res}_{w_j}(f).$$

In den nächsten drei Behauptungen wollen wir erst einmal die Aussage für verschiedene Typen von Funktionen beweisen.

Behauptung 1. Wenn sich $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$ zu einer holomorphen Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ fortsetzen läßt, dann gilt die Aussage $(*)$ für f.

Nach Voraussetzung ist G einfach zusammenhängend und damit ist γ nullhomotop in G. Da sich f zu einer holomorphen Funktion of G fortsetzen läßt, folgt aus Korollar 10.3, dass die linke Seite von $(*)$ Null ist. Die rechte Seite von $(*)$ ist ebenfalls Null, nachdem das Residuum an einem Punkt verschwindet, wenn sich die Funktion holomorph auf den Punkt fortsetzen läßt. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Behauptung 2. Es sei $j \in \{1, \dots, k\}$. Die Aussage $(*)$ gilt für jede Laurent-Reihe der Form

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - w_j)^n,$$

welche auf $\mathbb{C} \setminus \{w_j\}$ konvergiert.

In diesem Fall ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-w_j)^n\,dz \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma c_n(z-w_j)^n\,dz$$

nach Satz 8.2 (2) können wir den
Konvergenzsatz 3.11 für Wegintegrale anwenden

$$= c_{-1}\cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-w_j}\,dz}_{=n(\gamma,w_j)} \;=\; \operatorname{res}_{w_j}(f)\cdot n(\gamma, w_j).$$

denn für $n \neq -1$ besitzt $(z-w_j)^n$
eine Stammfunktion

siehe Seite 108

$$= \sum_{l=1}^{k} n(\gamma, w_l)\cdot \operatorname{res}_{w_l}(f).$$

an allen anderen Punkten sind
die Residuen $= 0$, da die Funktion f
dort holomorph ist

Wir haben damit auch diese Behauptung bewiesen.

Behauptung 3. Wenn die Aussage $(*)$ für zwei Funktionen f und g gilt, dann gilt die Aussage $(*)$ auch für $f+g$.

Diese Behauptung folgt sofort aus der Beobachtung, dass beide Seiten der Aussage additiv sind.

Wir wenden uns nun dem Beweis vom allgemeinen Fall zu. Es sei also $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$ eine beliebige holomorphe Funktion. Für $j = 1, \dots, k$ sei $h_j(z)$ der Hauptteil der Laurent-Reihenentwicklung von f um w_j. Nachdem jedes w_j eine isolierte Singularität von f ist, existiert jeweils ein $\epsilon > 0$, so dass $h_j(z)$ für alle $z \in D_\epsilon(w_j) \setminus \{w_j\}$ konvergiert. Nachdem $h_j(z)$ eine reine Laurent-Reihe ist, konvergiert nach Satz 8.1 die Laurent-Reihe $h_j(z)$ sogar auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{w_j\}$.

Bei den Singularitäten $w_1, \dots, w_k$ verschwindet jeweils der Hauptteil der Funktion $f(z) - \sum\limits_{j=1}^{k} h_j(z)$ [54] es folgt also aus Satz 8.5, dass wir diese Funktion holomorph auf ganz G fortsetzen können. Wir drehen den Spieß um und schreiben

$$f(z) \;=\; \underbrace{f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j(z)}_{\substack{\text{Aussage (*) gilt nach} \\ \text{Behauptung 1}}} \;+\; \sum_{j=1}^{k} \underbrace{h_j(z)}_{\substack{\text{Aussage (*) gilt} \\ \text{nach Behauptung 2}}}$$

also gilt nach Behauptung 3 die gewünschte Aussage auch für die Funktion f. □

Beweis vom Residuensatz wenn D unendlich ist. Es sei nun also $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $D \subset G$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge und es sei $\gamma\colon [a, b] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg, welcher D nicht trifft.

Die Menge D ist nun also eventuell unendlich. Aber es folgt aus Lemma 6.5, dass für jedes $r > 0$ die Menge $D \cap D_r(0)$ endlich ist. Wir wollen uns daher auf einen endlichen Bereich $D_r(0)$ einschränken. Wir müssen dabei r so wählen, dass γ in $D_r(0)$ enthalten ist, und dass γ in $G \cap D_r(0)$ zudem auch nullhomotop ist.

Nachdem G einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie von $\Phi\colon [a, b] \times [0, 1] \to G$ von γ zu einem konstanten Weg. Aus der Kompaktheit von $\Phi([a, b] \times [0, 1])$ folgt, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$\Phi([a, b] \times [0, 1]) \;\subset\; D_r(0).$$

Nachdem D abgeschlossen und diskret ist und da $\overline{D_r(0)}$ kompakt ist, folgt aus Lemma 6.5, dass $D' := D \cap D_r(0)$ nur endlich viele Punkte $z_1, \dots, z_n$ enthält.

Wir führen nun genau das gleiche Argument wie im vorherigen Beweis durch, nur dass wir anstatt mit G und D nun mit $G' = G \cap D_r(0)$ und $D' = D \cap D_r(0)$ arbeiten. Die Menge G' ist offen, aber nicht notwendigerweise einfach zusammenhängend. Aber die Kurve γ ist nullhomotop in G', und das ist das einzige, was wir im vorherigen Argument verwendet hatten. Der Rest vom vorherigen Beweis kann ohne Abänderung übernommen werden. □

Definition. Es sei $X \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Wir sagen X besitzt eine *positive Randkurve*, wenn es einen geschlossenen Integrationsweg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $|\gamma| = \partial X$ gibt, so dass

$$n(\gamma, z) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{für alle } z \text{ im Inneren von } X, \\ 0 & \text{für alle } z \notin \overline{X}. \end{cases}$$

[54] In der Tat, denn für $l \in \{1, \dots, k\}$ gilt an dem Punkt w_l, dass

$$\text{Hauptteil}\Big(f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j(z)\Big) \;=\; \underbrace{\text{Hauptteil}(f(z)) - \text{Hauptteil}(h_l(z))}_{= 0, \text{ nach Wahl von } h_l} - \sum_{j=1, j \neq l}^{k} \underbrace{\text{Hauptteil}(h_j(z))}_{\substack{= 0, \text{ da } h_j(z) \text{ holomorph} \\ \text{in } w_l \text{ für } j \neq l}} \;=\; 0.$$

Wir bezeichnen dann diesen Integrationsweg ebenfalls mit ∂X.[55]

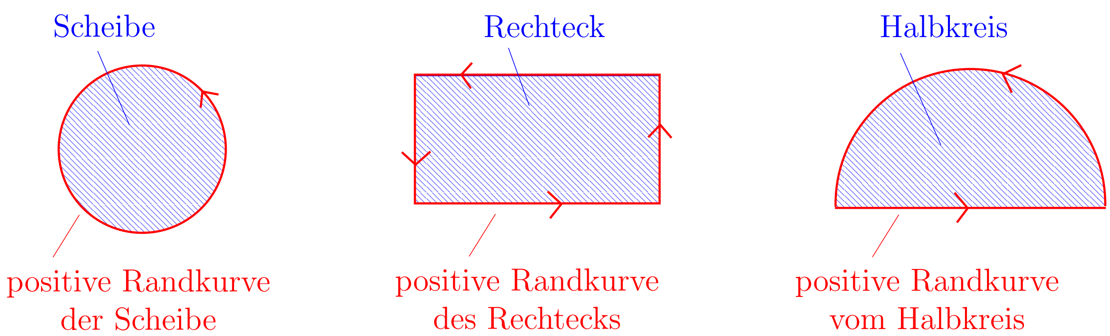


ABBILDUNG 56. Beispiele von positiven Randkurven.

Die meisten "alltäglichen" Anwendungen vom Residuensatz kann man schon mit der folgenden, etwas einfacheren Residuenformel bewerktätigen.

Satz 11.4. (Residuenformel) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und es sei $X \subset G$ eine Teilmenge mit $\overline{X} \subset G$, welche eine positive Randkurve besitzt. Es sei $D \subset G$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge mit $D \cap \partial X = \emptyset$, und es sei $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\partial X} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{w \in D \cap X} \operatorname{res}_w(f).$$

BEWEIS. Die Residuenformel folgt sofort aus dem Residuensatz 11.3 angewandt auf G und auf $\gamma = \partial X$, denn für alle w im Inneren von X gilt nach Voraussetzung $n(\gamma, w) = 1$ und für alle w, welche nicht in $\overline{X}$ liegen, gilt nach Voraussetzung $n(\gamma, w) = 0$. ☐

Beispiel. Wir wollen

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz \;=\; \int_{\partial D_1(0)} \frac{e^z}{z^4}\,dz$$

bestimmen. Der Integrand besitzt genau eine Singularität bei $z = 0$. Wir wenden also die Residuenformel auf $G = \mathbb{C}$, $X = D_1(0)$, $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$ und $D = \{0\}$ an. Wir erhalten, dass

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{e^z}{z^4}\,dz \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Residuenformel}}}{=}\; 2\pi i \cdot \operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Berechnung auf Seite 108}}}{=}\; 2\pi i \cdot \frac{1}{3!} \;=\; \frac{\pi i}{3}.$$

[55]Für ein Rechteck Q ist dies gerade die Konvention, welche wir auf Seite 35 eingeführt hatten.

12. Anwendungen vom Residuensatz

In diesem Kapitel wollen wir noch zwei Anwendungen vom Residuensatz kennenlernen. Zum einen werden wir eine Methode finden um uneigentliche Integrale von rationalen Funktionen zu bestimmen. Zum anderen werden wir den Satz von Rouché formulieren und beweisen.

12.1. **Uneigentliche Integrale von rationalen Funktionen.** Zur Erinnerung, eine rationale Funktion ist eine Funktion, welche geschrieben werden kann als Bruch von zwei Polynomen[56]. In diesem Kapitel wollen wir uneigentliche Integrale von rationalen Funktionen bestimmen. In anderen Worten, wir wollen Integrale der Form

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

studieren, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, und wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Beispielsweise möchten wir gerne das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

bestimmen.[57]

Satz 12.1. *Es seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome, wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Dann gilt*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \text{ konvergiert} \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{Grad}(q(x)) \geq \operatorname{Grad}(p(x)) + 2.$$

In dem Beweis von Satz 12.1 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 12.2. *Es sei $p(z)$ ein Polynom von Grad n. Dann gibt es $c, C > 0$ und ein $R > 0$, so dass*

$$c \cdot |z|^n \;\leq\; |p(z)| \;\leq\; C \cdot |z|^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

[56]Das Polynom kann hierbei auch komplexe Koeffizienten besitzen.

[57]Zur Erinnerung, für eine reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hatten wir das uneigentliche Integral über $(-\infty, \infty)$ definiert als

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{r\to-\infty} \int\limits_{r}^{0} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int\limits_{0}^{r} f(x)\,dx.$$

Beweis. Es sei also

$$p(z) \;=\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_1 z + a_0,$$

ein Polynom von Grad n, d.h. mit $a_n \neq 0$. Wir schreiben dieses wie folgt um

$$p(z) \;=\; a_n z^n \cdot \Big(1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}}_{=:r(z)}\Big).$$

Nachdem $\lim\limits_{z\to\infty} r(z) = 0$ gibt es ein $R > 0$, so dass

$$|r(z)| \;\le\; \frac{1}{4} \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \ge R.$$

Dann gilt aber

$$|p(z) - a_n z^n| \;\le\; \frac{1}{4}|a_n z^n| \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \ge R.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt nun, dass

$$\underbrace{\frac{3}{4}|a_n|}_{=:c} \cdot |z|^n \;\le\; |p(z)| \;\le\; \underbrace{\frac{5}{4}|a_n|}_{=:C} \cdot |z|^n \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \ge R.$$

□

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 12.1 zu.

Beweis von Satz 12.1. Es seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome, wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Wir bezeichnen mit k den Grad von $p(x)$ und wir bezeichnen mit l den Grad von $q(x)$. Aus Lemma 12.2, angewandt auf $p(x)$ und $q(x)$ folgt, dass es $c, C > 0$ und ein $R > 0$ gibt, so dass

$$c \cdot |x|^{k-l} \;\le\; \left|\frac{p(x)}{q(x)}\right| \;\le\; C \cdot |x|^{k-l} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \text{ mit } |x| \ge R.$$

Wir wissen natürlich, dass für $R > 0$ und $s \in \mathbb{Z}$ die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{-R} x^s\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{R}^{\infty} x^s\,dx$$

konvergieren, genau dann, wenn $s \le -2$. Der Satz folgt nun aus dem Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale, welches wir in Analysis I formuliert hatten.[58][59] □

[58] Zur Erinnerung, dieses lautet wie folgt: Es seien $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen gegeben, wobei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nehmen wir an, es gibt ein $C \in (a, b)$, so dass $g(x) \ge |f(x)|$ für alle $x \in [C, b)$. Dann gilt

$$\int_a^b g(x)dx \text{ konvergiert} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

Eine analoge Aussage gilt auch für Funktionen, welche auf $(a, b]$ definiert sind.

[59] Warum folgen eigentlich beide Aussagen "⇒" und "⇐" von Satz 12.1 aus den gerade angegebenen Argumenten?

Satz 12.3. *Es seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome, wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Wir nehmen an, dass* $\mathrm{Grad}(q(x)) \geq \mathrm{Grad}(p(x)) + 2$. *Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \;=\; 2\pi i \sum_{\substack{w \text{ Nullstelle}\\ \text{von } q(z) \text{ mit}\\ \mathrm{Im}(w)>0}} \mathrm{res}_w\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right).$$

Beweis. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \;=\; \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \;\underset{\uparrow}{=}\; \lim_{r\to\infty}\int_{\alpha_r} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz \;=\; (*)$$

α_r verbindet die Punkte $-r$ und r auf der x-Achse

Wir wollen jetzt α_r zu einem geschlossenen Weg verlängern, damit wir die Residuenformel verwenden können. Für $r > 0$ bezeichnen wir dazu mit β_r den Halbkreis in der oberen Halbebene um den Ursprung, welcher den Punkt r mit dem Punkt $-r$ verbindet. Die Wege α_r und β_r sind in Abbildung 57 skizziert. Dann gilt

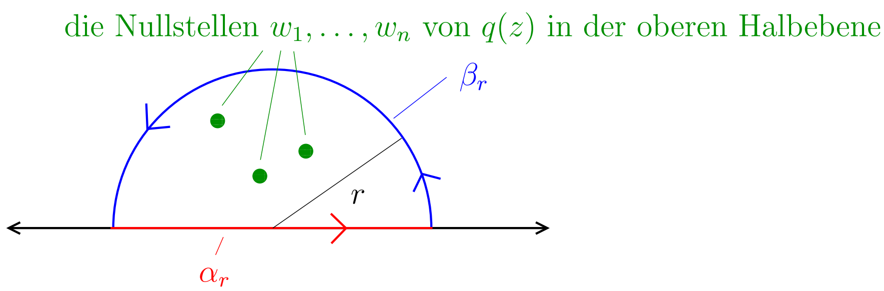


Abbildung 57.

$$(*) \;=\; \lim_{r\to\infty} \underbrace{\int_{\alpha_r\cdot\beta_r} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz}_{\substack{\text{für } r \text{ groß genug ist dies nach der}\\ \text{Residuenformel bestimmt durch die Residuen von } \frac{p(z)}{q(z)}\\ \text{bei allen Nullstellen von } q(z) \text{ mit } \mathrm{Im}(z)>0}} \;-\; \lim_{r\to\infty}\int_{\beta_r} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz$$

$$\underset{\uparrow}{=}\; 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{w_j}\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right) - \lim_{r\to\infty}\int_{\beta_r} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz$$

hierbei sind $w_1, \ldots, w_n$ die Nullstellen von $q(z)$ in der oberen Halbebene.

Wir müssen nun noch zeigen, dass der zweite Grenzwert verschwindet, d.h. wir wollen folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Es ist

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\beta_r} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz \;=\; 0.$$

Nach Lemma 12.2 gibt es ein $R > 0$ und ein $C > 0$, so dass für alle z mit $|z| \geq R$ gilt, dass

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \;\leq\; C \cdot |z|^{\mathrm{Grad}(p)-\mathrm{Grad}(q)} \;\leq\; C \cdot |z|^{-2}.$$

Für alle $r \geq R$ gilt dann

$$\Big|\int_{\beta_r} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz\Big| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.2}}}{\leq} \text{Länge}(\beta_r)\cdot \text{Maximum von } \underbrace{\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right|}_{\leq \frac{C}{|z|^2}} \text{ auf dem Halbkreis } \beta_r \;\leq\; \pi r \cdot \frac{C}{r^2} \;=\; \frac{C\pi}{r}.$$

Wir sehen also, dass im Grenzwert $r \to \infty$ das Integral verschwindet. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

□

Beispiel. Wir kehren nun zu dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

zurück. Auf Seite 110 hatten wir schon gesehen, dass die Nullstellen vom Nenner gegeben sind durch

$$z_k \;=\; \exp\big(\tfrac{\pi}{4}i + \tfrac{\pi}{2}ki\big) \;=\; \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right), \qquad \text{mit } k = 0,1,2,3.$$

Für $k = 0,1$ liegt z_k in der oberen Halbebene, für $k = 2,3$ liegt z_k in der unteren Halbebene. Auf Seite 110 hatten wir schon berechnet, dass

$$\mathrm{res}_{z_k}(f) \;=\; \frac{\text{Zähler bei } z_k}{\text{Ableitung vom Nenner bei } z_k} \;=\; \frac{z_k^2}{4z_k^3} \;=\; \frac{1}{4z_k} \;=\; \frac{1}{4}\exp\big(-\tfrac{\pi}{4}i - \tfrac{\pi}{2}ki\big).$$

Es folgt also aus Satz 12.3, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \;=\; 2\pi i \sum_{k=0,1} \frac{1}{4}\exp\big(-\tfrac{\pi}{4}i - \tfrac{\pi}{2}ki\big) \;=\; \frac{1}{2}\pi i\cdot\Big(\underbrace{\exp\big(-\tfrac{\pi}{4}i\big)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)} + \underbrace{\exp\big(-\tfrac{3\pi}{4}i\big)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)}\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\pi.$$

12.2. **Meromorphe Funktionen und der Satz von Rouché.**

Definition.

(1) Eine *meromorphe Funktion* ist eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus D \to \mathbb{C}$, wobei $D \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge ist, so dass jeder Punkt in D entweder eine hebbare Singularität oder eine Polstelle ist.

(2) Es sei f eine meromorphe Funktion. Wir bezeichnen mit $\tilde{f}$ die meromorphe Funktion, welche wir durch Hebung aller hebbaren Singularitäten von f erhalten.

Beispiele.

(1) Jede ganze Funktion ist meromorph.
(2) Jede rationale Funktion ist meromorph, denn der Nenner besitzt nur endlich viele, insbesondere diskrete, Nullstellen. Zudem ist jede Singularität einer rationalen Funktion eine Polstelle.
(3) Summen und Produkte von meromorphen Funktionen sind meromorph. Genauer gesagt, wenn $f\colon \mathbb{C}\setminus D \to \mathbb{C}$ und $g\colon \mathbb{C}\setminus E \to \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen sind, dann sind auch $f+g\colon \mathbb{C}\setminus (D\cup E)\to \mathbb{C}$ und $f\cdot g\colon \mathbb{C}\setminus (D\cup E)\to\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen.
(4) Die Ableitung einer meromorphen Funktion ist wiederum meromorph. [60]
(5) Andererseits ist die Funktion $\sin(\frac{1}{z})$ nicht meromorph, denn wie wir auf Seite 75 und auf Seite 87 gesehen hatten, ist die Singularität $z_0 = 0$ weder hebbar noch eine Polstelle.

Lemma 12.4. *Es sei f eine meromorphe Funktion, welche nicht die Nullfunktion ist. Dann ist die Nullstellenmenge eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{C}\setminus D\to\mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion. Wir bezeichnen mit N die Nullstellenmenge von f. Wir beweisen folgende Aussagen:

(1) wenn N nicht diskret ist, dann ist f die Nullfunktion,
(2) wenn N nicht abgeschlossen ist, dann ist f die Nullfunktion.

Wir wenden uns nun dem Beweis der beiden Aussagen zu.

(1) Wenn N nicht diskret ist, dann besitzt N einen Häufungspunkt in N. Es folgt aus dem Identitätssatz 6.7, dass $f\colon \mathbb{C}\setminus D\to\mathbb{C}$ schon die Nullfunktion ist. [61]
(2) Wenn N nicht abgeschlossen ist, dann gibt es ein $z\notin N$, welches Grenzwert einer Folge von Punkten $z_n\in N$ ist. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass dies nur der Fall sein kann, wenn z nicht im Definitionsbereich liegt, d.h. $z\in D$. Nachdem f meromorph ist, ist z entweder hebbar oder eine Polstelle. Nachdem z der Grenzwert von Nullstellen ist, kann z keine Polstelle sein, also muss z hebbar sein und es gilt $\tilde{f}(z)=0$. Dann folgt aber wiederum aus dem Identitätssatz 6.7, dass $\tilde{f}$ schon die Nullfunktion ist, und damit auch f die Nullfunktion ist. □

Wir erhalten dann aus Lemma 7.3 und Lemma 12.4 folgendes Korollar.

Korollar 12.5. *Es sei f eine meromorphe Funktion, welche nicht die Nullfunktion ist. Dann ist die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ ebenfalls meromorph.*

Bemerkung. Wir sagen zwei meromorphe Funktionen f und g sind *äquivalent*, wenn f und g nach Hebbung aller hebbaren Singularitäten übereinstimmen, mit anderen Worten, wenn

[60] Wenn z eine Polstelle von f ist, dann folgt aus Satz 8.5 und Satz 2.6, dass z eine Polstelle von f' ist.

[61] Hierbei muss man noch zeigen, dass $\mathbb{C}\setminus D$ ein Gebiet ist. Nachdem D abgeschlossen ist, ist $\mathbb{C}\setminus D$ offen. Für jedes $r>0$ ist $D\cap\overline{D_r(0)}$ nach Lemma 6.5 endlich, also folgt leicht, dass $(\mathbb{C}\setminus D)\cap\overline{D_r(0)}$ wegzusammenhängend ist, also auch $\mathbb{C}\setminus D$.

$\tilde{f} = \tilde{g}$.[62] [63] Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{M}$ die Menge der Äquivalenzklassen von meromorphen Funktionen. Wir können nun wie üblich das Produkt und die Summe auf $\mathcal{M}$ bilden.[64] Mit diesen Operationen bildet $\mathcal{M}$ einen Ring. Es folgt dann aus Korollar 12.5, dass $\mathcal{M}$ sogar ein Körper ist. Dieser Körper wird, wenig überraschend, als der *Körper der meromorphen Funktionen* bezeichnet.

Definition. Es sei f eine meromorphe Funktion, welche nicht die Nullfunktion ist.

(1) Wir bezeichnen mit $N(f)$ die Menge der Nullstellen von $\tilde{f}$ und wir bezeichnen mit $P(f)$ die Menge der Polstellen von $\tilde{f}$.
(2) Für $a \in N(f)$ bezeichnen wir mit $o(f,a) \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle von $\tilde{f}$. Ganz analog definieren wir $o(f,a) \in \mathbb{N}$ für $a \in P(f)$ als die Ordnung der Polstelle. Manchmal nennen wir $o(f,z_0)$ die *Vielfachheit* der Nullstelle bzw. der Polstelle.
(3) Für $X \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir

$$N(f,X) \;:=\; \sum_{a\in N(f)\cap X} o(f,a) \quad \textit{bzw.} \quad P(f,X) \;:=\; \sum_{a\in P(f)\cap X} o(f,a)$$

als die *Anzahl der Nullstellen (bzw. Polstellen) von f in X, mit Vielfachheit gezählt.*

Beispiel. Es ist

$$N(z^4,\mathbb{C}) \;=\; 4 \text{ und } P\Big(\tfrac{z-1}{(z-2)(z+3)^2}\Big) \;=\; 1+2 \;=\; 3.$$

Allgemeiner folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, in der Formulierung von Korollar 5.9, dass für ein Polynom $p(z)$ von Grad n gilt $N(p(z),\mathbb{C}) = n$. In anderen Worten, die Anzahl der Nullstellen von einem Polynom von Grad n in $\mathbb{C}$, mit Vielfachheit gezählt, beträgt gerade n.

Satz 12.6. (Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral) *Es sei f eine meromorphe Funktion und es sei $X \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, welche eine positive Randkurve besitzt. Wenn keine Nullstelle oder Polstelle von $\tilde{f}$ auf ∂X liegt, dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial X} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \;=\; N(f,X) \;-\; P(f,X).$$

Der Satz besagt also, dass das Wegintegral von $\frac{f'}{f}$ über den Rand ∂X die Differenz zwischen der Zahl der Nullstellen und der Polstellen (jeweils mit Vielfachheit gezählt) von f in X bestimmt.

---

[62] Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

[63] Von der Definition her sind beispielsweise

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$$

zwei verschiedene meromorphe Funktionen, denn die Definitionsbereiche sind verschieden. Wenn wir aber alle hebbaren Singularitäten von g beheben, erhalten wir gerade f. Die beiden meromorphen Funktionen sind also äquivalent.

[64] Hierbei verwenden wir, dass für $f \sim f'$ und $g \sim g'$ auch gilt $(f+f') \sim (g+g')$ und $(f\cdot f') \sim (g\cdot g')$.

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $f = \tilde{f}$, d.h. wir können annehmen, dass f keine hebbaren Singularitäten besitzt.[65]

Es ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \underset{\uparrow}{=} \sum_{w\in N(f)\cap X}\operatorname{res}_w(f) + \sum_{w\in P(f)\cap X}\operatorname{res}_w(f).$$

Residuenformel 11.4,
wir verwenden hierbei, dass die Singularitätenmenge
von $\frac{f'}{f}$ gegeben ist durch $N(f)\cup P(f)$.

Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für $a \in N(f)$ gilt

$$\operatorname{res}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = o(f,a)$$

und für $a \in P(f)$ gilt

$$\operatorname{res}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = -o(f,a).$$

Wir betrachten zuerst den Fall, dass $a \in N(f)$. Wir setzen $k = o(f,a)$. Dann besagt der lokale Darstellungssatz 5.16, dass wir in der Nähe von a schreiben können

$$f(z) = (z-a)^k \cdot g(z),$$

wobei g eine holomorphe Funktion ist mit $g(a) \neq 0$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_a\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) &= \operatorname{res}_a\left(\frac{k\cdot(z-a)^{k-1}\cdot g(z) + (z-a)^k\cdot g'(z)}{(z-a)^k\cdot g(z)}\right)\\ &= \operatorname{res}_a\left(\frac{kg(z)+(z-a)g'(z)}{(z-a)g(z)}\right) \underset{\uparrow}{=} k = o(f,a).\end{aligned}$$

dies ist eine Polstelle 1. Ordnung,
nach Lemma 11.1 erhalten wir das Residuum
durch Multiplizieren mit $(z-a)$ und Einsetzen von $z=a$

Es sei nun $a \in P(f)$. Wir setzen $k = o(f,a)$. Dann besagt Lemma 7.2, dass wir in der Nähe von a schreiben können

$$f(z) = (z-a)^{-k}\cdot g(z),$$

wobei g eine holomorphe Funktion ist mit $g(a) \neq 0$. Genau die gleiche Rechnung wie oben zeigt, dass das Residuum nun $-k = -o(f,a)$ beträgt. □

Satz 12.7. (Satz von Rouché) *Es seien f und g meromorphe Funktionen. Zudem sei X eine Teilmenge, welche eine positive Randkurve besitzt. Wenn f und g in $\overline{X}$ keine Polstelle*

[65] In der Tat, denn die beiden Seiten der gewünschten Gleichung stimmen für f und $\tilde{f}$ überein.

besitzen, und wenn

$$|g(z)| \ < \ |f(z)| \qquad \text{für alle } z \in \partial X,$$

dann gilt

$$N(f, X) \ = \ N(f+g, X),$$

d.h. f und $f+g$ besitzen die gleiche Anzahl von Nullstellen in X, mit Vielfachheit gezählt.

Wir werden nun mithilfe vom Satz von Rouché einen neuen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra geben.

Satz 5.8. (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom $f(z)$ von Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Es sei

$$p(z) \ = \ a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom von Grad n, d.h. es ist $a_n \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass $p(z)$ eine Nullstelle besitzt.

> Der Satz von Rouché besagt insbesondere, dass wenn wir zeigen wollen, dass $N(p, X) > 0$, dann müssen wir schreiben $p = f + g$ und ein $X = B_r(0)$ wählen, so dass wir die Nullstellen von f auf X bestimmen können, und so dass $|g| < |f|$ auf dem Rand $\partial X = \partial B_r(0)$. In unserem Fall wählen wir $f(z) = a_n z^n$ und $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, denn wir kennen die Nullstellen von f, und für $X = D_r(0)$ groß genug, ist $|g| < |f|$ auf $\partial X = \partial B_r(0)$.

Wir setzen also $f(z) = a_n z^n$ und $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Aus dem Beweis von Lemma 12.2 folgt, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass $|g(z)| < |f(z)| = |a_n z^n|$ für alle z mit $|z| \geq r$. Dann gilt

$$N(p, B_r(0)) \ = \ N\big(\underbrace{a_n z^n}_{=f} + \underbrace{a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}_{=g}, B_r(0)\big) \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von Rouché}}}{=} \ N(\underbrace{a_n z^n}_{=f(z)}, B_r(0)) \ = \ n \ > \ 0.$$

$\square$

Bemerkung. Die Aussage vom Satz von Rouché gilt nicht, wenn wir anstatt Nullstellen mit Vielfachheiten nur die Nullstellen zählen würden. Wir betrachten beispielsweise die Funktionen $f(z) = z^3$ und $g(z) = 1$ auf $D_2(0)$. Dann gilt $|g(z)| < |f(z)|$ für alle z mit $|z| = 2$. Die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in $D_2(0)$ beträgt 1, während $f(z)+g(z) = z^3+1$ drei Nullstellen in $D_2(0)$ besitzt.

Beweis vom Satz von Rouché. Es genügt zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\colon [0,1] \ &\to \ \mathbb{N}_0 \\ \lambda \ &\mapsto \ N(f + \lambda g, X) \end{aligned}$$

konstant ist.

Für $\lambda \in [0,1]$ ist

$$\Phi(\lambda) \;=\; N(f+\lambda g, X) \;=\; N(f+\lambda g, X) \;-\; \underbrace{P(f+\lambda g, X)}_{\substack{=0,\text{ denn } f \text{ und } g \text{ besitzen}\\ \text{auf } X \text{ keine Polstelle}}} \;\underset{\uparrow}{=}\; \int\limits_{\partial X} \frac{(f+\lambda g)'}{f+\lambda g}\,dz.$$

wir können Satz 12.6 anwenden,
denn aus $|g| < |f|$ auf ∂X und $\lambda \in [0,1]$,
folgt, dass auch $f+\lambda g$ keine Nullstellen
auf ∂X besitzt.

Die rechte Seite hängt stetig von λ ab. [66] Die Funktion Φ ist also stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an. Es folgt also aus Lemma 6.6, dass die Abbildung Φ, wie gewünscht, konstant ist. $\square$

[66] Wir skizzieren im Folgenden den Beweis, dass Φ stetig ist. Da die stetige Funktion

$$\begin{array}{rcl} \partial X \times [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ (x,\lambda) & \mapsto & f(x)+\lambda g(x) \end{array}$$

keine Nullstelle besitzt und da $\partial X \times [0,1]$ kompakt ist, gibt es ein $C > 0$, so dass $|f(x)+\lambda g(x)| \geq C$ für alle $x \in \partial X$ und $\lambda \in [0,1]$. Zudem gibt es ein $D \geq 0$, so dass $|f'g - g'f|$ auf ∂X durch D nach oben beschränkt ist. Für $\lambda, \mu \in [0,1]$ gilt, dass

$$\frac{(f+\lambda g)'}{f+\lambda g} - \frac{(f+\mu g)'}{f+\mu g} \;=\; \frac{(f'+\lambda g')(f+\mu g) - (f'+\mu g')(f+\lambda g)}{(f+\lambda g)(f+\mu g)} \;=\; \frac{(f'g-g'f)(\mu-\lambda)}{(f+\lambda g)(f+\mu g)}.$$

Also folgt aus der Standardabschätzung für Wegintegrale, d.h. aus Lemma 3.2, dass für alle $\mu, \lambda \in [0,1]$ gilt, dass

$$|\Phi(\lambda) - \Phi(\mu)| \;=\; \left| \int\limits_{\partial X} \frac{(f+\lambda g)'}{f+\lambda g} - \frac{(f+\mu g)'}{f+\mu g}\,dz \right| \;\leq\; \text{Länge}(\gamma) \cdot \frac{D}{C^2} \cdot |\mu - \lambda|.$$

Wir sehen also, dass Φ stetig ist.

13. Biholomorphe Abbildungen und der Riemannsche Abbildungssatz

Wir erinnern zuerst an eine Definition aus der Analysis II. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn f eine C^∞-Abbildung ist[67], wenn f bijektiv ist, und wenn die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls eine C^∞-Abbildung ist. Wenn es für zwei offene Mengen U und V einen solchen Diffeomorphismus gibt, dann nennen wir U und V *diffeomorph*.

Beispiele.

(1) Die Mengen $U = (-1,1)$ und $V = \mathbb{R}$ sind diffeomorph, denn
$$\begin{array}{rcl} f\colon U = (-1,1) & \to & V = \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{array}$$
ist ein Diffeomorphismus.

(2) Es folgt relativ leicht aus den Definitionen, dass wenn U und V diffeomorphe Teilmengen von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ sind, dann ist U einfach zusammenhängend, genau dann, wenn V einfach zusammenhängend ist. Insbesondere sind also beispielsweise die Mengen $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ nicht diffeomorph.

(3) Die offene Scheibe $U = D_1(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ und die ganze Ebene $V = \mathbb{R}^2$ sind diffeomorph. Beispielsweise ist
$$\begin{array}{rcl} f\colon U = D_1(0,0) & \to & V = \mathbb{R}^2 \\ p & \mapsto & \begin{cases} p \cdot \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\|p\|\right)}{\|p\|}, & \text{wenn } p \neq (0,0), \\ \qquad (0,0), & \text{wenn } p = (0,0). \end{cases} \end{array}$$
ein Diffeomorphismus.[68]

Wir führen nun die offensichtlichen Analoga für den komplex differenzierbaren Fall ein. Genauer gesagt, wir haben folgende Definition.

Definition. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen von $\mathbb{C}$ heißt *biholomorph*, wenn f eine holomorphe Abbildung ist, wenn f bijektiv ist, und wenn die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls eine holomorphe Abbildung ist. Wenn es für zwei offene Mengen U und V von $\mathbb{C}$ eine solche biholomorphe Abbildung gibt, dann nennen wir U und V *biholomorph*.

Beispiele.

(1) Es ist offensichtlich, dass für alle $a \neq 0$ and $b \in \mathbb{C}$ die Abbildung $f(z) = az + b$ auf $\mathbb{C}$ biholomorph ist. Es folgt unter anderem, dass alle offenen Scheiben zueinander biholomorph sind.

(2) Nachdem eine biholomorphe Abbildung insbesondere ein Diffeomorphismus ist, folgt aus dem obigen Beispiel (2), dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C}$ nicht biholomorph sind.

[67] D.h. wenn f beliebig oft differenzierbar ist.

[68] Der Nachweis dieser Aussage ist etwas lästig. Wir überlassen das gerne als freiwillige Übungsaufgabe.

(3) Die Mengen $U = \mathbb{C}$ und $V = D_1(0)$ sind nicht biholomorph. In der Tat, denn jede holomorphe Funktion $U = \mathbb{C} \to V = D_1(0)$ ist beschränkt, also nach dem Satz 5.7 von Liouville konstant. Insbesondere kann eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to D_1(0)$ nicht bijektiv, geschweige denn biholomorph sind.

(4) Wir bezeichnen mit
$$H \;:=\; \big\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z) > 0 \big\}$$
die *offene obere Halbebene*. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$. Dann zeigt eine elementare, aber etwas längere Rechnung, dass die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} H & \to & H \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$
biholomorph ist. Diese Abbildungen auf H werden die *Möbiustransformationen* der oberen Halbebene genannt. Sie spielen eine wichtige Rolle in der hyperbolischen Geometrie.

Wir hatten gerade angemerkt, dass für $a \neq 0$ and $b \in \mathbb{C}$ die Abbildung $f(z) = az + b$ auf $\mathbb{C}$ biholomorph ist. Das folgende Lemma zeigt nun, dass jede biholomorphe Abbildung $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von dieser Form ist.

Lemma 13.1. *Es sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung. Dann gibt es $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Die Grundidee des Beweises ist, dass man die isolierte Singularität $z_0 = 0$ der Funktion $g(z) = f(\frac{1}{z})$ betrachtet. Man unterscheidet dann die drei Fälle, dass $z_0 = 0$ hebbar ist, dass $z_0 = 0$ eine Polstelle ist, und dass $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität ist. Mithilfe vom Satz von Casorati–Weierstraß kann man hierbei den letzten Fall ausschließen. Die Details vom Beweis von Lemma 13.1 werden in Übungsblatt 8 ausgeführt.

Das nächste Lemma besagt insbesondere, dass die offene Scheibe $D_1(0)$ und die obere Halbebene H biholomorph sind.

Lemma 13.2. *Die Abbildung*
$$\begin{array}{rcl} \Phi \colon H & \to & D_1(0) \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$
ist biholomorph. Zudem gilt für alle $y > 0$, dass
$$\Phi\big(\{x + iy \,|\, x \in \mathbb{R}\}\big) \;=\; \Big\{ z \in \mathbb{C} \,\Big|\, \big|z - \tfrac{y}{y+1}\big| = \tfrac{1}{y+1} \Big\} \setminus \{1\}.$$

Das Lemma besagt also insbesondere, dass der Abschluß vom Bild einer horizontalen Gerade unter der Abbildung Φ ein Kreis in $\overline{D_1(0)}$ ist, welcher den Punkt 1 enthält.[69]

[69]Diese Aussage kann man sich wie folgt merken, das Bild der Gerade $\{x + iy | x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Kreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse, welcher die beiden Punkte $\Phi(iy) = \frac{iy-i}{iy+i} = \frac{y-1}{y+1}$ und "$\Phi(\infty) = \frac{\infty - i}{\infty + i} = 1$" enthält.

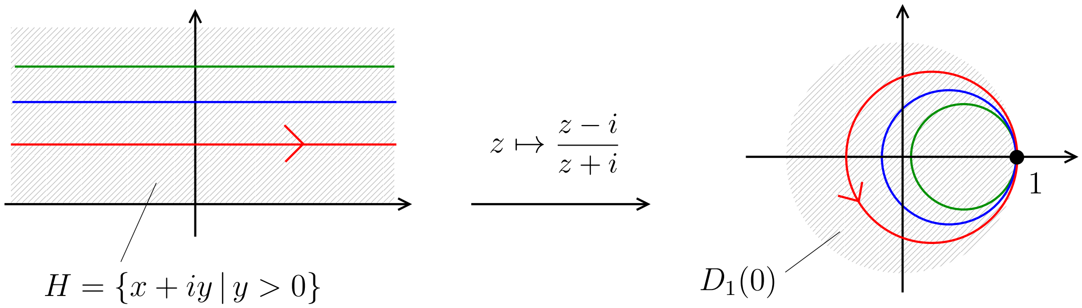


Abbildung 58. Illustration von Lemma 13.2

Beweis. Wir zeigen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Es sei $y > 0$. Dann liegt für alle $x \in \mathbb{R}$ der Punkt $\Phi(x+iy)$ auf dem Kreis um $\frac{y}{y+1}$ von Radius $\frac{1}{y+1}$.

Der Beweis der Behauptung ist gegeben durch eine elementare, allerdings etwas langwierige, Rechnung. Es sei also $y > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left|\Phi(x+iy) - \frac{y}{y+1}\right|^2 &= \left|\frac{x+iy-i}{x+iy+i} - \frac{y}{y+1}\right|^2 = \left|\frac{(x+i(y-1))(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2} - \frac{y}{y+1}\right|^2 \\
&= \left|\frac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2} - \frac{y}{y+1}\right|^2 \\
&= \left|\frac{(x^2+y^2-1-2xi)(y+1)-(x^2+(y+1)^2)y}{(x^2+(y+1)^2)(y+1)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{(x^2+y^2-1)(y+1)-(x^2+y^2+1+2y)y-2xi(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)(y+1)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{-y+x^2+y^2-1-(1+2y)y-2xi(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)(y+1)}\right|^2 \\
&= \frac{(x^2-(y+1)^2)^2+(2x(y+1))^2}{(x^2+(y+1)^2)^2(y+1)^2} = \frac{(x^2+(y+1)^2)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2(y+1)^2} = \frac{1}{(y+1)^2}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt also, dass $\Phi(x+iy)$ auf den Kreis um $\frac{y}{y+1}$ von Radius $\frac{1}{y+1}$ liegt. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Es folgt insbesondere aus der gerade bewiesenen Behauptung, dass $\Phi(H) \subset D_1(0)$. Wir betrachten nun noch die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Psi\colon D_1(0) &\to \mathbb{C} \\
w &\mapsto \tfrac{w+1}{1-w}i.
\end{aligned}$$

In Übungsblatt 6 hatten wir gesehen, dass $\Psi(D_1(0)) \subset H$. Zudem hatten wir gesehen, dass $\Phi(\Psi(z)) = z$ für alle $z \in D_1(0)$ und $\Psi(\Phi(z)) = z$ für alle $z \in H$. Es folgt nun, dass $\Phi\colon H \to D_1(0)$ biholomorph ist.[70] Zudem folgt auch leicht aus dem bisher bewiesenen, dass

[70] In der Tat. Aus der ersten Behauptung folgt, dass $\Phi(H) \subset D_1(0)$. Die Abbildung ist surjektiv, denn für $z \in D_1(0)$ gilt $\Phi(\Psi(z)) = z$. Die Abbildung ist auch injektiv, denn aus $\Phi(w) = \Phi(w')$ folgt,

[71]

$$\Phi\big(\{x+iy\,|\,x\in\mathbb{R}\}\big) \;=\; \big\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,\big|z-\tfrac{y}{y+1}\big| = \tfrac{1}{y+1}\big\}\setminus\{1\}.$$

$\square$

Das folgende Lemma gibt ein weiteres Beispiel für eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, welche biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$ ist. Der Beweis des Lemmas ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 8.

Lemma 13.3. *Die geschlitzte Ebene*

$$\mathbb{C}\setminus\overline{S}_{-\pi} \;=\; \{x+iy\,|\,x,y\in\mathbb{R} \text{ und } x>0 \text{ oder } y\neq 0\}$$

ist biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$.

Wir wollen nun noch der Frage nachgehen, welche offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ nun eigentlich biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$ sind. Wir hatten schon gesehen, dass wenn G biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$ ist, dann muss gelten $G\neq\mathbb{C}$ und G muss einfach zusammenhängend sein. Erstaunlicherweise sind dies auch schon die einzigen Einschränkungen. Genauer gesagt, es gilt folgender Satz.

Satz 13.4. (Riemannscher Abbildungssatz) *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G\subset\mathbb{C}$, welches von $\mathbb{C}$ verschieden ist, ist biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$.*

Leider haben wir in dieser Vorlesung keine Zeit um den Riemannschen Abbildungssatz zu beweisen. Der Beweis dazu wird beispielsweise in Kapitel 5 von Fritsche: Grundkurs Funktionentheorie und in Kapitel 10 von Jänich: Funktionentheorie ausgeführt.

---

dass $w=\Psi(\Phi(w))=\Psi(\Phi(w'))=w'$. Wir sehen also, dass $\Phi\colon H\to D_1(0)$ bijektiv ist. Nachdem die Umkehrabbildung Ψ ebenfalls holomorph ist, folgt, dass Φ sogar biholomorph ist.

[71]In der Tat, denn wir hatten bewiesen, dass $\Phi\colon H\to D_1(0)$ surjektiv ist, also much auch die Abbildung

$$\Phi\colon\,\big(\{x+iy\,|\,x\in\mathbb{R}\}\big) \;\to\; \left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\big|z-\frac{y}{y+1}\big| = \frac{1}{y+1}\right\}\setminus\{1\}$$

surjektiv sein.

KAPITEL 2

Maß- und Integrationstheorie

1. Einleitung

1.1. **Der Integralbegriff und Volumen.** In der Analysis I hatten wir den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit und das Riemann-Integral für Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf kompakten Intervallen eingeführt. Diese Theorie hat mehrere Einschränkungen, beispielsweise hatten wir gesehen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

nicht Riemann-integrierbar ist. In der Integrationstheorie wollen wir den Integralbegriff auf mehr Funktionen erweitern, und wir wollen zudem auch den Integralbegriff für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ einführen.

In der Maßtheorie wollen wir zudem Teilmengen A von $\mathbb{R}^n$ ein Volumen $\mathrm{Vol}(A)$ zuordnen. Die Maßtheorie und die Integrationstheorie hängen eng miteinander zusammen. Es sei beispielsweise $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Wir nennen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

die *charakteristische Funktion* von A. Wenn wir das Integral und den Volumenbegriff vernünftigt eingeführt haben, dann soll am Ende natürlich

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \;=\; \mathrm{Vol}(A)$$

gelten.

Wir führen nun erst einmal folgende zwei Definitionen ein.

Definition. Für eine Menge Ω bezeichnen wir

$$\mathcal{P}(\Omega) \;:=\; \text{alle Teilmengen von } \Omega$$

als die Potenzmenge von Ω.

Definition. Eine *Volumenfunktion auf* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} v\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{\text{alle Teilmengen von } \mathbb{R}^n\} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \\ A & \mapsto & v(A), \end{array}$$

welche folgende Eigenschaften erfüllt:

(A) Es gilt

$$v\big(\text{Würfel } [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n\big) \;=\; 1 \qquad\qquad \text{Normierung.}$$

(B) Das Volumen ist monoton in dem Sinne, dass

$$A \subset B \quad\Longrightarrow\quad v(A) \leq v(B) \qquad\qquad \text{Monotonie.}$$

(C) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $x+A := \{x+a \mid a \in A\}$ die Translation von A um x. Dann gilt

$$v(x+A) \;=\; v(A) \qquad\qquad \text{Translationsinvarianz.}$$

(D) Für disjunkte Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ gilt

$$v(A \cup B) \;=\; v(A) + v(B) \qquad\qquad \text{Additivität.}$$

Etwas verallgemeinert soll gelten, wenn $A_k \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ eine Folge von paarweise disjunkten[1] Teilmengen sind, dann gilt

$$v\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} v(A_k) \qquad\qquad \sigma\text{-Additivität.}$$

Das folgende Lemma fasst einige Eigenschaften von Volumenfunktionen zusammen.

Lemma 1.1. *Wenn v eine Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist, dann gilt*

(1) *Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist $v(\{x\}) = 0$.*
(2) *Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist $v([m, m+1)) = 1$.*
(3) *Für jede Wahl von $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n$ ist $v([m, n]) = n - m$.*

Beweis.

(1) Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebiges. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$k \cdot v\big(\{x\}\big) \underset{\substack{\uparrow\\(C)}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} v\big(\{\tfrac{i}{k}\}\big) \underset{\substack{\uparrow\\(D)}}{=} v\Big(\bigcup_{i=0}^{k-1}\{\tfrac{i}{k}\}\Big) \underset{\substack{\uparrow\\(B)}}{\leq} v([0,1]) \underset{\substack{\uparrow\\(A)}}{=} 1.$$

Nachdem dies für alle k gilt, muss also $v(\{x\}) = 0$ gelten.

[1] D.h. es ist $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.

(2) Es sei also $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$1 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{(A) und (C)}}}{=} v([m,m+1]) \underset{\substack{\uparrow\\ (D)}}{=} v([m,m+1)) + \underbrace{v(\{m+1\})}_{=0, \text{ nach } (1)} = v([m,m+1)).$$

(3) Die letzte Aussage folgt nun leicht aus (1), (2) und (D), indem wir das Intervall $[m,n]$ in halboffene Intervalle $[i,i+1)$, $i=m,\dots,n-1$ und den Punkt $\{n\}$ zerlegen.

□

Bevor wir Volumenfunktionen weiter diskutieren, wollen wir noch einmal kurz zu den Äquivalenzrelationen zurückkehren, welche wir schon auf Seite 101 eingeführt hatten. Zur Erinnerung, wir sagen $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, wenn für alle $x,y,z \in A$ gilt

$$\begin{array}{rcll} & & x \sim x & \\ x \sim y & \Longrightarrow & y \sim x & \qquad \text{(Symmetrie)} \\ x \sim y \text{ und } y \sim z & \Longrightarrow & x \sim z & \qquad \text{(Transitivität).} \end{array}$$

Beispiel.

(1) Für $x,y \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x-y) \in 5\mathbb{Z}.$$

Man kann nun leicht nachprüfen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

(2) Für $x,y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x-y) \in \mathbb{Q},$$

dies ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$.

(3) Es sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Für $x,y \in X$ definieren wir

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x-y) \in \mathbb{Q},$$

dies ist eine Äquivalenzrelation auf X.

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Zur Erinnerung, eine *Äquivalenzklasse* ist eine nichtleere Teilmenge $Y \subset X$, so dass gilt

(1) für alle $y,y' \in Y$ gilt: $y \sim y'$,
(2) wenn $z \sim y$ für ein $y \in Y$, dann gilt $z \in Y$.

In Lemma 10.6 hatten wir gesehen, dass X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen, d.h.

(i) jedes $x \in X$ liegt in einer Äquivalenzklasse,
(ii) wenn A und B Äquivalenzklassen sind, dann gilt entweder $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$.

Definition. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir sagen $A \subset X$ ist ein *vollständiges Repräsentantensystem*, wenn A aus jeder Äquivalenzklasse Y genau ein Element enthält.

Mit anderen Worten, $A \subset X$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem, wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $a \in A$ gibt, welches zu y äquivalent ist. Ein vollständiges Repräsentantensystem erhält man dadurch, dass man aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element wählt.[2]

Beispiel. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ betrachten wir wieder die Äquivalenzrelation, welche wie folgt definiert ist:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x-y) \in 5\mathbb{Z}.$$

Dann sind

$$\{0,1,2,3,4\},\ \{5,11,-3,13,24\},\ \{7,-4,20,-2,19\}, \ldots$$

vollständige Repräsentantensysteme.

1.2. **Nichtmessbare Mengen.** Wir hatten gerade den Begriff einer Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ eingeführt. Zusammengefasst ordnet eine Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ jeder Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ein Volumen zu, und das Volumen besitzt vernünftige Eigenschaften, beispielsweise ist es translationsinvariant und additiv unter disjunkten Vereinigungen.

Dabei gibt es nun allerdings ein Problem, der folgende Satz besagt, dass es Volumenfunktionen auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ nicht geben kann.

Satz 1.2. *Es gibt keine Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Wir werden den Satz nur für den Fall $n = 1$ beweisen. Den allgemeinen Fall beweist man ganz ähnlich. Wir beweisen den Satz mit einem Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, es gibt eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} v\colon \{\text{alle Teilmengen von } \mathbb{R}^n\} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0}\{\infty\} \\ A & \mapsto & v(A), \end{array}$$

so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(A) Das Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ hat Volumen 1.
(B) Wenn $A \subset B$, dann gilt $v(A) \leq v(B)$.
(C) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$gilt

$$v(x+A) \;=\; v(A).$$

(D) Für paarweise disjunkte abzählbar viele Teilmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$v\Big(\bigcup_k A_k\Big) \;=\; \sum_k v(A_k).$$

Wir betrachten folgende Äquivalenzrelation auf $[0,1]$:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es existiert ein } q \in \mathbb{Q} \text{ mit } x = y + q.$$

Es sei nun $A \subset [0,1]$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\sim$. Aus der obigen Diskussion von Äquivalenzklassen folgt, dass die Menge A folgende Eigenschaft besitzt:

[2]Für die spitzfindigen Studenten/Studentinnen verweise ich auf:
`http://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom`

(*) Für jedes $x \in [0,1]$ existiert genau ein $a \in A$, so dass $x = a + q$ für eine rationale Zahl q.

Wir machen hierbei die folgenden beiden Beobachtungen.

(i) Nachdem $A \subset [0,1]$ folgt, dass man jedes $x \in [0,1]$ schreiben kann als $x = a + q$ mit $a \in A$ und q eine rationale Zahl im Intervall $[-1,1]$.

(ii) Aus der Eindeutigkeit von a folgt, dass für alle $a \neq b$ in A gilt, dass $a - b \notin \mathbb{Q}$.[3]

(iii) Aus (ii) folgt, dass für alle rationalen Zahlen $q_1 \neq q_2$ gilt, dass [4]

$$(q_1 + A) \cap (q_2 + A) \;=\; \emptyset.$$

Wir beweisen nun folgende Behauptung.

Behauptung. Es ist $v(A) = 0$.

Der Beweis der Behauptung ist ganz ähnlich zum Beweis von Lemma 1.1 (1). Wir wählen nun eine Abzählung $q_1, q_2, \ldots$ von den rationalen Zahlen im Intervall $[-1,1]$ mit $q_i \neq q_j$ für $i \neq j$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ folgt nun, dass

$$k \cdot v(A) \;=\; \sum_{i=1}^{k} v(A) \;\underset{\substack{\uparrow\\ (C)}}{=}\; \sum_{i=1}^{k} v(q_i + A) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{(D) und (iii)}}}{=}\; v\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} (q_i + A)}_{\subset[-1,2]}\Big) \;\underset{\substack{\uparrow\\ (B)}}{\leq}\; v([-1,2]) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 1.1}}}{=}\; 3.$$

Es folgt also, dass $v(A) \leq \frac{1}{k} v([-1,2]) = \frac{3}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist nur möglich, wenn $v(A) = 0$. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Andererseits gilt

$$1 \;=\; v([0,1]) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{wir können (B) anwenden,}\\ \text{denn aus (i) folgt}\\ [0,1] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (q_i + A)}}{\leq}\; v\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (q_i + A)\Big) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{(D) und (iii)}}}{=}\; \sum_{i\in\mathbb{N}} v(q_i + A) \;\underset{\substack{\uparrow\\ (C)}}{=}\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{v(A)}_{=0} \;=\; 0.$$

Wir haben damit einen Widerspruch herbeigeführt. □

Wir haben jetzt also ein Problem. Eine Volumenfunktion aus dem Schlaraffenland gibt es leider nicht, wir können nicht allen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ein ‘vernünftiges’ Volumen zuordnen. Andererseits ist es klar, dass es für die meisten Mengen, mit denen wir normalerweise arbeiten, doch einen Volumenbegriff gibt. Wir werden in den folgenden Kapiteln das Lebesgue-Maß einführen, welches den Volumenbegriff zwar nicht auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, aber dennoch für möglichst viele Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einführt, und so dass die Axiome der Volumenfunktion erfüllt sind.

---

[3] In der Tat, denn seien $a, b \in A$ mit $a - b \in \mathbb{Q}$. Dann gilt für $x = a$, dass $x = a + 0$ aber auch $x = b + (a - b)$. Aus der Eindeutigkeit in $(*)$ folgt nun, dass $a = b$.

[4] In der Tat, denn nehmen wir an es gibt ein $y \in (q_1 + A) \cap (q_2 + A)$, dann gibt es $a_1, a_2 \in A$, so dass $q_1 + a_1 = y = q_2 + a_2$. Es folgt, dass $a_1 - a_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, im Widerspruch zu (ii).

Nachdem nicht alle Teilmengen messbar sein werden, müssen wir im Folgenden sehr vorsichtig mit ‘Mengen von Teilmengen’ arbeiten. Dies zwingt uns unweigerlich, dazu ein gehöriges Maß an Mengentheorie zu bewältigen.

2. Mengenringe, Mengenalgebren und σ-Algebren

2.1. Elementare Mengentheorie. Zur Erinnerung, für eine Menge Ω schreiben wir

$$\mathcal{P}(\Omega) \quad := \quad \text{alle Teilmengen von } \Omega \qquad \text{Potenzmenge von } \Omega.$$

Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir

$$A^c \quad := \quad \{x \in \Omega \,|\, x \notin A\} \qquad \text{Komplement von } A.$$

Für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir zudem

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\} && \text{Vereinigung von } A \text{ und } B \\ A \cap B &:= \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\} && \text{Durchschnitt von } A \text{ und } B \\ A \setminus B &:= \{x \in A \,|\, x \text{ liegt nicht in } B\} && \text{mengentheoretische Differenz} \end{aligned}$$

sowie

$$A \triangle B \quad := \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{symmetrische Differenz.}$$

Die Teilmenge $A\Delta B$ besteht also aus den Punkten in Ω, welche in *genau eine* der beiden Mengen A und B enthalten ist, siehe Abbildung 1. Wir können den Begriff von Vereinigung

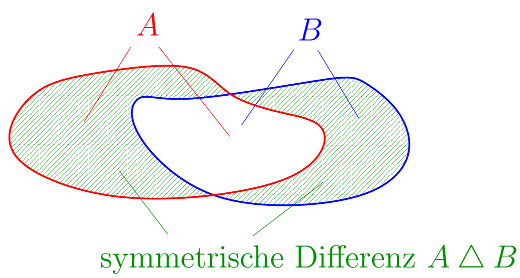


Abbildung 1.

und Durchschnitt auch auf Familien von Teilmengen verallgemeinern. Genauer gesagt, es sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Ω[5], dann definieren wir

$$\bigcup_{i\in I} A_i \quad := \quad \{x \in \Omega \,|\, \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\}$$

sowie

$$\bigcap_{i\in I} A_i \quad := \quad \{x \in \Omega \,|\, \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in A_i\}.$$

In den folgenden beiden Lemmas fassen wir einige elementare Aussagen über symmetrische Differenzen zusammen.

Lemma 2.1. *Es seien A, B und C Teilmengen von Ω. Dann gilt*

[5] Auf gut Deutsch heißt das Folgendes: I ist eine Menge (z.B. $\{1, \dots, k\}$ oder $\mathbb{N}$, aber I kann auch z.B. überabzählbar sein), und jedem Element $i \in I$ ist eine Teilmenge A_i von Ω zugeordnet. Siehe auch:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Familie_(Mathematik)`

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & A \triangle \emptyset & = & A \\
(2) & A \triangle A & = & \emptyset, \\
(3) & A \triangle B & = & B \triangle A, \\
(4) & (A \triangle B) \triangle C & = & A \triangle (B \triangle C), \\
(5) & (A \triangle B) \cap C & = & (A \cap C) \triangle (B \cap C).
\end{array}$$

Beweis. Der Beweis ist in allen Fällen elementar. Man kann sich von allen Aussagen entweder durch elementare Logik oder durch hinreichend allgemeine Bilder überzeugen. Die Aussage (5) wird beispielsweise in Abbildung 2 skizziert. □

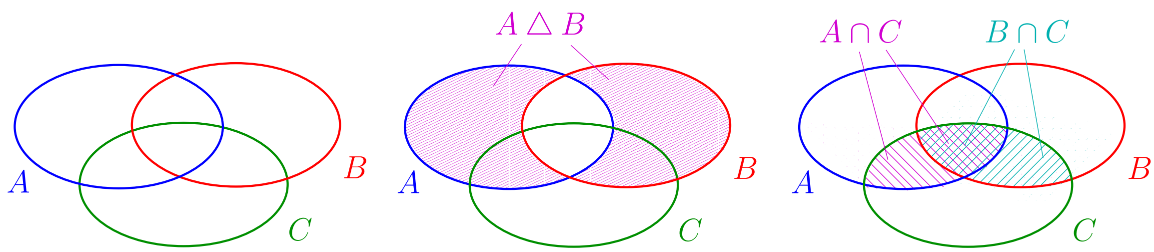


Abbildung 2. Skizze zu Lemma 2.1 (5).

Bemerkung.

(1) Es folgt aus den Eigenschaften (1) bis (4), dass $\mathcal{P}(\Omega)$ mit "Addition" $\triangle$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\emptyset$ ist.[6]

(2) Es folgt aus den Eigenschaften (1) bis (5) und den offensichtlichen Aussagen, dass

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ und } A \cap \Omega = A,$$

dass $\mathcal{P}(\Omega)$ mit "Addition" $\triangle$ und "Multiplikation" $\cap$ sogar ein kommutativer Ring ist. Das "additiv neutrale" Element ist hierbei die leere Menge, und das "multiplikativ neutrale" Element ist hierbei Ω.

Lemma 2.2. (De Morgansche Regeln) *Es seien A und B Teilmengen von Ω. Dann gilt*

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad \textit{und} \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Etwas allgemeiner gilt für eine beliebige Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen von Ω, dass

$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \qquad \textit{und} \qquad \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

[6] Es sei Ω eine endliche Menge. Da $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle)$ eine endliche abelsche Gruppe ist können wir den Fundamentalsatz der endlich erzeugten abelschen Gruppen anwenden. Was besagt dieser in diesem Fall?

2.2. **Definition von Mengenringen und Mengenalgebren.**

Definition. Es sei Ω eine Menge. Wir sagen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine *Mengenalgebra auf* Ω, falls folgende Aussagen gelten:

$$\begin{array}{llll} (1) & & & \emptyset \in \mathcal{A}, \\ (2) & A \in \mathcal{A} & \Longrightarrow & A^c \in \mathcal{A}, \\ (3) & A, B \in \mathcal{A} & \Longrightarrow & A \cup B \in \mathcal{A}. \end{array}$$

Beispiel.

(1) Wir betrachten die Menge $\Omega = \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{N}) \;\; := \;\; & \{\text{alle endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\} \\ & \cup \{\text{alle Komplemente von endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Beispielsweise liegen

$$\{2, 7, 123\}$$

und

$$\mathbb{N} \setminus \{3, 4, 7\} \;\; = \;\; \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, \dots\}$$

in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$. Man kann nun leicht überprüfen, dass $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra auf $\mathbb{N}$ ist.

(2) Für eine beliebige Menge Ω sind $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ und auch $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ Mengenalgebren auf Ω.

Lemma 2.3. *Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra auf Ω. Dann gilt:*

$$\begin{array}{llll} (4) & & & \Omega \in \mathcal{A}, \\ (5) & A, B \in \mathcal{A} & \Longrightarrow & A \cap B \in \mathcal{A}. \end{array}$$

Beweis. Es folgt aus den Eigenschaften (1) und (2), das $\Omega = \emptyset^c$ ebenfalls in $\mathcal{A}$ liegt. Es seien nun $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$A \cap B \;\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } (X^c)^c = X}}{=} \;\; ((A \cap B)^c)^c \;\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de Morgansche Regel}}}{=} \;\; (A^c \cup B^c)^c.$$

Es folgt aus den Eigenschaften (2) und (3), dass A^c und B^c in $\mathcal{A}$ liegen, dass dann auch $A^c \cup B^c$ in $\mathcal{A}$ liegt, und dann auch $(A^c \cup B^c)^c$ in $\mathcal{A}$ liegt. □

Definition. Es sei Ω eine Menge. Wir sagen $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein *Mengenring auf* Ω, falls folgende Aussagen gelten:

$$\begin{array}{llll} (1) & & & \emptyset \in \mathcal{R}, \\ (2) & A, B \in \mathcal{R} & \Longrightarrow & A \setminus B \in \mathcal{R}, \\ (3) & A, B \in \mathcal{R} & \Longrightarrow & A \cup B \in \mathcal{R}. \end{array}$$

Bemerkungen.

(1) Nicht jeder Mengenring ist auch eine Mengenalgebra. Beispielsweise ist $\Omega = \mathbb{N}$ mit

$$\mathcal{R} \;\; = \;\; \{\text{alle endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\}$$

ein Mengenring, aber keine Mengenalgebra.

(2) Eine Mengenalgebra ist auch ein Mengenring, denn für $A, B \in \mathcal{A}$ ist

$$A \setminus B \;=\; \text{“alle Elemente in } A\text{, welche außerhalb von } B \text{ liegen”} \;=\; A \cap B^c.$$

(3) Es folgt leicht aus den Definitionen, dass ein Mengenring $\mathcal{R}$ genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn $\Omega \in \mathcal{R}$.

Lemma 2.4. *Es sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring. Dann gilt*

(4) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{R}$.
(5) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad A \triangle B \in \mathcal{R}$.

Beweis. Die Eigenschaft (4) folgt sofort aus den Eigenschaften (2) und (3) eines Mengenrings und der Beobachtung, dass für beliebige A und B gilt

$$A \cap B \;=\; \text{“}A\text{, ohne die Elemente von } A\text{, welche außerhalb von } B \text{ liegen”} \;=\; A \setminus (A \setminus B).$$

Die Eigenschaft (5) folgt sofort aus den Eigenschaften (2) und (4) eines Mengenrings und

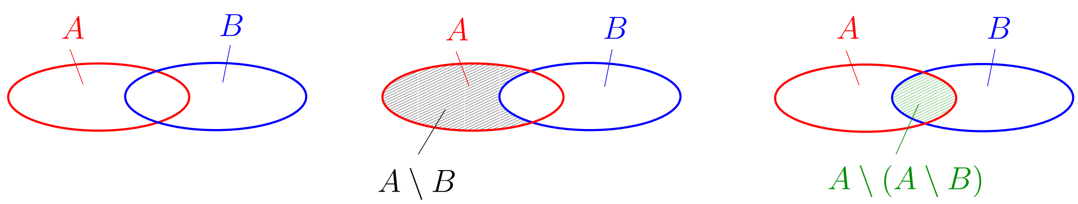


Abbildung 3. Illustration zum Beweis von Lemma 2.4

der Definition der symmetrischen Differenz. □

Bemerkung. In der Bemerkung nach Lemma 2.1 hatten wir gesehen, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ mit Addition $\triangle$ und Multiplikation $\cap$ ein kommutativer Ring ist. Es folgt aus Lemma 2.4, dass ein Mengenring unter diesen beiden Operationen abgeschlossen ist, also ist ein Mengenring mit diesen beiden Operationen auch ein Ring. Wir werden diese Tatsache im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht mehr verwenden, aber diese Beobachtung erklärt zumindest, wo der Name “Mengenring” herrührt.

Im Folgenden meinen wir mit einem *halboffenen Intervall* immer ein Intervall der Form $[a, b)$, wobei $a < b$ zwei reelle Zahlen sind. Wir bezeichnen mit $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ die Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen sind. In anderen Worten, eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ liegt in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$, wenn diese von der Form

$$A \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i),$$

für reelle Zahlen $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$ ist.[7] Für $n = 0$ ist dies gerade die leere Menge.[8]

[7] Die halboffenen Intervalle müssen dabei nicht disjunkt sein.

[8] Das dies für $n = 0$ die leere Menge ist folgt sofort aus der Definition der Vereinigungsmenge auf Seite 135

Das folgende Lemma gibt nun ein weiteres Beispiel von einem Mengenring.

Lemma 2.5. $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ *ist ein Mengenring.*

Der Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ ist allerdings keine Mengenalgebra, nachdem $\mathbb{R}$ nicht in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ enthalten ist.

Beweis. Wir überprüfen die Axiome von einem Mengenring. Wir hatten gerade gesehen, dass die leere Menge in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ enthalten ist. Es ist offensichtlich, dass die Vereinigung von zwei Teilmengen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ wiederum in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ liegt. Wir müssen also noch folgende Behauptung beweisen.

Behauptung.

$$A, B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}).$$

Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte.

(1) Wenn I und J zwei halboffene Intervalle sind, dann ist $I \setminus J$ entweder ein halboffenes Intervall, oder die Vereinigung von zwei halboffenen Intervallen, oder die leere Menge. (Siehe dazu auch Abbildung 4.) Insbesondere ist also $I \setminus J \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$.

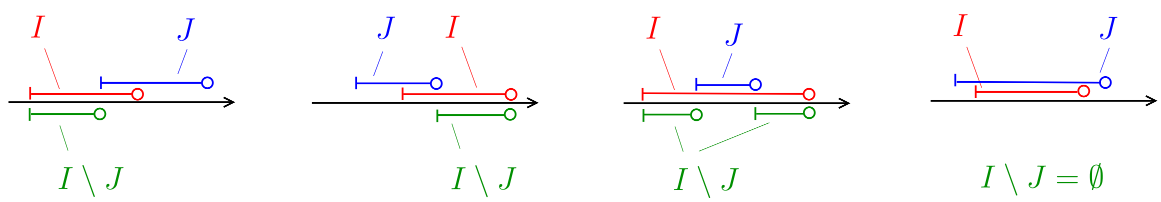


Abbildung 4. Illustration zum Beweis von Lemma 2.5

(2) Wir betrachten nun den Fall, dass

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} I_k,$$

wobei $I_1, \ldots, I_m$ halboffene Intervalle sind. Zudem sei J ein halboffenes Intervall. Dann ist

$$A \setminus J = \left(\bigcup_{k=1}^{m} I_k \right) \setminus J = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{m} \underbrace{I_k \setminus J}_{\in\, \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \text{ nach } (1)}}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})}.$$

(3) Wir betrachten jetzt noch den allgemeinen Fall. Es sei also

$$B = \bigcup_{l=1}^{n} J_l,$$

wobei $J_1, \dots, J_n$ halboffene Intervalle sind. Dann ist

$$A \setminus B \;=\; A \setminus \Big(\bigcup_{l=1}^{n} J_l \Big) \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{(A \setminus J_1)}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \text{ nach } (2)} \setminus J_2 \cdots}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \text{ nach } (2)} \setminus J_n}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \text{ nach } (2)}.$$

□

2.3. **Produkte von Mengenringen.** Für zwei Mengen X und Y bezeichnen wir mit

$$X \times Y \;:=\; \{(x,y) \,|\, x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

die *Produktmenge von X und Y*. Beispielsweise ist

$$[1,3] \times [-2,1] \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [1,3] \text{ und } y \in [-2,1]\}.$$

ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$.

Satz 2.6. *Es seien Ω und Φ Mengen und es seien $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Phi)$ Mengenringe. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega \times \Phi)$ alle Mengen der Form*

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times B_i, \qquad \textit{wobei } A_i \in \mathcal{A} \textit{ und } B_i \in \mathcal{B}.$$

Dann ist $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ ein Mengenring auf $\Omega \times \Phi$.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 2.6 zuwenden wollen wir erst ein Beispiel etwas genauer betrachten. Wir bezeichnen eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ der Form

$$[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \;=\; \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \in [a_i, b_i) \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

als *halboffenen Quader in $\mathbb{R}^n$*.[9] Es ist nun offensichtlich, dass das Produkt von n halboffenen Intervallen in $\mathbb{R}$ ein halboffener Quader in $\mathbb{R}^n$ ist. Für $n \geq 1$ bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, welche Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern in $\mathbb{R}^n$ sind. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \;=\; \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{Q}(\mathbb{R}).$$

Es folgt nun aus Satz 2.6, dass $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ein Mengenring ist.

Wir reichen nun noch den Beweis von Satz 2.6 nach.

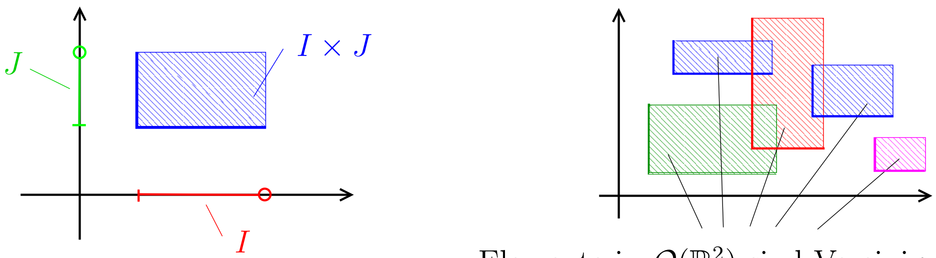
Beweis von Satz 2.6. Es seien Ω und Φ Mengen und es seien zudem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Phi)$ Mengenringe. Es ist offensichtlich, dass $\emptyset \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$. Es folgt zudem aus den Definitionen, dass $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist.

Es verbleibt also folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

$$X, X' \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad X \setminus X' \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}.$$

[9] Wenn die Seitenlängen $b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n$ übereinstimmen, dann bezeichnen wir die Menge manchmal auch als halboffenen Würfel.



Elemente in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ sind Vereinigungen von endlich vielen halboffenen Quadern

Abbildung 5.

Wie im Beweis von Lemma 2.5 unterteilen wir den Beweis in drei Schritte.

(1) Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass
$$X \;=\; A \times B \text{ und } X' \;=\; A' \times B' \;\text{ mit } A, A' \in \mathcal{A} \text{ und } B, B' \in \mathcal{B}.$$
Dann folgt aus elementarer Mengentheorie, wie in Abbildung 6 skizziert, dass die Menge $A \times B \setminus A' \times B'$ die Vereinigung der drei Mengen
$$(A \setminus A') \times (B \setminus B'),\; (A \cap A') \times (B \setminus B') \text{ und } (A \setminus A') \times (B \cap B')$$
ist. Nachdem $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Mengenringe sind, liegen in allen drei Fällen die Faktoren in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Es folgt nun aus der Definition von $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, dass die Vereinigung dieser drei Mengen, d.h. $A \times B \setminus A' \times B'$, wiederum in $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ liegt.

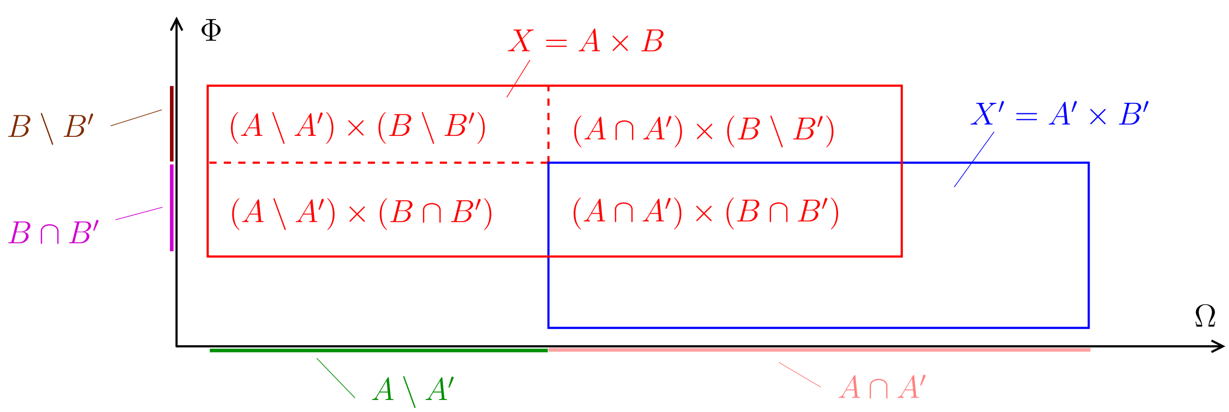


Abbildung 6.

Der Rest vom Beweis ist nun ganz analog zu den letzten beiden Schritten im Beweis von Lemma 2.5.

(2) Wir betrachten nun den Fall, dass
$$X \;=\; \bigcup_{i=1}^{m} A_i \times B_i \text{ und } X' \;=\; A' \times B' \;\text{ mit } A_i, A' \in \mathcal{A} \text{ und } B_i, B' \in \mathcal{B}.$$

Dann ist

$$X \setminus (A' \times B') \;=\; \Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times B_i\Big) \setminus (A' \times B') \;=\; \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{\big((A_i \times B_i) \setminus (A' \times B')\big)}_{\in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}},$$

also wiederum eine Teilmenge in $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$.

(3) Zuletzt sei nun

$$X \;\in\; \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \text{ und } X' \;=\; \bigcup_{j=1}^{n} A_j' \times B_j' \;\text{ mit } A_j' \in \mathcal{A} \text{ und } B_j' \in \mathcal{B}.$$

Dann ist

$$X \setminus X' \;=\; X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j' \times B_j' \;=\; \underbrace{\underbrace{X \setminus A_1' \times B_1'}_{\in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}} \cdots \setminus A_n' \times B_n'}_{\in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}}.$$

□

Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 8 bewiesen.

Lemma 2.7. *Es seien Ω und Φ Mengen und es seien $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Phi)$ Mengenringe. Jede Menge in $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega \times \Phi)$ kann geschrieben werden als* disjunkte *endliche Vereinigung von Mengen der Form $A_i \times B_i$, wobei $A_i \in \mathcal{A}$ und $B_i \in \mathcal{B}$.*

Wir beschließen das Kapitel mit einer letzten Definition und einem einfachen Lemma.

Definition. Für $s > 0$ schreiben wir

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \;=\; \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \;\cap\; \mathcal{P}([-s, s)^n),$$

oder in anderen Worten

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \;=\; \begin{array}{c}\text{alle Teilmengen von } \mathbb{R}^n\text{, welche Vereinigung von}\\ \text{endlich vielen halboffenen Quadern in } [-s, s)^n \text{ sind.}\end{array}$$

Auf Seite 138 hatten wir angemerkt, dass ein Mengenring $\mathcal{R}$ auf Ω genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn $\Omega \in \mathcal{R}$. Es folgt, dass der Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ keine Mengenalgebra ist. Andererseits erhalten wir auch folgendes Lemma.

Lemma 2.8. *Für jedes $s > 0$ ist $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$ eine Mengenalgebra.*

2.4. **σ-Algebren.**

Definition. Es sei Ω eine Menge. Wir sagen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine *σ-Algebra auf* Ω, falls folgende Aussagen gelten:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,

(3) die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen in $\mathcal{A}$ liegt ebenfalls in $\mathcal{A}$.

Bemerkungen.

(1) Eine σ-Algebra ist insbesondere eine Mengenalgebra, aber dieses Mal verlangen wir, dass auch die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen $A_j, j \in \mathbb{N}$ in einer σ-Algebra wieder in der σ-Algebra liegt.

(2) Es sei $\Omega = \mathbb{N}$. Auf Seite 137 hatten wir gesehen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{N}) \;:=\; & \{\text{alle endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\} \\ & \cup \{\text{alle Komplemente von endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

eine Mengenalgebra ist. Dies ist jedoch keine σ-Algebra, denn $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist nicht unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen. Beispielsweise liegt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $A_k = \{2k\}$ in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$, aber $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{2k\} = 2\mathbb{N}$ liegt nicht in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$.

(3) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, dann liegt auch $\Omega = \emptyset^c$ in $\mathcal{A}$. Ganz analog zum Fall von Mengenalgebren, welchen wir in Lemma 2.3 diskutiert hatten, folgt aus den de Morganschen Gesetzen, welche wir in Lemma 2.2 formuliert hatten, dass der Durchschnitt von abzählbar vielen Mengen in einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ wiederum in $\mathcal{A}$ liegt.

Definition. Es sei $\{X_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von Teilmengen von Ω. Wir sagen die Folge ist *aufsteigend*, wenn $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$. Wir nennen dann

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$$

den *Limes der aufsteigenden Folge*. Wir schreiben

$$X_k \uparrow X \quad :\Longleftrightarrow \quad \{X_k\}_{k\geq 1} \text{ ist eine aufsteigende Folge mit Limes } X.$$

Wir sagen die Folge $\{X_k\}_{k\geq 1}$ ist *absteigend*, wenn $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$. Wir nennen dann

$$X = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$$

den *Limes der absteigenden Folge*. Wir schreiben

$$X_k \downarrow X \quad :\Longleftrightarrow \quad \{X_k\}_{k\geq 1} \text{ ist eine absteigende Folge mit Limes } X.$$

Beispiel. Es ist

$$(-k, k) \uparrow \mathbb{R} \quad \text{und } \big(-\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\big) \downarrow \{0\}.$$

Folgenden Satz werden wir viel später im Beweis von Satz von Fubini verwenden.

Satz 2.9. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{für alle aufsteigenden Folgen } \{A_k\}_{k\geq 1} \text{ in } \mathcal{A} \\ \text{liegt der Limes } \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \text{ ebenfalls in } \mathcal{A}. \end{array}$$

Beispiel. Wir betrachten wiederum $\Omega = \mathbb{N}$ mit der Mengenalgebra $\mathcal{E}(\mathbb{N})$. Dann ist

$$A_k := \{2, 4, 6, \dots, 2k\}$$

eine aufsteigende Folge mit Limes $2\mathbb{N}$, aber der Limes liegt nicht in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$. Wir sehen also wiederum, dass $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ keine σ-Algebra ist.

Beweis. Es ist offensichtlich, dass die '⇒'–Richtung gilt. Wir beweisen nun noch die '⇐'–Richtung. Es sei also $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, dass die Vereinigungsmenge $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ auch in $\mathcal{A}$ liegt. Dies ist in der Tat der Fall, denn

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_k)}_{=:B_k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } B_k \text{ ist eine} \\ \text{aufsteigende Folge in } \mathcal{A}}}{\in} \mathcal{A}.$$

□

Das folgende Lemma folgt leicht aus den Definitionen, und verbleibt als freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 2.10. *Es sei $\{\mathcal{A}\}_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf einer Menge Ω. Dann ist auch*

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \;=\; \textit{alle } X \subset \Omega\textit{, welche in allen } \mathcal{A}_i\textit{'s liegen,}$$

eine σ-Algebra.

Wir hatten schon gesehen, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ trivialerweise eine σ-Algebra ist. Insbesondere ist jede Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen von Ω in einer σ-Algebra enthalten. Für $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnen wir nun

$$\langle \mathcal{S}\rangle^{\sigma} \;:=\; \text{Durchschnitt aller } \sigma\text{-Algebren von } \Omega\text{, welche } \mathcal{S} \text{ enthalten,}$$

als die von $\mathcal{S}$ *erzeugte σ-Algebra.*[10]

Bemerkungen.

(1) Diese Definition ist vielleicht auf den ersten Blick etwas gewöhnungsbedürftig. Wir können diesen Typ von Definition mit einem Beispiel aus der linearen Algebra illustrieren. Es sei V ein Vektorraum. Für eine Teilmenge $A \subset V$ bezeichnen wir dann

$$\operatorname{Span}(A) \;:=\; \text{Durchschnitt aller Untervektorräume von } V\text{, welche } A \text{ enthalten,}$$

als den von A erzeugten Untervektorraum. Dies ist in der Tat ein Untervektorraum, denn der Durchschnitt von Untervektorräumen ist wiederum ein Untervektorraum.

(2) Man kann $\langle \mathcal{S}\rangle^{\sigma}$ auch direkt hinschreiben als

$$\langle \mathcal{S}\rangle^{\sigma} \;=\; \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} x_{ij} \Big) \,\Big|\, x_{ij} \in \mathcal{S} \text{ oder } x_{ij}^c \in \mathcal{S} \Big\},$$

denn die rechte Seite ist eine σ-Algebra, welche $\mathcal{S}$ enthält. Andererseits muss jede σ-Algebra, welche $\mathcal{S}$ enthält, per Definition einer σ-Algebra die rechte Seite enthalten.

[10]Es folgt aus Lemma 2.10, dass dies in der Tat eine σ-Algebra ist.

Beispiel. Für den weiteren Verlauf der Vorlesung ist das wichtigste Beispiel die σ-Algebra $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^\sigma$, welche von $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt wird. Wir geben im Folgenden ein paar Beispiele von Mengen, welche in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^\sigma$ enthalten sind. Beispielsweise gilt

$$(-1,1) \;=\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\big[-1+\tfrac{1}{k},1\big)}_{\in\mathcal{Q}(\mathbb{R})},$$

nachdem $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^\sigma$ eine σ-Algebra ist, muss auch schon $(-1,1)$ in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^\sigma$ liegen. In Übungsblatt 9 werden wir sehen, dass sogar alle Intervalle in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^\sigma$ liegen. Zudem werden wir sehen, dass auch $\mathbb{Q}$ in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^\sigma$ liegt. Wir werden später der Frage nachgehen, ob die Menge A von Seite 132 auch in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^\sigma$ liegt.

3. Inhalte, Prämasse und Masse

Im letzten Kapitel hatten wir uns mit der vielleicht etwas trockenen Materie der Mengentheorie beschäftigt. Wir wollen uns nun dem eigentlichen Ziel nähern, nämlich wir wollen einen vernünftigen Begriff von einem 'Volumen', oder auch 'Maß' oder auch 'Inhalt' von Mengen einführen.

3.1. **Die erweiterte Zahlengerade.** Wir schreiben im Folgenden

$$\overline{\mathbb{R}} \quad := \quad [-\infty, \infty] \quad := \quad \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

und

$$\overline{\mathbb{R}}_+ \quad := \quad [0, \infty] \qquad := \quad \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Wir setzen die Ordnung $<$ von den reellen Zahlen ganz naiv auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort indem wir für alle $a \in \mathbb{R}$ definieren, dass

$$-\infty \ < \ a \ < \ +\infty.$$

Im Folgenden werden wir immer wieder Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ betrachten. Es folgt aus Satz 4.11 der Analysis I, dass jede monoton steigende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen ein Element in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert.[11] Wir führen dazu noch folgende Notation ein. Es sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Wir schreiben

$$a_k \uparrow a \quad :\Longleftrightarrow \quad \{a_k\}_{k\geq 1} \text{ ist eine monoton steigende Folge mit Grenzwert } a,$$

und ganz analog

$$a_k \downarrow a \quad :\Longleftrightarrow \quad \{a_k\}_{k\geq 1} \text{ ist eine monoton fallende Folge mit Grenzwert } a.$$

Beispielsweise gilt

$$(2 - \tfrac{1}{k}) \uparrow 2 \quad \text{ und } \quad e^{-k} \downarrow 0 \quad \text{ sowie } \quad k^2 \uparrow \infty.$$

In Analysis I hatten wir auf der Menge $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ auch schon folgende partielle Addition und partielle Multiplikation eingeführt. [12]

$+$	$a \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$
$b \in \mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$*$
$-\infty$	$-\infty$	$*$	$-\infty$

und

$\cdot$	$a > 0$	0	$a < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$b > 0$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	$*$	$*$
$b < 0$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$*$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

hierbei bedeutet $*$, dass die Addition beziehungsweise die Multiplikation nicht definiert ist, d.h. wir haben $\infty + (-\infty)$ und $(-\infty) + \infty$ *nicht* definiert und wir haben auch $0 \cdot (\pm\infty)$ nicht definiert.

[11]Wir verwenden jetzt die Sprechweise, welche wir in Analysis I explizit vermieden hatten, dass eine Folge gegen $\pm\infty$ konvergiert, wenn die Folge bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

[12]Die Addition und die Multiplikation ist dabei definiert, wie man es sich 'naiv' denken würde. Wenn eine Verknüpfung 'naiv' nicht klar ist, z.B. $-\infty + \infty$, dann ist diese in unserem Falle auch nicht definiert.

3.2. **Die Definition von Inhalt, Prämaß und Maß.** Auch in diesem Kapitel sei Ω durchgehend eine Menge.

Definition. Es sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring. Ein *Inhalt auf* $\mathcal{R}$ ist eine Funktion

$$\mu \colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

mit folgenden Eigenschaften

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) für disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \text{Additivität.}$$

Beispiel.

(1) Auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} \mu \colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \#A := \text{Anzahl der Elemente in } A \end{aligned}$$

ein Inhalt.

(2) Auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist auch

$$\begin{aligned} \tau \colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } A = \emptyset, \\ \infty, & \text{wenn } A \neq \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

ein Inhalt.

(3) Es sei Ω eine beliebige Menge und $x \in \Omega$ sei festgewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_x \colon \mathcal{P}(\Omega) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

ein Inhalt.

(4) Es sei

$$W = \big\{(a,b) \,\big|\, a, b \in \{1, \dots, 6\}\big\}.$$

Dies ist gerade die Menge aller Zahlenpaare, welche mit zwei Würfeln gewürfelt werden können. Dann ist

$$\begin{aligned} \rho \colon \mathcal{P}(W) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \tfrac{1}{36} \cdot \text{Anzahl der Elemente in } A \end{aligned}$$

ein Inhalt auf dem Mengenring $\mathcal{P}(W)$. Für $A \subset \mathcal{P}(W)$, ist $\rho(A)$ gerade die Wahrscheinlichkeit (aufgefasst als Zahl zwischen 0 und 1), dass beim einmaligen Würfeln mit 2 Würfeln ein Zahlenpaar aus A gewürfelt wird. Beispielsweise ist

$$\text{Wahrscheinlichkeit ein Pasch zu würfeln} = \rho\big(\{(1,1), \dots, (6,6)\}\big) = \tfrac{1}{6}.$$

Wir fassen einige Aussagen über Inhalte im folgenden Lemma zusammen.

Lemma 3.1. *Es sei μ ein Inhalt auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Der Inhalt μ ist monoton in dem Sinne, dass für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt*

$$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B) \qquad \textit{Monotonie.}$$

(2) *Für beliebige Mengen $A, B \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(3) *Für endlich viele disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \qquad \textit{Additivität.}$$

(4) *Für beliebige Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \qquad \textit{Subadditivität.}$$

Beweis von Lemma 3.1.

(1) Es seien also $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subset B$. Dann gilt

$$\mu(B) = \mu(A \cup \underbrace{B \setminus A}_{\in \mathcal{R}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Additivität}}}{=} \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A).$$

(2) Es seien $A, B \in \mathcal{R}$. Es folgt aus der Additivität von μ, angewandt auf die disjunkten Zerlegungen, welche in Abbildung 7 skizziert sind, dass[13]

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B), \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B), \end{aligned}$$

und

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Zusammengefasst erhalten wir, dass

$$\mu(A \cup B) = \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{=\mu(A)-\mu(A\cap B)} + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{=\mu(B)-\mu(A\cap B)} + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(3) Diese Aussage folgt durch mehrfaches Anwenden der zweiten Eigenschaft von Inhalten.

(4) Die letzte Aussage wird in Übungsblatt 9 bewiesen.

□

Definition.

[13] Hierbei verwenden wir, dass in einem Mengenring $\mathcal{R}$ mit $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$ und $A \cup B$ in $\mathcal{R}$ liegen.

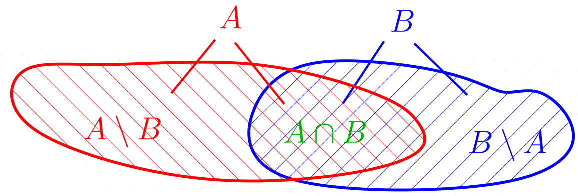


ABBILDUNG 7. Skizze zum Beweis von Lemma 3.1.

(1) Ein Inhalt μ auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *σ-additiv*, wenn für jede Folge von paarweise disjunkten Mengen $\{A_k\}_{\geq 1}$ in $\mathcal{R}$, deren Vereinigung $\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls in $\mathcal{R}$ liegt, gilt

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(2) Ein σ-additiver Inhalt wird oft auch *Prämaß* genannt
(3) Ein *Maß* ist ein Prämaß, welches auf einer σ-Algebra definiert ist.

Beispiele.

(1) Die obigen Inhalte μ, μ_x und τ auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ sind σ-additiv.
(2) Wenn $\mathcal{R}$ nur aus endlich vielen Mengen besteht, dann ist jeder Inhalt auf $\mathcal{R}$ sogar σ-additiv. Insbesondere ist der Inhalt ρ auf $\mathcal{P}(W)$ auch σ-additiv.
(3) Wir betrachten nun auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ den Inhalt[14]

$$\begin{array}{rcl} \nu\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{wenn } A \text{ unendlich.} \end{cases} \end{array}$$

In diesem Fall ist

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\} = \mathbb{N} \quad \text{aber} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\nu(\{k\})}_{=0} \neq \underbrace{\nu(\mathbb{N})}_{=1}.$$

Wir haben also gezeigt, dass ν nicht σ-additiv ist.

Satz 3.2. *Es sei $\mu\colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Der Inhalt μ ist σ-additiv,*

[14]Es klingt so, als müsse die zweite Eigenschaft eines Inhalts verletzt sein. Aber dies ist nicht der Fall, denn es gibt in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ keine disjunkten unendlichen Mengen.

(b) *Der Inhalt μ ist σ-subadditiv, d.h. für jede Folge von Mengen*[15] $\{A_k\}_{k\geq 1}$ *in* $\mathcal{R}$, *deren Vereinigung* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *ebenfalls in* $\mathcal{R}$ *liegt, gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(c) *Der Inhalt μ ist stetig von unten, d.h. für jede aufsteigende Folge* $\{A_k\}_{k\geq 1}$ *in* $\mathcal{R}$, *deren Limes* $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *ebenfalls in* $\mathcal{R}$ *liegt, gilt*

$$\mu(A_k) \uparrow \mu(A).$$

Bemerkung. Die analoge Aussage für absteigende Folgen von Mengen gilt im Allgemeinen nicht. Betrachten wir beispielsweise auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ wiederum den σ-additiven Inhalt

$$\begin{array}{rcl} \mu\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \#A := \text{Anzahl der Elemente in } A. \end{array}$$

Dann bilden die Teilmengen

$$A_k \;:=\; \{k, k+1, k+2, \ldots\}$$

eine absteigende Folge von Mengen. Dann gilt jedoch

$$\underbrace{\mu(A_k)}_{=\infty} \downarrow \infty \quad \text{aber} \quad \mu\Big(\underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}_{=\emptyset}\Big) \;=\; 0.$$

Auf Seite 15 von Forster: Analysis III wird gezeigt, dass für einen σ-additiven Inhalt das Analogon von Aussage (c) für absteigende Folgen gilt, wenn der Inhalt μ endlich ist, d.h. wenn μ nur endliche Werte annimmt. Wir werden diese Aussage im weiteren Verlauf der Vorlesung jedoch nicht verwenden.

Beweis. Wir beweisen die Äquivalenz der drei Aussagen indem wir folgende Implikationen beweisen:

$$(b) \implies (a) \implies (c) \implies (b).$$

Wir beweisen zuerst $(b) \Rightarrow (a)$. Es sei also $\{A_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{R}$, so dass $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ in $\mathcal{R}$ liegt. Dann gilt

$$\mu(A) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft (b)}}}{\leq}\; \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{endliche Additivität von } \mu}}{=}\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)}_{\leq \mu(A) \text{ wegen Monotonie}} \;\leq\; \mu(A).$$

Nachdem links und rechts der gleiche Term stehen, müssen alle Ungleichheiten schon Gleichheiten sein. Insbesondere erhalten wir die gewünschte Gleichheit der ersten beiden Ausdrücke.

[15] Wir nehmen nun nicht an, dass die Mengen paarweise disjunkt sind.

Wir beweisen nun $(a) \Rightarrow (c)$. Es sei also $\{A_k\}_{k\geq 1}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{R}$, so dass der Limes $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls in $\mathcal{R}$ liegt. Wir setzen

$$B_1 \ := \ A_1 \text{ und für } k \geq 2 \text{ setzen wir } B_k \ := \ A_k \setminus A_{k-1}, \text{ also ist } A_k \ = \ B_1 \cup \cdots \cup B_k.$$

Nachdem $\{A_k\}$ eine aufsteigende Folge ist, folgt, dass die B_k's paarweise disjunkt sind. Wir erhalten, dass

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \ = \ \lim_{k\to\infty} \mu(B_1 \cup \cdots \cup B_k) \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 3.1 (3)}}}{=} \ \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft } (a)}}{=} \ \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \ = \ \mu(A).$$

Wir beweisen zum Schluß noch, dass $(c) \Rightarrow (b)$. Es sei also $\{A_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von Mengen, so dass $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ auch in $\mathcal{R}$ liegt. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$B_m \ := \ \bigcup_{k=1}^{m} A_k.$$

Dies ist nun eine aufsteigende Folge von Mengen mit $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = A$. Wir erhalten, dass

$$\mu(A) \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft (c)}}}{=} \ \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \ = \ \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.1 (4)}}}{\leq} \ \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) \ = \ \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

□

3.3. **Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.** Wir wenden uns nun dem Studium von Maßen auf dem n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ zu. Wir erinnern in diesem kurzen Kapitel an einige Begriffe aus der Analysis II.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\|x\| \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Wir fassen $\mathbb{R}^n$ als metrischen Raum bezüglich der euklidischen Metrik auf, welche durch $\|x - y\|$ gegeben ist. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ bezeichnen wir

$$B_r(x) \ = \ \big\{ y \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|y - x\| < r \big\}$$

als die offene r-Kugel um x. Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir [16]

$$\text{Abschluß von } X \;:=\; \overline{X} \;:=\; \big\{ y \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \text{für alle } \epsilon > 0 \text{ gilt } B_\epsilon(y) \cap X \neq \emptyset \big\}$$

und

$$\text{Innere von } X \;:=\; \mathring{X} \;:=\; \big\{ x \in X \,\big|\, \text{es gibt ein } \epsilon > 0 \text{ mit } B_\epsilon(x) \subset X \big\}.$$

Beispielsweise gilt für den halboffenen Quader

$$Q \;=\; [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \;=\; \big\{ (x_1, \dots, x_n) \,\big|\, x_i \in [a_i, b_i) \big\},$$

dass

$$\overline{Q} \;=\; [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \;=\; \big\{ (x_1, \dots, x_n) \,\big|\, x_i \in [a_i, b_i] \big\},$$

und

$$\mathring{Q} \;=\; (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \;=\; \big\{ (x_1, \dots, x_n) \,\big|\, x_i \in (a_i, b_i) \big\}.$$

3.4. **Das Lebesgue-Prämaß.** Unser eigentliches Ziel ist es einen vernünftigen Begriff von 'Volumen' für 'vernünftige' Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einzuführen. In diesem Kapitel kommen wir diesem Ziel deutlich näher. Genauer gesagt, wir werden ein Prämaß Vol_n auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ einführen.

Für einen halboffenen Quader

$$Q \;=\; [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

setzen wir

$$\mathrm{Vol}_n(Q) \;:=\; \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Wir wollen nun diesen Volumenbegriff auf alle Teilmengen von $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Dazu benötigen wir folgenden Satz.

Satz 3.3. *Jede Teilmenge in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ist die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern.*

Bevor wir den Satz beweisen führen wir noch eine Notation ein. Wenn $X \subset \Omega$ die disjunkte Vereinigung von Teilmengen A, B ist, dann schreiben wir manchmal[17]

$$X \;=\; A \sqcup B \quad \text{oder auch} \quad X \;=\; A \mathbin{\dot\cup} B.$$

Beispielsweise besagt der vorherige Satz, dass es zu jedem $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ halboffene Quader $Q_1, \dots, Q_m$ mit

$$B \;=\; Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_m$$

gibt.

[16]Dies sind natürlich wort-wörtlich die gleichen Definitionen wie für den Abschluß und das Innere einer Teilmenge in $\mathbb{C}$, siehe Seite 8.

[17]In der Vorlesung verwenden wir hierbei hauptsächlich die Notation $\dot\cup$ während wir im Skript hauptsächlich die Notation $\sqcup$ verwenden, nachdem dieses Symbol leichter von $\cup$ zu unterscheiden ist.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz mit Induktion nach n. Für $n = 1$ ist dies gerade Übungsaufgabe von Übungsblatt 8.

Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $n-1$ gilt. Es sei nun $X \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Nachdem

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \; = \; \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \boxtimes \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{n-1})$$

folgt aus Lemma 2.7, dass wir X schreiben können als *disjunkte* Vereinigung von Mengen der Form $A \times B$, wobei $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{n-1})$. Es genügt nun die Behauptung für solch ein Produkt $A \times B$ zu beweisen. Hierbei ist

$$A \times B \underset{\uparrow}{=} (I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k) \times (Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_l) \; = \; \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{j=1}^{l} \underbrace{I_i \times Q_j}_{\substack{\text{halboffener} \\ \text{Quader}}}.$$

nach Fall $n=1$ ist $A = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$, wobei $I_1, \dots, I_k$ halboffene Intervalle,
nach Induktion ist $B = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_l$, wobei $Q_1, \dots, Q_l$ halboffene Quader □

Es sei nun also $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 3.3 ist

$$A \; = \; \bigsqcup_{i=1}^{m} Q_i$$

die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern. Es liegt nun nahe

$$\mathrm{Vol}_n(A) \; = \; \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i)$$

zu setzen. Allerdings gibt es dabei ein sehr lästiges Problem: wir können A auf viele Weisen als disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern schreiben, warum hängt dann die Definition nicht von der Wahl der Zerlegung ab?

Wir beweisen dazu erst einmal folgendes Lemma.

Lemma 3.4. *Es sei*

$$Q \; = \; Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_m$$

eine disjunkte Zerlegung von einem halboffenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ in endlich viele halboffene Quader $Q_1, \dots, Q_m$. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q) \; = \; \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma mithilfe von Induktion nach n. Wir betrachten zuerst den Induktionsanfang $n = 1$. In diesem Fall sind

$$Q \; = \; [a, b) \text{ und } Q_i \; = \; [a_i, b_i),$$

halboffene Intervalle. Indem wir eventuell die Intervalle umnummerieren können wir annehmen, dass $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Da $Q = [a, b)$ die disjunkte Vereinigung der Intervalle $[a_i, b_i)$ ist muss gelten, dass

$$a \; = \; a_1 \; < \; b_1 \; = \; a_2 \; < \; b_2 \; = \; a_3 \; < \dots \; b_{m-1} \; = \; a_m \; < \; b_m \; = b.$$

Also ist

$$\mathrm{Vol}_1(Q) \;=\; b-a \;=\; \sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Vol}_1(Q_i).$$

Wir haben also den Induktionsanfang bewiesen.

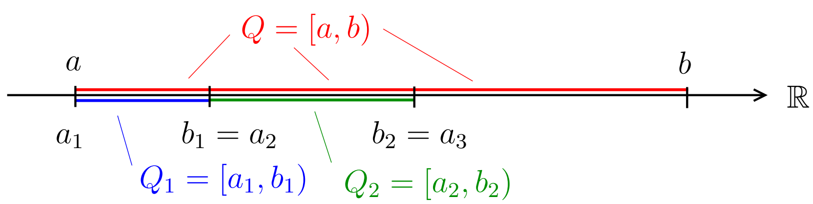


Abbildung 8. Skizze zum Fall $n = 1$ im Beweis von Lemma 3.4.

Wir wenden uns nun dem Induktionsschritt $n-1 \rightsquigarrow n$ zu. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass

$$Q \;=\; I \times P \quad \text{ und } \quad Q_i \;=\; I_i \times P,$$

wobei I und die I_i's halboffene Intervalle und P ein halboffener Quader in $\mathbb{R}^{n-1}$ sind. Dann folgt aus $Q = Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_m$, dass $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m$. Wir erhalten dann wie gewünscht, dass

$$\mathrm{Vol}_n(Q) \;=\; \mathrm{Vol}_n(I\times P) \;=\; \mathrm{Vol}_1(I)\cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus dem Fall } n=1}}{=} \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Vol}_1(I_i)\cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Die Quader Q und Q_i lassen sich zerlegen als

$$Q \;=\; I \times P \quad \text{ und } \quad Q_i \;=\; I_i \times P_i,$$

wobei I und die I_i's halboffene Intervalle und P und die P_i's halboffene Quader in $\mathbb{R}^{n-1}$ sind. Wir bezeichnen nun mit $J_1,\dots,J_m$ die halboffenen Intervalle, welche wir dadurch erhalten, dass wir das Intervall I entlang aller Anfangs- und Endpunkte der Intervalle I_i schneiden. (Diese Definition wird in Abbildung 9 skizziert.)

Jedes der Intervall I_i ist nun eine Vereinigung von den Intervallen $J_1,\dots,J_s$. Indem wir die Intervalle I_i in Intervalle der Form J_j aufteilen, und unter Verwendung von $(*)$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass alle Intervalle der Form I_i ein Intervall aus $\{J_1,\dots,J_s\}$ sind.

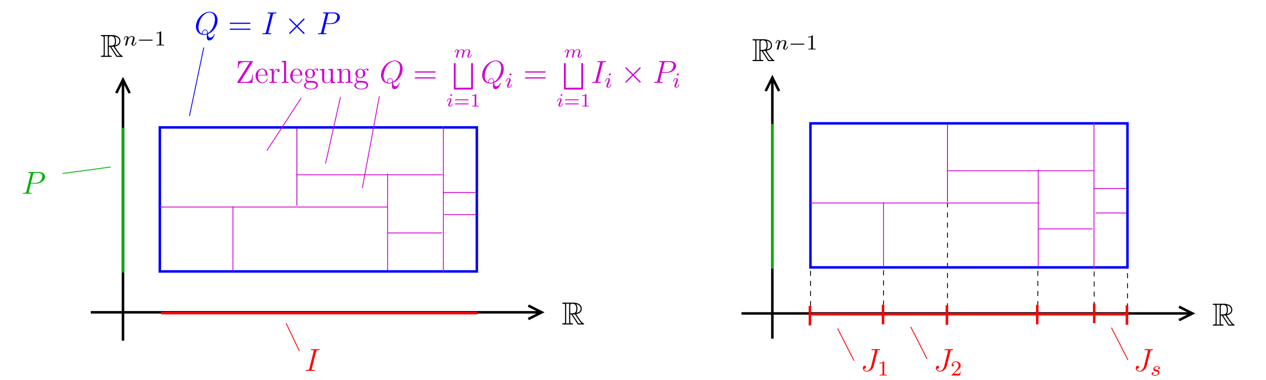


Abbildung 9. Skizze zum Induktionsschritt im Beweis von Lemma 3.4.

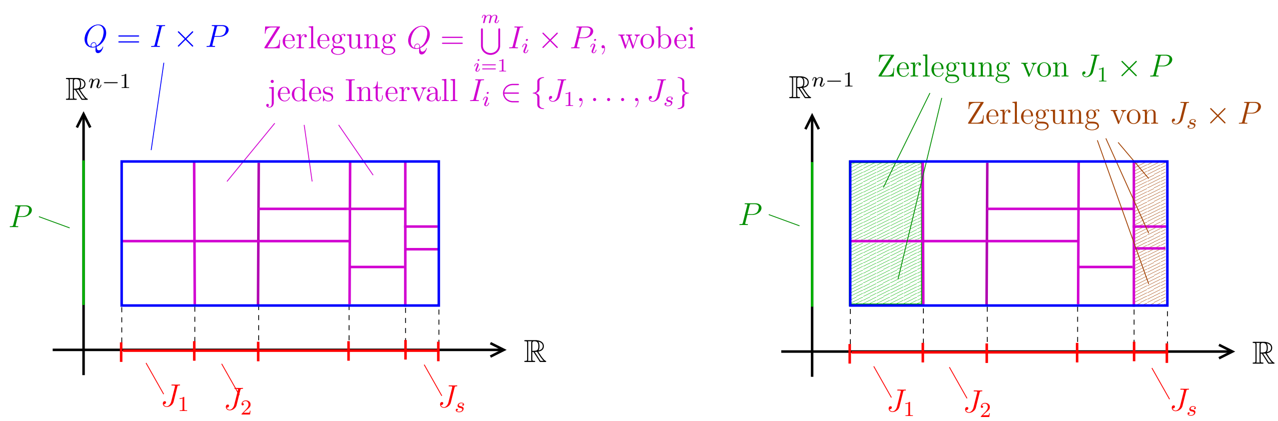


Abbildung 10. Weitere Skizze zum Induktionsschritt im Beweis von Lemma 3.4.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i) &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(I_i \times P_i) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{\text{alle } i \text{ mit} \\ I_i = J_j}} \underbrace{\mathrm{Vol}_n(J_j \times P_i)}_{=\mathrm{Vol}_1(J_j)\cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P_i)} \\
&= \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_1(J_j) \sum_{\substack{\text{alle } i \text{ mit} \\ I_i = J_j}} \mathrm{Vol}_{n-1}(P_i) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktionsvoraussetzung,} \\ \text{angewandt auf } \bigsqcup_{\substack{\text{alle } i \text{ mit} \\ I_i = J_j}} P_i = P}}{=} \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_1(J_j) \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktionsanfang,} \\ \text{angewandt auf } \bigsqcup_{j=1}^{s} J_i = I}}{=} \mathrm{Vol}_1(I) \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P) = \mathrm{Vol}_n(Q).
\end{aligned}$$

□

Wir können nun zeigen, dass die obige Idee der Definition vom Volumen auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ in der Tat Sinn macht.

Satz 3.5. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Vol}_n\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ & \\ A & \mapsto & \mathrm{Vol}_n(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i), & \text{wobei } A \text{ die disjunkte Vereinigung der halboffenen Quadern } Q_1,\dots,Q_m \text{ ist} \end{array}$$

ist wohldefiniert, d.h. hängt nicht von der Zerlegung von A ab, und definiert einen Inhalt auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass Vol_n wohldefiniert ist. Es sei also $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ und es seien

$$A \;=\; \bigsqcup_{i=1}^{r} P_i \;=\; \bigsqcup_{j=1}^{s} Q_j,$$

zwei Zerlegungen von A in disjunkte halboffene Quader. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Vol}_n(P_i) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Vol}_n\Bigg(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{s} P_i \cap Q_j}_{\substack{\text{Zerlegung vom}\\ \text{Quader } P_i \text{ in}\\ \text{die Quader } P_i\cap Q_j}} \Bigg) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 3.4}}}{=}\; \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{das gleiche Argument}\\ \text{rückwärts}}}{=}\; \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(Q_j).$$

Wir haben also gezeigt, dass die Definition von $\mathrm{Vol}_n(A)$ nicht von der Zerlegung abhängt.

Die Abbildung Vol_n ist offensichtlich additiv, d.h. Vol_n ist in der Tat ein Inhalt. □

Satz 3.6. *Der Inhalt*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vol}_n\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \mathrm{Vol}_n(A) \end{array}$$

ist σ-additiv, d.h. Vol_n *ist ein Prämaß.*

Im Folgenden bezeichnen wir $\mathrm{Vol}_n\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ als das *Lebesguesche Prämaß.*[18] Wenn vom Kontext her klar ist, in welcher Dimension wir arbeiten, lassen wir den oberen Index n weg und schreiben einfach Vol anstatt Vol_n.

[18]In der Literatur wird das Lebesguesche Prämaß oft auch mit $\lambda(A)$ anstatt $\mathrm{Vol}_n(A)$ geschrieben.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 3.6 zuwenden betrachten wir noch ein Beispiel. In $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ haben wir die disjunkte Zerlegung

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \left[1-\tfrac{1}{2^{k-1}}, 1-\tfrac{1}{2^k}\right) \;=\; [0,1)$$

vom halboffenen Intervall $[0,1)$ in unendlich viele halboffene Intervalle. Hierbei ist in der Tat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{Vol}\left(\left[1-\tfrac{1}{2^{k-1}}, 1-\tfrac{1}{2^k}\right)\right)}_{=\frac{1}{2^k}} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} \;=\; 1 \;=\; \operatorname{Vol}([0,1)).$$

Im Beweis von Satz 3.6 werden wir folgendes Lemma benötigen.

Lemma 3.7. *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein halboffener Quader. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ halboffene Quader P und R, so dass*

$$\overline{P} \;\subset\; Q \;\subset\; \mathring{R} \quad \textit{mit} \quad \operatorname{Vol}_n(P) \;\geq\; (1-\epsilon)\operatorname{Vol}_n(Q) \;\textit{und}\; \operatorname{Vol}_n(R) \;\leq\; (1+\epsilon)\operatorname{Vol}_n(Q).$$

Beweis. Es sei also

$$Q \;=\; [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n).$$

ein halboffener Quader und $\epsilon > 0$. Für $\delta > 0$ setzen wir

$$\mathcal{P}(\delta) \;=\; [a_1, b_1 - \delta) \times \cdots \times [a_n, b_n - \delta),$$

und

$$\mathcal{R}(\delta) \;=\; [a_1 - \delta, b_1) \times \cdots \times [a_n - \delta, b_n).$$

Dann gilt für jedes $\delta > 0$, dass

$$\overline{\mathcal{P}(\delta)} \;\subset\; \mathcal{Q} \;\subset\; \mathring{\mathcal{R}}(\delta).$$

Aus der Stetigkeit von Volumina von Quadern folgt nun, dass für ein geeignet gewähltes $\delta > 0$ die Volumenbedingungen erfüllt sind. □

Das nächste Korollar besagt nun, dass die Aussage von Lemma 3.7 auch analog für beliebige Teilmengen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ zutrifft.

Korollar 3.8. *Es sei $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es A und C in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, so dass*

$$\overline{A} \;\subset\; B \;\subset\; \mathring{C} \quad \textit{mit} \quad \operatorname{Vol}_n(A) \;\geq\; (1-\epsilon)\operatorname{Vol}_n(B) \;\textit{und}\; \operatorname{Vol}_n(C) \;\leq\; (1+\epsilon)\operatorname{Vol}_n(B).$$

Beweis. Jedes $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ist per Definition die Vereinigung von halboffenen disjunkten Quadern $Q_1, \ldots, Q_m$. Wir wenden nun Lemma 3.7 auf diese Quader an und erhalten halboffene Quader P_i and R_i mit

$$\overline{P_i} \subset Q_i \subset \mathring{R}_i \text{ und } \operatorname{Vol}(P_i) \geq (1-\epsilon)\operatorname{Vol}_n(Q_i) \text{ und } \operatorname{Vol}_n(R_i) \leq (1+\epsilon)\operatorname{Vol}_n(P_i).$$

Wir setzen $A = \bigcup_{i=1}^m P_i$ und $C = \bigcup_{i=1}^m R_i$. Dann ist

$$\overline{A} \;=\; \bigcup_{i=1}^m \overline{P_i} \;\subset\; \underbrace{\bigcup_{i=1}^m Q_i}_{=B} \;\subset\; \bigcup_{i=1}^m \mathring{R}_i \;=\; \mathring{C}.$$

Zudem ist

$$\operatorname{Vol}_n(A) \;=\; \operatorname{Vol}_n(P_1\cup\dots\cup P_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Additivität}}}{=} \sum_{i=1}^m \operatorname{Vol}_n(P_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Monotonie}}}{\geq} (1-\epsilon)\sum_{i=1}^m \operatorname{Vol}_n(Q_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Additivität}}}{=} (1-\epsilon)\operatorname{Vol}_n(B)$$

und

$$\operatorname{Vol}_n(C) \;=\; \operatorname{Vol}_n(R_1\cup\dots\cup R_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Subadditivität}}}{\leq} \sum_{i=1}^m \operatorname{Vol}_n(R_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Monotonie}}}{\leq} (1+\epsilon)\sum_{i=1}^m \operatorname{Vol}_n(Q_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Additivität}}}{=} (1+\epsilon)\operatorname{Vol}_n(B).$$

□

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 3.6 zu.

Beweis von Satz 3.6. Wir wollen also beweisen, dass Vol_n ein σ-additiver Inhalt ist. Nach Satz 3.2 genügt es zu zeigen, dass Vol_n zumindest σ-subadditiv ist. Es sei also $\{B_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, deren Vereinigung $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ ebenfalls in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ liegt. Wir müssen zeigen, das

$$\operatorname{Vol}_n\left(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\right) \;\leq\; \sum_{k=1}^\infty \operatorname{Vol}_n(B_k).$$

Wenn wir nur endlich viele B_k's hätten, dann würde die Aussage natürlich aus Lemma 3.1 (4) folgen. Wir führen den allgemeinen Fall auf den endlichen Fall durch ein Kompaktheitsargument zurück. Dazu müssen wir eine kompakte Menge finden, welche durch offene Mengen überdeckt wird.

Da $B = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ weder offen noch kompakt ist, wollen wir innerhalb von $B = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ eine 'etwas' kleinere kompakte Teilmenge finden, welche durch offene Mengen überdeckt werden, welche 'etwas' größer als die B_k's sind.

Es sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Wir wenden Korollar 3.8 auf B und die B_k's an und erhalten insbesondere

$$A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad \overline{A} \subset B \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Vol}_n(A) \;\geq\; (1-\epsilon)\operatorname{Vol}_n(B),$$

sowie für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$C_k \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad B_k \subset \mathring{C}_k \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Vol}_n(C_k) \;\leq\; (1+\epsilon)\operatorname{Vol}_n(B_k).$$

Es folgt also, dass

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{kompakt nach Heine-Borel}}}{\overline{A}} \;\subset\; B \;=\; \bigcup_{k=1}^\infty B_k \;\subset\; \underset{\substack{\uparrow\\ \text{offen}}}{\bigcup_{k=1}^\infty \mathring{C}_k}.$$

Es folgt nun aus der Definition von Kompaktheit, dass $\overline{A}$, und damit insbesondere auch A, schon durch endlich viele $C_1, \dots, C_m$ überdeckt ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}(1-\epsilon)\operatorname{Vol}_n(B) \;&\le\; \underbrace{\operatorname{Vol}_n(A) \;\le}_{\text{Monotonie}}\; \operatorname{Vol}_n\left(\bigcup_{k=1}^{m} C_k\right) \;\underbrace{\le}_{\text{Lemma 3.1 (4)}}\; \sum_{k=1}^{m}\operatorname{Vol}_n(C_k) \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Vol}_n(C_k)\\ &\le\; (1+\epsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Vol}_n(B_k).\end{aligned}$$

Nachdem diese Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ gilt, muss sie auch für $\epsilon = 0$ gelten, d.h. wir erhalten die gewünschte Ungleichung

$$\operatorname{Vol}_n(B) \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Vol}_n(B_k).$$

□

Wir beschließen das Kapitel mit zwei einfachen Definitionen.

Definition.
(1) Ein Inhalt μ auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *endlich*, wenn $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$.
(2) Ein Inhalt μ auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge von Mengen $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; \Omega \quad \text{und} \quad \mu(A_k) \;<\; \infty \text{ für alle } k \ge 1.$$

Beispiel. Auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ betrachten wir wiederum die drei Inhalte

$$\begin{aligned}\nu\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+\\ A &\mapsto \begin{cases}0, & \text{wenn } A \text{ endlich},\\ 1, & \text{wenn } A \text{ unendlich}.\end{cases}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mu\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+\\ A &\mapsto \#A\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\tau\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+\\ A &\mapsto \begin{cases}0, & \text{wenn } A = \emptyset,\\ \infty, & \text{wenn } A \ne \emptyset.\end{cases}\end{aligned}$$

Der Inhalt ν ist natürlich endlich. Der Inhalt μ ist zwar nicht endlich, aber immerhin σ-endlich, denn $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{1, \dots, k\}$. Der Inhalt τ hingegen ist noch nicht einmal σ-endlich.

4. Fortsetzung von einem Prämass zu einem Mass

Im vorherigen Kapitel hatten wir unter anderem, das Volumen Vol_n auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ eingeführt. Viele Mengen, für welche wir uns interessieren liegen aber nicht in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Beispielsweise ist für $n \geq 2$ keine Kugel in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ enthalten. Wir wollen in diesem Kapitel den Volumenbegriff auf mehr Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erweitern. Nachdem es von der Theorie her fast keinen Unterschied macht, arbeiten wir in diesem Kapitel jedoch nicht nur mit dem σ-endlichen Prämaß auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ sondern wir betrachten den allgemeinen Fall.

Genauer gesagt, in diesem Kapitel sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ durchgehend ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei

$$\mu \colon \mathcal{A} \;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+$$

durchgehend ein σ-endliches Prämaß. In diesem Kapitel wollen wir dieses zu einem Maß

$$\tilde{\mu} \colon \langle \mathcal{A} \rangle^{\sigma} \;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+$$

fortsetzen. Unser Hauptinteresse liegt dabei, wie schon erwähnt, auf dem Prämaß Vol_n auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$.

4.1. **Die Menge $\mathcal{A}^{\uparrow}$.** Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}^{\uparrow}$ die Menge aller $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, welche sich als Limes

$$A_k \uparrow A$$

einer aufsteigenden Folge von Mengen $A_k \in \mathcal{A}$ darstellen lassen. Nachdem $\mathcal{A}$ als σ-endlich vorausgesetzt ist, liegt insbesondere Ω in $\mathcal{A}^{\uparrow}$.[19]

Wir werden immer wieder folgendes elementare Lemma verwenden.

Lemma 4.1. *Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gilt*

$$\mathcal{A}^{\uparrow} \;=\; \big\{ \textit{Vereinigungen von abzählbar vielen Mengen in } \mathcal{A} \big\}.$$

Beweis. Die Inklusion '$\subset$' ist offensichtlich. Es verbleibt die Inklusion '$\supset$' zu beweisen. Die Vereinigung von endlich vielen Mengen im Mengenring $\mathcal{A}$ liegt schon wieder in $\mathcal{A}$, insbesondere auch in $\mathcal{A}$. Es sei nun $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige, nicht notwendigerweise aufsteigende Folge, von Teilmengen in $\mathcal{A}$ ist. Dann ist

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_k.}_{\text{aufsteigende Folge in } \mathcal{A}}$$

Es folgt nun aus der Definition von $\mathcal{A}^{\uparrow}$, dass diese Vereinigungsmenge in $\mathcal{A}^{\uparrow}$ liegt. $\square$

Der folgende Satz gibt uns sehr viele Beispiele von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, welche in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow}$ liegen.

Satz 4.2. *Alle offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ liegen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow}$.*

---

[19] Hierbei verwenden wir nur, dass es eine Folge von Mengen $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$, wir müssen noch nicht verwenden, dass man die A_k's zudem so wählen kann, dass sie endlichen Inhalt besitzen.

Satz 4.2 folgt sofort aus den jeweiligen Definitionen, Lemma 4.1 und folgendem Satz.

Satz 4.3. *Jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist die disjunkte Vereinigung von abzählbaren vielen halboffenen Würfeln.*

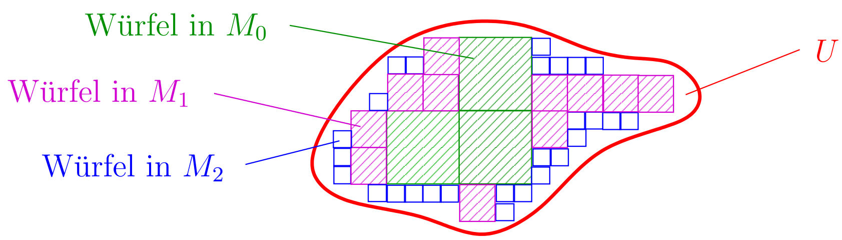


ABBILDUNG 11. Die offene Menge U ist die disjunkte Vereinigung von abzählbaren vielen halboffenen Würfeln.

BEWEIS VON SATZ 4.3. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathcal{W}_k \; := \; \text{alle Würfel der Form } \left[\tfrac{m_1}{2^k}, \tfrac{m_1+1}{2^k}\right) \times \cdots \times \left[\tfrac{m_n}{2^k}, \tfrac{m_n+1}{2^k}\right), \text{ wobei } m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}.$$

Anschaulich gesprochen ergeben die halboffenen Würfel in $\mathcal{W}_k$ gerade das 'Karomuster' auf $\mathbb{R}^n$ mit Seitenlänge $\frac{1}{2^k}$. Etwas genauer gesprochen können wir sagen, dass $\mathcal{W}_k$ aus abzählbaren vielen disjunkten halboffenen Würfel besteht, welche ganz $\mathbb{R}^n$ überdecken.

Es sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge. Wir setzen zuerst

$$M_0 \; := \; \text{Vereinigung aller halboffenen Würfel in } \mathcal{W}_0\text{, welche ganz in } U \text{ enthalten sind,}$$

und iterativ setzen wir dann

$$M_k \; := \; \text{Vereinigung aller halboffenen Würfel in } \mathcal{W}_k\text{, welche ganz in } U \text{ enthalten sind, aber nicht in } M_0 \cup \cdots \cup M_{k-1} \text{ liegen.}$$

Die Mengen M_k mit $k \geq 0$ sind also Vereinigungen von abzählbar vielen halboffenen Würfeln, also liegen alle M_k's in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow}$.

Im Hinblick auf Lemma 4.1 verbleibt es nun noch folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es ist

$$U \; = \; \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Es sei also $a \in U$ beliebig. Nachdem U offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(a) \subset U$. Wir wählen nun ein k, so dass

$$\text{Durchmesser der Würfel in } \mathcal{W}_k \; = \; \sqrt{n} \cdot \text{Kantenlänge der Würfel in } \mathcal{W}_k \; = \; \sqrt{n}\frac{1}{2^k} \; < \; \epsilon.$$

Es sei W der Würfel in $\mathcal{W}_k$, welcher a enthält. Aus der Bedingung an die Durchmesser folgt, dass $W \subset U$.[20] Also ist entweder $W \in M_k$ oder der Punkt a ist schon in einem M_i mit $i < k$ enthalten. In beiden Fällen ist, wie gewünscht, der Punkt a in $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ enthalten. $\square$

Wir haben also gerade gesehen, dass viele interessante Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ schon in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow}$ liegen. Nichtsdestotrotz gehen uns noch viele Mengen ab. Es sei beispielsweise $x \in \mathbb{R}$, dann liegt die Menge $\{x\}$ nicht in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}$. In der Tat, denn jede Menge A in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}$ hat die Eigenschaft, dass für jedes $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $[x, x+\epsilon)$ noch ganz in A liegt.

Wir beschließen die Einführung von $\mathcal{A}^{\uparrow}$ mit folgendem Satz.

Satz 4.4.

(1) *Der Durchschnitt endlich vieler Mengen in $\mathcal{A}^{\uparrow}$ liegt wieder in $\mathcal{A}^{\uparrow}$,*
(2) *die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen in $\mathcal{A}^{\uparrow}$ liegt wieder in $\mathcal{A}^{\uparrow}$,*
(3) *aus $A \in \mathcal{A}^{\uparrow}$ und $B \in \mathcal{A}$ folgt auch, dass $A \setminus B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$.*

Bemerkung. Im Allgemeinen ist $\mathcal{A}^{\uparrow}$ jedoch kein Mengenring, denn aus $A, B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$ folgt nicht notwendigerweise, dass auch $A \setminus B$ in $\mathcal{A}^{\uparrow}$ liegt. In der Tat, betrachten wir beispielsweise $\mathcal{A} = \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ und

$$A \;=\; \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k+1) \;=\; \mathbb{R}_{\geq 0}$$

und

$$B \;=\; \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \big[\tfrac{1}{2^k}, k+1\big) \;=\; \mathbb{R}_{>0}.$$

Dann ist

$$B \setminus A \;=\; \{0\}.$$

Aber wir hatten gerade gesehen, dass $\{0\}$ nicht in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}$ liegt.

Beweis.

(1) Wir zeigen zuerst, dass der Durchschnitt von zwei Mengen in $\mathcal{A}^{\uparrow}$ wieder in $\mathcal{A}^{\uparrow}$ liegt. Der allgemeine Fall wird dann ganz analog bewiesen. Es seien also $A, B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$. Dann ist

$$A \cap B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wir wählen aufsteigende Folgen} \\ A_k \uparrow A \text{ und } B_k \uparrow B \text{ in } \mathcal{A}}}{=} \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \cap \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe} \\ \text{Übungsblatt 10}}}{=} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{A_k \cap B_k}_{\substack{\in \mathcal{A} \text{ nach} \\ \text{Lemma 2.4}}} \;\in\; \mathcal{A}^{\uparrow}.$$

(2) Diese Aussage folgt sofort aus Lemma 4.1. Genauer gesagt, es seien $A_i \in \mathcal{A}^{\uparrow}$ mit $i \in I$, wobei I abzählbar ist. Nach Lemma 4.1 ist jedes A_i von der Form

[20] In der Tat, denn sei d der Durchmesser von W. Dann gilt für alle $x \in W$, dass $\|x - a\| \leq d < \epsilon$, d.h. es ist $x \in B_\epsilon(a) \subset U$.

$A_i = \bigcup_{j \in J_i} A_{ij}$, wobei jedes $A_{ij} \in \mathcal{A}$ und J_i abzählbar ist. Dann ist

$$\bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} A_{ij} \;=\; \bigcup_{i \in I, j \in J_i} A_{ij}.$$

Die Indexmenge $\{(i,j) | i \in I, j \in J_i\}$ ist wiederum abzählbar, also liegt die Vereinigung aller A_i's nach Lemma 4.1 in der Tat in $\mathcal{A}^\uparrow$.

(3) Es sei also $A \in \mathcal{A}^\uparrow$ und $B \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$A \setminus B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wir wählen eine aufsteigende Folge } A_k \uparrow A \text{ in } \mathcal{A}}}{=} \Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) \setminus B \;=\; \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{A_k \setminus B}_{\in \mathcal{A}} \;\in\; \mathcal{A}^\uparrow.$$

□

4.2. **Die Fortsetzung von μ auf $\mathcal{A}^\uparrow$.** Es sei weiterhin $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß. Offensichtlich gilt[21]

$$\mathcal{A} \;\subset\; \mathcal{A}^\uparrow \;\subset\; \langle \mathcal{A} \rangle^\sigma.$$

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es μ zu einem Maß μ auf $\langle \mathcal{A} \rangle^\sigma$ fortzusetzen. Wenn dies möglich sein soll, dann muss nach Satz 3.2 (c) für $A_k \uparrow A$ gelten, dass

$$\mu(A) \;=\; \underbrace{\lim_{k \to \infty} \mu(A_k)}_{\substack{\uparrow \\ \text{monoton steigende Folge, d.h. Grenzwert existiert}}} \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Diese Gleichung bietet sich nun natürlich als Definition von $\mu(A)$ für ein $A \in \mathcal{A}^\uparrow$ an. Allerdings müssen wir noch zeigen, dass dann $\mu(A)$ wohldefiniert ist. Dies ist genau die Aussage von folgendem Lemma.

Lemma 4.5. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcll} \mu\colon \mathcal{A}^\uparrow & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ & \\ A & \mapsto & \lim\limits_{k \to \infty} \mu(A_k), & \quad \textit{wobei } A_k \in \mathcal{A} \textit{ mit } A_k \uparrow A \end{array}$$

ist wohldefiniert.

Beweis. Es seien also $A_k \uparrow A$ und $B_k \uparrow A$ zwei aufsteigende Folgen in $\mathcal{A}$ mit Limes $A \in \mathcal{A}^\uparrow$. Wir zeigen zuerst folgende Behauptung.

Behauptung. Es ist

$$\lim_{m \to \infty} \mu(B_m) \;\leq\; \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

[21] Dies ist in der Tat offensichtlich, denn $\langle \mathcal{A} \rangle^\sigma$ ist eine σ-Algebra, welche $\mathcal{A}$ enthält. Also folgt per Definition, dass für jede abzählbare Folge $A_k, k \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{A}$ auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ in $\langle \mathcal{A} \rangle^\sigma$ liegt. Insbesondere gilt $\mathcal{A}^\uparrow \subset \langle \mathcal{A} \rangle^\sigma$.

In der Tat gilt für alle m, dass

$$\mu(B_m) \underset{\substack{\big\uparrow \\ \text{denn } B_m \subset A}}{=} \mu(B_m \cap A) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_m \cap A_k\Big) \underset{\substack{\big\uparrow \\ \sigma\text{-Additivität vom Prämaß } \mu \\ \text{zusammen mit Satz 3.2,} \\ \text{angewandt auf } (B_m \cap A_k) \uparrow B_m}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mu(B_m \cap A_k)}_{\le \mu(A_k)} \le \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Monotonie vom Grenzwert.

Der gleiche Beweis liefert natürlich auch die umgedrehte Ungleichung. Also müssen die Grenzwerte schon übereinstimmen. $\square$

Beispiel. In Satz 4.2 hatten wir gesehen, dass alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, also insbesondere auch alle offenen Intervalle, in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}$ liegen. Für diese Mengen haben wir jetzt also ein Volumen definiert. In Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass für eine beliebige Wahl von $-\infty \le a \le b \le \infty$ gilt, dass

$$\mathrm{Vol}_1\big((a,b)\big) = b - a \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Satz 4.6. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathcal{A}^{\uparrow} &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \quad \textit{wobei } A_k \in \mathcal{A} \textit{ mit } A_k \uparrow A \end{aligned}$$

besitzt folgende Eigenschaften:

(1) *Es seien A und B in $\mathcal{A}^{\uparrow}$, dann gilt*
$$A \subset B \implies \mu(A) \le \mu(B) \qquad \textit{Monotonie.}$$
(2) *Es seien A und B in $\mathcal{A}^{\uparrow}$, dann gilt*
$$A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \textit{Additivität.}$$
(3) *Es sei $A_k \in \mathcal{A}^{\uparrow}, k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Mengen, dann gilt*
$$A_k \uparrow A \implies \mu(A_k) \uparrow \mu(A) \qquad \textit{Stetigkeit von unten.}$$

(4) *Für eine beliebige Folge $A_k \in \mathcal{A}^{\uparrow}, k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad \sigma\textit{-Subadditivität.}$$

Beweis. Es seien also $A, B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$. Wir wählen aufsteigende Folgen $A_k \uparrow A$ und $B_k \uparrow B$ in $\mathcal{A}$.

(1) Aus $A \subset B$ folgt, dass $(A_k \cup B_k) \uparrow B$.[22] Daraus wiederum folgt, dass
$$\mu(A) \;=\; \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.1 (1) ist } \mu \text{ monoton auf } \mathcal{A}}}{\leq}\; \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cup B_k) \;=\; \mu(B).$$

(2) Wir nehmen nun, dass $A \cap B = \emptyset$. Daraus folgt dann auch, dass $A_k \cap B_k = \emptyset$. Wir erhalten, dass
$$\mu(A \sqcup B) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nachdem} \\ (A_k \sqcup B_k) \uparrow (A \sqcup B)}}{=}\; \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \sqcup B_k) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.1 (3) ist } \mu \text{ additiv auf } \mathcal{A}}}{=}\; \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) + \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \;=\; \mu(A) + \mu(B).$$

Es sei nun $A_k \in \mathcal{A}^\uparrow, k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}^\uparrow$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine aufsteigende Folge $A_{ki} \uparrow A_k$ in $\mathcal{A}$. Wir betrachten
$$A \;:=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ki} \;=\; \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=1}^{m} A_{km}}_{=:B_m}.$$
Dann liegt B_m, als Vereinigung von endlich vielen Mengen in $\mathcal{A}$, ebenfalls in $\mathcal{A}$. Zudem gilt
$$B_m \uparrow A \quad \text{also} \quad \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) \;=\; \mu(A).$$

B_3
$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_{11} & \subset & A_{12} & \subset & A_{13} & \subset & A_{14} & \ldots & \subset & A_1 \\
A_{21} & \subset & A_{22} & \subset & A_{23} & \subset & A_{24} & \ldots & \subset & A_2 \\
A_{31} & \subset & A_{32} & \subset & A_{33} & \subset & A_{34} & \ldots & \subset & A_3 \\
A_{41} & \subset & A_{42} & \subset & A_{43} & \subset & A_{44} & \ldots & \subset & A_4
\end{array}$$

ABBILDUNG 12. Schematische Definition von B_m.

(3) Aus der gerade bewiesenen Monotonieeigenschaft von μ auf $\mathcal{A}$ erhalten wir für jedes m, dass
$$\mu(B_m) \;\leq\; \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) \;\leq\; \mu(A).$$
Indem wir nun den Grenzwert $m \to \infty$ bilden erhalten wir, dass
$$\underbrace{\lim_{m\to\infty} \mu(B_m)}_{=\mu(A)} \;\leq\; \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) \;\leq\; \mu(A).$$

[22] Aus $A \subset B$ und $A_k \uparrow A$ und $B_k \uparrow B$ folgt nicht notwendigerweise, dass $A_k \subset B_k$. Wir müssen deswegen die Folge B_k durch die Folge $A_k \cup B_k$ ersetzen.

Wir sehen also, dass der mittlere Grenzwert den Wert $\mu(A)$ annimmt.

(4) In diesem Fall ist

$$\mu(A) \;=\; \lim_{m\to\infty}\mu(B_m) \;=\; \lim_{m\to\infty}\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_{km}\Big) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 3.1 (4) ist } \mu \text{ subadditiv auf } \mathcal{A}}}{\leq}\; \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\underbrace{\mu(A_{km})}_{\leq\mu(A_k)} \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

□

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem, vielleicht auf den ersten Blick doch etwas überraschenden Lemma.

Lemma 4.7. *Es gibt eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, welche alle rationalen Zahlen enthält, aber welche ein endliches Volumen besitzt.*

Beweis. Wir betrachten $\mathcal{A} = \mathcal{Q}(\mathbb{R})$. Wir wählen nun eine Abzählung $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{Q}$. Wir betrachten dann die Menge

$$A \;:=\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\underbrace{\big(a_i-\tfrac{1}{2^i},a_i+\tfrac{1}{2^i}\big)}_{\in\,\mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow},\text{ nach Satz 4.2}} \;\in\; \mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}.$$

Die Menge A ist offensichtlich offen und sie enthält alle rationalen Zahlen. Wir wollen nun zeigen, dass das Volumen von A endlich ist. Es ist

$$\operatorname{Vol}(A) \;=\; \operatorname{Vol}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\underbrace{\big(a_i-\tfrac{1}{2^i},a_i+\tfrac{1}{2^i}\big)}_{\in\mathcal{Q}(\mathbb{R})}\Big) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Satz 4.6 (4)}}}{\leq}\; \sum_{i\in\mathbb{N}}\underbrace{\operatorname{Vol}\big(\big(a_i-\tfrac{1}{2^i},a_i+\tfrac{1}{2^i}\big)\big)}_{=\frac{1}{2^i}\cdot 2} \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^{i-1}} \;=\; 2.$$

□

4.3. **Das äußere Maß und die Pseudometrik auf Teilmengen.** In diesem Kapitel sei weiterhin $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei

$$\mu\colon \mathcal{A} \;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+$$

ein Prämaß, d.h. μ ist ein σ-additiver Inhalt. Wir nehmen zudem an, dass μ σ-endlich ist. Unser Ziel ist es immer noch, μ zu einem Maß

$$\tilde{\mu}\colon \langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} \;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+$$

fortzusetzen. Für eine beliebige Teilmenge $X\subset\Omega$ definieren wir das *äußere Maß von X* als [23]

$$\mu^*(X) \;:=\; \inf\big\{\mu(A)\,\big|\,X\subset A \text{ und } A\in\mathcal{A}^{\uparrow}\big\} \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}.$$

Beispiel.

(1) Im Falle, dass $X\in\mathcal{A}^{\uparrow}$, insbesondere, wenn $X\in\mathcal{A}$, dann gilt natürlich[24], dass $\mu^*(X)=\mu(X)$. Insbesondere ist $\mu^*(\emptyset)=0$.

[23] Das Infimum existiert, denn die Menge der möglichen A's enthält Ω, sie ist also insbesondere nicht leer.

[24] Warum ist das so 'natürlich'?

(2) Wir betrachten den Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ mit dem Prämaß Vol. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\epsilon > 0$, dass
$$0 \;\le\; \mathrm{Vol}^*(\{x\}) \;\le\; \mathrm{Vol}([x, x+\epsilon)) \;=\; \epsilon.$$
Wir sehen also, dass $\mathrm{Vol}^*(\{x\}) = 0$. Ganz ähnlich kann man zeigen, dass für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ gilt, dass
$$\mathrm{Vol}^*\big([a,b]\big) \;=\; b - a.$$

Satz 4.8. *Die Abbildung $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ besitzt folgende Eigenschaften:*

(1) *Es gilt*
$$X \subset Y \quad\Longrightarrow\quad \mu^*(X) \le \mu^*(Y) \qquad \textit{Monotonie.}$$
(2) *Es sei X_i, $i \in I$ eine abzählbare Familie von Teilmengen in Ω. Dann gilt*
$$\mu^*\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \;\le\; \sum_{i\in I} \mu^*(X_i) \qquad \sigma\textit{-Subadditivität.}$$

Bemerkung. Wir haben also jetzt insbesondere eine Funktion
$$\mathrm{Vol}^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
eingeführt, welche beispielsweise nach Satz 4.8 die Eigenschaft

(B) Monotonie

besitzt. Andererseits hatten wir in Satz 1.2 gesehen, dass Vol^* nicht noch zeitgleich alle drei Eigenschaften

(A) Normierung $\mathrm{Vol}^*([0,1]^n) = 1$,
(C) Translationsinvarianz,
(D) σ-Additivität,

erfüllen kann. In Übungsblatt 10 gehen wir der Frage nach, welche der Eigenschaften (A), (C) und (D) für Vol^* nicht erfüllt sind.

Beweis.

(1) Diese Aussage ist trivial.[25]
(2) Es genügt den Fall zu betrachten, dass $X_i, i \ge 1$ eine unendliche Folge von Teilmengen in Ω ist.[26] Wenn $\mu^*(X_i) = \infty$ für ein $i \in \mathbb{N}$, dann ist die Aussage trivialerweise wahr. Wir betrachten nun also noch den Fall, dass $\mu^*(X_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ endlich ist.

In Satz 4.6 hatten wir die Aussage schon gezeigt, wenn alle X_i's in $\mathcal{A}^\uparrow$ liegen. Dies ist hier natürlich im allgemeinen nicht der Fall, aber wir können die X_i's beliebig gut durch Mengen in $\mathcal{A}^\uparrow$ 'approximieren'.

[25] Warum?

[26] Den Fall von einer endlichen Vereinigung $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ kann man auf den unendlichen Fall zurückführen, indem man für $i \ge 1$ jeweils $X_{k+i} = \emptyset$ setzt.

Es sei nun $\epsilon > 0$. Aus der Definition von μ^* folgt, dass es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $B_i \in \mathcal{A}^\uparrow$ gibt mit

$$X_i \subset B_i \quad \text{ und } \mu(B_i) \leq \mu^*(X_i) + \tfrac{\epsilon}{2^i}$$

also folgt, dass

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i}_{\in \mathcal{A}^\uparrow} \text{ und } \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\Big) \underset{\uparrow}{\leq} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \underset{\uparrow}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i}}_{=\epsilon}.$$

nach Definition von μ^* $\qquad$ μ ist σ-subadditiv auf $\mathcal{A}^\uparrow$ nach Satz 4.6 (4)

Zusammengefasst gilt also

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X_i) + \epsilon.$$

Nachdem dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt die gewünschte Ungleichung. $\square$

Für zwei Teilmengen $X, Y \subset \Omega$ mißt $\mu^*(X \triangle Y)$ den Unterschied zwischen X und Y. Das folgende Lemma besagt, dass dieser 'Abstand' zwischen Mengen X und Y viele Eigenschaften einer Metrik besitzt.

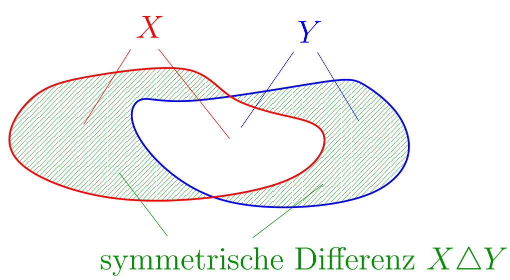


Abbildung 13.

Lemma 4.9. *Es seien $X, Y \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\begin{array}{llcll}
\text{(a)} & X = Y & \Rightarrow & \mu^*(X \triangle Y) = 0, & \\
\text{(b)} & \mu^*(X \triangle Y) & = & \mu^*(Y \triangle X) & \textit{Symmetrie.}
\end{array}$$

Zudem gilt für $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\Omega)$, dass

$$\begin{array}{llcll}
\text{(c)} & \mu^*(X \triangle Z) & \leq & \mu^*(X \triangle Y) + \mu^*(Y \triangle Z) & \textit{Dreiecksungleichung.}
\end{array}$$

Bemerkung. Lemma 4.9 besagt also, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\
(X, Y) & \mapsto & \mu^*(X \triangle Y)
\end{array}$$

die Axiome einer Metrik auf der Menge $\mathcal{P}(\Omega)$ erfüllt, mit den beiden Ausnahmen, dass $\mu^*(X \triangle Y) = 0$ nicht notwendigerweise $X = Y$ impliziert[27], und dass $\mu^*(X \triangle Y)$ auch den Wert ∞ annehmen kann.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind trivial. Es verbleibt die Dreiecksungleichung zu beweisen. Es seien also X, Y und Z beliebige Teilmengen von Ω. Dann gilt [28] [29]

$$\begin{aligned}\mu^*(X \triangle Z) &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } (\emptyset \triangle Z) = Z}}{=} \mu^*(X \triangle \emptyset \triangle Z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } Y \triangle Y = \emptyset}}{=} \mu^*(X \triangle Y \triangle Y \triangle Z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Monotonie von } \mu^* \text{ angewandt}\\ \text{auf } A \triangle B \subset A \cup B}}{\leq} \mu^*\big((X \triangle Y) \cup (Y \triangle Z)\big)\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Subadditivität von } \mu^*}}{\leq} \mu^*(X \triangle Y) + \mu^*(Y \triangle Z).\end{aligned}$$

□

Definition. Es sei $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$ und $X \in \mathcal{P}(\Omega)$. Wir definieren

$$Y_k \xrightarrow{\mu^*} X \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \mu^*(Y_k \triangle X) \;=\; 0.$$

Der folgende Satz besagt, dass μ^* stetig ist bezüglich der obigen Konvergenz von Teilmengen von Ω.

Satz 4.10. *Es sei $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$ und $X \in \mathcal{P}(\Omega)$. Wenn $\mu^*(Y_k) < \infty$ für alle k und wenn $\mu^*(X) < \infty$, dann gilt*

$$Y_k \xrightarrow{\mu^*} X \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \mu^*(Y_k) \;=\; \mu^*(X).$$

Beweis. Die Aussage des Satzes folgt aus den Definitionen und folgender Behauptung.

Behauptung. Es seien X und Y Teilmengen von Ω mit $\mu^*(X) < \infty$ und $\mu^*(Y) < \infty$, dann gilt

$$\big|\mu^*(X) - \mu^*(Y)\big| \;\leq\; \mu^*(X \triangle Y).$$

Zur Orientierung ist es eventuell hilfreich Abbildung 14 im Blick zu behalten.
Es seien also $X, Y \in \mathcal{P}(\Omega)$. Aus

$$X \cup Y \;=\; (X \cap Y) \sqcup (X \triangle Y)$$

folgt, mithilfe der in Satz 4.8 bewiesenen Subadditivität[30] von μ^*, dass

$$\text{(a)} \qquad \mu^*(X \cup Y) \;\leq\; \mu^*(X \cap Y) + \mu^*(X \triangle Y)$$

[27] Warum eigentlich nicht?

[28] Es folgt aus der Assoziativität von $\triangle$, dass wir uns bei Ausdrücken, welche nur mit $\triangle$ verknüpft sind, um die Klammersetzung keine Gedanken machen müssen.

[29] Das Argument ist nun eine Variation auf das wohlvertraute Schema

$$|x - z| \;=\; |x - 0 - z| \;=\; |x - (y - y) - z| \;=\; |(x - y) + (y - z)| \;\leq\; |x - y| + |y - z|.$$

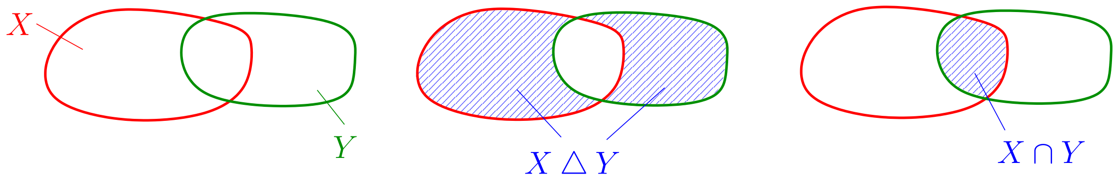


Abbildung 14.

Andererseits gilt auch

$$X \cap Y \quad \subset \qquad X, Y \qquad \subset \quad X \cup Y$$

also folgt aus der in Satz 4.8 bewiesenen Monotonie von μ^*, dass

$$\text{(b)} \qquad \mu^*(X \cap Y) \;\leq\; \mu^*(X), \mu^*(Y) \;\leq\; \mu^*(X \cup Y)$$

Zusammenfassend erhalten wir, dass

$$\left|\mu^*(X) - \mu^*(Y)\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(b)}}}{\leq} \mu^*(X \cup Y) - \mu^*(X \cap Y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(a)}}}{\leq} \mu^*(X \triangle Y).$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen. □

Definition. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring, es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ ein Prämaß und es sei $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ das zugehörige äußere Maß. Wir definieren

$$X \subset \Omega \text{ ist } \mathcal{A}\text{-approximierbar} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } A \in \mathcal{A} \\ \text{mit } \mu^*(X \triangle A) < \epsilon. \end{array}$$

Wir bezeichnen mit $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller $\mathcal{A}$-approximierbaren Teilmengen.

Bemerkungen.

(1) Es folgt sofort aus den Definitionen, dass gilt

$$X \subset \Omega \text{ ist } \mathcal{A}\text{-approximierbar} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{es gibt eine Folge } \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{A} \\ \text{mit } A_k \xrightarrow{\mu^*} X. \end{array}$$

(2) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{x\}$ eine $Q(\mathbb{R})$-approximierbare Teilmenge von $\mathbb{R}$, denn für jedes $\epsilon > 0$ ist

$$\mathrm{Vol}^*(\{x\} \triangle \underbrace{\emptyset}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})}) \;=\; \mathrm{Vol}^*(\{x\}) \;=\; 0 \;<\; \epsilon.$$

[30] Wir haben für μ^* die Additivität nicht zur Verfügung, wir können also *nicht* schließen, dass

$$\mu^*(X \cup Y) \;=\; \mu^*(X \cap Y) + \mu^*(X \triangle Y).$$

Satz 4.11. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ ein endliches Prämaß und $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ das zugeordnete äußere Maß. Dann ist*

$$\widetilde{\mathcal{A}} \;:=\; \textit{alle } \mathcal{A}\textit{-approximierbaren Teilmengen von } \Omega$$

eine σ-Algebra auf Ω.

Beispiel. Für $s > 0$ ist

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \;=\; \text{alle halboffenen Quader, welche in } [-s, s)^n \subset \mathbb{R}^n \text{ liegen}$$

eine Mengenalgebra und Vol_n ist ein endliches Prämaß auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$. Der Satz besagt nun also, dass $\widetilde{\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)}$ eine σ-Algebra bildet.

In dem Beweis von Satz 4.11 werden wir folgendes elementare Lemma aus der Mengentheorie verwenden.

Lemma 4.12. *Es seien $X_i, i \in I$ und $A_i, i \in I$ Familien von beliebigen Teilmengen von Ω. Dann gilt*

$$\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \bigtriangleup \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \;\subset\; \bigcup_{i\in I} (X_i \bigtriangleup A_i).$$

Beweis. Es sei also

$$z \;\in\; \Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \bigtriangleup \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big).$$

Wir betrachten zuerst den Fall, dass $z \in \bigcup_{i\in I} X_i$. Dann folgt $z \notin \bigcup_{i\in I} A_i$. Dann liegt z also in mindestens einem X_i aber in keinem A_i, d.h. z liegt in $X_i \bigtriangleup A_i$, insbesondere liegt z in $\bigcup_{i\in I}(X_i \bigtriangleup A_i)$. Nachdem die Aussage symmetrisch in X_i und A_i folgt die Aussage im Fall, dass $z \in \bigcup_{i\in I} A_i$ ganz analog. □

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 4.11 zu.

Beweis von Satz 4.11. Wir müssen also folgende Aussagen beweisen:

(1) $\emptyset \in \widetilde{\mathcal{A}}$,
(2) $X \in \widetilde{\mathcal{A}} \implies X^c \in \widetilde{\mathcal{A}}$,
(3) die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen in $\widetilde{\mathcal{A}}$ liegt ebenfalls in $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Wir wenden uns nun dem Beweis der drei Aussagen zu.

(1) Die erste Aussage ist trivial.[31]
(2) Es sei also $X \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Wir wählen eine Folge $A_k, k \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{A}$, welche X approximiert. Nachdem $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra ist liegt auch jedes Komplement A_k^c noch in $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*(X^c \bigtriangleup A_k^c) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } U^c \bigtriangleup V^c = U \bigtriangleup V^{32}}}{=}\; \lim_{k\to\infty} \mu^*(X \bigtriangleup A_k) \;=\; 0.$$

[31]Warum ist das trivial?

Wir sehen also, dass X^c durch die Folge A_k^c, $k \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{A}$ approximiert wird.

(3) Es genügt zu zeigen, dass für eine unendliche Folge $X_1, X_2, \dots \in \widetilde{\mathcal{A}}$ auch die Vereinigung $X := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ in $\widetilde{\mathcal{A}}$ liegt.[33] Es reicht nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $B \in \mathcal{A}$ mit

$$\mu^*(X \triangle B) \leq \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Ganz analog zum Beweis von Satz 4.8 wählen wir uns zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $A_k \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(X_k \triangle A_k) < \frac{1}{2^{k+1}}\epsilon$. Wir setzen

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_k}_{=: B_k \in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}^{\uparrow}.$$

Wir wollen also jetzt X durch eine Menge in $\mathcal{A}$ approximieren. Die Menge A erscheint zwar wie eine gute Approximation, liegt aber nicht notwendigerweise in $\mathcal{A}$. Nachdem A wiederum durch die Mengen $B_m \in \mathcal{A}$ approximiert wird, wollen wir nun X durch ein geeignet gewähltes B_m approximieren.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass für m groß genug gilt, dass $\mu^*(X \triangle B_m) \leq \epsilon$. Wir betrachten dazu erst einmal ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu^*(X \triangle B_m) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung aus Lemma 4.9}}}{\leq} \mu^*\big(X \triangle A\big) + \mu^*(A \triangle B_m) \\
&\leq \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \triangle \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) + \mu^*(\underbrace{A \triangle B_m}_{=A\setminus B_m}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 4.12 und Monotonie von } \mu^*}}{\leq} \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(X_k \triangle A_k)\Big) + \underbrace{\mu^*(A\setminus B_m)}_{=\mu(A\setminus B)} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-Subadditivität von } \mu^*}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mu^*(X_k \triangle A_k)}_{\leq \frac{\epsilon}{2^{k+1}}} + \mu^*(A\setminus B_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } A = (A\setminus B_m)\sqcup B_m, \\ \text{denn } \mu \text{ ist nach Satz 4.6 additiv auf } \mathcal{A}^{\uparrow}}}{\leq} \frac{\epsilon}{2} + (\mu(A) - \mu(B_m)).
\end{aligned}$$

Nachdem $B_m \uparrow A$ folgt aus Satz 4.6, dass $\mu(B_m) \uparrow \mu(A)$. Da μ endlich ist, gilt zudem $\mu(A) < \infty$.[34] Es gibt also ein m mit $\mu(A) - \mu(B_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann hat $B = B_m$ die gewünschte Eigenschaft. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen. □

Satz 4.13. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ ein endliches Prämaß, und $\widetilde{\mathcal{A}}$ die σ-Algebra der $\mathcal{A}$-approximierbaren Mengen. Dann gelten folgende Aussagen:*

---

[32] Warum gilt ganz allgemein, dass $U^c \triangle V^c = U \triangle V$?

[33] Den Fall von einer endlichen Vereinigung $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ kann man auf den unendlichen Fall zurückführen, indem man $X_{k+i} = \emptyset$ für $i \geq 1$ setzt.

[34] In Übungsblatt 10 werden Sie der Frage nachgehen, warum aus der Voraussetzung, dass der Inhalt $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ endlich ist in diesem Fall folgt, dass $\mu(A) < \infty$, obwohl A gar nicht in $\mathcal{A}$ liegen muss.

(1) *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mu^*\colon \widetilde{\mathcal{A}} & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \mu^*(A) \end{array}$$

ist ein Maß.[35]

(2) *Die Abbildung* $\mu^*\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_+$ *ist das einzige Maß auf* $\widetilde{\mathcal{A}}$*, welches auf* $\mathcal{A}$ *mit* μ *übereinstimmt.*

Bemerkung.

(1) Es ist trivialerweise $\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$. Es folgt also aus Satz 4.11, dass[36]

$$\mathcal{A} \ \subset\ \mathcal{A}^{\uparrow} \ \subset\ \langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} \ \subset\ \widetilde{\mathcal{A}}.$$

Unter der Voraussetzung, dass μ endlich ist, besagt Satz 4.13 nun also, dass wir das Prämaß $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ zu einem Maß $\mu^*\colon \langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} \to \mathbb{R}_+$ fortgesetzt haben.

(2) Es sei $s > 0$. Wir können Satz 4.13 insbesondere auf die Mengenalgebra

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \ = \ \text{alle endliche Vereinigungen von halboffenen Quadern in } [-s, s)^n$$

und das Prämaß $\mathrm{Vol}_n\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \to \mathbb{R}_+$ anwenden. Wir erhalten dann also ein Maß $\widetilde{\mathrm{Vol}}_n$ auf der σ-Algebra $\langle\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^{\sigma}$.

Im Beweis von Satz 4.13 werden wir folgendes elementare Lemma aus der Mengentheorie verwenden.

Lemma 4.14. *Für beliebige Teilmengen* A, B, X *und* Y *von* Ω *gilt*

$$X \cap Y \ = \ \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \ \subset\ (X \triangle A) \cup (Y \triangle B).$$

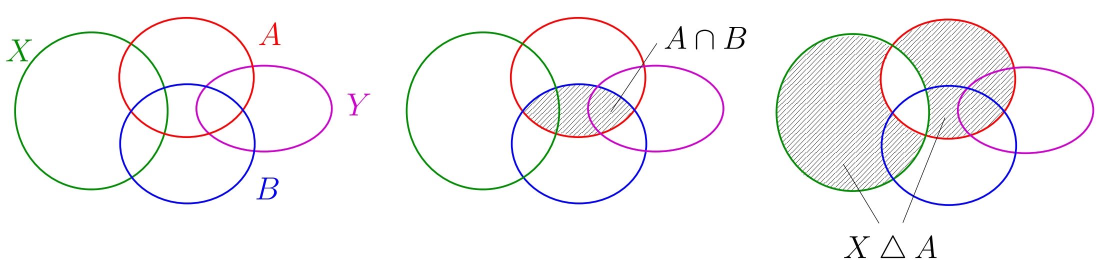


Abbildung 15. Skizze zu Lemma 4.14

Beweis. Es seien also X und Y disjunkte Teilmengen von Ω. Es sei nun $z \in A \cap B$ beliebig. Wenn $z \in X$, dann kann z nach Voraussetzung nicht in Y liegen. Also ist $z \in B \setminus Y$, also ist $z \in Y \triangle B$. Andererseits, wenn $z \notin X$, dann zeigt das gleiche Argument, dass $z \in A \setminus X$, also ist $z \in X \triangle A$. In beiden Fällen haben wir gezeigt, dass z in $(X \triangle A) \cup (Y \triangle B)$ liegt. $\square$

[35] Zur Erinnerung, ein Maß ist definiert als ein σ-additiver Inhalt auf einer σ-Algebra.

[36] Die Tatsache, dass $\langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ ist trivial, denn per Definition ist $\langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma}$ in allen σ-Algebren enthalten, welche schon $\mathcal{A}$ enthalten.

Beweis von Satz 4.13. Wir zeigen zuerst, dass die Einschränkung von μ^* auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ ein Maß ist. Wir müssen also folgende Aussagen beweisen:

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(2) μ^* ist additiv, und noch stärker,
(3) μ^* ist sogar σ-additiv auf $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Es ist klar, dass $\mu^*(\emptyset) = 0$. Wir beweisen nun, dass μ^* auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ additiv ist.

Behauptung. Für alle disjunkten $X, Y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ gilt

$$\mu^*(X \sqcup Y) \;=\; \mu^*(X) + \mu^*(Y).$$

Wir wählen Folgen $\{A_k\}_{k\geq 1}$ und $\{B_k\}_{k\geq 1}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_k \xrightarrow{\mu^*} X$ und $B_k \xrightarrow{\mu^*} Y$. Im Beweis von Satz 4.11 hatten wir schon implizit gezeigt, dass $A_k \cup B_k \xrightarrow{\mu^*} X \cup Y$.[37] Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\mu^*(X \cup Y) \;&\overset{\substack{\text{nach Satz 4.10}\\ \downarrow}}{=}\; \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cup B_k) \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 3.1}}}{=}\; \lim_{k\to\infty} \big(\mu(A_k) + \mu(B_k) - \mu(A_k \cap B_k)\big) \\
&=\; \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mu(A_k)}_{\substack{=\mu^*(X),\text{ nach}\\ \text{Satz 4.10}}} \;+\; \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mu(B_k)}_{\substack{=\mu^*(Y),\text{ nach}\\ \text{Satz 4.10}}} \;-\; \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_k).
\end{aligned}$$

Wir wollen also noch zeigen, dass der letzte Grenzwert verschwindet. Dies ist in der Tat der Fall, denn es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_k) \;&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Lemma 4.14 und der Monotonie von } \mu^*}}{\leq}\; \lim_{k\to\infty} \mu^*\big((X \triangle A_k) \cup (Y \triangle B_k)\big) \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Subadditivität von } \mu^*}}{\leq}\; \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mu^*(X \triangle A_k)}_{=0,\text{ nach Wahl von } A_k} \;+\; \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mu^*(Y \triangle B_k)}_{=0,\text{ nach Wahl von } B_k} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

---

[37] Der Vollständigkeit halber ist hier noch mal das Argument. Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \mu^*\big((X\cup Y) \triangle (A_k \cup B_k)\big) \;&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Lemma 4.12 und der Monotonie von } \mu^*}}{\leq}\; \lim_{k\to\infty} \mu^*\big((X \triangle A_k) \cup (Y \triangle B_k)\big) \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \mu^* \text{ ist subadditiv.}}}{\leq}\; \lim_{k\to\infty} \big(\underbrace{\mu^*(X \triangle A_k)}_{\lim_{k\to\infty} = 0} + \underbrace{\mu^*(Y \triangle B_k)}_{\lim_{k\to\infty} = 0}\big) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir haben also gerade gezeigt, dass μ^* auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ additiv ist. In Satz 4.8 hatten wir gesehen, dass μ^* zudem σ-subadditiv ist. Es folgt nun aus Satz 3.2, dass μ^* auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ sogar σ-additiv, also ein Maß ist.

Wir wenden uns der zweiten Aussage zu. Genauer gesagt wir beweisen, dass wenn μ_1 und μ_2 zwei Maße auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ sind, welche $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ fortsetzen, dann gilt schon $\mu_1 = \mu_2$. Es seien also μ_1 und μ_2 zwei solche Maße. Dann gilt insbesondere [38]

$$\mu_1(B) \;=\; \mu_2(B) \;=\; \mu(B) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{A}^\uparrow.$$

Es sei nun $X \in \widetilde{\mathcal{A}}$ beliebig. Es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $\epsilon > 0$ ist $|\mu_1(X) - \mu_2(X)| < 2\epsilon$.

Es sei also $\epsilon > 0$. Aus der Definition von Approximierbarkeit folgt, dass es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(X \triangle A) < \frac{\epsilon}{2}$ gibt. Aus der Definition von $\mu^*(X \triangle A)$ folgt nun, dass es ein $B \in \mathcal{A}^\uparrow$ gibt mit $X \triangle A \subset B$ und $\mu(B) < \epsilon$. Elementare Mengentheorie zeigt, dass aus $X \triangle A \subset B$ folgt, dass[39]

$$A \setminus B \;\subset\; X \;\subset\; A \cup B.$$

Also gilt für $i = 1, 2$

$$\begin{array}{rrcccll}
 & \mu_i(A \setminus B) & \leq & \mu_i(X) & \leq & \mu_i(A \cup B) & \text{Monotonie der Maße } \mu_i \\
\Longrightarrow & \mu_i(A) - \mu_i(A \cap B) & \leq & \mu_i(X) & \leq & \mu_i(A) + \mu_i(B \setminus A) & \text{Additivität} \\
\Longrightarrow & \mu_i(A) - \mu_i(B) & \leq & \mu_i(X) & \leq & \mu_i(A) + \mu_i(B) & \text{Monotonie} \\
\Longrightarrow & \mu(A) - \mu(B) & \leq & \mu_i(X) & \leq & \mu(A) + \mu(B) & \text{denn } \mu_i = \mu \text{ auf } \mathcal{A}^\uparrow \\
\Longrightarrow & \mu(A) - \epsilon & < & \mu_i(X) & < & \mu(A) + \epsilon & \text{denn } \mu(B) < \epsilon.
\end{array}$$

Für $i = 1, 2$ erhalten wir also

$$|\mu_i(X) - \mu(A)| \;<\; \epsilon.$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir dann, dass

$$|\mu_1(X) - \mu_2(X)| \;<\; 2\epsilon. \qquad \square$$

In Satz 4.13 hatten wir gesehen, dass wir ein *endliches* Prämaß $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ auf einer *Mengenalgebra* $\mathcal{A}$ eindeutig zu einem Maß $\mu\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_+$ fortsetzen können. Der folgende Satz besagt nun, das wir ein *σ-endliches* Prämaß $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf einem *Mengenring* $\mathcal{A}$ eindeutig zu einem Maß $\mu\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_+$ fortsetzen können.

Satz 4.15. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Es gibt eine eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Maß*

$$\tilde{\mu}\colon \langle \mathcal{A} \rangle^\sigma \;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

[38] Warum gilt diese Aussage?

[39] Dies ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 11.

(2) *Für jedes* $A \in \langle \mathcal{A} \rangle^\sigma$ *gilt*
$$\tilde{\mu}(A) \;=\; \mu^*(A).$$

Beispiel. Das für uns wichtigste Beispiel ist der Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ zusammen mit dem σ-endlichen Inhalt Vol_n auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Satz 4.15 gibt uns nun, die schon seit längerem gewünschte, Fortsetzung von Vol_n zu einem Maß auf der σ-Algebra $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma$.

Beweis.

Die Idee des Beweises ist, dass wir die Voraussetzung, dass μ ein σ-endliches Prämaß ist verwenden, um die Aussage auf den im Satz 4.13 behandelten Fall des endlichen Prämaßes zurückzuführen.

Wir setzen $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A} \rangle^\sigma$. Da μ ein σ-endliches Prämaß ist gibt es eine aufsteigende Folge $\Omega_m \uparrow \Omega$ von Teilmengen $\Omega_m \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(\Omega_m) < \infty$ für alle m. Für jedes m setzen wir
$$\mathcal{A}_m \;:=\; \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\Omega_m) \quad \text{ und } \mathcal{B}_m \;:=\; \mathcal{B} \cap \mathcal{P}(\Omega_m).$$
Man kann sicht leicht davon überzeugen, dass $\mathcal{A}_m$ eine Mengenalgebra auf Ω_m ist, und dass $\mathcal{B}_m = \langle \mathcal{A}_m \rangle^\sigma$. Die Einschränkung μ_m von μ auf $\mathcal{A}_m$ ist ein endliches Prämaß. Nach Satz 4.13 gibt es nun eine eindeutige Fortsetzung von $\mu|\mathcal{A}_m$ zu einem Maß auf $\mathcal{B}_m$, welches wir mit $\tilde{\mu}_m$ bezeichnen.

Für jedes $X \in \mathcal{B} = \langle \mathcal{A} \rangle^\sigma$ gilt $(X \cap \Omega_m) \uparrow X$. Falls es in der Tat eine Fortsetzung von $\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ zu einem Maß $\tilde{\mu} \colon \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gibt, so muss gelten
$$(*) \qquad \tilde{\mu}(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 3.2,} \\ \text{denn } (X\cap\Omega_m)\uparrow\Omega}}{=} \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}(X \cap \Omega_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eindeutigkeit der Fortsetzung} \\ \text{von } \mu_m \text{ zu einem Maß auf } \mathcal{A}_m}}{=} \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}_m(X \cap \Omega_m).$$
Wenn es also eine Fortsetzung gibt, dann ist diese durch $(*)$ eindeutig festgelegt. Wir definieren nun $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{B}$ mithilfe von $(*)$. Wir müssen nun noch zeigen, dass diese Abbildung $\tilde{\mu}$ in der Tat ein Maß ist, und dass es mit μ^* übereinstimmt.

Wir zeigen zuerst, dass $\tilde{\mu}$ und μ^* auf $\mathcal{B}$ übereinstimmt. Es sei also $X \in \mathcal{B}$. Wir setzen $X_m := X \cap \Omega_m$. Dann gilt
$$\tilde{\mu}(X) \;=\; \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}_m(X_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 4.13 angewandt auf } (\mathcal{A}_m, \mu_m)}}{=} \lim_{m\to\infty} \mu_m^*(X_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Übungsblatt 11}}}{\le} \mu^*(X).$$
Wir setzen nun $Y_1 := X_1$ und für $m \geq 2$ setzen wir $Y_m := X_m \setminus X_{m-1}$. Dann ist
$$\mu^*(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-Subadditivität von } \mu^* \\ \text{angewandt auf } X = \cup Y_k}}{\le} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(Y_m) \;=\; \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu^*(Y_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 4.13} \\ \text{angewandt auf } \mathcal{A}_m}}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \tilde{\mu}(Y_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } X_m \text{ ist die disjunkte} \\ \text{Vereinigung von } Y_1,\dots,Y_m}}{=} \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}(X_m) \;=\; \tilde{\mu}(X).$$
Diese beiden Ungleichungen zusammen ergeben $\mu^*(X) = \tilde{\mu}(X)$.

Wir müssen nun noch beweisen, dass $\tilde{\mu}$ in der Tat ein Maß auf $\mathcal{B}$ ist, d.h. dass es ein σ-additiver Inhalt ist. Wir zeigen als nächstes, dass $\tilde{\mu}$ ein Inhalt ist. Es ist klar, dass $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Wir zeigen nun, dass $\tilde{\mu}$ additiv ist. Es seien also X und Y disjunkte Mengen in $\mathcal{B}$. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $X_m := X \cap \Omega_m$ und $Y_m := Y \cap \Omega_m$. Dann gilt

$$\tilde{\mu}(X \sqcup Y) \;=\; \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}_m(X_m \sqcup Y_m) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \tilde{\mu}_m \text{ ein Maß ist, gilt } \tilde{\mu}_m(X_m \sqcup Y_m) = \tilde{\mu}_m(X_m) + \tilde{\mu}_m(Y_m)}}{=}\; \lim_{m\to\infty} \big(\tilde{\mu}_m(X_m) + \tilde{\mu}_m(Y_m)\big) \;=\; \tilde{\mu}(X) + \tilde{\mu}(Y).$$

Wir haben also gezeigt, dass $\tilde{\mu}$ additiv ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass der Inhalt $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{B}$ sogar σ-additiv ist. Nach Satz 4.8 ist μ^* insbesondere σ-subadditiv ist. Es folgt nun aus Satz 3.2, dass der Inhalt $\tilde{\mu} = \mu^*$ auf $\mathcal{B}$ auch σ-additiv, also ein Maß ist.

$\square$

5. Weihnachtsvorlesung: Das Gefangenenproblem

5.1. **Das Gefangenenproblem I: Endlich viele Gefangene.** Ein Gefängnis enthält n Gefangene. Kurz vor Weihnachten schlägt der Gefängnisdirektor folgendes Verfahren vor, damit zumindestens einige Gefangene rechtzeitig zu Weihnachten freikommen: Die Gefangenen müssen sich in einer Reihe aufstellen, so dass jeder Gefangene die Rücken *aller* vor ihm stehenden Gefangenen sieht. Jedem Gefangenen wird nun eine Ziffer aus $\{0, \ldots, 9\}$ an den Rücken geheftet. Die Gefangenen werden nun aufgefordert, der Reihe nach, von hinten nach vorne, gehend laut und deutlich eine Ziffer aus $\{0, \ldots, 9\}$ zu sagen. Wenn der Gefangene seine Ziffer errät kommt er frei, wenn nicht, muss der Gefangene Weihnachten im Gefängnis verbringen.

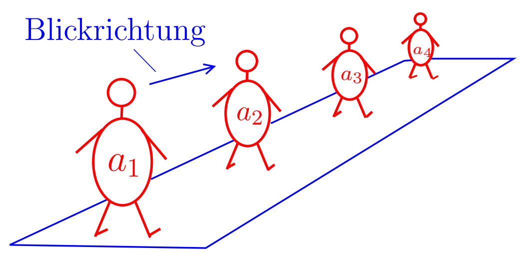


Abbildung 16. Skizze zum Gefangenenproblem.

Als Zugeständnis an die Gefangenen dürfen sich die Gefangenen zuvor beratschlagen und sich auf einen Algorithmus einigen. Wieviele Gefangene kommen mit dem optimalen Algorithmus frei?

Beispielsweise könnten die Gefangenen folgenden Algorithmus vereinbaren: der erste (und dritte, fünfte etc.) Gefangene liest die Ziffer vom Vordermann vor, welcher sich dann retten kann. Auf diese Weise kommen bei $2k$ Gefangenen mindestens k Gefangene frei, und die anderen k Gefangenen kommen mit 10% Wahrscheinlichkeit frei (wenn ihre Ziffer zufällig mit der des Vordermanns übereinstimmt). Es stellt sich die Frage, ob man diesen Algorithmus überbieten kann.

Es ist klar, dass der erste Gefangene nur mit Zufall seine Ziffer erraten kann, es können also höchstens $n-1$ Gefangene definitiv gerettet werden. Es stellt sich heraus, dass man dies in der Tat erreichen kann:

Satz 5.1. *Es gibt einen Algorithmus, so dass höchstens ein Gefangener nicht frei kommt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$, $i = 1, \ldots, n$ die Ziffern der Gefangenen. Der i–te Gefangene sieht also $a_{i+1}, \ldots, a_n$ und hat selber die Ziffer a_i auf dem Rücken.

Der erste Gefangene gibt nun als Antwort folgende Ziffer:

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \text{ modulo } 10.$$

Der zweite Gefangene kennt die Ziffern $a_3, \ldots, a_n$ und berechnet nun, und spricht laut aus,

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{n} a_i}_{\substack{\text{Information}\\ \text{vom ersten}\\ \text{Gefangenen}}} - \underbrace{\sum_{i=3}^{n} a_i}_{\substack{\text{Information,}\\ \text{welche der zweite}\\ \text{Gefangene sieht}}} \equiv a_2 \text{ modulo } 10.$$

Der dritte Gefangene kennt die Ziffern $a_4, \ldots, a_n$ und hat die bisherigen Antworten gehört. Er berechnet nun, und spricht laut aus,

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{n} a_i}_{\substack{\text{Information}\\ \text{vom ersten}\\ \text{Gefangenen}}} - \underbrace{\sum_{i=4}^{n} a_i}_{\substack{\text{Information,}\\ \text{welche der dritte}\\ \text{Gefangene sieht}}} - \underbrace{a_2}_{\substack{\text{Information}\\ \text{vom zweiten}\\ \text{Gefangenen}}} \equiv a_3 \text{ modulo } 10.$$

Es ist nun offensichtlich, dass sich auch die verbleibenden Gefangenen retten können. □

5.2. **Das Gefangenenproblem II: Abzählbar viele Gefangene.** Nun nehmen wir an, das Gefängnis besitzt unendlich viele (jedoch abzählbar viele) Gefangene, welche wieder in einer Reihe aufgestellt werden sollen. Wieviele Gefangene können dieses mal gerettet werden? Der obige Algorithmus kann natürlich nicht mehr direkt angewendet werden, nachdem der Ausdruck

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i \text{ modulo } 10$$

keinen Sinn ergibt. Genauer gesagt, dieser Ausdruck ergibt keinen Sinn, wenn es unendlich viele a_i's gibt, welche ungleich Null sind.

Eine erste Idee möglichst viele Gefangene zu retten wäre wie folgt: Man wähle ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$. Die Gefangenen können dann die unendlich vielen Gefangenen in Blöcke von N Gefangenen unterteilen und dann den obigen Algorithmus auf jeweils diese Blöcke anwenden. Dadurch werden alle Gefangenen gerettet, welche nicht an der $(k \cdot N + 1)$-ten Stelle für ein $k \in \mathbb{N}$ stehen. Etwas salopp gesprochen, ein 'beliebig großer Prozentsatz' der Gefangenen kann gerettet werden. Allerdings gibt es immer unendlich viele Gefangene, die nicht frei kommen werden.

Es stellt sich nun folgende Frage:

Frage. *Gibt es einen Algorithmus, bei dem nur endlich viele Gefangene nicht frei kommen?*

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir etwas ausholen. Sei erstmal

$$X := \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) \,|\, a_1, a_2, a_3, \cdots \in \{0, \ldots, 9\}\,\}$$

die Menge aller Folgen von Ziffern 0 und 1. Man kann den Beweis, dass die Menge aller reellen Zahlen überabzählbar ist, leicht adaptieren und zeigen, dass X eine überabzählbare Menge ist.

Wir führen jetzt folgende Äquivalenzrelation auf X ein:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ stimmen bis auf} \\ \text{endlich viele Folgenglieder überein.}\end{array}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

Wir erinnern nun an die Definition von einem vollständigen Repräsentantensystem, welche wir schon auf Seite 131 eingeführt hatten. Wir sagen $C \subset X$ ist ein *vollständiges Repräsentantensystem*, wenn C aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Mit anderen Worten, $C \subset X$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem, wenn es zu jedem $x \in X$ genau ein $c \in C$ gibt, welches zu x äquivalent ist. Ein vollständiges Repräsentantensystem erhält man dadurch, dass man aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element wählt.[40]

Wir haben nun alles Handwerkzeug um folgenden Satz zu beweisen:

Satz 5.2. *Es gibt einen Algorithmus, so dass höchstens ein Gefangener nicht frei kommt.*

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$X := \{(b_1, b_2, b_3, \dots) \,|\, b_i \in \{0, \dots, 9\}\}$$

und die oben eingeführte Äquivalenzrelation. Wir wählen ein vollständiges Repräsentantensystem C. Jeder Gefangene merkt sich jetzt die Menge C, d.h. die Gefangenen merken sich für jede Äquivalenzklasse von Folgen genau das gleiche eine Element.

Nach dieser Vorbereitung stellen sich die Gefangenen in einer Reihe auf. Wir bezeichnen wieder mit

$$a_1, a_2, a_3, \dots \text{ mit } a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, \dots, 9\}$$

die Ziffern der Gefangenen.

Der erste Gefangene sieht also die Folge

$$F_1 \;:=\; a_2, a_3, a_4, \dots,$$

dies ist insbesondere eine Folge in X. Er wählt sich nun den vereinbarten Repräsententen

$$B \;:=\; b_2, b_3, b_4, \dots$$

dieser Äquivalenzklasse. Er betrachtet nun die Folge

$$a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4, \dots.$$

[40] Wie schon auf Seite 131 erwähnt beruht die Existenz von einem vollständigen Repräsentantensystem auf dem Auswahlaxiom:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom`.

Das Auswahlaxiom ist nicht unumstritten und besitzt eine lange Geschichte. Wer sich für die Grundlagen der Mathematik und für Geschichte interessiert, demjenigen oder derjenigen sei

Logicomix

wärmstens empfohlen.

Nachdem die Folgen F_1 und B in der gleichen Äquivalenzklasse liegen, sind nur endlich viele Folgenglieder der Differenzfolgen $F_1 - B$ ungleich Null. Der erste Gefangene gibt nun als Antwort:[41]

$$\sum_{i=2}^{\infty}(a_i - b_i) \text{ modulo } 10.$$

Der zweite Gefangene sieht die Folge

$$a_3, a_4, a_5, \ldots$$

er kennt seine eigene Ziffer nicht, und betrachtet deswegen die Folge

$$F_2 \;:=\; 0, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

dies ist insbesondere eine Folge in X, *welche in der gleichen Äquivalenzklasse wie* F_1 liegt, er wählt sich nun den gleichen gemeinsam vereinbarten Repräsententen B dieser Äquivalenzklasse. Die eigene Ziffer bestimmt der zweite Gefangene nun durch

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{\infty}(a_i - b_i)}_{\substack{\text{Information}\\ \text{vom ersten}\\ \text{Gefangenen}}} \;-\; \underbrace{\sum_{i=3}^{\infty}(a_i - b_i) \;-b_2}_{\substack{\text{Information,}\\ \text{welche der zweite}\\ \text{Gefangene sieht}}} \;\equiv\; a_2 \text{ modulo } 10.$$

Der dritte Gefangene sieht die Folge

$$a_4, a_5, a_6, \ldots$$

und betrachtet deswegen die Folge

$$F_3 := 0, 0, a_4, a_5, a_6, \ldots$$

dies ist insbesondere eine Folge in X, *welche in der gleichen Äquivalenzklasse wie* F_1 *und* F_2 liegt, er wählt nun den gleichen gemeinsam vereinbarten Repräsententen B dieser Äquivalenzklasse. Die eigene Ziffer bestimmt der dritte Gefangene nun durch

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{\infty}(a_i - b_i)}_{\substack{\text{Information}\\ \text{vom ersten}\\ \text{Gefangenen}}} \;-\underbrace{\sum_{i=4}^{\infty}(a_i - b_i) - b_2 - b_3}_{\substack{\text{Information,}\\ \text{welche der dritte}\\ \text{Gefangene sieht}}} -\; \underbrace{a_2}_{\substack{\text{Information}\\ \text{vom zweiten}\\ \text{Gefangenen}}} \;\equiv\; a_3 \text{ modulo } 10.$$

Es ist nun offensichtlich, dass sich auch die verbleibenden Gefangenen retten können. □

Nachdem die Menge X überabzählbar ist, jede Äquivalenzklasse jedoch abzählbar ist, folgt, dass C eine überabzählbare Menge ist. Die Lösung des Problems beruht also auf den nicht immer ganz praktikablen Annahmen, dass

(1) das Auswahlaxiom der Mengenlehre gültig ist,

[41]Dies ist in der Tat eine endliche Summe, nachdem nur endlich viele der Reihenglieder von null verschieden sind.

(2) jedem Gefangenen ein überabzählbarer Speicher zur Verfügung steht,
(3) jeder Gefangene unendlich viele Rechenschritte (Differenz der Folgen) durchführen kann.

Der frustrierte Gefängnisdirektor läßt sich nun was neues und weniger zeitaufwändiges einfallen. Die Gefangenen müssen sich wieder in einer Reihe aufstellen. Aber dieses Mal müssen alle Gefangenen *zeitgleich* ihre Ziffer erraten.

(1) Wenn es endlich viele Gefangene gibt, wieviele können sich retten? Alle bis auf einen? Im Durchschnitt 10 %? Oder doch mehr?
(2) Wenn es sich um unendlich viele Gefangene handelt, wieviele können sich retten? Alle bis auf einen? Im Durchschnitt 10 %? Oder doch mehr?

6. Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

6.1. **Die Definition vom Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.** Im Folgenden wollen wir nur noch mit dem für uns im Moment wichtigsten Beispiel arbeiten, nämlich $\Omega = \mathbb{R}^n$. Wir fassen dazu die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse zusammen.

Definition. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine Funktion.

(1) Wir sagen μ ist *normiert*, wenn $[0,1]^n \in \mathcal{A}$ und
$$\mu\big([0,1]^n\big) \;=\; 1.$$
(2) Wir sagen μ ist *translationsinvariant*, wenn für $A \in \mathcal{A}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ auch $x + A \in \mathcal{A}$ und wenn zudem
$$\mu(x+A) \;=\; \mu(A).$$
(3) Wir sagen μ ist *σ-additiv*, wenn für jede Folge $A_k \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ gilt
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

In Lemma 3.1 hatten wir schon gesehen, dass eine solche σ-additive auch monoton ist. Mit diesen Definitionen können wir nun Satz 1.2 wie folgt formulieren.

Satz 1.2. *Es gibt keine normierte, translationsinvariante, σ-additive Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Unser Ziel in den letzten Kapiteln war es, einen normierten, translationsinvarianten, σ-additiven Inhalt auf einer möglichst großen σ-Algebra einzuführen. Wir erinnern im Folgenden noch einmal an die wichtigsten Schritte.

Ein *halboffener Quader in* $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ der Form
$$Q \;=\; [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n).$$
Das Volumen davon ist definiert als
$$\operatorname{Vol}(Q) \;:=\; \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$
Wir bezeichnen mit $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, welche Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern sind. In Satz 3.5 hatten wir gezeigt, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \operatorname{Vol}(A) := \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{Vol}(Q_i), \quad \begin{array}{c}\text{wobei } A \text{ die disjunkte Vereinigung der} \\ \text{halboffenen Quadern } Q_1, \dots, Q_m \text{ ist}\end{array} \end{aligned}$$
wohldefiniert ist. Aus den Definitionen, aus Lemma 3.1 und aus Satz 3.6 kann man herleiten, dass Vol ein σ-additiver, translationsinvarianter Inhalt ist.

Als nächstes hatten wir definiert

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow} \;=\; \Big\{ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\Big|\, A_1 \subset A_2 \subset \dots \text{ ist eine aufsteigende Folge in } \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \Big\}.$$

Für solch ein $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow}$ hatten wir

$$\operatorname{Vol}(A) \;=\; \lim_{k\to\infty} \operatorname{Vol}(A_k) \quad \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

gesetzt. Das Volumen von $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ist nach Lemma 4.5 wohldefiniert. Aus Satz 4.6 folgt, dass Vol auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow}$ wieder monoton und additiv ist. Zudem folgt aus den Definitionen, dass Vol wiederum translationsinvariant ist.

Für eine beliebige Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist das *äußere Maß*, oder das *äußere Volumen*, definiert als

$$\operatorname{Vol}^*(X) \;:=\; \inf \big\{ \operatorname{Vol}(A) \,\big|\, X \subset A \text{ und } A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow} \big\}.$$

In Übungsblatt 11 zeigen wir beispielsweise, dass für $a_i \le b_i$, $i = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$\operatorname{Vol}^* \big(\underbrace{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}_{\text{kompakter Quader}}\big) \;=\; \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Insbesondere sehen wir, dass Vol^* normiert ist. Es folgt aus Satz 4.8, dass Vol^* monoton und σ-subadditiv ist. Zudem folgt leicht aus den Definitionen, dass Vol^* translationsinvariant ist. Es folgt nun aus Satz 1.2, dass $\operatorname{Vol}^* \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ nicht auch noch σ-additiv sein kann.

Wir erhalten die σ-Additivität indem wir uns aus auf eine kleinere σ-Algebra als $\mathcal{P}(\Omega)$ einschränken. Genauer gesagt, wir bezeichnen im Folgenden

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;:=\; \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma} \;:=\; \text{Durchschnitt aller } \sigma\text{-Algebren von } \mathbb{R}^n, \text{ welche } \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \text{ enthalten}$$

als die *Borelsche σ-Algebra*. Nach Satz 4.15 ist die Einschränkung von $\operatorname{Vol}^* \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nun auch σ-additiv. Anders ausgedrückt, die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol} \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;&\to\; \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A \;&\mapsto\; \operatorname{Vol}(A) \;:=\; \operatorname{Vol}^*(A) \end{aligned}$$

ist ein translationsinvariantes, normiertes Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dieses Maß wird das *Lebesgue-Maß* oder auch *Volumen* auf $\mathbb{R}^n$ genannt. Die Mengen, welche in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ liegen, heißen *Lebesgue-messbar* oder kürzer, *messbar*.[42] Es folgt aus Satz 4.2, dass alle offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar sind. Nachdem eine σ-Algebra unter Komplementen abgeschlossen ist, sind dann auch alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar.

Wir fassen in den folgenden beiden Sätzen die wichtigsten Eigenschaften von messbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß zusammen. In den allermeisten Fällen genügt es im Folgenden diese beide Sätze zu kennen. Wir werden die Aussagen dieser beiden Sätze oft ohne Bemerkung verwenden.

Satz 6.1. (Eigenschaften von messbaren Mengen)

(1) *Alle halboffenen Quader sind messbar.*

---

[42] In der Literatur werden diese Mengen manchmal auch als *Borel-Lebesgue-messbar* bezeichnet.

(2) *Komplemente von messbaren Mengen sind wiederum messbar.*
(3) *Die Vereinigung von abzählbar vielen messbaren Mengen ist wiederum messbar.*
(4) *Der Durchschnitt von abzählbar vielen messbaren Mengen ist wiederum messbar.*
(5) *Translate von messbaren Mengen sind wieder messbar, d.h. wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist und wenn $p \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $p + A$ messbar.*
(6) *Offene Mengen sind messbar.*
(7) *Abgeschlossene Mengen sind messbar.*

Beweis. Die ersten drei Aussagen folgen sofort aus der Tatsache, dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\uparrow}$ eine σ-Algebra ist, welche alle halboffenen Quadern enthält. Die vierte Aussage hatten wir auf Seite 144 diskutiert. Die fünfte Aussage folgt leicht aus den Definitionen. Die sechste Aussage hatten wir in Satz 4.2 bewiesen. Die letzte Aussage folgt aus der zweiten und der fünften Aussage. □

Satz 6.2. (Eigenschaften vom Lebesgue–Maß) *Es gibt genau eine Funktion*

$$\mathrm{Vol}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+,$$

genannt das Lebesgue-Maß oder das Volumen, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) *Es ist*

$$\mathrm{Vol}(\emptyset) \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Vol}\big([a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]\big) \;=\; \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

(2) *Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant, d.h. für alle messbaren $A \subset \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mathrm{Vol}(x+A) \;=\; \mathrm{Vol}(A).$$

(3) *Das Lebesgue-Maß ist σ-additiv, d.h. für jede Folge $A_k, k \in \mathbb{N}$ von disjunkten messbaren Mengen gilt*[43]

$$\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Vol}(A_k).$$

(4) *Das Lebesgue-Maß ist monoton, d.h. für alle messbaren $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mathrm{Vol}(A) \;\le\; \mathrm{Vol}(B).$$

(5) *Das Lebesgue-Maß ist σ-subadditiv, d.h. für jede Folge $A_k, k \in \mathbb{N}$ von messbaren Mengen gilt*

$$\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Vol}(A_k).$$

(6) *Das Lebesgue-Maß ist stetig von unten, d.h. für jede Folge $A_k, k \in \mathbb{N}$ von messbaren Mengen gilt*

$$A_k \uparrow A \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Vol}(A_k)\uparrow \mathrm{Vol}(A).$$

[43] Die analoge Aussage gilt natürlich auch für endlich viele disjunkte messbare Mengen $A_1,\dots,A_k$. Man erhält diese aus der σ-Additivität indem man $A_{k+i} := \emptyset$ für $i \ge 1$ setzt.

Beweis. Die ersten vier Eigenschaften hatten wir gerade erst diskutiert. Die letzten beiden Eigenschaften folgen aus Satz 3.2. □

Satz 6.3. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:*
(1) *Wenn U abgeschlossen ist, dann ist $f(U)$ messbar.*
(2) *Wenn U offen ist, dann ist $f(U)$ messbar.*

Beweis.
(1) Die erste Aussage wird in Übungsblatt 11 bewiesen.
(2) Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Der Beweis von Satz 4.3 kann leicht abgeändert werden um zu zeigen, dass U geschrieben werden kann als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen kompakte Würfeln W_i, $i \in I$. Dann ist
$$f(U) \;=\; f\Big(\bigcup_{i\in I} W_i\Big) \;=\; \bigcup_{i\in I} f(W_i)$$
nach (1) die Vereinigung von abzählbar vielen messbaren Mengen, also wiederum messbar.

□

6.2. Nullmengen.

Definition. Wir sagen $X \subset \mathbb{R}^n$ ist eine *Lebesgue–Nullmenge* (oder manchmal nur *Nullmenge*), falls X messbar ist mit $\operatorname{Vol}(X) = 0$.

Beispiel. Nach Satz 6.2 (1) ist jeder kompakte Quader, welcher eine Seite der Länge null besitzt, eine Nullmenge. Insbesondere ist für $n \geq 1$ jeder Punkt in $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.

Bemerkung. In der Literatur sagt man manchmal, dass $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist, falls $\operatorname{Vol}^*(X) = 0$. Es wird also nicht vorausgesetzt, dass X messbar ist. In Übungsblatt 11 wird auf diese zwei verschiedenen Definitionen von Nullmenge eingegangen.

Lemma 6.4.
(1) *Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.*
(2) *Eine messbare Teilmenge einer Nullmenge ist wiederum eine Nullmenge.*
(3) *Für $k < n$ ist die k-dimensionale Ebene*
$$E_k \;:=\; \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$$
eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen sofort aus Satz 6.2. Wir beweisen nun noch die dritte Aussage. Es sei also $k < n$. Dann ist
$$E_k \;=\; \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{[-m, m]^k \times 0 \times \dots \times 0}_{\text{Nullmenge}}$$
die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen, also wiederum eine Nullmenge. □

Beispiele.

(1) Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist eine abzählbare Menge, nachdem jeder Punkt eine Nullmenge ist, folgt nun aus Lemma 6.4, dass auch $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge ist.

(2) Es folgt aus Lemma 6.4, dass jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Nullmenge ist. Andererseits ist

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{R}) \;=\; \mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}[-m,m)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da Vol stetig von unten}}}{=} \lim_{m\to\infty} \underbrace{\mathrm{Vol}\big([-m,m]\big)}_{=2m} \;=\; \infty.$$

Wir haben also nun einen neuen Beweis für die Aussage, dass die Menge $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

Satz 6.5. *Es sei $p \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Für $k < n$ ist das Bild der affinen k-dimensionalen Ebene*

$$p + E_k \;=\; p + \{(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}\}$$

unter einer stetig differenzierbaren Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.

Beispiel.

(1) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ (\varphi,r) &\mapsto \big(r\sin(\varphi), r\cos(\varphi)\big). \end{aligned}$$

Dann ist der Kreis

$$S^1 \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1\}$$

das Bild der affinen Gerade $\{(\varphi,1)\,|\,\varphi\in\mathbb{R}\}$ unter der Abbildung P, also ist der Kreis nach Satz 6.5 eine Nullmenge.

(2) Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} S\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (\varphi,\theta,r) &\mapsto \big(r\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi),\; r\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi),\; r\cos(\theta)\big). \end{aligned}$$

Dann ist die Sphäre

$$S^2 \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$$

das Bild der affinen Ebene $\{(\varphi,\theta,1)\,|\,\varphi,\theta\in\mathbb{R}\}$ under der Abbildung S, also ist nach Satz 6.5 die Sphäre eine Nullmenge.

(3) Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass für $k < n$ jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall, dass $p = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Es sei also $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es folgt aus Satz 6.3, dass $F(E_k)$ messbar ist. Wir müssen nun also noch zeigen, dass $\mathrm{Vol}(F(E_k)) = 0$.

Für $s \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$W(s) \quad := \quad [-s,s]^n.$$

Dann ist

$$F(E_k) \quad = \quad \bigcup_{s=1}^{\infty} F(E_k \cap W(s)).$$

Es genügt also zu zeigen, dass jedes $F(E_k \cap W(s))$ eine Nullmenge ist.

> Wir wissen schon, dass $\mathrm{Vol}(E_k \cap W(s)) = 0$. Wir wollen nun mithilfe von Lemma 4.1 aus der Funktionentheorie, dass Volumen des Bildes von $E_k \cap W(s)$ unter der Abbildung F abschätzen.

Wir beginnen mit folgender Behauptung.

Behauptung. Es gibt ein $D \geq 0$, so dass für jeden abgeschlossenen Würfel $V \subset W(s)$ gilt, dass[44]

$$\mathrm{Vol}(F(V)) \ \leq \ D \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

Die Menge $W(s)$ ist kompakt. Nachdem F stetig differenzierbar ist existiert also

$$C \ := \ \max\left\{ \|DF(p)\| \,\middle|\, p \in W(s) \right\}.$$

Es sei nun V ein Würfel in $W(s)$. Wir bezeichnen mit d die Seitenlänge von V. Dann gilt[45]

$$\begin{aligned}
& \text{Seitenlänge}(V) = d \\
\Longrightarrow\ & \text{Durchmesser}(V) = \sqrt{n}d \\
\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Analogon von Funktionentheorie: Lemma 4.1 für Teilmengen von } \mathbb{R}^n}}{\Longrightarrow}\ & \text{Durchmesser}(F(V)) \leq C \cdot \sqrt{n}d \\
\Longrightarrow\ & F(V) \text{ ist enthalten in einem Würfel der Seitenlänge } 2C \cdot \sqrt{n}d \\
\Longrightarrow\ & F(V) \text{ ist enthalten in einem Würfel mit Volumen } \underbrace{(2C \cdot \sqrt{n})^n}_{=:D} d^n \\
\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie von Vol}}}{\Longrightarrow}\ & \mathrm{Vol}(F(V)) \leq D \cdot \mathrm{Vol}(V).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $D := (2C \cdot \sqrt{n})^n$ die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Die Idee ist nun $E_k \cap W(s)$ durch 'kleine' Würfel zu überdecken, und dann die Behauptung anzuwenden. Es sei nun erst einmal $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten

$$V \quad = \quad \left[0, \tfrac{s}{N}\right] \times \cdots \times \left[0, \tfrac{s}{N}\right] \ \subset \ \mathbb{R}^n$$

und wir setzen

$$\begin{aligned}
Z \quad &= \quad \left\{ (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \,\middle|\, x_i = -s, -s + \tfrac{s}{N}, -s + \tfrac{2s}{N}, \ldots, s - \tfrac{s}{N} \right\} \\
&= \quad \text{“alle Eckpunkte des Karomusters mit Seitenlänge } \tfrac{s}{N} \text{ in } [-s,s)^n\text{”}.
\end{aligned}$$

---

[44] Es folgt aus Satz 6.3, dass $F(V)$ messbar ist.

[45] Der Durchmesser eine beschränkten nichtleere Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ ist genauso definiert wie auf Seite 35 für beschränkte nichtleere Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Wir können jetzt alles zusammenfassen und erhalten, dass

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(F(E_k\cap W(s))) &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } E_k\cap W(s)\subset \bigcup_{z\in Z}(z+V)}}{\le} \mathrm{Vol}\Big(F\Big(\bigcup_{z\in Z} z+V\Big)\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Subadditivität von Vol}}}{\le} \sum_{z\in Z}\mathrm{Vol}(F(z+V))\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{obige Behauptung}}}{\le} \sum_{z\in Z} D\cdot \mathrm{Vol}(z+V) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } \mathrm{Vol}(z+V)=(\frac{s}{N})^n\\ \text{und } Z \text{ hat } (2sN)^k \text{ Elemente}}}{=} D\cdot(2sN)^k\cdot\left(\tfrac{s}{N}\right)^n = D\cdot 2^k\cdot s^{n+k}\cdot N^{k-n}.
\end{aligned}
$$

Nachdem $k < n$ geht mit $N \to \infty$ die rechte Seite gegen null. Also folgt, dass

$$\mathrm{Vol}(F(E_k \cap W(s))) = 0.$$

Wir haben damit den Satz bewiesen. □

Wir beschließen das Kapitel mit folgender Verallgemeinerung von Satz 6.5, welche auf Seite 36 von Forster: Analysis III bewiesen wird.

Satz 6.6. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und es sei $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Wenn $A \subset U$ eine Nullmenge ist, so dass das Bild $F(A)$ messbar ist, dann ist auch $F(A)$ eine Nullmenge.*

6.3. **Die Cantor–Menge.** Wir haben schon folgende Eigenschaften von Nullmengen bewiesen:

(1) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$, welche aus abzählbar vielen Punkten besteht, ist eine Nullmenge.
(2) Eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ enthält kein offenes Intervall.[46]

Eine Nullmenge von $\mathbb{R}$ ist also in einem gewissen Sinne 'klein', und man kann sich die Frage stellen, ob vielleicht eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ immer abzählbar ist. Überraschenderweise ist die Antwort zu dieser Frage allerdings 'Nein':

Satz 6.7. *Es gibt eine beschränkte Nullmenge von $\mathbb{R}$, welche überabzählbar viele Punkte enthält.*

Wir konstruieren im Folgenden die "Cantor-Menge C" und zeigen danach, dass diese die gewünschte Eigenschaft besitzt. Wir betrachten dazu folgende Folge von Teilmengen

[46] In der Tat, denn aus $(a, b) \in A$ folgt $\mathrm{Vol}(A) \geq \mathrm{Vol}((a, b)) = b - a > 0$.

von $\mathbb{R}$:

$$C_0 \;=\; \big[0,1\big], \qquad\qquad \text{mit} \quad \operatorname{Vol}(C_0) \;=\; 1.$$

Wir bilden nun C_1, indem wir aus dem Intervall C_0 das mittlere offene Drittel entfernen, d.h. es ist

$$C_1 \;=\; \big[0,\tfrac{1}{3}\big] \cup \big[\tfrac{2}{3},1\big], \qquad\qquad \text{mit} \quad \operatorname{Vol}(C_1) \;=\; \tfrac{2}{3}\operatorname{Vol}(C_0) \;=\; \tfrac{2}{3}.$$

Wir bilden als nächstes C_2, indem wir aus den beiden Teilintervallen von C_1 wiederum jeweils das mittlere offene Drittel entfernen, d.h. es ist

$$C_2 \;=\; \big[0,\tfrac{1}{9}\big] \cup \big[\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}\big] \cup \big[\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}\big] \cup \big[\tfrac{8}{9},1\big] \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Vol}(C_2) \;=\; \tfrac{2}{3}\operatorname{Vol}(C_2) \;=\; \big(\tfrac{2}{3}\big)^2.$$

Wir fahren nun induktiv so fort. Wir erhalten eine absteigende Folge $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, so dass

$$C_k \;=\; \text{Vereinigung von } 2^k \text{ kompakten Intervallen der Länge } \tfrac{1}{3^k} \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Vol}(C_k) \;=\; \tfrac{2}{3}\operatorname{Vol}(C_{k-1}) \;=\; \big(\tfrac{2}{3}\big)^k.$$

Wir bezeichnen

$$C \;:=\; \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

als die *Cantor-Menge*[47]. Als Durchschnitt von abzählbar vielen messbaren Mengen ist auch C wiederum messbar. Nachdem $\operatorname{Vol}(C_k) = (\frac{2}{3})^k$ gegen 0 konvergiert, und C in jedem C_k enthalten ist, folgt, dass C eine Nullmenge ist.

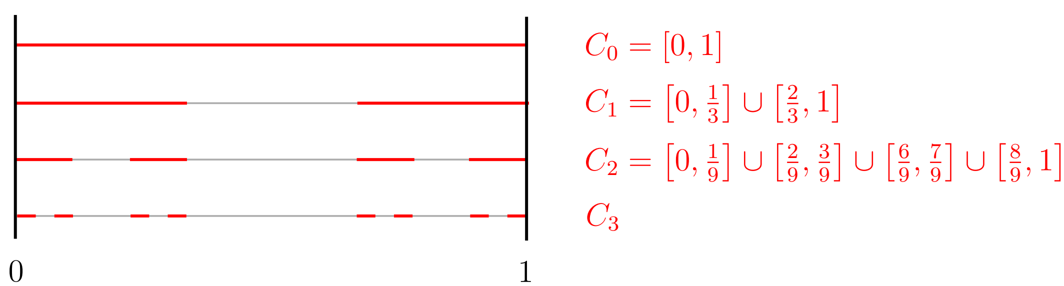


Abbildung 17. Illustration der Cantor-Menge

Satz 6.7 folgt nun aus folgendem Satz.

Satz 6.8. *Die Cantor–Menge ist überabzählbar.*

[47]Die Cantor–Menge wird manchmal auch als das *Cantorsche Diskontinuum* bezeichnet

Wir werden im Folgenden eine andere Beschreibung von C geben. Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $a \in [0,1]$. Wir sagen

$$a = \underbrace{0, a_1 a_2 a_3 \dots}_{n-\text{adige Darstellung}}$$

wenn $a_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ für alle i, und wenn gilt

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i n^{-i}.$$

Beispielsweise gilt in der 3–adigen Darstellung, dass

$$0,11111111111\dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Die 3–adige Darstellung ist nicht eindeutig, beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} &= 0,10000000000\dots \text{ aber auch} \\ \tfrac{1}{3} &= 0,02222222222\dots \end{aligned}$$

In gewisser Weise ist dieses Beispiel die 'einzige Quelle' von nicht eindeutigen n–adigen Darstellungen, die genaue Aussage ist Übungsaufgabe 1 von Übungsblatt 8. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass

C_1 := alle reellen Zahlen a in $[0,1]$, so dass a eine 3–adige Darstellung besitzt, in welcher in der ersten Stelle nur die Ziffer 0 oder die Ziffer 2 verwendet wird.

Allgemeiner gilt für $k \in \mathbb{N}$, dass

C_k := alle reellen Zahlen a in $[0,1]$, so dass a eine 3–adige Darstellung besitzt, in welcher in den ersten k–Stellen nur die Ziffern 0 und 2 verwendet werden

und daher auch

C := alle reellen Zahlen a in $[0,1]$, so dass a eine 3–adige Darstellung besitzt, in welcher nur die Ziffern 0 und 2 verwendet werden.

Wir zeigen nun noch, dass die Menge C überabzählbar ist. Wir definieren dazu eine Funktion $\Phi\colon [0,1] \to [0,1]$. Sei $x \in [0,1]$.

1. Fall. $x \in [0,1]$ besitzt eine 3–adige Darstellung der Form

$$x = 0, \underbrace{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, \dots}_{\text{alle } a_i\text{'s liegen in } \{0,2\}}$$

Wir definieren dann

$$\Phi(x) := \underbrace{0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \frac{a_3}{2} \frac{a_4}{2} \frac{a_5}{2} \dots}_{2-\text{adige Darstellung}}$$

2. Fall. Andernfalls besitzt $x \in [0,1]$ eine 3–adige Darstellung der Form

$$x = 0,\underbrace{a_1 a_2 a_3,\ldots,a_{k-1},}_{\text{jeweils in }\{0,2\}}1,a_{k+1},\ldots$$

Wir definieren dann

$$\Phi(x) = \underbrace{0,\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\ldots\frac{a_{k-1}}{2}1000\ldots}_{2-\text{adige Darstellung}}$$

Diese Funktion heißt *Cantorfunktion* oder auch *Teufelstreppe*. Die Funktion Φ ist konstant auf den Intervallen, welche man jeweils vom Übergang von C_k zu C_{k+1} herausgenommen hat. Beispielsweise gilt

$$\begin{array}{llllll}
\text{für } x \in \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], & \text{d.h. für } x = 0,1a_2a_3\ldots & \text{gilt} & \Phi(x) & = & 0,1000\ldots & = & \frac{1}{2}, \\
\text{für } x \in \left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right], & \text{d.h. für } x = 0,01a_3a_4\ldots & \text{gilt} & \Phi(x) & = & 0,0100\ldots & = & \frac{1}{4}, \\
\text{für } x \in \left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right], & \text{d.h. für } x = \underbrace{0,21a_3a_4\ldots}_{3-\text{adig}} & \text{gilt} & \Phi(x) & := & \underbrace{0,1100\ldots}_{2-\text{adig}} & = & \frac{3}{4}.
\end{array}$$

Der Graph der Cantorfunktion Φ ist in Abbildung 18 skizziert.

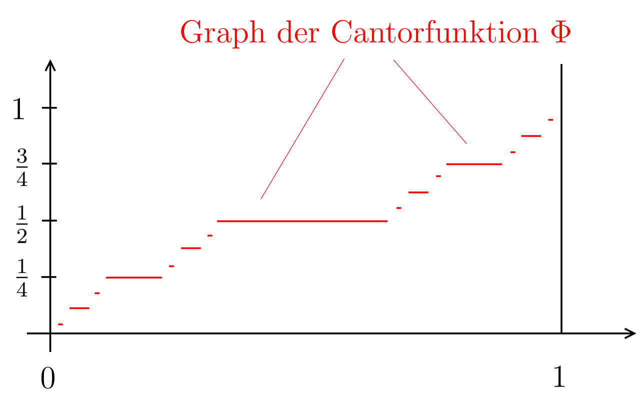


Abbildung 18. Der Graph der Cantorfunktion.

Die erste Aussage der folgenden Behauptung impliziert insbesondere, dass C überabzählbar ist. Insbesondere haben wir dann Satz 6.8 bewiesen.

Behauptung. Diese Abbildung hat folgende Eigenschaften:

(1) Φ ist surjektiv und für jedes $x \in [0,1]$ gibt es ein $c \in C$, so dass $\Phi(c) = x$.
(2) Φ ist monoton steigend und stetig.

Sei also $x \in [0,1]$. Es sei

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

eine 2–adige Darstellung von x. Dann gilt

$$\Phi(\underbrace{0,(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots}_{3-\text{adige Darstellung}}) = \underbrace{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}_{2-\text{adige Darstellung}} = x.$$

Nachdem

$$\underbrace{0,(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots}_{3-\text{adige Darstellung}} \in C$$

folgt die erste Aussage.

Die beiden anderen Aussagen kann man leicht zeigen. Nachdem diese jedoch für den Beweis des Satzes nicht notwendig sind, überlassen wir den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe.

6.4. **Messbare Mengen und Homöomorphismen.**

Satz 6.9. *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene Teilmengen und es sei $F\colon U \to V$ ein Homöomorphismus. Dann ist für jede messbare Menge $A \subset U$ auch das Bild $F(A)$ messbar.*

Bevor wir uns dem eigentlichen Beweis von Satz 6.9 zuwenden erinnern wir noch einmal an folgende Definition: Es sei Ω eine Menge und es sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir bezeichnen

$$\langle \mathcal{S} \rangle^{\sigma}_{\Omega} := \text{Durchschnitt aller } \sigma\text{-Algebren von } \Omega, \text{ welche } \mathcal{S} \text{ enthalten},$$

als die von $\mathcal{S}$ *erzeugte σ-Algebra*. Wir halten zwei elementare Eigenschaften in folgendem Lemma zusammen.

Lemma 6.10. *Es sei Ω eine Menge.*

(1) *Es seien $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \implies \langle \mathcal{S} \rangle^{\sigma}_{\Omega} \subset \langle \mathcal{T} \rangle^{\sigma}_{\Omega}.$$

(2) *Wenn $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra ist, dann ist $\langle \mathcal{S} \rangle^{\sigma}_{\Omega} = \mathcal{S}$.*

Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ die Menge der offenen Teilmengen von X. Hierbei sagen wir, dass $U \subset X$ offen in X ist, wenn es eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $U = V \cap X$ gibt.

Lemma 6.11. *Es ist*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}_{\mathbb{R}^n}.$$

Beweis. Es folgt aus Satz 4.2, dass $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow} \subset \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}_{\mathbb{R}^n}$. Aus Lemma 6.10 folgt nun, dass $\langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}_{\mathbb{R}^n} \subset \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}_{\mathbb{R}^n}$.

Nachdem jeder halboffene Quader geschrieben werden kann als Durchschnitt von endlich vielen offenen und abgeschlossenen Mengen (d.h. von Komplementen von offenen Mengen) folgt, dass alle halboffenen Quader in $\langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}_{\mathbb{R}^n}$ liegen. Daraus folgt dann wiederum aus Lemma 6.10 die Inklusion $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}_{\mathbb{R}^n} \subset \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}_{\mathbb{R}^n}$. $\square$

Lemma 6.12. *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt*

$$\langle \mathcal{O}(X) \rangle_X^\sigma \;=\; \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle_{\mathbb{R}^n}^\sigma \cap \mathcal{P}(X).$$

BEWEIS. Nachdem X offen ist, folgt leicht, dass $\langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle_{\mathbb{R}^n}^\sigma \cap \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra auf X ist, welche $\mathcal{O}(X)$ enthält. Also folgt die Inklusion $\langle \mathcal{O}(X) \rangle_X^\sigma \subset \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle_{\mathbb{R}^n}^\sigma \cap \mathcal{P}(X)$ aus der Definition von $\langle \mathcal{O}(X) \rangle_X^\sigma$.

Andererseits kann man auch problemlos zeigen, dass

$$\{A \sqcup B \,|\, A \in \langle \mathcal{O}(X) \rangle_X^\sigma \text{ und } B \in \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \setminus X) \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus X}^\sigma\}$$

eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ ist, welche $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ enthält. Es folgt, dass

$$\langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle_{\mathbb{R}^n}^\sigma \;\subset\; \{A \sqcup B \,|\, A \in \langle \mathcal{O}(X) \rangle_X^\sigma \text{ und } B \in \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \setminus X) \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus X}^\sigma\}.$$

Wir erhalten also die gewünschte Inklusion

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle_{\mathbb{R}^n}^\sigma \cap \mathcal{P}(X) \;&\subset\; \{A \sqcup B \,|\, A \in \langle \mathcal{O}(X) \rangle_X^\sigma \text{ und } B \in \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \setminus X) \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus X}^\sigma\} \cap \mathcal{P}(X) \\ &=\; \langle \mathcal{O}(X) \rangle_X^\sigma. \end{aligned}$$

□

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 6.9 zu.

BEWEIS VON SATZ 6.9. Es sei $F\colon U \to V$ ein Homöomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zudem sei $A \subset U$ eine messbare Menge. Nach Lemma 6.11 gilt also $A \in \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle_{\mathbb{R}^n}^\sigma$. Nachdem $A \subset U$ folgt aus Lemma 6.12, dass $A \in \langle \mathcal{O}(U) \rangle_U^\sigma$. Die Voraussetzung, dass die Abbildung $F\colon U \to V$ ein Homöomorphismus ist, impliziert, dass $F\colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ eine Bijektion ist[48]. Insbesondere ist dann aber auch

$$F\colon \langle \mathcal{O}(U) \rangle_U^\sigma \;\to\; \langle \mathcal{O}(V) \rangle_V^\sigma$$

eine Bijektion Es folgt, dass $F(A) \in \langle \mathcal{O}(V) \rangle_V^\sigma$. Es folgt dann wiederum aus Lemma 6.12, dass $F(A) \in \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle_{\mathbb{R}^n}^\sigma$, d.h. $F(A)$ ist messbar. □

[48]Warum ist dies der Fall?

7. Die Eindeutigkeit vom Lebesgue-Maß

7.1. **Translationsinvariante Maße.** Das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist translationsinvariant. Wenn wir das Lebesgue-Maß mit einer festgewählten positiven Konstante multiplizieren erhalten wir natürlich wiederum ein translationsinvariantes Maß.

Der folgende Satz besagt nun, dass jedes 'vernünftige' translationsinvariante Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ von dieser Form ist.

Satz 7.1. *Es sei*

$$\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ \to\ \overline{\mathbb{R}}_+$$

ein translationsinvariantes Maß mit der Eigenschaft, dass es eine offene, beschränkte Menge $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(X) \in (0,\infty)$ gibt. Dann existiert ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\mu(B) \ =\ C \cdot \operatorname{Vol}(B) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

In dem Beweis von Satz 7.1 werden wir folgendes Lemma benötigen.

Lemma 7.2. *Jeder halboffene Quader in $\mathbb{R}^n$ kann als disjunkte, abzählbare Vereinigung von halboffenen Würfeln mit Seitenlängen der Form $\frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$ geschrieben werden.*

Der Beweis von Lemma 7.2 ist ganz ähnlich zum Beweis von Satz 4.3. Wir überlassen die Durchführung des Beweises als freiwillige Übungsaufgabe. Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 7.1 zu.

Beweis von Satz 7.1. Es sei also $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein translationsinvariantes Maß und es sei zudem $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine offene, beschränkte Menge mit $\mu(X) \in (0,\infty)$.

Für $q > 0$ schreiben wir

$$W_q \ :=\ \left[0, \tfrac{1}{q}\right)^n \ =\ \text{der halboffene Würfel mit Kantenlänge } \tfrac{1}{q}.$$

Wir setzen nun

$$C \ :=\ \mu(W_1) \ \in\ \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Wir wollen nun zeigen, dass C die gewünschte Eigenschaft besitzt. Wir beginnen mit folgender Behauptung:

Behauptung. Für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(W_q) \ =\ C \cdot \operatorname{Vol}(W_q).$$

Die Aussage gilt per Definition von C für $q = 1$. Für $q \in \mathbb{N}$ können wir W_1 als Vereinigung von q^n disjunkten Translaten von W_q schreiben. Es folgt nun aus der Translationsinvarianz und der Additivität von μ und Vol, dass

$$q^n \mu(W_q) \ =\ \mu(W_1) \ =\ C \cdot \operatorname{Vol}(W_1) \ =\ C \cdot q^n \operatorname{Vol}(W_q).$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Behauptung. Es ist $C > 0$ und $C < \infty$.

Die Menge X ist beschränkt, also enthalten in einer endlichen Vereinigung von disjunkten Translaten von W_1. Aus der Monotonie von μ, der Tatsache, dass $\mu(X) > 0$ und der Translationsinvarianz von μ, folgt nun, dass $C = \mu(W_1) > 0$.

Nachdem X offen ist, gibt es ein $q \in \mathbb{N}$, so dass ein Translat von W_q im Inneren von X enthalten ist. Nachdem $\mu(X) < \infty$ folgt nun wiederum aus der Monotonie von μ und der Translationsinvarianz von μ, dass $C = \mu(W_1) = q^n \mu(W_q) < q^n \mu(X)$ endlich ist. Wir haben damit auch diese Behauptung bewiesen.

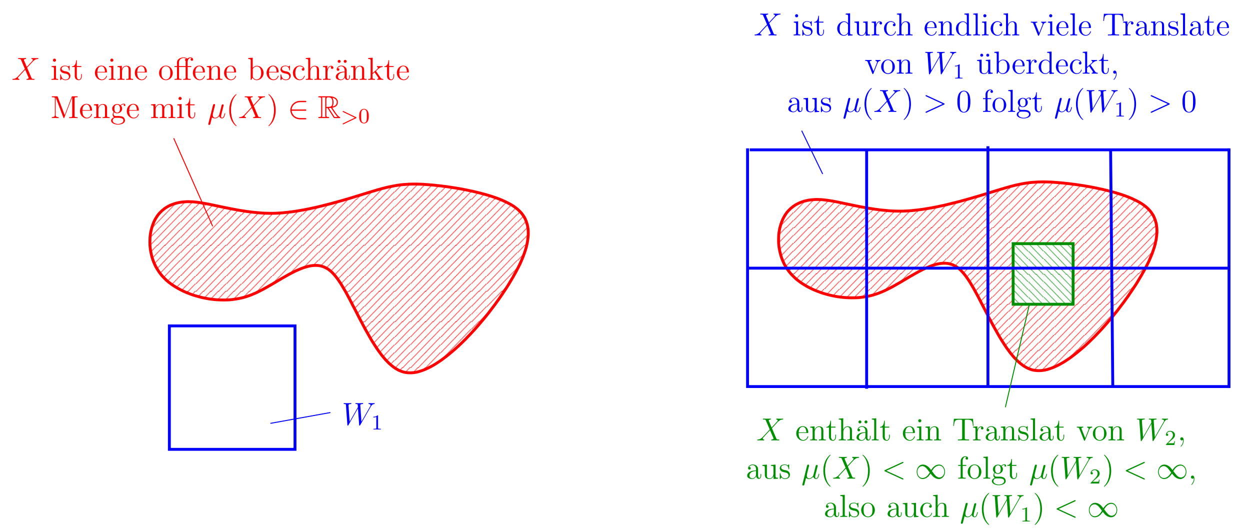


Abbildung 19. Illustration zum Beweis von Satz 7.1.

Behauptung. Für jedes $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mu(A) \;=\; C \cdot \mathrm{Vol}(A).$$

Nach Lemma 7.2 kann jeder halboffene Quader als disjunkte, abzählbare Vereinigung von Translaten von Quadern der Form W_q geschrieben werden. Es folgt aus Lemma 2.7, dass auch jedes $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ als disjunkte, abzählbare Vereinigung von Translaten von Quadern der Form W_q geschrieben werden kann. Die Behauptung folgt nun aus der ersten Behauptung, der Translationsinvarianz von Vol und μ und der σ-Additivität von Vol und μ.

Wir haben nun also gezeigt, dass $\frac{1}{C}\mu$ und Vol auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ übereinstimmen. Es folgt nun aus Satz 4.15, dass $\frac{1}{C}\mu$ und Vol auch auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma$ übereinstimmen. $\square$

7.2. **Volumen und Determinante.** Für Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$P(v_1, \dots, v_n) \;:=\; \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] \right\}$$

das durch $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte Parallelotop. Für $n = 2$ ist dies insbesondere das durch v_1 und v_2 aufgespannte Parallelogramm. Für $n = 3$ ist dies der durch v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Spat.

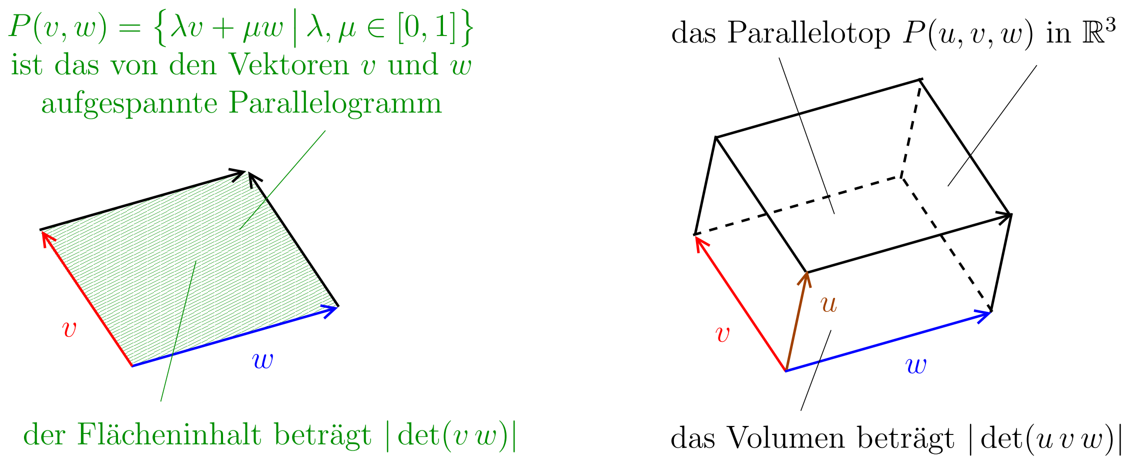


Abbildung 20.

Im Folgenden schreiben wir, wie üblich

$$e_i \;=\; (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Koordinate}}}{1},0,\dots,0).$$

Offensichtlich ist $P(e_1, \dots, e_n)$ der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^n$. Jedes Parellotop erhält man mithilfe einer linearen Abbildung aus dem Einheitswürfel $[0,1]^n$. Genauer gesagt, es seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit T die $n \times n$-Matrix $(v_1 \, \dots \, v_n)$. Dann gilt

$$P(v_1, \dots, v_n) \;=\; P(Te_1, \dots, Te_n) \;=\; T(\underbrace{P(e_1, \dots, e_n)}_{=[0,1]^n}).$$

Der folgende Satz gibt nun insbesondere eine geometrische Interpretation des Absolutbetrags der Determinante einer quadratischen Matrix.

Satz 7.3. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\operatorname{Vol}\big(P(v_1, \dots, v_n)\big) \;=\; \big|\det\big(v_1 \, \dots \, v_n\big)\big|.$$

Wir werden gleich sehen, dass dieser Satz aus folgendem stärkeren Satz folgt.

Satz 7.4. *Es sei $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dass*

$$\operatorname{Vol}(\underbrace{T(B)}_{\substack{\uparrow \\ \textit{messbar nach Satz 6.9}}}) \;=\; |\det(T)| \cdot \operatorname{Vol}(B).$$

Beweis von Satz 7.3 mithilfe von Satz 7.4. Es seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben wieder $T = \big(v_1 \ \dots \ v_n\big)$. Wenn $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind, dann liegt $P(v_1, \dots, v_n)$ in einem echten Unterraum von $\mathbb{R}^n$, es folgt dann aus Satz 6.5, dass $\mathrm{Vol}\big(P(v_1, \dots, v_n)\big) = 0$. Andererseits ist dann natürlich auch $\det(T) = 0$.

Wir betrachten nun den Fall, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_n\big(P(v_1, \dots, v_n)\big) \ = \ \mathrm{Vol}(T([0,1]^n)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 7.4, angewandt auf den Würfel } [0,1]^n}}{=} |\det(T)| \cdot \mathrm{Vol}([0,1]^n) \ = \ |\det(T)|. \qquad \square$$

Die Idee beim Beweis von Satz 7.4 ist diesen durch einen Trick mithilfe von Satz 7.1 zu beweisen. Dazu benötigen wir folgendes einfache Lemma.

Lemma 7.5. *Es sei $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \mu_T \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B & \to & \mu_T(B) := \mathrm{Vol}(T(B)) \end{array}$$

ein translations-invariantes Maß.

Beweis. Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir also $\mu_T(B) := \mathrm{Vol}(T(B))$. Wir zeigen zuerst, dass μ_T in der Tat ein Maß ist. Offensichtlich gilt $\mu_T(\emptyset) = 0$. Es seien nun $B_k, k \in \mathbb{N}$ disjunkte Mengen in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\mu_T\Big(\coprod_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \ = \ \mathrm{Vol}\Big(T\Big(\coprod_{k=1}^{\infty} B_k\Big)\Big) \ = \ \mathrm{Vol}\Big(\coprod_{k=1}^{\infty} T(B_k)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn Vol ist ein Maß und die } T(B_k)\text{'s sind disjunkt}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(T(B_k)) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_T(B_k)).$$

Die Translationsinvarianz von μ_T zeigen wir nun fast genauso leicht. Es sei also $p \in \mathbb{R}^n$ und zudem sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\mu_T(p + B) \ = \ \mathrm{Vol}(T(p + B)) \ = \ \mathrm{Vol}(T(p) + T(B)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn Vol ist translationsinvariant}}}{=} \mathrm{Vol}(T(B)) \ = \ \mu_T(B). \qquad \square$$

Im Folgenden benötigen wir auch noch folgenden Satz aus der linearen Algebra.

Satz 7.6. *Jede Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ kann geschrieben werden als*[49]

$$T \ = ADB,$$

wobei A und B orthogonale Matrizen sind und D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist.

Wir skizzieren im Folgenden den Beweis.

[49]Eine solche Zerlegung von T wird als Singulärwertzerlegung bezeichnet.

Beweis. Die Matrix T^tT ist symmetrisch, sie kann also mithilfe einer orthogonalen Matrix diagonalisiert werden. [50] Genauer gesagt, es gibt eine orthogonale Matrix S und eine reelle diagonale Matrix P, so dass

$$S^t(T^tT)S \;=\; P.$$

Behauptung. Die diagonalen Einträge $p_1, \dots, p_n$ von P sind positiv.

Es ist

$$p_k \;=\; e_k^t P e_k \;=\; e_k^t S^t T^t T S e_k \;=\; (TSe_k)^t(TSe_k) \;=\; \|TSe_k\|^2 \;>\; 0.$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir bezeichnen nun mit D die diagonale Matrix mit den Einträgen $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$. Wir setzen $A = TSD^{-1}$. Dies ist eine orthogonale Matrix, denn

$$A^tA \;=\; (TSD^{-1})^t(TSD^{-1}) \;=\; D^{-1}\underbrace{S^tT^tTS}_{=P}D^{-1} \;=\; D^{-1}\underbrace{P}_{=D^2}D^{-1} \;=\; \mathrm{id}_n\,.$$

Der Satz folgt jetzt durch Auflösen von $A = TSD^{-1}$ nach T und der Beobachtung, dass die Matrix $B := S^{-1}$ orthogonal ist. □

Korollar 7.7. *Es sei*

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \;&\to\; \mathbb{R}_{>0} \\ A \;&\mapsto\; \Phi(A), \end{aligned}$$

eine Abbildung, welche folgende drei Eigenschaften besitzt:

(1) Φ *ist ein Gruppenhomomorphismus,*
(2) *für jede diagonale Matrix D mit positiven Diagonaleinträgen gilt $\Phi(D) = \det(D)$,*
(3) *für jede orthogonale Matrix A gilt $\Phi(A) = 1$.*

Dann gilt $\Phi(T) = |\det(T)|$ für alle $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Beweis. Es sei $\Phi\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Abbildung, welche die drei Eigenschaften erfüllt. Es sei nun $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ beliebig. Nach Satz 7.6 gibt es orthogonale Matrizen A und B und eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen, so dass $T = ADB$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \Phi(T) \;=\; \Phi(ADB) \;&=\; \Phi(A)\cdot\Phi(D)\cdot\Phi(B) && \text{Eigenschaft (1)} \\ &=\; \det(D) && \text{Eigenschaft (2) und (3)} \\ &=\; |\det(A)|\cdot\det(D)\cdot|\det(B)| && \text{denn die Determinate von} \\ & && \text{orthogonalen Matrizen ist } \pm 1 \\ &=\; |\det(ADB)| && \text{Multiplikativität der Determinante} \\ &=\; |\det(T)|. \end{aligned}$$

□

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen um Satz 7.4 zu beweisen.

[50] Ganz allgemein gilt, dass wenn A eine symmetrische reelle Matrix ist, dann gibt es eine orthogonale Matrix S und eine reelle diagonale Matrix P, so dass $S^tAS = P$. Diese Aussage wird beispielsweise in Kapitel 10 von Jänich: Lineare Algebra bewiesen.

Beweis von Satz 7.4. Für eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ setzen wir

$$\Phi(T) \;:=\; \begin{array}{l} \text{die nach Satz 7.1[51] eindeutig bestimmte reelle Zahl } C \in \mathbb{R}_{>0}, \\ \text{mit der Eigenschaft, dass } \underbrace{\mu_T(B)}_{\mathrm{Vol}(T(B))} = C \cdot \mathrm{Vol}(B) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass $\Phi(T) = |\det(T)|$ für alle $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Im Hinblick auf Korollar 7.7 genügt es jetzt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

(1) Φ ist ein Gruppenhomomorphismus,
(2) für jede diagonale Matrix D mit positiven Diagonaleinträgen gilt $\Phi(D) = \det(D)$,
(3) für jede orthogonale Matrix A gilt $\Phi(A) = 1$.

Für eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ können wir $\Phi(T)$ mithilfe einer beliebigen messbaren Menge B mit $\mathrm{Vol}(B) > 0$ berechnen, denn es gilt

$$\Phi(T) \;=\; \frac{\mathrm{Vol}(T(B))}{\mathrm{Vol}(B)}.$$

In allen drei Teilen der Behauptung bestimmen wir Φ durch eine geeignete Wahl von einer messbaren Menge B mit $\mathrm{Vol}(B) > 0$.

(1) Es seien $S, T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Wir wählen eine beliebige messbare Menge X mit $\mathrm{Vol}(X) > 0$. Dann ist

$$\Phi(S \cdot T) = \frac{\mathrm{Vol}(S(T(X)))}{\mathrm{Vol}(X)} \;=\; \underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(S(T(X)))}{\mathrm{Vol}(T(X))}}_{\substack{= \Phi(S),\text{ berechnet} \\ \text{mithilfe von } T(X)}} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(T(X))}{\mathrm{Vol}(X)}}_{\substack{= \Phi(T),\text{ berechnet} \\ \text{mithilfe von } X}} \;=\; \Phi(S) \cdot \Phi(T).$$

(2) Es sei D eine Diagonalmatrix mit den positiven Diagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_n$. Wir berechnen $\Phi(D)$ mithilfe des Einheitswürfels $W = [0,1]^n$. Dann gilt

$$\Phi(D) \;=\; \frac{\mathrm{Vol}(D(W))}{\mathrm{Vol}(W)} \;=\; \mathrm{Vol}([0,d_1] \times \cdots \times [0,d_n]) \;=\; \prod_{i=1}^{n} d_i \;=\; \det(D).$$

(3) Es sei A eine orthogonale Matrix. Wir bestimmen $\Phi(A)$ mithilfe vom Einheitsball $B = \overline{B_1(0)}$. Dann gilt

$$\Phi(A) \;=\; \frac{\mathrm{Vol}(A(B))}{\mathrm{Vol}(B)} \;\underset{\uparrow}{=}\; \frac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(B)} \;=\; 1.$$

da A orthogonal, also längenerhaltend ist, gilt $A(B) = B$. □

[51] Wir können hierbei anwenden, denn nach Lemma 7.5 ist μ_T translationsinvariant, zudem gilt für die offene, beschränkte Menge $X := T^{-1}((0,1)^n)$, dass $\mu_T(X) = \mathrm{Vol}(T(X)) = \mathrm{Vol}((0,1)^n) = 1$.

8. Das Lebesgue-Integral

8.1. **Einführung.** Ein *Maßraum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, bestehend aus einer Menge Ω eine Menge, einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und einem Maß $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Beispielsweise ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathrm{Vol})$ ein Maßraum.

Die allgemeine Integral-Theorie definiert ein Integral für 'integrierbare' Funktionen auf einem beliebigen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Aus Zeitgründen und der Verständlichkeit halber betrachten wir aber nur den Spezialfall, des Borel-Lebesgue Maßraums $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathrm{Vol}_n)$. Insbesondere, sagen wir im Folgenden $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *messbar*, wenn die Menge Borel–Lebesgue–messbar ist, d.h. wenn die Menge in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Bevor wir mit der Diskussion vom Integralbegriff beginnen, führen wir noch zwei Notation einen.

(1) Für eine Teilmenge $A \subset$ bezeichnen wir

$$\begin{aligned} \chi_A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A, \end{cases} \end{aligned}$$

als die *charakteristische Funktion von A*.

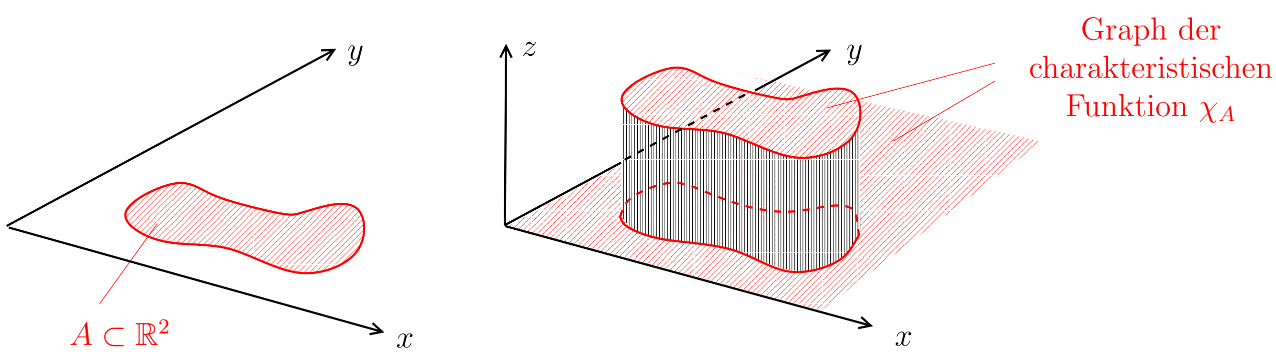


Abbildung 21. Der Graph einer charakteristischen Funktion.

(2) Für zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Unser Ziel ist es jetzt einen möglichst großzügigen Begriff von integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und eine Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{integrierbare Funktionen}\} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ g &\mapsto \int g\, dv \end{aligned}$$

einzuführen, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(0) Für alle messbaren $A \subset \mathbb{R}^n$ ist χ_A integrierbar und es gilt

$$\int \chi_A \, dv \quad = \quad \mathrm{Vol}_n(A) \qquad\qquad \text{Normierung.}$$

(1) Für integrierbare Funktionen f und g sowie $c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int cf + dg \, dv \quad = \quad c \int f \, dv \; + \; d \int g \, dv \qquad\qquad \text{Linearität.}$$

(2) Für integrierbare Funktionen f und g gilt

$$f \;\leq\; g \quad \Rightarrow \quad \int f \, dv \;\leq\; \int g \, dv \qquad\qquad \text{Monotonie.}$$

(3) Für eine Folge $\{f_k\}_{k \geq 1}$ von Funktionen, welche in einem geeigneten Sinne konvergiert, wollen wir, dass

$$\lim_{k \to \infty} f_k \;=\; f \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \int f_k \, dv \;=\; \int f \, dv \qquad\qquad \text{Stetigkeit.}$$

Selbst wenn wir uns nur auf den Fall $n = 1$ einschränken müssen wir arbeiten, denn das klassische Riemann-Integral erfüllt Eigenschaft (0) nicht. In der Tat, denn wie schon mehrmals erwähnt, ist die Menge $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ zwar messbar, aber die zugehörige charakteristische Funktion χ_A ist nicht Riemann-integrierbar.

8.2. **Messbare Funktionen.** Zur Vorbereitung der Definitions des Lebesgue-Integrals müssen wir noch den Begriff der messbaren Funktion einführen.

Definition. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

(1) Für $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\{f \leq c\} \;:=\; f^{-1}\big([-\infty, c]\big) \;=\; \{\text{alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } f(x) \leq c\}.$$

Ganz analog definieren wir auch $\{f < c\}$, $\{f \geq c\}$, $\{f > c\}$, $\{a < f < b\}$ usw.

(2) Wir sagen f *ist messbar*, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f \leq c\}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Beispiel.

(1) Jede monoton steigende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist messbar, denn für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f \leq c\}$ ein Intervall, also messbar.

(2) Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist messbar, denn für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist

$$\{f \leq c\} \;=\; f^{-1}\big(\underbrace{(-\infty, c]}_{\text{abgeschlossen}}\big)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, also messbar nach Satz 6.1.

Lemma 8.1. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist messbar,*

(2) *für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f < c\}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$,*

(3) *für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f \geq c\}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$,*

(4) *für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f > c\}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Wir beweisen, dass Messbarkeit die anderen Aussagen impliziert. Die Äquivalenz der Aussagen beweist man ganz analog.

Es sei also f eine messbare Funktion und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{f < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{f \leq c - \tfrac{1}{k}\}}_{\substack{\text{messbar nach} \\ \text{Voraussetzung}}},$$

eine abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen, also nach Satz 6.1 wiederum messbar. Zudem sind

$$\{f \geq c\} = \mathbb{R}^n \setminus \{f < c\}$$

und

$$\{f > c\} = \mathbb{R}^n \setminus \{f \leq c\}$$

Komplemente von messbaren Mengen, also messbar. □

Wir beweisen nun noch, wie wir aus messbaren Funktionen, weitere messbare Funktionen erhalten.

Lemma 8.2. *Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen. Dann gilt*

(1) *für alle $c \in \mathbb{R}$ ist auch cf messbar,*
(2) *die Funktion f^2 ist messbar,*
(3) *die Summe $f + g$ ist messbar,*
(4) *das Produkt $f \cdot g$ ist messbar,*
(5) *die Funktionen*

$$\begin{array}{rcl} \min(f,g)\colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \min\{f(x), g(x)\} \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{rcl} \max(f,g)\colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \max\{f(x), g(x)\} \end{array}$$

sind messbar.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind Übungsaufgaben in Übungsblatt 12.

(3) Nach Lemma 8.1 genügt es zu zeigen, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f + g < c\}$ messbar ist.

Es sei also $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gilt[52]

$$f(x) + g(x) < c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{es gibt eine } \textit{rationale} \text{ Zahl } r \text{, so dass} \\ f(x) < r \text{ und } g(x) < c - r. \end{array}$$

Also ist

$$\{f + g < c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{f < r\}}_{\text{messbar}} \cap \underbrace{\{g < c - r\}}_{\text{messbar}}$$

[52]Die '$\Leftarrow$'–Richtung ist offensichtlich. Wir zeigen nun noch die '$\Rightarrow$'–Richtung. Es sei also $f(x)+g(x) < c$. Wir setzen $\epsilon = c - f(x) - g(x)$. Nachdem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl r im Intervall $(f(x), f(x) + \epsilon)$. Dann gilt offensichtlich, dass $f(x) < r$, aber auch, dass $g(x) = c - (f(x) + \epsilon) < c - r$.

die abzählbare Vereinigung von Durchschnitten von messbaren Mengen, also wiederum messbar.

(4) Diese Aussage folgt aus den Aussagen (2), (3) und (4) und der Beobachtung, dass[53]

$$f \cdot g \;=\; \tfrac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big).$$

(5) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\min(f,g) \geq c\} \;=\; \{f \geq c\} \cap \{g \geq c\}$$

und

$$\{\max(f,g) \leq c\} \;=\; \{f \leq c\} \cap \{g \leq c\}.$$

Die Aussage folgt nun aus den Definitionen und aus Lemma 8.1. □

8.3. **Das Lebesgue-Integral für Stufenfunktionen.**

Definition. Eine *Stufenfunktion* ist eine Funktion der Form

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i\, \chi_{A_i},$$

wobei $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ und $A_1, \dots, A_m$ messbare Mengen sind.

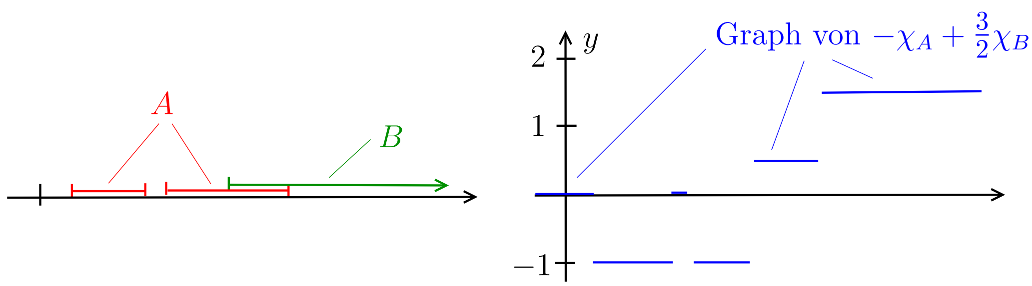


Abbildung 22. Der Graph einer Stufenfunktion.

Lemma 8.3. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist eine Stufenfunktion*

(2) *Die Funktion f nimmt endlich viele Werte $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$ an, und jedes Urbild $f^{-1}(d_i)$ ist messbar.*

(3) *Es gibt $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ und es gibt disjunkte, messbare Mengen $A_1, \dots, A_m$ mit $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_m = \mathbb{R}^n$, so dass*

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i\, \chi_{A_i}.$$

[53]Diesen Trick hatten wir schon in Analysis I verwendet um zu zeigen, dass das Produkt von Riemann-integrierbaren Funktionen wiederum Riemann-integrierbar ist.

Beweis. Wir beweisen zuerst die (1) $\Rightarrow$ (2)-Aussage. Es sei also $f = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\,\chi_{A_i}$, wobei $c_1,\dots,c_m \in \mathbb{R}$ und wobei $A_1,\dots,A_m$ messbare Mengen sind. Für $i = 1,\dots,m$ schreiben wir $A_i^+ := A_i$ und $A_i^- := A_i^c$. Dann ist

$$\mathbb{R}^n \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(A_i^+ \sqcup A_i^-)}_{=\mathbb{R}^n} \;=\; \bigsqcup_{(r_1,\dots,r_n)\in\{\pm\}^n} \underbrace{\overbrace{(A_1^{r_1}\cap\dots\cap A_n^{r_n})}^{\text{messbar}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{hierauf nimmt } f \text{ den Wert } \sum\limits_{\substack{i\in\{1,\dots,n\} \\ \text{mit } r_i=+}} c_i \text{ an}}}.$$

Wir sehen also, dass f nur endlich viele Werte annimmt, und das die Urbilder der Werte wiederum messbar sind.

Wir beweisen nun (2) $\Rightarrow$ (3). Wenn also die Funktion f nur die Werte $d_1,\dots,d_k \in \mathbb{R}$ annimmt, und wenn jedes Urbild $f^{-1}(d_i)$ messbar, dann ist

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{k} d_i \cdot \chi_{f^{-1}(d_i)}$$

eine Stufenfunktion, wobei die Urbilder disjunkt sind, und die Vereinigung der Urbilder ist der ganze $\mathbb{R}^n$.

Die (3) $\Rightarrow$ (1) Aussage ist natürlich trivial. $\square$

Wir überlassen den Beweis des folgenden Lemmas als freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 8.4. *Es seien f und g zwei Stufenfunktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Die Summe $f + g$ der Stufenfunktionen ist wiederum eine Stufenfunktion.*
(2) *Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist das Skalarprodukt $c \cdot f$ wieder eine Stufenfunktion.*
(3) *Die Funktionen* $\min(f,g)$ *und* $\max(f,g)$ *sind ebenfalls Stufenfunktionen.*

Lemma 8.5. *Stufenfunktionen sind messbar.*

Beweis. Es ist offensichtlich, dass charakteristische Funktionen von messbaren Mengen, messbar sind. Es folgt nun aus Lemma 8.2, dass jede Stufenfunktion messbar ist. $\square$

Definition. Für eine nichtnegative Stufenfunktion der Form

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i\,\chi_{A_i},$$

wobei $c_1,\dots,c_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $A_1,\dots,A_m$ disjunkte, messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind, schreiben wir[54]

$$\int f\,dv \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \mathrm{Vol}(A_i) \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Wir sagen f ist *Lebesgue-integrierbar*, wenn $\int f\,dv < \infty$ und wir bezeichnen dann $\int f\,dv$ als das *Lebesgue-Integral von* f.[55]

Bemerkung. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Stufenfunktion. Wir bezeichnen mit $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}_{>0}$ die verschiedenen positiven Funktionswerte. Es folgt leicht aus der Additivität von Vol, dass

$$\int f\,dv \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \mathrm{Vol}(f^{-1}(c_i)).$$

Dies zeigt insbesondere, dass das Lebesgue-Integral von f wohldefiniert ist.

Beispiel. Das Standardbeispiel einer Funktion, welche nicht Riemann-integrierbar ist, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 2, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion f ist eine Stufenfunktion, genauer gesagt es ist

$$f \;=\; 2\chi_A,$$

wobei $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dies ist eine abzählbare Menge, insbesondere eine Nullmenge. Es folgt nun, dass

$$\text{Lebesgue-Integral von } f \;=\; \int 2\chi_A\,dv \;=\; 2 \cdot \mathrm{Vol}(A) \;=\; 0.$$

Wir sehen also, dass sich der Begriff des Lebesgue-Integrals im Fall $n = 1$ vom Begriff des Riemann-Integrals unterscheidet.

Für eine Folge von Funktion $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $k \geq 1$ und für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$f_k \uparrow f \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{die Funktionenfolge ist monoton steigend} \\ \text{und konvergiert punktweise}^{56} \text{ gegen } f.\end{array}$$

Ganz analog definieren wir natürlich auch $f_k \downarrow f$.

In folgendem Satz fassen wir einige der wichtigsten Eigenschaften vom Lebesgue-Integral für nichtnegative Stufenfunktionen zusammen.

---

[54] Die Notation $\int \dots dv$ hat hierbei keine Bedeutung. Genauer gesagt, für das Integral in einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wir das Integral einer Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ normalerweise als $\int f\,d\mu$ geschrieben. In unserem Fall ist $\mu = \mathrm{Vol}$, d.h. wir müssten logischerweise $\int f\,d\,\mathrm{Vol}$ schreiben. Um die Notation etwas zu verkürzen schreiben wir jedoch dv anstatt $d\,\mathrm{Vol}$. In vielen Büchern wir das Lebesgue-Maß mit λ bezeichnet und das Lebesgue-Integral dementsprechend als $\int f\,d\lambda$ geschrieben.

[55] Warum haben wir uns in der Definition eigentlich auf *nichtnegative* Stufenfunktionen eingeschränkt?

[56] Zur Erinnerung, wir sagen eine Folge von Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ *konvergiert punktweise* gegen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.

Satz 8.6.

(0) *Für alle messbaren $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\int \chi_A \, dv \quad = \quad \mathrm{Vol}_n(A) \qquad\qquad \textit{Normierung.}$$

(1a) *Für jede nichtnegative Stufenfunktion f und jedes $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt*

$$\int cf \, dv \quad = \quad c \int f \, dv \qquad\qquad \textit{Homogenität.}$$

(1b) *Für alle nichtnegativen Stufenfunktionen f und g gilt*

$$\int f + g \, dv \quad = \quad \int f \, dv + \int g \, dv \qquad\qquad \textit{Additivität.}$$

(2) *Für nichtnegativen Stufenfunktionen f und g gilt*

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f \, dv \leq \int g \, dv \qquad\qquad \textit{Monotonie.}$$

(3) *Für eine Folge $\{f_k\}_{k \geq 1}$ von nichtnegativen Stufenfunktion und eine weitere Stufenfunktion f gilt*[57]

$$f_k \uparrow f \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \int f_k \, dv = \int f \, dv \qquad\qquad \textit{Stetigkeit.}$$

Beweis. Die Aussagen (0) und (1a) sind trivial. Wir beweisen nun (1b) und (2). Es seien also f und g zwei nichtnegative Stufenfunktionen. Nach Lemma 8.3 können wir schreiben

$$f \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} c_i \, \chi_{A_i}, \qquad \begin{array}{c}\text{wobei } c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und wobei } A_1, \dots, A_r \\ \text{disjunkt und messbar mit } A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r = \mathbb{R}^n\end{array}$$

und

$$g \quad = \quad \sum_{j=1}^{s} d_j \, \chi_{B_j}, \qquad \begin{array}{c}\text{wobei } d_1, \dots, d_s \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und wobei } B_1, \dots, B_s \\ \text{disjunkt und messbar mit } B_1 \sqcup \dots \sqcup B_s = \mathbb{R}^n.\end{array}$$

Indem wir nun zu den Schnittmengen $A_i \cap B_j$ übergehen können wir o.B.d.A. annehmen, dass $r = s$ und $A_i = B_i$ für $i = 1, \dots, r$. Aber dann sind die Aussagen (1b) und (2) trivialerweise richtig.

Zum Abschluß beweisen wir Aussage (3). Es sei nun $\{f_k\}_{k \geq 1}$ eine Folge von nichtnegativen Stufenfunktion mit $f_k \uparrow f$, wobei f eine weitere Stufenfunktion ist.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\int f \, dv = \infty$. Dann gibt es ein $c > 0$ und eine messbare Menge A mit $\mathrm{Vol}(A) = \infty$, so dass $f \geq c\chi_A$. Wir setzen

$$A_k \;:=\; \left\{ x \in A \,|\, f_k(x) \geq \tfrac{c}{2} \right\}.$$

[57]Es sei $\{f_k\}_{k \geq 1}$ eine Folge von nichtnegativen Stufenfunktion und es sei f eine weitere Stufenfunktion. Folgt eigentlich aus $f_k \downarrow f$, dass $\int f_k \, dv \downarrow \int f \, dv$?

Diese Menge ist messbar nach Lemma 8.5. Aus $f_k \uparrow f$ folgt $A_k \uparrow A$, also folgt aus Satz 6.2, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Vol}(A_k) = \infty$. Es ist

$$f_k \;\ge\; \tfrac{c}{2}\chi_{A_k}, \text{ daher ist } \int f_k\,dv \;\ge\; \tfrac{c}{2}\operatorname{Vol}(A_k), \text{ also gilt } \lim_{k\to\infty}\int f_k\,dv \;=\; \infty.$$

Wir betrachten nun den Fall, dass $\int f\,dv < \infty$. Wir setzen $g_k := f - f_k$. Dann gilt $g_k \downarrow 0$. Wir müssen nun nur noch[58] zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty}\int g_k\,dv \;=\; 0.$$

Wir setzen

$$M \;:=\; \max\{g_1(x)\,|\,x\in\mathbb{R}^n\} \text{ und } S := \{x\in\mathbb{R}^n\,|\,g_1(x)>0\}.$$

Es folgt aus Lemmas 8.1 und 8.5, dass S messbar ist. Aus

$$\operatorname{Vol}(S)\cdot\text{kleinster positiver Funktionswert von } g_1 \;\le\; \int g_1\,dv \;\le\; \int f\,dv \;<\; \infty,$$

folgt zudem, dass $\operatorname{Vol}(S) < \infty$.

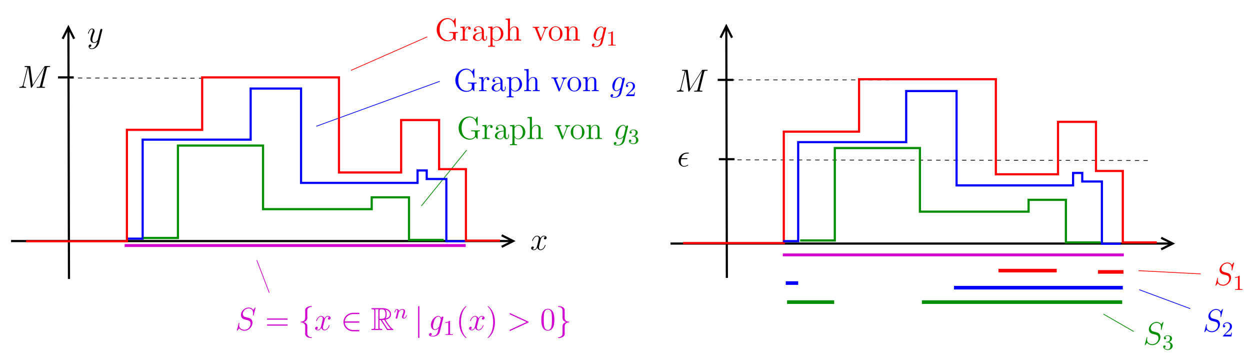


Abbildung 23. Skizze zum Beweis von Satz 8.6.

Wir wählen nun ein $\epsilon > 0$. Für $k\in\mathbb{N}$ betrachten wir

$$S_k \;:=\; \{x\in S\,|\,g_k(x)\le\epsilon\}.$$

[58] In der Tat, denn aus

$$\lim_{k\to\infty}\int g_k\,dv \;=\; 0 \text{ folgt } \int f\,dv \;=\; \lim_{k\to\infty}\int \underbrace{f_k+g_k}_{=f}\,dv \;=\; \lim_{k\to\infty}\int f_k\,dv + \underbrace{\lim_{k\to\infty}\int g_k\,dv}_{=0} \;=\; \lim_{k\to\infty}\int f_k\,dv.$$

Für jedes k und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt zudem, dass

$$0 \leq g_k(x) \leq \begin{cases} = 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \\ \leq M, & \text{wenn } x \in S \setminus S_k, \\ \leq \epsilon & \text{wenn } x \in S_k. \end{cases}$$

In anderen Worten, es gilt

$$0 \leq g_k \leq M \cdot \chi_{S \setminus S_k} + \epsilon \chi_{S_k}.$$

Daraus, und aus der gerade bewiesenen Additivität und Monotonie vom Lebesgue-Integral von nichtnegativen Stufenfunktionen, folgt, dass

$$0 \leq \int g_k \, dv \leq \underbrace{\underbrace{\int M \cdot \chi_{S \setminus S_k} \, dv}_{M \cdot (\mathrm{Vol}(S) - \mathrm{Vol}(S_k))} + \underbrace{\int \epsilon \chi_{S_k}}_{= \epsilon \cdot \mathrm{Vol}(S_k)} \, dv.}_{= M(\mathrm{Vol}(S) - \mathrm{Vol}(S_k)) + \epsilon \, \mathrm{Vol}(S_k)}$$

Also folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{k \to \infty} \int g_k \, dv &\leq M \cdot \underbrace{\lim_{k \to \infty} (\mathrm{Vol}(S) - \mathrm{Vol}(S_k))}_{\substack{= 0, \text{ denn aus } g_k \downarrow 0 \text{ folgt } S_k \uparrow S, \\ \text{also folgt aus Satz 6.2,} \\ \text{dass } \mathrm{Vol}(S_k) \uparrow \mathrm{Vol}(S)}} + \epsilon \underbrace{\lim_{k \to \infty} \mathrm{Vol}(S_k)}_{= \mathrm{Vol}(S)} \\ &= \epsilon \cdot \mathrm{Vol}(S). \end{aligned}$$

Nachdem diese Ungleichung für jedes $\epsilon > 0$ gilt, folgt, dass

$$\lim_{k \to \infty} \int g_k \, dv = 0.$$

□

Satz 8.6 besagt also, dass das Lebesgue-Integral von Stufenfunktionen die in Kapitel 8.1 gewünschten Eigenschaften besitzt. Aber wir sind natürlich noch lange nicht fertig, wir wollen ja nicht nur nichtnegative Stufenfunktionen sondern allgemeinere Funktionen, z.B. stetige Funktionen, integrieren. Wir werden deshalb im nächsten Kapitel den Begriff des Lebesgue-Integrals auf größere Klassen von Funktionen erweitern.

8.4. **Das Lebesgue-Integral für messbare nichtnegative Funktionen.** Wir wollen jetzt das Lebesgue-Integral von Stufenfunktionen auf messbare nichtnegative Funktionen fortsetzen.

Satz 8.7. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine messbare, nichtnegative Funktion. Dann gibt es eine aufsteigende Folge $\{f_k\}_{k \geq 1}$ von nichtnegativen Stufenfunktionen mit $f_k \uparrow f$.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass alle Werte von f in $[0, 1)$ liegen.

Die Idee ist nun für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f_k als die 'größte' Stufenfunktion zu wählen, welcher kleiner gleich f ist, und welche nur Werte in $\{\frac{i}{2^k} \mid i = 0, \ldots, 2^k - 1\}$ annimmt.

Wir erinnern noch an folgende Notation aus der Analysis I: für $y \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\lfloor y \rfloor \;:=\; \text{“}y \text{ abgerundet”} \;:=\; \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq y\}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun

$$\begin{aligned} f_k\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{2^k} \cdot \lfloor 2^k \cdot f(x) \rfloor. \end{aligned}$$

Wir müssen nun noch folgende Aussagen beweisen:

(1) jedes f_k ist eine nichtnegative Stufenfunktion,
(2) die Funktionenfolge $f_k, k \in \mathbb{N}$ ist aufsteigend,
(3) die Funktionenfolge $f_k, k \in \mathbb{N}$ konvergiert punktweise gegen f.

Wir beweisen nun diese drei Aussagen:

(1) Es ist klar, dass f_k nichtnegativ ist, und dass die Werte von f_k in $\{0, \frac{1}{2^k}, \ldots, \frac{2^k-1}{2^k}\}$ liegen. Zudem ist für $i \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ das Urbild

$$f_k^{-1}\big(\tfrac{i}{2^k}\big) \;=\; f^{-1}\big(\big[\tfrac{i}{2^k}, \tfrac{i+1}{2^k}\big)\big)$$

messbar. Also ist f_k nach Lemma 8.3 eine Stufenfunktion.

(2) Diese Aussage folgt aus der elementaren Beobachtung, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung gilt:

$$\tfrac{1}{2^{k+1}} \lfloor 2^{k+1} \cdot y \rfloor \;\geq\; \tfrac{1}{2^k} \lfloor 2^k \cdot y \rfloor.$$

(3) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2^k}$. Also konvergiert die Funktionenfolge $f_k, k \in \mathbb{N}$ punktweise gegen f.

Wir haben damit den Satz in dem Spezialfall bewiesen. Der allgemeine Fall, dass f beliebige

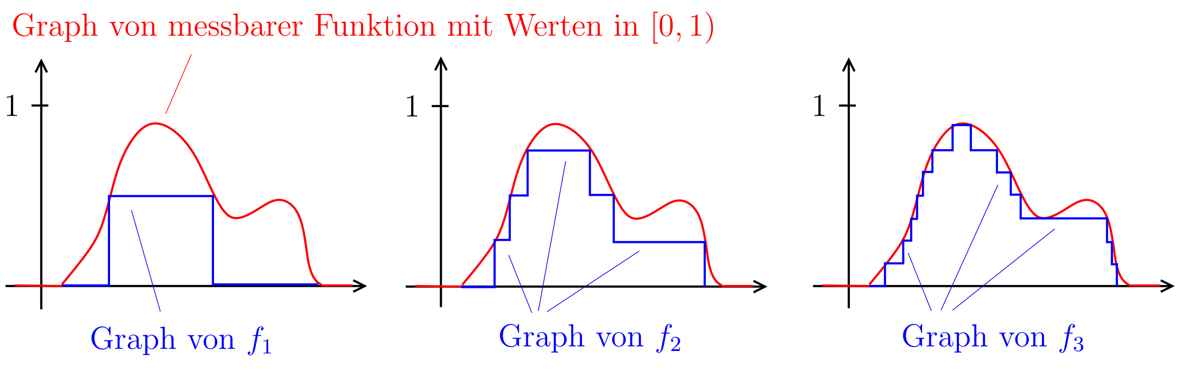


Abbildung 24. Skizze zum Beweis von Satz 8.7.

Werte annimmt wird in Übungsblatt 13 behandelt. □

[58] Anders ausgedrückt, f_k ist die Funktion, welche wir erhalten, indem wir jeden Funktionswerte von f auf die größte Zahl der Form $\{0, \frac{1}{2^k}, \ldots, \frac{2^k-1}{2^k}\}$ abrunden.

Definition. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine nichtnegative, messbare Funktion. Nach Satz 8.7 gibt es eine aufsteigende Folge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ von nichtnegativen Stufenfunktionen mit $f_k \uparrow f$. Wir setzen

$$\int f\,dv \;:=\; \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int f_k\,dv}_{\uparrow} \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

monoton steigende Folge, d.h. der Grenzwert existiert in $\overline{\mathbb{R}}_+$

Wenn $\int f\,dv < \infty$, dann nennen wir f *Lebesgue-integrierbar* und wir bezeichnen $\int f\,dv$ als das *Lebesgue-Integral von* f.

A priori hängt die Definition vom Lebesgue-Integral von f von der Wahl der f_k's ab. Das nächste Lemma besagt, dass dies, zum Glück, nicht der Fall ist.

Lemma 8.8. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine nichtnegative, messbare Funktion und es seien zudem $\{f_k\}_{k\geq 1}$ und $\{g_k\}_{k\geq 1}$ zwei aufsteigende Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen mit $f_k \uparrow f$ und $g_k \uparrow f$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k\,dv \;=\; \lim_{k\to\infty} \int g_k\,dv.$$

Beweis. Wir zeigen die Ungleichung

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k\,dv \;\leq\; \lim_{m\to\infty} \int g_m\,dv.$$

Aus Symmetriegründen gilt dann aber auch die umgekehrte Ungleichung, d.h. es folgt, dass beide Grenzwerte gleich sind.

Für $m \geq 1$ und $k \geq 1$ betrachten wir die Stufenfunktion $h_{km} := \min(f_k, g_m)$. Für fest gewähltes k gilt[59] $h_{km} \uparrow f_k$. Wir erhalten also, dass

$$\int f_k\,dv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 8.6 (3)}}}{=} \lim_{m\to\infty} \int h_{km}\,dv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 8.6 (2), denn } h_{mk} \leq g_m}}{\leq} \lim_{m\to\infty} \int g_m\,dv.$$

Nachdem dies für alle m gilt, gilt diese Ungleichung auch für den Grenzwert $m \to \infty$. Wir haben damit also die gewünschte Ungleichung der Grenzwerte bewiesen. $\square$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x &\mapsto \begin{cases} \infty, & \text{wenn } x = 3, \\ 0, & \text{wenn } x \neq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist keine Stufenfunktion, nachdem sie den Wert ∞ annimmt. Die Funktion ist jedoch messbar.[60] Wir können die Funktion f auch schreiben also $f = \infty \cdot \chi_{\{3\}}$. Wir

[59] Warum gilt dies?

[60] Warum?

setzen $f_k = k \cdot \chi_{\{3\}}$. Dann gilt $f_k \uparrow f$. Also ist

$$\int f\,dv \;=\; \lim_{k\to\infty}\int f_k\,dv \;=\; \lim_{k\to\infty}\underbrace{\int k\cdot\chi_{\{3\}}\,dv}_{=k\cdot \mathrm{Vol}(\{3\})=0} \;=\; 0.$$

Die Funktion f nimmt also den Wert ∞ an, ist aber Lebesgue-Integrierbar mit Lebesgue-Integral gleich null.

Das folgende Lemma, welches in Übungsblatt 13 bewiesen wird, verallgemeinert etwas das vorherige Beispiel.

Lemma 8.9. *Es sei f eine nichtnegative, messbare Funktion. Dann gilt*

$$\{x\in\mathbb{R}^n \,|\, f(x)\neq 0\} \text{ ist eine Nullmenge} \quad\Rightarrow\quad \int f\,dv \;=\; 0.$$

Der folgende Satz ist nun eine Verallgemeinerung von Satz 8.10 auf nichtnegative, messbaren Funktionen.

Satz 8.10.

(1) *Für alle nichtnegativen, messbaren Funktionen f und g und alle $c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt*

$$\int cf + dg\,dv \;=\; c\int f\,dv + d\int g\,dv \qquad \textit{Linearitt}$$

(2) *Für alle nichtnegativen, messbaren Funktionen f und g gilt*

$$f \leq g \;\Rightarrow\; \int f\,dv \leq \int g\,dv \qquad \textit{Monotonie.}$$

(3) *Für eine Folge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ von nichtnegativen, messbaren Funktionen und eine weitere nichtnegative, messbare Funktion g gilt*

$$f_k \uparrow g \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty}\int f_k\,dv = \int g\,dv \qquad \textit{Stetigkeit.}$$

Beweis. Der Beweis von (1) ist elementar und ist eine freiwillige Übungsaufgabe. Der Beweis von (2) ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 13.

Wir beweisen nun noch Aussage (3). Nach Satz 8.7 gibt es für jedes k eine aufsteigende Folge $\{f_{kj}\}_{j\geq 1}$ von Stufenfunktionen mit $f_{kj} \uparrow f_k$. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$g_m \;:=\; \max\{f_{1m}, \ldots, f_{mm}\}.$$

Dann ist[61] $g_m \uparrow g$. Also gilt per Definition, dass

$$\lim_{m\to\infty}\int g_m\,dv \;=\; \int g.$$

Andererseits gilt für alle $m \geq 1$, dass

$$g_m \;=\; \max\{\underset{\underset{f_1}{\text{\rotatebox{90}{$\geq$}}}}{f_{1m}}, \ldots, \underset{\underset{f_m}{\text{\rotatebox{90}{$\geq$}}}}{f_{mm}}\} \;\leq\; f_m \;\leq\; g.$$

[61] Warum ist das so? Genauer gesagt, warum ist die Funktionenfolge $g_m, m \in \mathbb{N}$ aufsteigend, und warum konvergiert sie punktweise gegen g?

Also ist

$$\int g_m \, dv \;\leq\; \int f_m \, dv \;\leq\; \int g \, dv.$$

Wir erhalten nun die gewünschte Aussage durch Grenzwertbildung. □

8.5. **Das Lebesgue-Integral.** Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir nun

$$f_+ \;:=\; \max(f,0) \quad \text{und} \quad f_- \;:=\; -\min(f,0).$$

Wenn f messbar ist, dann folgt aus Lemma 8.2, dass auch f_- und f_+ messbar sind. Wir können dann also $f = f_+ - f_-$ als Differenz von zwei messbaren, nichtnegativen Funktionen schreiben. Dies ermöglicht es uns nun, ganz allgemein den Begriff vom Lebesgue-Integral einzuführen.

Definition. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Wir sagen, f ist *Lebesgue-integrierbar*, wenn f messbar ist, und wenn für die beiden Funktionen $f_+, f_-\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt

$$\int f_+ \, dv \;<\; \infty \quad \text{und} \quad \int f_- \, dv \;<\; \infty.$$

Wir bezeichnen dann

$$\int f \, dv \;:=\; \int f_+ \, dv \;-\; \int f_- \, dv$$

als das *Lebesgue-Integral von* f.

Der nächste Satz ist zum großen Teil das Analogon zu Satz 8.10.

Satz 8.11. *Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen.*

(1a) *Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist cf Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int cf \, dv \;=\; c\int f \, dv \qquad\qquad \textit{Homogenität.}$$

(1b) *Wenn $f+g$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist,*[62] *dann ist auch $f+g$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt*

$$\int f+g \, dv \;=\; \int f \, dv + \int g \, dv \qquad\qquad \textit{Additivität.}$$

(2) *Es gilt*

$$f \leq g \;\Rightarrow\; \int f \, dv \leq \int g \, dv \qquad\qquad \textit{Monotonie.}$$

(3) *Die Funktion $|f|$ ist Lebesgue-integrierbar und es gilt die Ungleichung*

$$\left| \int f \, dv \right| \;\leq\; \int |f| \, dv.$$

Für den Beweis von Satz 8.11 benötigen wir folgende zwei Lemmas.

[62] Zur Erinnerung, $f+g$ ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert, wenn es kein $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass eine Funktion den Wert $-\infty$ und die andere Funktion den Wert ∞ annimmt.

Lemma 8.12. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann gilt* [63]

$$f \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \int |f|\,dv < \infty.$$

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann gilt

$$f \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \;\Rightarrow\; \int f_+\,dv < \infty \text{ und } \int f_-\,dv < \infty \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 8.10 und } |f| = f_- + f_+}}{\Rightarrow}\; \int |f|\,dv < \infty.$$

Andererseits gilt

$$\int |f|\,dv < \infty \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 8.10 und } f_\pm \le |f|}}{\Rightarrow}\; \int f_+\,dv < \infty \text{ und } \int f_-\,dv < \infty \;\Rightarrow\; f \text{ ist Lebesgue-integrierbar.}$$

□

Lemma 8.13. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Wir nehmen an, dass es zwei nichtnegative messbare Funktionen $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gibt, so dass*

$$f \;=\; f_1 - f_2 \quad \text{und} \int f_i\,dv \;<\; \infty \;\text{ für } i = 1, 2.$$

Dann ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int f\,dv \;=\; \int f_1\,dv - \int f_2\,dv.$$

Beweis. Aus $|f| \le f_1 + f_2$ und der Voraussetzung folgt, dass $\int |f|\,dv < \infty$, also ist f nach Lemma 8.12 Lebesgue-integrierbar. Zudem gilt, dass

$$\int f\,dv \;=\; \int f_+\,dv - \int f_-\,dv \;\overset{\substack{\text{Satz 8.10 angewandt auf die nichtnegativen} \\ \text{Funktionen } f_\pm \text{ und } g := f_1 - f_+ = \min(f_1, f_2) \\ \downarrow}}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hierbei folgt aus } f_1 \ge f_+, \\ \text{dass } \int g\,dv < \infty}}{=}}\; \int \underbrace{f_+ + g}_{=f_1}\,dv \;-\; \int \underbrace{f_- + g}_{\substack{= f_2, \text{ nachdem} \\ f_+ - f_- = f_1 - f_2}}\,dv \;=\; \int f_1\,dv - \int f_2\,dv.$$

□

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 8.11 zu.

Beweis von Satz 8.11. Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen.

(1a) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Für $c = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $c > 0$ folgt die Behauptung aus Satz 8.10 und aus $(cf)_+ = cf_+$ und $(cf)_- = cf_-$. Für $c < 0$ folgt die Behauptung aus Satz 8.10 und aus $(cf)_+ = -cf_-$ und $(cf)_- = -cf_+$.

(1b) Es folgt aus Lemma 8.13, dass

$$f + g \;=\; (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

[63] Die Funktion $|f| = \max(f, 0) + \max(-f, 0)$ ist messbar nach Lemma 8.2.

Lebesgue-integrierbar ist. Zudem gilt

$$\begin{aligned}\int f+g\,dv \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 8.13}}}{=} & \int f_+ + g_+\,dv - \int f_- + g_-\,dv \\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 8.10}}}{=} & \int f_+\,dv + \int g_+\,dv - \int f_-\,dv - \int g_-\,dv \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per Definition}}}{=} \int f\,dv + \int g\,dv.\end{aligned}$$

(2) Aus $f \le g$ folgt, dass $f_+ \le g_+$ und $f_- \ge g_-$. Daraus folgt, dass

$$\int f\,dv = \int f_+\,dv - \int f_-\,dv \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 8.10}}}{\le} \int g_+\,dv - \int g_-\,dv = \int g\,dv.$$

(3) Wir hatten gerade in Lemma 8.12 gesehen, dass die Funktion $|f|$ Lebesgue-integrierbar ist. Zudem folgt aus

$$-|f| \le f \le |f|$$

und der gerade bewiesenen Monotonie des Lebesgue-Integrals, dass

$$-\int |f|\,dv \le \int f\,dv \le \int |f|\,dv.$$

Aber dies ist gerade die Ungleichung, welche wir beweisen wollten. □

In Satz 8.11 hatten wir keinerlei Stetigkeitseigenschaften formuliert. Der folgende Satz von Levi ist nun ein erster solcher Stetigkeitssatz. Später werden noch mehr Sätze folgen.

Satz 8.14. (Satz von der monotonen Konvergenz von Levi) *Es sei $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Wir nehmen an, dass alle Lebesgue-Integrale durch ein $M \in \mathbb{R}$ beschränkt sind, d.h. dass es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\int f_k\,dv \le M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Grenzfunktion $f := \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int f_k\,dv.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für eine absteigende Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

In dem Beweis, dass die Grenzfunktion Lebesgue-integrierbar ist, werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 8.15. *Für jede aufsteigende Folge von messbaren Funktionen f_k ist auch die Grenzfunktion f messbar.*

Beweis. Das Lemma folgt aus der Beobachtung, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{f \le c\} \;=\; \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \le c\}.$$

□

Wir wenden uns nun dem Beweis vom Satz von der monotonen Konvergenz von Levi zu.

Beweis vom Satz von der monotonen Konvergenz von Levi.

Indem wir f_1 'überall abziehen' können wir den allgemeinen Fall auf den Fall von nichtnegativen Funktionen zurückführen. Im Fall von nichtnegativen Funktionen können wir dann Satz 8.10 verwenden.

Wir setzen

$$g_k \;:=\; f_k - f_1, \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und wir setzen } g \;:=\; \lim_{k\to\infty} g_k \;=\; f - f_1.$$

Es genügt nun die analoge Aussage für die g_k's und g zu beweisen.

Jetzt ist $\{g_k\}_{k\ge\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von *nichtnegativen* messbaren Funktionen. Nach Lemma 8.15 ist die Funktion $g = \lim\limits_{k\to\infty} g_k$ messbar. Es folgt also aus Satz 8.10, dass

$$\int g\,dv \;=\; \lim_{k\to\infty} \int g_k\,dv.$$

Wir müssen nun noch beweisen, dass g Lebesgue-integrierbar ist, d.h. wir müssen zeigen, dass das Integral von g endlich ist. Dies folgt aus dem obigen Grenzwert und der Beobachtung, dass für alle k gilt

$$\int g_k\,dv \;=\; \int f_k - f_1\,dv \;=\; \int f_k\,dv - \int f_1 dv \;\le\; N := M - \int f_1\,dv.$$

□

Satz 8.16. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\begin{array}{c}\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \neq 0\} \\ \textit{ist eine Nullmenge}\end{array} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{c} f \textit{ ist Lebesgue-integrierbar} \\ \textit{mit } \displaystyle\int |f|\,dv \;=\; 0.\end{array}$$

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion.

Wir beweisen zuerst die "$\Rightarrow$" Richtung. Wenn $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist, dann gilt die gleiche Aussage auch für f_- und f_+. Lemma 8.9 besagt, dass f_- und f_+ Lebesgue-integrierbar sind mit Lebesgue-Integral null. Es folgt nun aus der Definition vom Lebesgue-Integral von f, dass f Lebesgue-integrierbar ist. Zudem ist

$$\int |f|\,dv \;=\; \int f_+\,dv + \int f_-\,dv \;=\; 0.$$

Wir beweisen nun die "$\Leftarrow$" Richtung. Wir nehmen also an, dass f Lebesgue-integrierbar ist mit $\int |f|\,dv = 0$. Wir setzen $S := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \neq 0\}$. Dann ist

$$\operatorname{Vol}(S) \;=\; \int \chi_S\,dv \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 8.10,} \\ \text{denn } \min\{k\cdot|f|,\chi_S\}\uparrow\chi_S}}{=}\; \lim_{k\to\infty} \int \underbrace{\min\{k\cdot|f|,\chi_S\}}_{\le k|f|}\,dv \;\le\; \lim_{k\to\infty} k \int |f|\,dv \;=\; 0.$$

□

Man sagt oft, dass eine Aussage über eine oder mehrere Funktionen 'fast überall' gilt, wenn die Aussage außerhalb einer Nullmenge wahr ist. Beispielsweise besagt Lemma 8.16, dass das Lebesgue-Integral einer messbaren Funktion, welche fast überall verschwindet, null ist. Insbesondere sagen wir, zwei Funktionen f und g *stimmen fast überall überein*, wenn

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \neq g(x)\}$$

eine Nullmenge ist.

Folgender Satz folgt nun leicht aus Satz 8.16 und der Additivität des Lebesgue-Integrals.

Satz 8.17. *Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei messbare Funktionen, welche fast überall übereinstimmen. Dann gilt*

$$f \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ ist Lebesgue-integrierbar.}$$

Wenn die Funktionen Lebesgue-integrierbar sind, dann gilt zudem, dass

$$\int f\,dv \;=\; \int g\,dv.$$

Wir erlauben durchgehend Funktionen, welche auch die Werte $\pm\infty$ annehmen. Das folgende Lemma besagt nun aber, dass eine Lebesgue-integrierbare Funktion fast überall endlich ist. Das Lemma wird in Übungsblatt 13 bewiesen.

Satz 8.18. *Eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist fast überall endlich, d.h.*

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) = -\infty \text{ oder } f(x) = \infty\right\}$$

ist eine Nullmenge.

8.6. **Integration über Teilmengen.** Im Folgenden erweitern wir etwas den Begriff vom Lebesgue-Integral.

Definition.

(1) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge. Wir sagen f *ist über A Lebesgue-integrierbar*, wenn $\chi_A \cdot f$ Lebesgue-integrierbar ist. Wenn dies der Fall ist, dann bezeichnen wir

$$\int_A f\,dv \;:=\; \int \chi_A \cdot f\,dv$$

als das *Lebesgue-Integral von f über A*.

(2) Es sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion auf einer messbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir setzen diese zu einer Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ fort, indem wir $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \notin A$ setzen. Wir sagen f ist Lebesgue-integrierbar, wenn $\tilde{f}$ Lebesgue-integrierbar ist. Wenn dies der Fall ist, dann bezeichnen wir

$$\int_A f\,dv \;:=\; \int \tilde{f}\,dv$$

als das Lebesgue-Integral von f.

Es gelten die offensichtlichen Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnisse von Lebesgue-Integralen auf $\mathbb{R}^n$ zu diesen beiden Erweiterungen. Beispielsweise ist das Lebesgue-Integral über eine Teilmenge A additiv und monoton.

Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 13 bewiesen.

Lemma 8.19. *Es sei X eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, es sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und es sei $X = A \cup B$ eine Zerlegung von X in zwei messbare Mengen A und B, so dass $A \cap B$ eine Nullmenge ist. Dann gilt*

$$f \text{ ist Lebesgue-integrierbar auf } A \cup B \iff f \text{ ist Lebesgue-integrierbar auf } A \text{ und auf } B.$$

Wenn die Funktion auf $A \cup B$ Lebesgue-integrierbar ist, dann gilt auch, dass

$$\int\limits_{A \cup B} f\,dv \quad = \quad \int\limits_A f\,dv + \int\limits_B f\,dv.$$

Der folgende Satz gibt nun ein oft hilfreiches Kriterium für Lebesgue-Integrierbarkeit.

Satz 8.20. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte messbare Teilmenge. Dann ist jede beschränkte stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar.*

Der Satz besagt also insbesondere, dass jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar ist.

Beweis. Wir setzen f wiederum zu einer Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ fort, indem wir $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \notin A$ setzen. In Übungsblatt 12 wurde gezeigt, dass die Funktion $\tilde{f}$ messbar ist.

Nach Lemma 8.12 genügt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

$$\int |\tilde{f}|\,dv \;<\; \infty.$$

Nach Voraussetzung ist f beschränkt. Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|\tilde{f}(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zudem ist nach Voraussetzung auch A beschränkt, insbesondere gilt $\mathrm{Vol}(A) < \infty$. Es folgt nun, dass

$$\int |f|\,dv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } |f| \leq C \cdot \chi_A}}{\leq} \int C \cdot \chi_A\,dv \;=\; C \cdot \mathrm{Vol}_n(A) \;<\; \infty.$$

□

9. Der Zusammenhang zwischen dem Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral

9.1. Definition und Eigenschaften vom Riemann-Integral. Wir erinnern in diesem Kapitel an die Definition vom Riemann-Integral und an einige Eigenschaften, welche wir in Analysis I bewiesen hatten.

Es sei nun $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Eine *Zerlegung Z von $[a,b]$* ist eine Menge $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ von reellen Zahlen, so dass

$$a = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < z_n = b.$$

Sei nun $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$U(Z,f) \quad := \quad \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \inf f([z_k, z_{k+1}])$$

die *Untersumme von f bezüglich der Zerlegung Z* und

$$O(Z,f) \quad := \quad \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \sup f([z_k, z_{k+1}])$$

heißt die *Obersumme von f bezüglich der Zerlegung Z*.

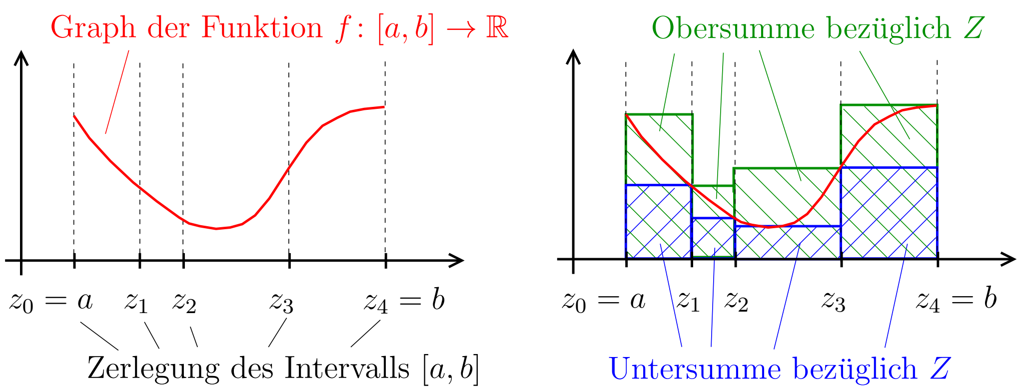


Abbildung 25. Die Untersumme und die Obersumme von f bezüglich einer Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

Definition. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\sup\{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \quad = \quad \inf\{O(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}.$$

Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad := \quad \inf\{O(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

das *Riemann-Integral über f von a nach b*.

In Analysis I hatten wir gezeigt, dass beispielsweise alle stetigen Funktionen Riemann-integrierbar sind. Das folgende Beispiel gibt den Beweis, für die schon mehrmals erwähnte Aussage, dass es beschränkte Funktionen gibt, welche nicht Riemann-integrierbar sind.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \cap [0,3] \\ 2, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt für jede Zerlegung $Z = \{z_0, \ldots, z_n\}$ von $[a,b]$, dass

$$U(Z,f) = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \underbrace{\inf f([z_k, z_{k+1}])}_{\substack{=0, \text{ weil } [z_k,z_{k+1}] \\ \text{rationale Zahlen enthält}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot 0 = 0$$

$$O(Z,f) = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \underbrace{\sup f([z_k, z_{k+1}])}_{\substack{=2, \text{ weil } [z_k,z_{k+1}] \\ \text{irrationale Zahlen enthält}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot 2 = 3 \cdot 2.$$

Die Funktion f ist also nicht Riemann-integrierbar.

Folgender Satz folgt leicht aus Lemma 13.1 und Satz 13.2 aus der Analysis I Vorlesung.

Satz 9.1. *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es eine aufsteigende Folge von Zerlegungen $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots$ von $[a,b]$ gibt, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

Zudem, wenn es eine solche Folge von Zerlegungen gibt, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

Definition. Wir sagen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass f auf allen offenen Intervallen (z_i, z_{i+1}) konstant ist. [64]

Lemma 9.2. *Jede Treppenfunktion ist eine Stufenfunktion, aber nicht jede Stufenfunktion ist eine Treppenfunktion.*

Beweis. Es sei zuerst $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, d.h. es gibt eine Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ von $[a,b]$, so dass f auf allen offenen Intervallen (z_i, z_{i+1}) konstant ist. Die Treppenfunktion f ist also eine Linearkombination von charakteristischen Funktionen über den offenen Intervallen (z_i, z_{i+1}) und den Punkten $z_0, \ldots, z_n$. Insbesondere ist die Treppenfunktion f eine Stufenfunktion.

[64] Die Treppenfunktion kann auf den Punkten $z_0, \ldots, z_n$ beliebige Werte annehmen.

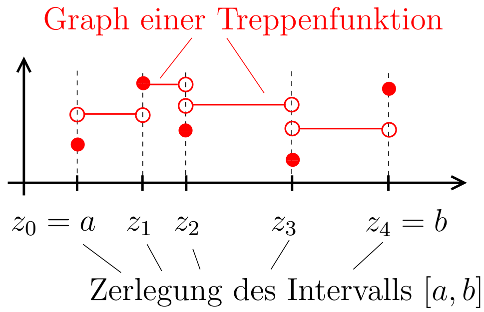


ABBILDUNG 26. Graph einer Treppenfunktion.

Andererseits ist nicht jede Stufenfunktion eine Treppenfunktion. Beispielsweise ist für $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ die charakteristische Funktion χ_A eine Stufenfunktion, aber keine Treppenfunktion. □

Der folgende Satz gibt nun eine weitere Folgerung aus der Riemann-Integrierbarkeit.

Satz 9.3. *Für jede Riemann-integrierbare Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt es eine aufsteigende Folge φ_n von Treppenfunktionen und eine absteigende Folge ψ_n von Treppenfunktionen, so dass $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ für alle n, und so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x) dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\, dx.$$

BEWEIS. Es sei also $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für eine beliebige Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ von $[a, b]$ definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi(Z): [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in Z, \\ \inf\{f([z_k, z_{k+1}])\}, & \text{wenn } x \in (z_k, z_{k+1}) \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi(Z): [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in Z, \\ \sup\{f([z_k, z_{k+1}])\}, & \text{wenn } x \in (z_k, z_{k+1}). \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann folgende Aussagen leicht verifizieren:

(a) $\varphi(Z)$ und $\psi(Z)$ sind Treppenfunktionen,
(b) es ist $\varphi(Z) \leq f \leq \psi(Z)$,
(c) für Zerlegungen $Z \subset Z'$ gilt $\varphi(Z) \leq \varphi(Z')$ und $\psi(Z') \leq \psi(Z)$,
(d) es ist

$$\int_a^b \varphi(Z)(x)\, dx \;=\; U(Z, f) \text{ und } \int_a^b \psi(Z)(x)\, dx \;=\; O(Z, f).$$

Nach Satz 9.1 existiert eine aufsteigende Folge von Zerlegungen $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots$ von $[a,b]$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) \;=\; \int\limits_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

Nach (a) und (c) ist $\varphi_n := \varphi(Z_n)$ eine aufsteigende Folge von Treppenfunktion und zudem ist $\psi_n := \psi(Z_n)$ eine absteigende Folge von Treppenfunktionen. Außerdem besagt (b), dass $\varphi_n \le f \le \psi_n$. Zudem folgt aus der Wahl der Zerlegungen Z_n und aus (d), dass

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx \;=\; \int\limits_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(x)\,dx.$$

$\square$

9.2. **Der Zusammenhang zwischen dem Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral.** Für Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall haben wir nun zwei Integralbegriffe:

(1) In Analysis I hatten wir den Begriff Riemann-integrierbar eingeführt, und im Falle der Riemann-Integrierbarkeit, dass Riemann-Integral

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

definiert.

(2) Wir haben im vorherigen Kapitel den Begriff Lebesgue-integrierbar eingeführt, und im Falle der Lebesgue-Integrierbarkeit, dass Lebesgue-Integral

$$\int\limits_{[a,b]} f\,dv$$

definiert.

Wie schon mehrmals erwähnt sind diese beiden Integralbegriffe im Allgemeinen verschieden. Betrachten wir beispielsweise die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\;\to\; \mathbb{R} \\ x &\;\mapsto\; \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}\cap[0,1], \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir hatten gerade gesehen, dass f nicht Riemann-integrierbar ist. Andererseits hatten wir auf Seite 206 gezeigt, dass f Lebesgue-integrierbar ist mit Lebesgue-Integral 0.

Der folgende Satz besagt nun, dass jede Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. Der Begriff vom Lebesgue-Integral beinhaltet also das Riemann-Integral, erweitert den Integralbegriff jedoch auf weitere Funktionen auf $\mathbb{R}$ und auch auf den mehrdimensionalen Fall.

Satz 9.4. *Jede Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Riemann-Integral}} \;=\; \underbrace{\int_{[a,b]} f\,dv.}_{\text{Lebesgue-Integral}}$$

Beweis. Es sei also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Nach Satz 9.3 gibt es eine aufsteigende Folge φ_n von Treppenfunktionen und eine absteigende Folge ψ_n von Treppenfunktionen, so dass $\varphi_n \le f \le \psi_n$ für alle n, und so dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n\,dx \;=\; \int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n\,dx.$$

Man kann leicht zeigen, dass für eine Treppenfunktion das Riemann-Integral mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt. Es folgt also, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \varphi_n\,dv \;=\; \int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \psi_n\,dv.$$

Wir setzen $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$ und $\psi = \lim\limits_{n\to\infty}\psi_n$. Nach dem Satz 8.14 von der monotonen Konvergenz von Levi sind φ und ψ Lebesgue-integrierbar mit

$$\int \varphi\,dv \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\varphi_n\,dv \qquad \text{und} \qquad \int \psi\,dv \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\psi_n\,dv.$$

Behauptung. Die Funktionen φ und f stimmen fast überall überein.[65]

Aus $\varphi \le f \le \psi$ folgt $\psi - \varphi \ge 0$. Aus

$$\int_{[a,b]} \psi - \varphi\,dv \;=\; 0$$

zusammen mit Satz 8.16 folgt, dass φ und ψ fast überall einstimmen. Dann stimmen auch[66] f und φ fast überall überein. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

[65]Im Allgemeinen müssen φ, ψ und f nicht überall übereinstimmen. Wir betrachten z.B. die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [-1,1] &\;\to\; \mathbb{R} \\ x &\;\mapsto\; \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \ne 0, \\ 1, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

und die Folge von Zerlegungen $Z_n = \{-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1\}$. In der Notation vom Beweis von Satz 9.3 setzen wir $\varphi_n = \varphi(Z_n)$ und $\psi_n = \psi(Z_n)$. Dann sieht man leicht, dass $\varphi_n(0) = 0$ für alle n, aber $\psi_n(0) = 1$ für alle n. Darüber hinaus ist φ die Nullfunktion, aber $\psi = f$ ist nicht die Nullfunktion. D.h. φ und $\psi = f$ stimmen nur außerhalb der Nullmenge $\{0\}$ überein.

[66]Warum folgt das?

Es folgt nun aus der Behauptung und aus Satz 8.17, dass auch f Lebesgue-integrierbar ist mit

$$\int_{[a,b]} f\, dv \;=\; \int_{[a,b]} \varphi\, dv \;=\; \int_a^b f(x)\, dx.$$ □

9.3. **Der Satz von der majorisierten Konvergenz.** Wir möchten als nächstes Satz 9.4 zu uneigentlichen Integralen erweitern. Beispielsweise möchten wir zeigen, dass für eine nichtnegative Riemann-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx}_{\text{Riemann-Integral}} \;=\; \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f\, dv.}_{\text{Lebesgue-Integral}}$$

Um diese Aussage zu beweisen benötigen wir folgenden Satz.

Satz 9.5. (Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue) *Es sei im Folgenden $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$ eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen, welche punktweise fast überall gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiert.*

Wenn es eine Lebesgue-integrierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gibt, so dass $|f_k| \leq F$ für alle $k \geq 1$, dann ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int f\, dv \;=\; \lim_{k\to\infty} \int f_k\, dv.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass f_k überall punktweise gegen f konvergiert.

> Die Idee ist durch geschickt gewählte Hilfsfolgen den Satz auf den Satz 8.14 von der monotonen Konvergenz zurückzuführen. Insbesondere müssen wir aus der Folge f_k, welche nicht notwendigerweise monoton ist, Funktionenfolgen "basteln", welche monoton sind.

Behauptung. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$g_k \;:=\; \sup\{f_i \,|\, i \geq k\}.$$

Dann gilt

(1) es ist $g_k \downarrow f$,
(2) jede Funktion g_k ist Lebesgue-integrierbar,
(3) es gilt

$$\text{(a)} \qquad \int f\, dv \;=\; \lim_{k\to\infty} \int g_k\, dv.$$

Wir beweisen nun die Behauptung. Es ist leicht zu sehen, dass $g_k \downarrow f$. [67] Wir wollen nun mithilfe vom Satz 8.14 von der monotonen Konvergenz zeigen, dass g_k Lebesgue-integrierbar

[67] Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Es ist offensichtlich, dass $g_k(x), k \in \mathbb{N}$ monoton fallend ist. Zudem gilt

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) \;=\; \limsup f_k(x) \;=\; f(x).$$

ist. Für $j \geq k$ setzen wir dazu

$$g_{kj} \ := \ \max\{f_i \,|\, i = k, \ldots, j\}, \text{ wobei } j \geq k.$$

Dies ist eine monoton steigende Funktionenfolge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen[68]mit $g_{kj} \uparrow g_k$. Zudem gilt für alle $j \geq k$, dass

$$\int g_{kj}\, dv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } g_{kj} \leq \max\{|f_k|, \ldots, |f_j|\} \leq F}}{\leq} \int F\, dv \ =: \ M.$$

Also ist nach dem Satz 8.14 von der monotonen Konvergenz die Funktion g_k Lebesgue-integrierbar. Nachdem $g_k \downarrow f$ und nachdem

$$\int g_k\, dv \ \geq \ \int -F\, dv \ = \ -M$$

kann man wiederum den Satz 8.14 von der monotonen Konvergenz anwenden und wir erhalten die dritte Aussage. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Ganz analog setzen wir nun

$$h_k \ := \ \inf\{f_i \,|\, i \geq k\}.$$

Wie oben zeigt man nun, dass die Funktionen h_k Lebesgue-integrierbar sind, und dass

$$\text{(b)} \qquad \int f\, dv \ = \ \lim_{k\to\infty} \int h_k\, dv.$$

Da für alle k gilt, dass $h_k \leq f_k \leq g_k$ folgt nun aus (a) und (b), dass

$$\int f\, dv \ = \ \lim_{k\to\infty} \int g_k\, dv \ \leq \ \lim_{k\to\infty} \int f_k\, dv \ \leq \ \lim_{k\to\infty} \int h_k\, dv \ = \ \int f\, dv.$$

Wir haben also die gewünschte Gleichheit gezeigt. Wir haben damit den Satz bewiesen, in dem Spezialfall, dass die Folge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ überall punktweise gegen f konvergiert.

Wir betrachten nun noch den allgemeinen Fall. Nach Voraussetzung gibt es eine Nullmenge N, so dass

$$f(x) \ = \ \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus N.$$

Dann gilt

$$\chi_{\mathbb{R}^n\setminus N} \cdot f(x) \ = \ \lim_{k\to\infty} \chi_{\mathbb{R}^n\setminus N} \cdot f_k(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir können nun also den vorherigen Spezialfall auf die Folge $\{g_k\}_{k\geq\mathbb{N}}$ anwenden. Nachdem die Funktionen f_k und g_k sowie f und g fast überall gleich sind, folgt die Aussage dann aus Satz 8.17. □

Im nächsten Kapitel werden wir das Lebesgue-Integral mit dem uneigentlichen Riemann-Integral vergleichen. Hierbei werden wir ein wichtiges Korollar zum Satz von der majorisierten Konvergenz verwenden. Um dieses Korollar zu formulieren benötigen wir noch eine Definition.

[68]Hierbei verwenden wir, dass für Lebesgue-integrierbare Funktionen f, g auch die Funktion $\max\{f, g\}$ Lebesgue-integrierbar ist. Dies wiederum folgt leicht aus Lemma 8.2 und Lemma 8.12.

Definition. Eine *messbare Ausschöpfung* von $\mathbb{R}^n$ ist eine aufsteigende Folge von messbaren Teilmengen $\{A_m\}_{m\geq 1}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $A_m \uparrow \mathbb{R}^n$.

Beispiel.

(1) Die Intervalle $(-m, m)$ mit $m \geq 1$ bilden eine messbare Ausschöpfung von $\mathbb{R}$.
(2) Allgemeiner bilden die offenen Kugeln $B_m(0)$ mit $m \geq 1$ eine messbare Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$.

Wir können nun den Ausschöpfungssatz formulieren.

Satz 9.6. (Ausschöpfungssatz) *Es sei $\{A_m\}_{m\geq 1}$ eine messbare Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ und es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, welche über jedes A_m Lebesgue-integrierbar ist. Wenn*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{A_m} |f|\, dv \;<\; \infty$$

dann ist auch f auf $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int f\, dv \;=\; \lim_{m\to\infty} \int_{A_m} f\, dv.$$

Beweis. Wir setzen

$$f_m \;:=\; \chi_{A_m} \cdot f.$$

Dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) \;=\; f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Der Ausschöpfungssatz folgt nun aus den Definitionen, dem Satz 9.5 von der majorisierten Konvergenz und der folgenden Behauptung.

Behauptung. Wir setzen $F := |f|$. Dann gilt:

(1) $|f_m| \leq F$ für alle m,
(2) F ist Lebesgue-integrierbar, d.h. $\int |F|\, dv < \infty$.

Die erste Aussage ist offensichtlich. Wir wenden uns der zweiten Aussage zu. Offensichtlich gilt $|f_m| \uparrow F$. Da die Folge der Integrale

$$\int |f_m|\, dv \;=\; \int_{A_m} |f_m|\, dv$$

nach Voraussetzung beschränkt ist folgt aus dem Satz 8.14 von der monotonen Konvergenz, dass F Lebesgue-integrierbar ist. Wir haben damit die Behauptung bewiesen. $\square$

9.4. **Das uneigentliche Riemann-Integral.** Wir erinnern zuerst an das uneigentliche Riemann-Integral, welches wir in Analysis I eingeführt hatten. Es sei $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ eine

Funktion, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass für jedes $a \leq d < b$ das Riemann-Integral $\int_a^d f(x)dx$ existiert. Das *uneigentliche Integral von f auf $[a,b)$* ist definiert als[69]

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \lim_{d \nearrow b} \int_a^d f(x)\,dx.$$

Ganz analog definiert man das uneigentliche Integral auf einem halboffenen Intervall $(a,b]$.

Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass für ein $c \in (a,b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ existieren oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergieren. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

wenn die rechte Seite definiert ist. Wir nennen dann $\int_a^b f(x)dx$ das *uneigentliche Integral von f auf (a,b)*.

Satz 9.7. *Es sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wenn das uneigentliche Riemann-Integral*

$$\int_a^b |f|\,dx$$

existiert, dann ist f auf $[a,b)$ Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\underbrace{\int_{[a,b)} f\,dv}_{\text{Lebesgue-Integral}} \quad = \quad \underbrace{\int_a^b f\,dx.}_{\substack{\text{uneigentliches}\\ \text{Riemann-Integral}}}$$

Es gelten die offensichtlichen analogen Aussagen für Funktionen auf $(a,b]$ und (a,b).

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Satz 9.4 und dem Ausschöpfungssatz 9.6 angewandt auf die Ausschöpfung

$$X_m \;=\; \big[a, b - \tfrac{1}{m}\big], \qquad \text{wenn } b \in \mathbb{R},$$

beziehungsweise auf die Ausschöpfung

$$X_m \;=\; [a, m], \qquad \text{wenn } b = \infty.$$

□

Bemerkung. Satz 9.7 gilt nur unter der Voraussetzung, dass das uneigentliche Integral über den Absolutbetrag von f existiert, d.h. wenn

$$\int_a^b |f|\,dx$$

[69] Es gibt also drei Möglichkeiten: entweder konvergiert das uneigentliche Integral gegen eine reelle Zahl, oder es divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$, oder es existiert nicht.

existiert. Auf Seite 59 von Forster: Analysis III wird gezeigt, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \quad < \quad \infty$$

existiert. Andererseits divergiert das uneigentliche Riemann-Integral über den Absolutbetrag, d.h. es ist

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \quad = \quad \infty.$$

Die Voraussetzung von Satz 9.7 ist also *nicht* erfüllt. Und in der Tat existiert das Lebesgue-Integral von f über $(0,\infty)$ *nicht*. Das folgt aus der Tatsache, dass nach Satz 8.11 (3) der Absolutbetrag einer Lebesgue-integrierbaren Funktionen wiederum Lebesgue-Integrierbar ist. Aber dies ist bei dieser Funktion nicht der Fall. Die Details zu diesem Argument kann man auf Seite 59 von Forster: Analysis III nachlesen.

10. Das Cavalierische Prinzip und der Satz von Fubini

Wir haben jetzt also gesehen, dass für viele Funktionen auf $\mathbb{R}$, z.B. für alle stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall, dass Lebesgue-Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt. Dies erlaubt es uns insbesondere die Rechenmethoden aus der Analysis I anzuwenden, um viele Lebesgue-Integrale im eindimensionalen Fall zu bestimmen. In diesem Kapitel wollen wir nun viele Lebesgue-Integrale im Mehrdimensionalen mithilfe von mehreren Riemann-Integralen in einer Variable bestimmen.

In diesem Kapitel werden wir öfters eine "suggestive Notation" für Lebesgue-Integrale verwenden. Genauer gesagt, für eine Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R}^n & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ z & \mapsto & g(z) \end{array}$$

schreiben wir desöfteren

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(z)\,dz \;:=\; \int g\,dv.$$

Für eine Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) \end{array}$$

schreiben wir manchmal

$$\int_{\mathbb{R}^{m+k}} g(x,y)\,dx\,dy \;:=\; \int g\,dv.$$

10.1. **Das Cavalierische Prinzip.** Das Cavalierische Prinzip, welches eventuell aus der Schule bekannt ist, besagt insbesondere, dass wir das Volumen von 3-dimensionalen Körpern aus den Flächeninhalten von 2-dimensionalen Schnittflächen bestimmen können.

Die allgemeinere Formulierung behandelt kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zur Erinnerung, der Satz von Heine-Borel besagt, dass eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ kompakt ist, genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. Insbesondere ist jede kompakte Menge messbar mit endlichem Volumen.

Der folgende Satz ist nun eine allgemeinere Version vom Cavalierischen Prinzip.

Satz 10.1. (Cavalierisches Prinzip) *Es sei $K\subset\mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Für $t\in\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $K(t)$ die Menge*

$$K(t) \;:=\; \big\{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}\,\big|\,(x_1,\dots,x_{n-1},t)\in K\big\}.$$

Dann gilt[70]

$$\mathrm{Vol}_n(K) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K(t))\,dt.$$

[70]Insbesondere machen wir hier implizit die Aussage, dass die Funktion $t\mapsto\mathrm{Vol}_{n-1}(K(t))$ Lebesgue-integrierbar ist.

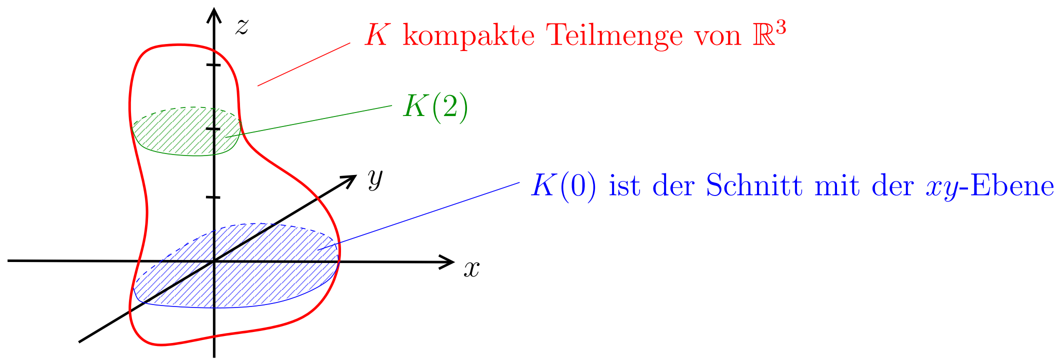


Abbildung 27. Illustration vom Cavalierischen Prinzip.

Beispiel. Es folgt insbesondere, dass wenn K und L zwei kompakte Mengen in $\mathbb{R}^3$ sind, so dass für alle t die Mengen $K(t)$ und $L(t)$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, dann besitzen K und L das gleiche Volumen. Beispielsweise folgt daraus, dass für alle kompakten Teilmengen $F \subset \mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ und alle Punkte $Q \in \mathbb{R}^3$ das Volumen vom Kegel

$$\{tP + (1-t)Q \,|\, P \in F \text{ und } t \in [0,1]\}$$

nur von der z–Koordinate von Q abhängt.

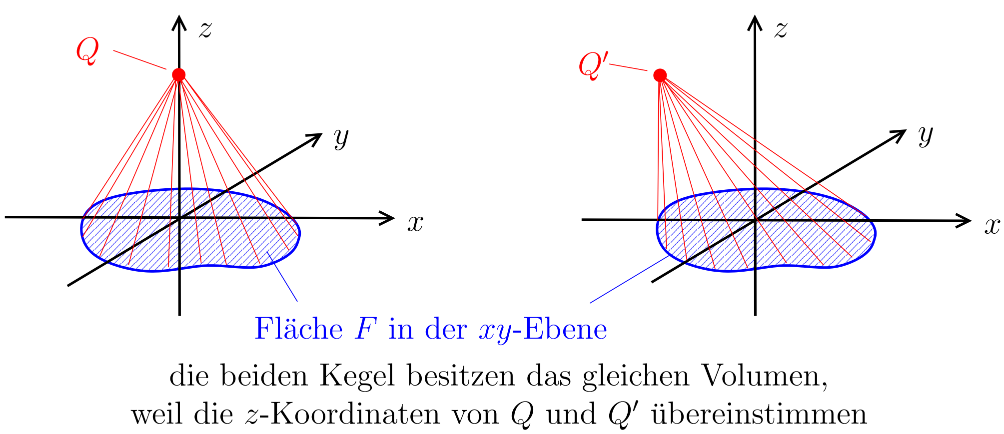


Abbildung 28.

Das Cavalierische Prinzip folgt aus Folgendem, etwas allgemeineren Satz.

Satz 10.2. (Verallgemeinertes Cavalierisches Prinzip) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ eine messbare Teilmenge.*

(1) *Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ ist Menge*

$$A(y) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^k \,|\, (x,y) \in A\}$$

eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^k$.

(2) *Die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} F_A\colon \mathbb{R}^m & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ y & \mapsto & F_A(y) := \mathrm{Vol}_k(A(y)) \end{array}$$

ist eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^m$.

(3) *Es ist*

$$\mathrm{Vol}_n(A) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\mathrm{Vol}_k(A(y))}_{=F_A(y)}\, dy.$$

Beweis.

Es ist elementar zu überprüfen, dass die Aussage für halboffene Quader gilt. Alle messbaren Mengen können nun aus halboffenen Quadern durch verschiedene Operationen (Vereinigungen, Komplementbildung etc.) gebildet werden. Wir müssen also nur zeigen, dass sich die Aussagen mit diesen Operationen vertragen.

Für $X \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\mathcal{M}(X) \;:=\; \{A \subset X \,|\, A \text{ ist messbar und die Aussagen (1), (2) und (3) gelten}\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^\sigma$. Für $s \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Quader

$$X_s \;:=\; [-s, s)^n.$$

Der Beweis besteht aus zwei Teilen.

(i) Es sei $s \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Aussage zuerst für alle Teilmengen von X_s. Wir wollen also zeigen, dass $\mathcal{M}(X_s) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^\sigma$. Wir machen hierzu folgende Beobachtungen.

(a) Jeder halboffene Quader $Q \subset X_s$ liegt in $\mathcal{M}(X_s)$. In der Tat, denn wir können schreiben $Q = P \times R$, wobei $P \subset \mathbb{R}^k$ und $R \subset \mathbb{R}^m$ halboffene Quader sind. Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$Q(y) \;=\; \begin{cases} P, & \text{wenn } y \in R, \\ \emptyset, & \text{wenn } y \notin R. \end{cases}$$

Es folgt, dass $F_P = \mathrm{Vol}_k(P) \cdot \chi_R$, also ist F_P messbar. Zudem gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} F_P(y)\, dy \;=\; \mathrm{Vol}_k(P) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_R(y)\, dy \;=\; \mathrm{Vol}_k(P) \cdot \mathrm{Vol}_m(R) \;=\; \mathrm{Vol}_n(Q).$$

(b) Wenn A, B disjunkte Teilmengen von X_s sind, welche in $\mathcal{M}(X_s)$ liegen, dann sieht man leicht, dass auch $A \sqcup B$ in $\mathcal{M}(X_s)$ liegt. Jedes $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$ ist nach Lemma 2.7 die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern. Es folgt nun aus der obigen Bemerkung und aus (a), dass auch $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \subset \mathcal{M}(X_s)$.

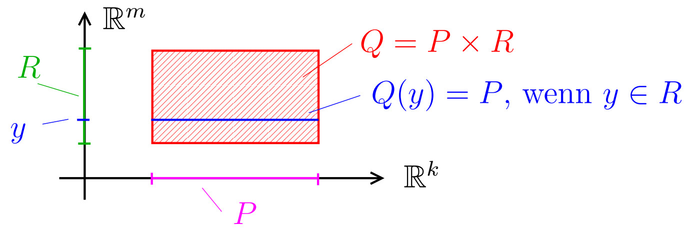


ABBILDUNG 29.

(c) Es sei $A \subset X_s$. Wir schreiben $A^c := X_s \setminus A$. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_n(A^c) \;=\; \mathrm{Vol}_n(X_s) - \mathrm{Vol}_n(A) \;=\; (2s)^n - \mathrm{Vol}_n(A).$$

Also ist das Volumen von A^c durch das Volumen von A bestimmt. [71] Man sieht nun leicht, dass für $A \in \mathcal{M}(X_s)$ auch das Komplement A^c in $\mathcal{M}(X_s)$ liegt.

(d) Es sei nun $A_i, i \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge von Mengen in $\mathcal{M}(X_s)$. Wir wollen zeigen, dass $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ auch in $\mathcal{M}(X_s)$ liegt. Wir überprüfen jetzt die drei Aussagen:

(1) Für alle $y \in \mathbb{R}^m$ ist $A_i(y) \uparrow A(y)$, also ist $A(y)$ messbar nach Satz 6.1.

(2) Für alle $y \in \mathbb{R}^m$ gilt nach Satz 6.2, dass

$$F_{A_i}(y) := \mathrm{Vol}_k(A_i(y)) \uparrow \mathrm{Vol}_k(A(y)) =: F_A(y).$$

Es ist also $F_{A_i} \uparrow F_A$. Daher folgt aus Lemma 8.15, dass F_A messbar ist.

(3) Es ist

$$\mathrm{Vol}_n(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 6.2}}}{=} \lim_{i\to\infty} \mathrm{Vol}_n(A_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } A_i \in \mathcal{M}(X_s)}}{=} \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_{A_i}(y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 8.10 (3)}}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} F_A(y)\,dy.$$

Wir haben also gezeigt, dass A in $\mathcal{M}(X_s)$ liegt.

(e) Es folgt nun aus (b), (c) und (d), dass $\mathcal{M}(X_s)$ eine σ-Algebra ist, welche $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$ enthält. Aus der Definition von $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^\sigma$ erhalten wir nun die gewünschte Inklusion $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^\sigma \subset \mathcal{M}(X_s)$.

(ii) Es sei nun $A \in \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^\sigma$. Aus (i) folgt, dass für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt, dass $A_s := A \cap X_s$ in $\mathcal{M}(X_s) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ liegt.[72] Das Argument von (i) (d) zeigt nun, dass auch $A = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} A_s$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ liegt. $\square$

[71] Diese Aussage gilt nur, weil wir uns jetzt auf die Teilmenge X_s von endlichem Volumen einschränken.

[72] Hierbei verwenden wir implizit, dass $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^\sigma \cap \mathcal{P}(X_s) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^\sigma$. Dies folgt leicht aus der expliziten Beschreibung der erzeugten σ-Algebra, welche auf Seite 144 gegeben ist. Alternativ kann man die Aussage auch mithilfe von dem Argument von Lemma 8.15 beweisen.

10.2. **Der Satz von Fubini und Beispiele.** Satz 9.4 und Satz 9.7 besagen insbesondere, dass man bei 'vernünftigen' Funktionen, beispielsweise stetige Funktionen auf kompakten Intervallen, dass Lebesgue-Integral mithilfe vom Riemann-Integral bestimmen kann. Dies ist natürlich sehr hilfreich, nachdem wir schon in Analysis I viele Rechenmethoden für das Riemann-Integral kennengelernt hatten.

Mithilfe vom folgenden Satz von Fubini kann man Lebesgue-Integrale im mehrdimensionalen mithilfe von mehreren Lebesgue-Integralen in kleineren Dimensionen bestimmen.

Satz 10.3. (Fubini) *Es sei*

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$ die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^k & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Lebesgue-integrierbar ist, und es gilt[73]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus N} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\ dx}_{\text{definiert für } y\in\mathbb{R}^m\setminus N}\ dy.$$

Bemerkung. Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, mit $m = n-1$ und $k = 1$, sowie für die Funktion $f = \chi_K$, erhalten wir aus dem Satz von Fubini insbesondere das Cavalierische Prinzip. Zudem können wir Satz 10.2 als Spezialfall vom Satz von Fubini auffassen.

In der Praxis will man oft f gar nicht über ganz $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ integrieren, sondern nur über eine Teilmenge. Es folgt nun leicht aus den Definitionen und dem Satz von Fubini, dass in diesem Fall folgender Satz gilt.

Satz 10.4. (Fubini) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ eine messbare Teilmenge und es sei*

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Wir schreiben

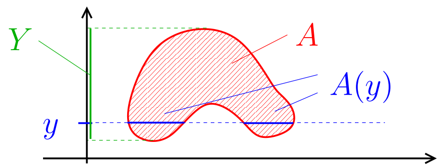
$$Y \quad := \quad \{y \in \mathbb{R}^k \,|\, \text{es gibt ein } x \in \mathbb{R}^m \text{ mit } (x,y) \in A\},$$

und für alle $y \in Y$ setzen wir

$$A(y) \quad := \quad \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, (x,y) \in A\}.$$

Wenn[74]*für alle $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ auf $A(y)$ Lebesgue-integrierbar ist, dann gilt*

$$\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int\limits_Y \int\limits_{A(y)} f(x,y)\ dx\ dy.$$



nach dem Satz von Fubini gilt
$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_Y \int_{A(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Abbildung 30. Illustration vom Satz von Fubini.

Beispiel. Es sei A das Dreieck

$$A \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,2] \text{ und } y \in [0,x]\}.$$

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array}.$$

Es folgt aus Satz 8.20, dass f Lebesgue-integrierbar ist. Wir möchten nun das Lebesgue-Integral von f mithilfe vom Satz von Fubini bestimmen. In diesem Fall ist

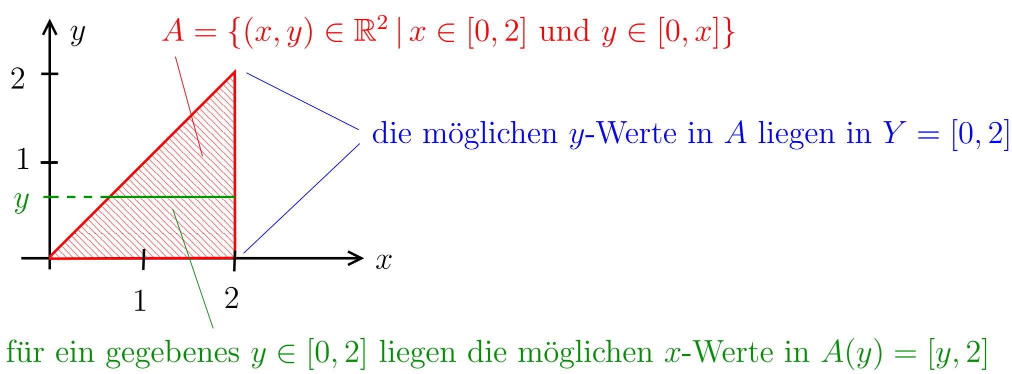


Abbildung 31.

$$Y \;=\; \text{alle möglichen } y\text{-Werte von Punkten in } A \;=\; [0,2].$$

Zudem gilt für jedes $y \in [0,2]$, dass

$$A(y) \;=\; \text{alle } x\text{-Werte von Punkten in } A \text{ mit } y\text{-Wert } y \;=\; [y,2].$$

[74]Beispielsweise ist diese Voraussetzung nach Lemma 8.20 erfüllt, wenn für alle $y \in Y$ die Menge $A(y)$ kompakt ist und wenn f stetig ist.

Es folgt also, dass

$$\int\limits_A x^2+y^2\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz von Fubini}}}{=} \int\limits_{[0,2]}\Big(\int\limits_{[y,2]} x^2+y^2\,dx\Big)\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.4}}}{=} \int\limits_{y=0}^{y=2}\Big(\int\limits_{x=y}^{x=2} x^2+y^2\,dx\Big)\,dy = (*)$$

Der Rest der Rechnung besteht nun aus zwei Riemann-Integralen, welche wir mithilfe von Stammfunktionen leicht bestimmen können:

$$(*) = \int\limits_{y=0}^{y=2} \underbrace{\Big[\frac{x^3}{3}+xy^2\Big]_{x=y}^{x=2}}_{=\frac{8}{3}+2y^2-\frac{y^3}{3}-y^3} dy = \int\limits_{y=0}^{y=2} \frac{8}{3}+2y^2-\frac{y^3}{3}-y^3\,dy = \frac{16}{3}.$$

Beispiel. In vielen Beispielen ist das schwierigste Problem, die korrekten Grenzen für das x-Integral und das y-Integral zu finden. Manchmal ist es einfacher für ein gegebenes x die möglichen y-Werte zu bestimmen, wir können dann die Reihenfolge der x- und y-Integrale vertauschen. In Abbildung 32 zeigen wir, wie man für zwei Definitionsbereiche A und B das Lebesgue-Integral in zwei Riemann-Integrale zerlegen kann.

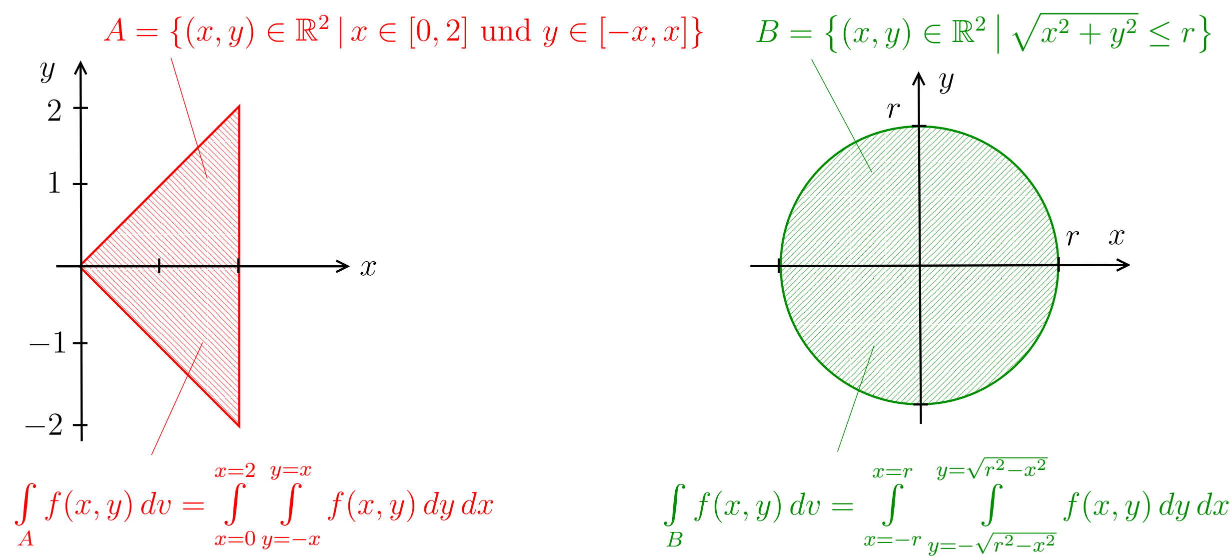


ABBILDUNG 32. Der Satz 10.4 von Fubini angewandt auf stetige Funktionen $f\colon A\to\mathbb{R}$ und $f\colon B\to\mathbb{R}$.

Das zweite Beispiel

$$B(r) = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\Big|\,\sqrt{x^2+y^2}\le r\Big\}$$

beschreibt die abgeschlossene Scheibe um den Ursprung mit Radius r. Wir bestimmen nun die Fläche für $r = 1$. Es gilt

$$\text{Fläche von } B(1) \;=\; \mathrm{Vol}_2(B(1)) \;=\; \int \chi_B \, dv \;=\; \int_B 1 \, dv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von Fubini und Satz 9.4}}}{=} \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx \;=\; (*)$$

Wir müssen nun dieses zweifache Riemann-Integral bestimmen. Dies ist nun eine Übungsaufgabe aus der Analysis I. Der Vollständigkeit halber wollen wir diese hier ausführen. Es ist

$$(*) \;=\; \int_{x=-1}^{x=1} 2\sqrt{1-x^2} \, dx \;=\; 2 \int_{x=-1}^{x=1} (1-x^2) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution } u = \arcsin(x) \text{ mit } \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}{=} 2 \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2(u) \, du$$

$$= \; 2 \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \, du \;=\; 2 \Big[\tfrac{1}{2}(u + \sin(u)\cos(u)) \Big]_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} \;=\; \pi.$$

Mit noch etwas mehr Aufwand kann man nun auch zeigen, dass

$$\text{Fläche von } B(r) \;=\; \mathrm{Vol}_2(B(r)) \;=\; \pi \cdot r^2.$$

Beispiel. Wir wollen nun noch das Volumen von dem Kegel

$$K \;:=\; \Big\{ (x,y,z) \;\Big|\; \sqrt{x^2+y^2} = 2 - z \text{ und } z \geq 0 \Big\}$$

bestimmen. Für jedes $z \in [0,2]$ ist der Schnitt von K mit der um z verschobenen xy-Ebene eine Scheibe von Radius $2 - z$. Genauer gesagt, für gegebenes $z \in [0,2]$ ist

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y,z) \in K\} \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{x^2+y^2} = 2 - z\} \;=\; B(2-z).$$

Es folgt, dass

$$\text{Volumen von } K \;=\; \int_K 1 \, dv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von Fubini}}}{=} \int_{z=0}^{z=2} \underbrace{\int_{(x,y) \in B(2-z)} 1 \, dx \, dy}_{= \pi(2\text{-}z)^2 \text{ nach vorherigem Beispiel}} \quad dz \;=\; \int_{z=0}^{z=2} \pi(2-z)^2 \, dz \;=\; \frac{8}{3}\pi^2.$$

Man kann den Satz von Fubini auch mehrmals anwenden, und ein n-dimensionales Lebesgue-Integral in n ein-dimensionale Lebesgue-Integrale zerlegen. Beispielsweise gilt für jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f(x,y,z)$ auf dem Kegel K, dass

$$\int_K f \, dv \;=\; \int_{z=0}^{z=2} \int_{x=-(2-z)}^{x=2-z} \int_{y=-\sqrt{(2-z)^2-x^2}}^{y=\sqrt{(2-z)^2-x^2}} f(x,y,z) \, dy \, dx \, dz.$$

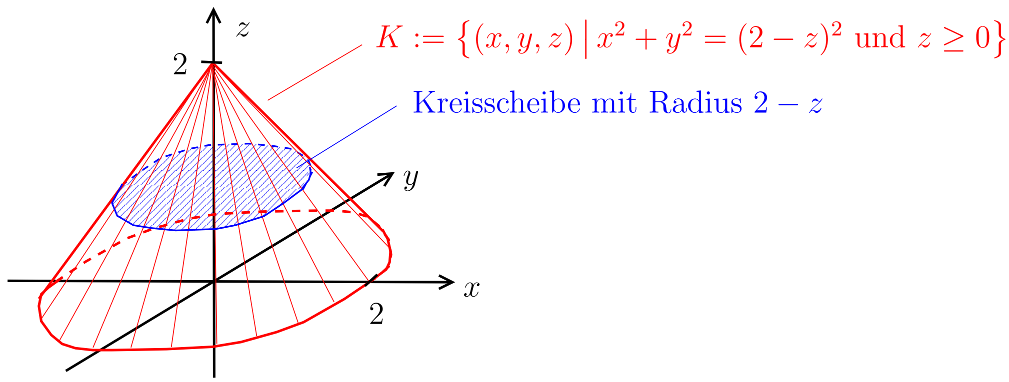


ABBILDUNG 33.

10.3. **Der Beweis vom Satz von Fubini.** Wir beweisen den Satz von Fubini zuerst für messbare, nichtnegative Funktionen. Dieser Spezialfall wird manchmal das Lemma von Tonelli genannt.

Lemma 10.5. (Lemma von Tonelli) *Es sei*

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

eine messbare, nichtnegative Funktion. Dann gilt:

(1) *Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ ist die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^k & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

messbar.

(2) *Die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^m & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ y & \mapsto & \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx \end{array}$$

ist ebenfalls messbar und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x,y)\,dv \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx\,dy.$$

BEWEIS.

(a) Für charakteristische Funktionen von messbaren Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^{k+m}$ sind dies gerade die Aussagen des verallgemeinerten Cavalierischen Prinzips, welches wir in Satz 10.2 bewiesen hatten.
(b) Eine nichtnegative Stufenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von messbaren Mengen. Es ist leicht zu sehen, dass wenn

die Aussagen des Lemmas von Tonelli für Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ gelten, dann gelten die Aussagen auch für alle nichtnegativen Linearkombinationen von $f_1, \ldots, f_n$. Insbesondere folgt aus (a), dass die Aussagen für nichtnegative Stufenfunktion gelten.

(c) Es sei nun f eine beliebige messbare, nichtnegative Funktion. Nach Satz 8.7 ist die Funktion f der aufsteigende Limes einer Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen f_n.

(1) Es sei nun $y \in \mathbb{R}^m$. Nach (b) sind die Funktionen $x \mapsto f_n(x, y)$, $n \in \mathbb{N}$ messbar. Nach Lemma 8.15 ist dann auch die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ messbar.

(2) Für $y \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir

$$F_n(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_n(x, y)\, dx, n \in \mathbb{N} \quad \text{ und } \quad F(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x, y)\, dx.$$

Nachdem $f_n(x, y) \uparrow f(x, y)$ (aufgefasst als Funktion in x) folgt aus Satz 8.10 (3), dass $F_n \uparrow F$. Nun folgt aus (b), und aus Lemma 8.15, dass F messbar ist. Zusammengefasst gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x, y)\, dx\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 8.10 (3)}}}{=} \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f_n(x, y)\, dx\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fall (b)}}}{=} \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_n(y)\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 8.10 (3)}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} F(y)\, dy.$$

Wir haben also die gewünschte Aussage bewiesen. ☐

Wir beweisen nun den allgemeinen Fall vom Satz von Fubini.

Beweis vom Satz von Fubini. Es sei also

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Wie üblich schreiben wir

$$f_+ \ := \ \max(f, 0) \quad \text{ und } \quad f_- \ := \ -\min(f, 0).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x, y)\, dx\, dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f_+(x, y)\, dx\, dy - \int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f_-(x, y)\, dx\, dy \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma von Tonelli}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^k} f_+(x, y)\, dx}_{=:F_+(y)}\, dy - \int\limits_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^k} f_-(x, y)\, dx}_{=:F_-(y)}\, dy \ = \ (*) \end{aligned}$$

Wir können jetzt nicht einfach die Integrale zusammenfassen, weil im Allgemeinen die Differenz $F_+(y) - F_-(y)$ nicht definiert[75] ist. Nachdem die Integrale über F_+ und F_- jeweils

[75] Denn es könnte sein, dass sowohl $F_+(y)$ als auch $F_-(y)$ den Wert ∞ annehmen.

endlich sind, folgt aus Satz 8.18, dass es Nullmengen $N_\pm \subset \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $F_\pm(y) < \infty$ für alle $y \in \mathbb{R}^m \setminus N_\pm$. Wir setzen nun $N := N_- \cup N_+$. Dann gilt

$$(*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } N \text{ Nullmenge}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus N} F_+(y)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus N} F_-(y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 8.11 (1b)}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus N} \underbrace{F_+(y) - F_-(y)}_{\text{definiert für } y \in \mathbb{R}^m \setminus N}\,dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus N} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_+(x,y)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_-(x,y)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition vom Lebesgue-Integral von } x \mapsto f(x,y)}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus N} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\;dx\,dy.$$

$\square$

11. Die Transformationsformel

11.1. **Die Transformationsformel.** Eine Abbildung $\Phi\colon U \to V$ zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ heißt $\mathcal{C}^1$*–invertierbar*, wenn Φ stetig differenzierbar ist, wenn Φ bijektiv ist, und wenn die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

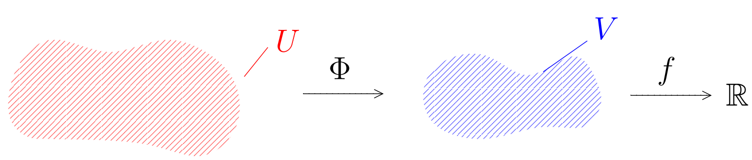
Wir können nun den folgenden Satz formulieren:

Satz 11.1. (Transformationsformel) *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung. Dann ist $f\colon V \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, genau dann, wenn*

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \end{array}$$

Lebesgue-integrierbar ist und es gilt

$$\int\limits_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)|\, dx \;=\; \int\limits_V f(y)\, dy.$$



$$\int\limits_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)|\, dx \;=\; \int\limits_V f(y)\, dy$$

Abbildung 34. Illustration der Transformationsformel.

Die Transformationsformel erlaubt es also ein Integral auf zwei verschiedene Weisen zu bestimmen. Diese Flexibilität vereinfacht in vielen Fällen die Berechnung. Insbesondere, wenn eine Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ gegeben ist, deren Integrationsbereich V schwierig zu beschreiben ist, dann gibt es in vielen Fällen eine C^1-invertierbare Abbildung $\Phi\colon U \to V$, wobei U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, welche deutlich einfacher zu beschreiben ist. Beispielsweise werden wir sehen, dass wir mithilfe von Polarkoordinaten die Integration über eine Kreisscheibe ersetzen können durch die Integration über ein Rechteck.

11.2. **Der eindimensionale Fall.** Im Folgenden sei $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende differenzierbare Funktion mit $\Phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist insbesondere $\Phi\colon (a,b) \to (\Phi(a), \Phi(b))$ eine C^1-invertierbare Abbildung. Für jede stetige Funktion

$f\colon [\Phi(a),\Phi(b)] \to \mathbb{R}$ gilt also, dass [76] [77]

$$\int\limits_{x=a}^{x=b} f(\Phi(x))\Phi'(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.4}}}{=} \int\limits_{[a,b]} f(\Phi(x))\Phi'(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 8.17}}}{=} \int\limits_{(a,b)} f(\Phi(x))\Phi'(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Transformationsformel}}}{=} \int\limits_{(\Phi(a),\Phi(b))} f(u)\,du \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nochmal Satz 9.4}\\ \text{und Satz 8.17}}}{=} \int\limits_{u=\Phi(a)}^{u=\Phi(b)} f(u)\,du.$$

Wir erhalten also aus der Transformationsformel, mit leicht anderen Voraussetzungen,

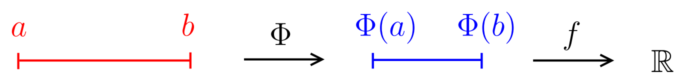


Abbildung 35. Illustration der Transformationsformel im eindimensionalen Fall.

die klassische Substitutionsregel als Spezialfall. Die Transformationsformel ist allerdings viel Allgemeiner als die Substitutionsregel. Zum einen gilt sie auch im mehrdimensionalen Fall, zum anderen kann diese nicht nur auf stetige, sondern allgemeiner auch auf Lebesgue-integrierbare Funktionen angewandt werden.

11.3. **Lineare Abbildungen.** Die vielleicht einfachsten C^1-invertierbaren Abbildungen sind gegeben durch Matrizenmultiplikationen. Genauer gesagt, es sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, dann ist für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} U & \to & A(U) \\ x & \mapsto & Ax \end{array}$$

eine C^1-invertierbare Abbildung.

Wir betrachten beispielsweise den Fall

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = (0,1)^2, \quad \text{und } V = A(U),$$

welcher in Abbildung 36 skizziert ist. Für $f(x,y) = x$ gilt dann

[76] Die Voraussetzung, dass f stetig ist, verwenden wir im Folgenden nur, um uns keine Gedanken um Lebesgue-Integrierbarkeit zu machen.

[77] Wo haben wir jetzt verwendet, dass Φ streng monoton *steigend* ist? Wie ändert sich das Argument, wenn Φ streng monoton *fallend* ist?

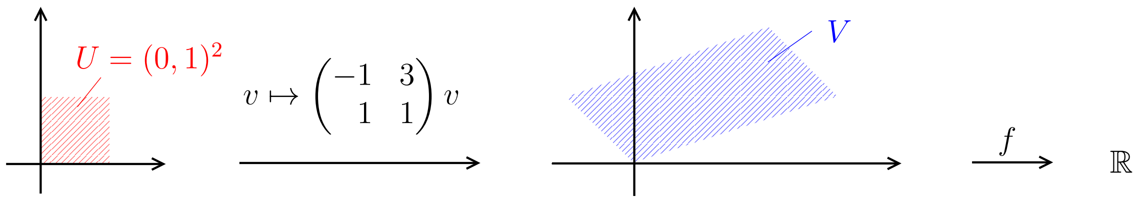


ABBILDUNG 36. Illustration der Transformationsformel für lineare Abbildungen.

$$\begin{aligned}
\int_V x\,dx\,dy &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Transformationssatz}}}{=} \int_{(0,1)^2} \underbrace{f(A(x,y))}_{=-x+3y} \cdot \underbrace{|\det A|}_{=4}\,dx\,dy &&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 10.4 von Fubini}}}{=} \int_{(0,1)}\int_{(0,1)} 4(-x+3y)\,dx\,dy \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 8.17, da sich die Definitionsbereiche}\\ \text{nur um eine Nullmenge unterscheiden}}}{=} \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} 4(-x+3y)\,dx\,dy &&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.4}}}{=} \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1} -4x+12y\,dx\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \underbrace{\big[-2x^2+12yx\big]_{x=0}^{x=1}}_{=-2+12y} dy &&= \big[-2y+6y^2\big]_{y=0}^{y=1} = 4.
\end{aligned}$$

11.4. **Polarkoordinaten, zylindrische Koordinaten und sphärische Koordinaten.** Die wohl wichtigsten Anwendungen des Satzes basieren auf den

(1) Polarkoordinaten,
(2) zylindrische Koordinaten, und
(3) sphärische Koordinaten,

welche wir schon in Analysis II kennengelernt hatten.

Wir betrachten die Abbildung[78]

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\varphi) &\mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In Analysis I hatten hatten wir schon gesehen, dass P surjektiv ist. Wenn $P(r,\varphi) = (x,y)$, dann nennen wir (r,φ) *Polarkoordinaten von* (x,y). Die Polarkoordinaten von einem Punkt sind nicht eindeutig bestimmt, beispielsweise können wir φ immer durch $\varphi + 2\pi$ ersetzen.

[78]Für Vektoren verwenden wir sowohl die 'horizontale' als auch die 'vertikale' Schreibweise. In vielen Fällen ist die horizontale Schreibweise (x,y) platzsparender. Andererseits ist manchmal die vertikale Schreibweise $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ logischer, beispielsweise wenn wir das Differential bestimmen wollen.

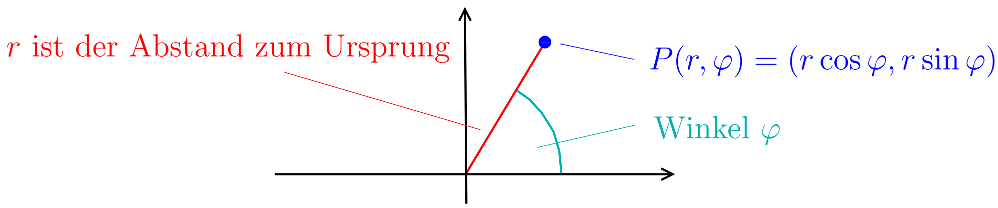


ABBILDUNG 37. Illustration von Polarkoordinaten.

Satz 11.2. (Polarkoordinaten) *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (r, \varphi) & \mapsto & f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \end{array}$$

Lebesgue-integrierbar ist, und es gilt dann, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int\limits_{[0,\infty)\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\,dr\,d\varphi.$$

BEWEIS. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} P\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{array}$$

Es sei zudem

$$U := (0,\infty) \times (0, 2\pi) \quad \text{und} \quad V := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times 0).$$

In Analysis II hatten wir schon bewiesen, dass die Einschränkung von P auf die offene Teilmenge U eine C^1–invertierbare Abbildung $P\colon U \to V$ definiert. Zudem gilt für alle $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, dass

$$\det(DP(r,\varphi)) \;=\; \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} r\cos\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} r\sin\varphi \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \;=\; r.$$

Es folgt also aus, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \;\underset{\uparrow}{=}\; \int\limits_{V} f(x,y)\,dx\,dy \;\underset{\uparrow}{=}\; \int\limits_{U} f(P(r,\varphi)) \cdot r\,dr\,d\varphi \;\underset{\uparrow}{=}\; \int\limits_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}_{\geq 0}} f(P(r,\varphi)) \cdot r\,dr\,d\varphi.$$

folgt aus Satz 8.17, da sich die Definitionsbereiche nur um eine Nullmenge unterscheiden

Transformationsformel

folgt wiederum aus Satz 8.17, da sich die Definitionsbereiche nur um eine Nullmenge unterscheiden $\square$

Der folgende Satz behandelt einen typischen Spezialfall von den Polarkoordinaten.

Satz 11.3. (Polarkoordinaten) *Es sei*

$$\overline{B_d(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le d^2\}$$

die geschlossene Scheibe von Radius d, und es sei

$$f\colon \overline{B_d(0)} \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gilt[79]

$$\int\limits_{\overline{B_d(0)}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int\limits_{r=0}^{r=d} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Beweis. In Analysis II hatten wir gesehen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} P\colon U := (0,d)\times(0,2\pi) &\to V := \{(x,y)\in B_d(0)\,|\, x<0 \text{ oder } y\neq 0\} \\ (r,\varphi) &\mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

eine C^1–invertierbare Abbildung ist. Im Beweis von Satz 11.2 hatten wir schon erwähnt, dass $\det(DP(r,\varphi)) = r$. Nun ist

$$\int\limits_{\overline{B_d(0)}} f(x,y)dxdy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \overline{B_d(0)}\setminus V \text{ ist eine Nullmenge}}}{=} \int\limits_V f(x,y)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transformationsformel}}}{=} \int\limits_{U=(0,d)\times(0,2\pi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 10.4 von Fubini}}}{=} \int\limits_{\varphi\in(0,2\pi)}\int\limits_{r\in(0,d)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{die Definitionsbereiche unterscheiden} \\ \text{sich um eine Nullmenge}}}{=} \int\limits_{\varphi\in[0,2\pi]}\int\limits_{r\in[0,d]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 9.4}}}{=} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int\limits_{r=0}^{r=d} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi.$$

□

Beispiele.

(1) Wir wollen das Lebesgue-Integral von x^2+y^2 über der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_3(0)}$ von Radius 3 bestimmen. Dann ist

$$\int\limits_{\overline{B_3(0)}} x^2+y^2\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 11.3}}}{=} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3 \underbrace{\left((r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2\right)}_{=r^2} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3 r^2\cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi\cdot\frac{3^4}{4}.$$

[79]Es folgt aus Satz 8.20, dass das Lebesgue-Integral auf der linken Seite definiert ist.

(2) Die Aussage von Satz 11.3 kann nun auch abgewandelt werden um Definitionsbereiche zu behandeln, welche zwar keine Scheiben sind, welche aber durch Polarkoordinaten gut beschrieben werden. Dies trifft beispielsweise auf 'Tortenstücke' oder 'Ringe' zu. Wir führen dazu nun ein Beispiel aus. Es sei T das 'Tortenstück'

$$T \;:=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 4 \text{ und } x\ge 0 \text{ sowie } |y|\le x\right\},$$

welches auch in Abbildung 38 skizziert ist. Dieses läßt sich viel leichter mit Polarkoordinaten beschreiben, in der Tat ist

$$T \;=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ mit Polarkoordinaten } r\in[0,2] \text{ und } \varphi\in\left[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

Dann ist

$$\int\limits_T x\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Analogon von Satz 11.3}}}{=} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^2 r\cos(\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi \;=\; \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\underbrace{\int\limits_0^2 r^2\,dr}_{=\frac{8}{3}}d\varphi \;=\; \sqrt{2}\cdot\frac{8}{3}.$$

Ganz allgemein bieten sich die Polarkoordinaten an, wenn sich der Integrations-

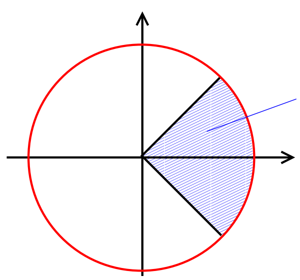


Abbildung 38.

bereich leicht mithilfe von Polarkoordinaten beschreiben läßt.

Wir wenden uns nun den Zylinderkoordinaten zu. Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} Z\colon \mathbb{R}_{\ge 0}\times\mathbb{R}^2 &\;\to\; \mathbb{R}^3\\ (r,\varphi,z) &\;\mapsto\; (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z). \end{aligned}$$

Aus der obigen Diskussion von Polarkoordinaten folgt, dass diese Abbildung surjektiv ist. Wenn $(x,y,z)=Z(r,\varphi,z)$, dann bezeichnen wir (r,φ,z) als *Zylinderkoordinaten von* (x,y,z).

Satz 11.4. *Für alle* $r\in\mathbb{R}_{\ge 0}, \varphi, z\in\mathbb{R}$ *gilt*

$$\det(DZ(r,\varphi,z)) \;=\; r.$$

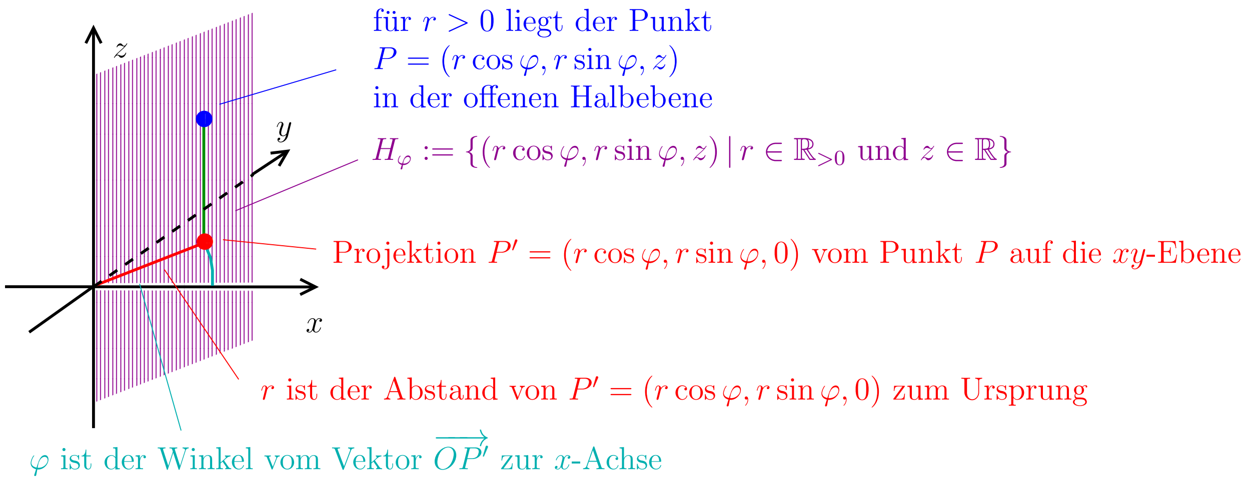


Abbildung 39. Illustration von Zylinder-Koordinaten.

Beweis. Es ist

$$\det(DZ(r,\varphi,z)) \;=\; \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} r\cos\varphi & \frac{\partial}{\partial z} r\cos\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} r\sin\varphi & \frac{\partial}{\partial z} r\sin\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} z & \frac{\partial}{\partial \varphi} z & \frac{\partial}{\partial z} z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; r.$$

□

Beispiel. Wir betrachten

$$M \;:=\; \big\{(x,y,z) \,\big|\, |y| \le x, x \ge 0, x^2+y^2 \le 1 \text{ und } z \in [0,x^2]\big\}.$$

Wir wollen das Volumen von M bestimmen. Die Schnittmenge von M mit der xy–Ebene ist ein 'Tortenstück' mit Radius 1 mit Winkel $\frac{\pi}{2}$. Wir können M mithilfe der Zylinderkoordinaten wie folgt beschreiben

$$M \;:=\; \begin{array}{l} \text{Punkte in } \mathbb{R}^3 \text{ mit Zylinderkoordinaten } (r,\varphi,z), \text{ wobei} \\ r \in [0,1],\ \varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \text{ und } z \in [0,(r\cos\varphi)^2]. \end{array}$$

Mithilfe der Zylinderkoordinaten können wir nun das Volumen von M wie folgt berechnen:

$$\operatorname{Vol}(M) = \int_M 1\,dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{analog zu Satz 11.3, unter Verwendung von Satz 11.4}}}{=} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{r=1} \int_{z=0}^{z=(r\cos\varphi)^2} 1\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{r=1} r^3\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \big[\tfrac{r^4}{4}\cos^2\varphi\big]_0^1\,d\varphi = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\cos^2\varphi\,d\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es ist } \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos(2\varphi))}}{=} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{8}(1+\cos(2\varphi))\,d\varphi \;=\; \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}.$$

Zum Abschluß des Kapitels erinnern wir noch an die sphärischen Koordinaten. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} S\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\varphi,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ r\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In Analysis II hatten wir gesehen, dass die Abbildung surjektiv ist. Für einen Punkt

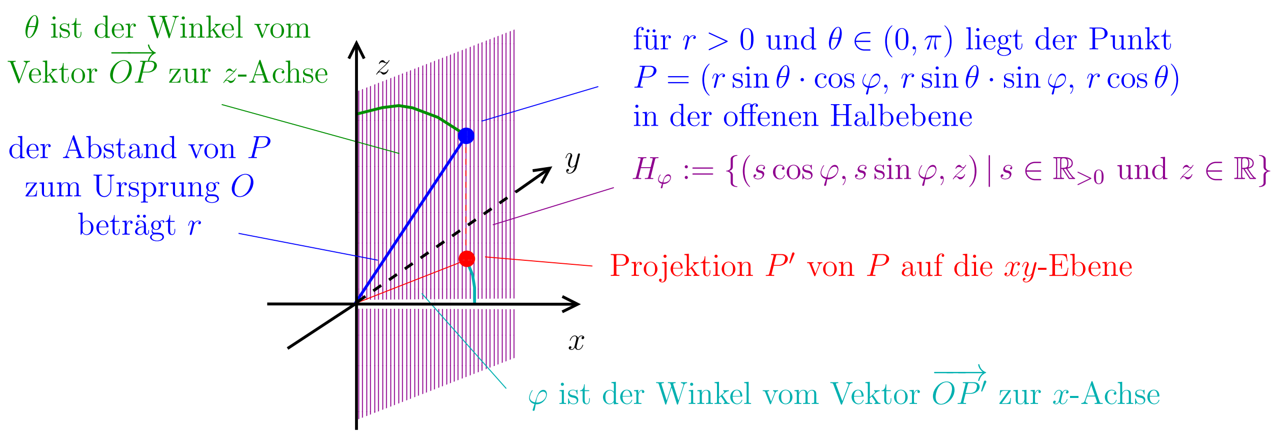


Abbildung 40. Illustration von sphärischen Koordinaten.

$(x,y,z)=S(r,\varphi,\theta)$ bezeichnen wir (r,φ,θ) als *sphärische Koordinaten*[80] *von* (x,y,z).

Satz 11.5. *Für alle* $r\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ *sowie* $\varphi,\theta\in\mathbb{R}$ *ist*

$$\det(DS(r,\varphi,\theta)) \;=\; -r^2\sin\theta.$$

Beweis. Die Aussage folgt aus folgender elementaren, etwas langwierigen Rechnung:

$$\begin{aligned} \det(DS(r,\varphi,\theta)) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\varphi\cdot\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\varphi} r\cos\varphi\cdot\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta} r\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\varphi\cdot\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\varphi} r\sin\varphi\cdot\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta} r\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial\varphi} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial\theta} r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\theta & -r\sin\varphi\cdot\sin\theta & r\cos\varphi\cdot\cos\theta \\ \sin\varphi\cdot\sin\theta & r\cos\varphi\cdot\sin\theta & r\sin\varphi\cdot\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \quad \cos\theta(-r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\cos\theta\sin\theta) \\ &\quad -r\sin\theta(\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta) \\ &= -r^2\cos^2\theta\sin\theta - r^2\sin\theta\sin^2\theta \;=\; -r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

□

[80]Manchmal sagt man auch ‘Kugelkoordinaten’ anstatt ‘sphärische Koordinaten’.

Beispiel. Wir betrachten nun die Kugel

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}.$$

In sphärischen Koordinaten können wir schreiben

$$K = \left\{S(r,\varphi,\theta) \,\middle|\, r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi] \text{ und } \theta \in [0,\pi]\right\}.$$

Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K) &= \int_K 1\,dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{analog zu Satz 11.3, unter Verwendung von Satz 11.5}}}{=} \int_{r=0}^{r=1}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 1\cdot r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = \int_{r=0}^{r=1}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 2r^2\,d\varphi\,dr \\ &= \int_{r=0}^{r=1} 4\pi r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

12. Beweis der Transformationsformel

12.1. **Vorbereitungen zum Beweis der Transformationsformel.** Für einen Vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\|v\| \;:=\; \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \qquad \text{Euklidische Norm}$$

und

$$|v| \;:=\; \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} \qquad \text{Maximumsnorm.}$$

Für eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ setzen wir zudem

$$\|A\| \;:=\; \max\big\{ \|Av\| \,\big|\, v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \big\}.$$

Das nächste Lemma folgt leicht aus Lemma 6.6 aus der Analysis II.

Lemma 12.1.

(1) *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} M(n \times n, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$$

ist stetig.

(2) *Für alle $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $w \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|Aw\| \;\leq\; \|A\| \cdot \|w\|.$$

Die Aussage von folgendem Lemma ist ganz ähnlich der Aussage von Lemma 4.1 aus der Funktionentheorie.

Lemma 12.2. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $G \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so dass $x + tv \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$\big|G(x+v) - G(x)\big| \;\leq\; |v| \cdot \sqrt{n} \cdot \max\big\{ \|DG(x+tv)\| \,\big|\, t \in [0,1] \big\}.$$

Beweis. Es folgt leicht aus den Definition, dass für alle $w \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichungen

$$(*) \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\|w\| \;\leq\; |w| \;\leq\; \|w\|$$

gelten. Nun ist

$$\begin{array}{rcl} |G(x+v) - G(x)| & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } (*)}}{\leq} & \|G(x+v) - G(x)\| \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 8.3 aus der Analysis II}}}{=} \quad \Big\| \int_0^1 DG(x+tv) \cdot v \, dt \Big\| \\ & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 8.3 aus der Analysis II}}}{\leq} & \int_0^1 \big\| DG(x+tv) \cdot v \big\| \, dt \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 12.1 (2)}}}{\leq} \quad \int_0^1 \|DG(x+tv)\| \cdot \|v\| \, dt \\ & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn aus } (*) \text{ folgt } \|v\| \leq \sqrt{n}|v|}}{\leq} & |v| \cdot \sqrt{n} \cdot \max\big\{ \|DG(x+tv)\| \,\big|\, t \in [0,1] \big\}. \end{array}$$

$\square$

12.2. **Zwei Hilfssätze für den Beweis der Transformationsformel.** Der erste Hilfssatz besagt, dass wenn eine Abbildung nahe an der Identität ist, in dem Sinne, dass das Differential nahe an der Identität ist, dann wird jeder beliebige abgeschlossene Würfel der Form

$$W(a,\epsilon) \;:=\; \left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, |x-a|\le\epsilon\right\} \;=\; [a_1-\epsilon,a_1+\epsilon]\times\cdots\times[a_n-\epsilon,a_n+\epsilon]$$

im Definitionsbereich nur wenig gestreckt oder gestaucht.

Hilfssatz 12.3. *Es seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$F\colon U \;\to\; V$$

eine C^1-invertierbare Abbildung mit Umkehrabbildung. Es seien $x_0\in U$ und $\mu\in(0,1)$ gegeben. Wir nehmen an, $r>0$ besitzt die Eigenschaft, dass $W(x_0,r)\subset U$ und auch $W(F(x_0),r)\subset V$. Zudem nehmen wir an, dass

$$\sup_{|x-x_0|\le r}\|DF(x)-\mathrm{id}\,\| \;\le\; \frac{\mu}{\sqrt{n}} \qquad \textit{und} \qquad \sup_{|y-F(x_0)|\le r}\|DF^{-1}(y)-\mathrm{id}\,\| \;\le\; \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Dann gilt für jeden Würfel der Form $W=W(a,\delta)$ mit $\delta\le\frac{1}{2}r$ und mit $x_0\in W$, dass

$$\mathrm{Vol}(W)\cdot(1-\mu)^n \;\le\; \mathrm{Vol}(F(W)) \;\le\; \mathrm{Vol}(W)\cdot(1+\mu)^n.$$

Bemerkung. Die Aussage von Hilfssatz 12.3 kann auch formuliert werden als

$$(1-\mu)^n \;\le\; \frac{\mathrm{Vol}(F(W))}{\mathrm{Vol}(W)} \;\le\; (1+\mu)^n.$$

Die Aussage von Hilfssatz 12.3 wird in Abbildung 41 illustriert.

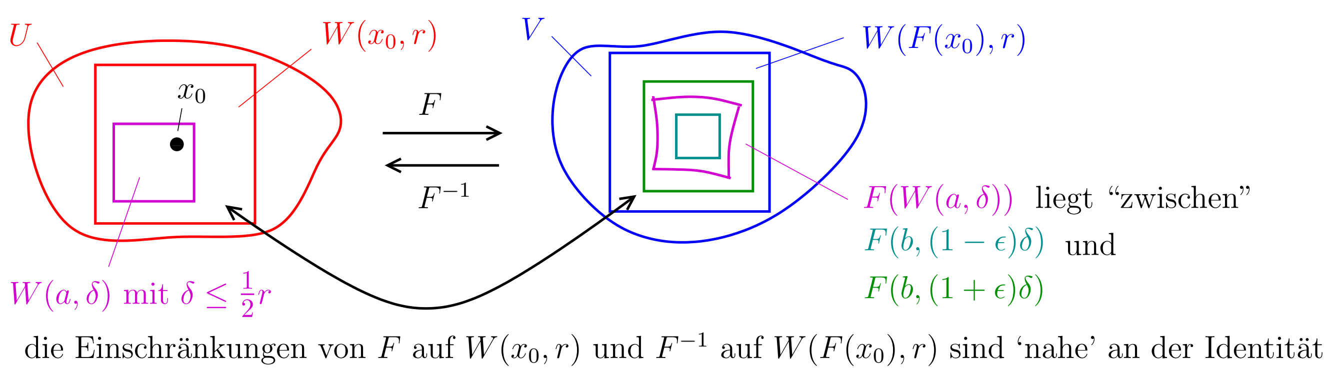


Abbildung 41. Illustration zur Aussage und dem Beweis von Hilfssatz 12.3.

Beweis von Hilfssatz 12.3. Es sei also $W(a,\delta)$ ein Würfel mit $\delta\le\frac{1}{2}r$ und mit $x_0\in W(a,\delta)$. Wir setzen $b:=F(a)$. Es genügt folgende zwei Inklusionen zu beweisen:

$$W(b,(1-\mu)\delta) \;\subset\; F(W(a,\delta)) \;\subset\; W(b,(1+\mu)\delta).$$

Wir beweisen die beiden Inklusionen in den folgenden zwei Behauptungen.

Behauptung. Es ist

$$F(W(a,\delta)) \ \subset \ W(b,(1+\mu)\delta).$$

Wir machen zuerst die Beobachtung, dass $W(a,\delta) \subset W(x_0,r)$. In der Tat, denn für $x \in W(a,\delta)$ gilt

$$|x-x_0| \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung für} \\ \text{die Maximumsnorm}}}{\leq} \ |x-a|+|a-x_0| \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } x_0 \in W(a,\delta) \text{ folgt,} \\ \text{dass } |a-x_0| \leq \delta}}{\leq} \ \delta+\delta \ \leq \ r.$$

Für $x \in W(a,\delta)$ gilt dann, dass

$$\begin{aligned} |F(x)-b| \ &= \ |F(x)-F(a)| \ \overset{\substack{\text{wir führen } F-\text{id ein, da wir darüber Kontrolle besitzen} \\ \downarrow}}{=} \ |(F-\text{id})(x)-(F-\text{id})(a)+(x-a)| \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} \ |(F-\text{id})(x)-(F-\text{id})(a)|+|x-a| \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 12.2, angewandt auf } G=F-\text{id} \\ \text{und der Voraussetzung, dass} \\ \|DF(z)-\text{id}\,\| \leq \frac{\mu}{\sqrt{n}} \text{ für alle } z \in W(a,\delta) \subset W(x_0,r)}}{\leq} \ \mu|x-a|+|x-a| \ \leq \ (1+\mu)\delta. \end{aligned}$$

Also gilt $F(x) \in W(b,(1+\mu)\delta)$. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Behauptung. Es ist

$$W(b,(1-\mu)\delta) \ \subset \ F(W(a,\delta)).$$

Mithilfe der Voraussetzung an $\|DF^{-1}(y)-\text{id}\,\|$ zeigt man nun, fast genauso wie in der vorherigen Behauptung, dass $F^{-1}(W(b,(1-\mu)\delta)) \subset W(a,\delta)$. Die Behauptung folgt dann durch Anwenden der Abbildung F auf diese Inklusion. $\square$

In Satz 7.4 hatten wir gesehen, dass bei Anwenden einer Matrix A auf einen messbare Menge sich das Volumen mit dem Faktor $|\det(A)|$ multipliziert. Der folgende Satz gibt nun eine, gezwungenermassen, schwächere Aussage für C^1-invertierbare Abbildungen.

Hilfssatz 12.4. *Es seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1-invertierbare Abbildung und es sei $x_0 \in U$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $r > 0$, so dass für jeden Würfel $W = W(a,\delta)$ in U mit $\delta \leq \frac{1}{2}r$ und $x_0 \in W$ gilt, dass*

$$\left| \frac{\text{Vol}(\Phi(W))}{\text{Vol}(W)} - |\det(D\Phi(x_0))| \right| \ \leq \ \epsilon.$$

Beweis.

Wir wissen aus Satz 7.4, dass eine Matrix A das Volumen um den Faktor $|\det(A)|$ multipliziert. Zudem wissen wir aus Hilfssatz 12.3, dass eine C^1-invertierbare Abbildung F mit $DF(x_0) = \text{id}$ das Volumen “kaum” ändert. Wir führen jetzt die gewünschte Aussage auf diese beiden Aussagen zurück.

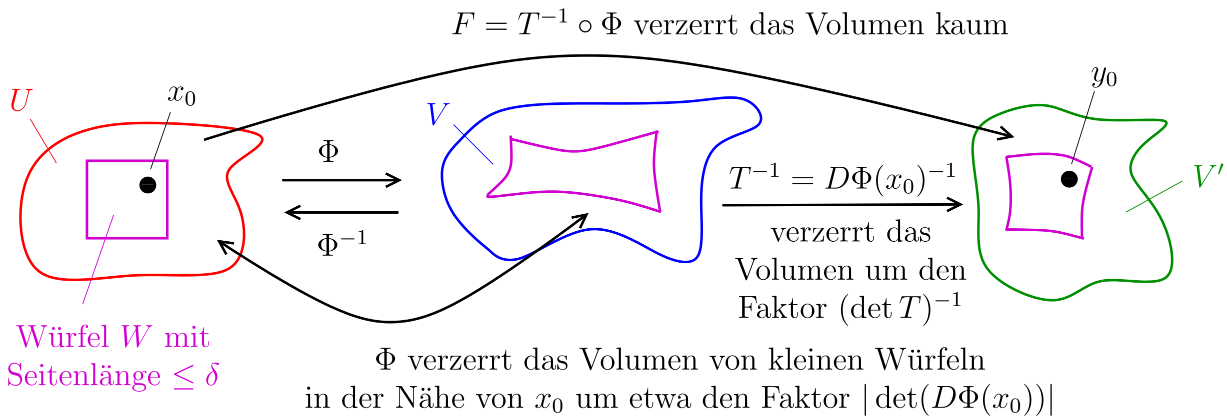


Abbildung 42. Illustration zur Aussage und dem Beweis von Hilfssatz 12.4.

Wir setzen $T := D\Phi(x_0)$ und wir betrachten die Abbildung

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rr, bend right, "=:F"'] & V \arrow[r, "T^{-1}"] & V' := T^{-1}(V) \ . \end{tikzcd}$$

Die Abbildung F ist ebenfalls C^1-invertierbar. Wir setzen $y_0 := F(x_0)$. Aus der Kettenregel folgt, dass $DF(x_0) = \mathrm{id}$ und $DF^{-1}(y_0) = \mathrm{id}$. Wir machen nun folgende Vorüberlegung. Für jeden Würfel W gilt

$$\left|\frac{\mathrm{Vol}(\Phi(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - |\det T|\right| \overset{\substack{\text{denn } \Phi = T\circ F\\ \downarrow}}{=} \left|\underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(T(F(W)))}{\mathrm{Vol}(F(W))}}_{= |\det T|, \text{ nach Satz 7.4}} \cdot \frac{\mathrm{Vol}(F(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - |\det T|\right| = |\det T| \cdot \left|\frac{\mathrm{Vol}(F(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - 1\right|.$$

Es genügt nun also folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $r > 0$, so dass für jeden Würfel $W = W(a, \delta)$ in U mit $\delta \leq \frac{1}{2}r$ und $x_0 \in W$ gilt, dass

$$-\frac{\epsilon}{|\det T|} \;\leq\; \frac{\mathrm{Vol}(F(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - 1 \;\leq\; \frac{\epsilon}{|\det T|}.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Wir wählen ein $\mu \in (0,1)$, so dass[81]

$$-\frac{\epsilon}{|\det T|} \leq (1-\mu)^n - 1 \quad \text{ und } \quad (1+\mu)^n - 1 \leq \frac{\epsilon}{|\det T|}.$$

[81]Warum existiert solch ein μ?

Aus der Tatsache, dass $DF(x_0) = \mathrm{id}$, $DF^{-1}(y_0) = \mathrm{id}$, der Stetigkeit von DF und DF^{-1} und aus Lemma 12.1 (1) folgt, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$W(x_0, r) \ \subset \ U \qquad \text{und} \qquad W(y_0, r) \ \subset \ V',$$

und so dass folgende Ungleichungen gelten

$$\sup_{|x-x_0|\le r} \|DF(x) - \mathrm{id}\,\| \ \le \ \frac{\mu}{\sqrt{n}} \qquad \text{und} \qquad \sup_{|y-y_0|\le r} \|DF^{-1}(y) - \mathrm{id}\,\| \ \le \ \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $r > 0$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Es sei jetzt also $W = W(a, \delta) \subset U$ ein Würfel mit $x_0 \in W$ und $\delta \le \frac{1}{2}r$. Hilfssatz 12.3 besagt nun, dass

$$\underbrace{(1-\mu)^n - 1}_{-\frac{\epsilon}{|\det T|}\le} \ \le \ \frac{\mathrm{Vol}(F(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - 1 \ \le \ \underbrace{(1+\mu)^n - 1}_{\le\frac{\epsilon}{|\det T|}}.$$

□

12.3. **Beweis der Transformationsformel für Abbildungen mit kompaktem Träger.** Der *Träger* einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Menge

$$\text{Träger}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Beispielsweise ist der Träger von $\sin(x)$ ganz $\mathbb{R}$.

In diesem Kapitel beweisen wir die Transformationsformel für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger. Im nächsten Kapitel werden wir den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurückführen.

Satz 12.5. *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung. Es sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)|\, dx \ = \ \int_{\Phi(U)} f(y)\, dy.$$

Für den Beweis von Satz 12.5 werden wir folgendes Lemma benötigen.

Lemma 12.6. *Es sei $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ eine absteigende Folge von kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, so dass*

$$\mathrm{Vol}(A_k) > 0 \textit{ für alle } k \in \mathbb{N} \textit{ und } \lim_{k\to\infty} \mathrm{Durchmesser}(A_k) \ = \ 0.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Es existiert genau ein $z_0 \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$.*

(2) *Für jede stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g(z_0) = 0$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{Vol}(A_k)} \int_{A_k} g(z)\, dz \ = \ 0.$$

Beweis. Die Existenz von z_0 haben wir in Übungsaufgabe 4 von Übungsblatt 2 bewiesen. Die Eindeutigkeit von z_0 ist leicht zu zeigen. Aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals folgt, dass für jede kompakte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\Big|\int_M g(z)\,dz\Big| \;\le\; \mathrm{Vol}(M)\cdot \sup\big\{|g(z)|\,\big|\, z\in M\big\}$$

gilt. Die zweite Aussage folgt nun leicht aus den Voraussetzungen und dieser Beobachtung. □

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 12.5 zu.

Beweis von Satz 12.5. Wir beweisen den Satz in dem Spezialfall, dass $U = V = \mathbb{R}^n$. Der allgemeine Fall wird ganz ähnlich bewiesen, siehe beispielsweise Seite 103 von Forster: Analysis III.

Es sei nun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Wir setzen

$$e(x) \;:=\; f(\Phi(x))\cdot|\det D\Phi(x)|.$$

Die Funktion e ist dann ebenfalls stetig. Der Träger von f ist nach Voraussetzung kompakt. Nachdem Φ ein Homöomorphismus ist, ist auch der Träger von e kompakt. Es folgt daher aus Satz 8.20, dass die Funktion e Lebesgue-integrierbar ist. Es genügt nun also die Gleichheit der Lebesgue-Integrale zu beweisen.

Für eine beliebige messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\Delta(A) \;:=\; \int_{\Phi(A)} f(y)\,dy \;-\; \int_A e(x)\,dx.$$

Wir wollen zeigen, dass $\Delta(\mathbb{R}^n) = 0$. Der Träger von e ist kompakt. Es gibt also einen Würfel Q in $\mathbb{R}^n$, so dass der Träger von e in Q enthalten ist. Es genügt also zu zeigen, dass $\Delta(Q) = 0$.

Wir wollen also zeigen, dass $\Delta(Q) = 0$. Für 'sehr kleine' Würfel ist Φ 'fast linear', und im linearen Fall gilt $\Delta(W) = 0$ für jeden Würfel W. Die Ausgangslage ist also wie im Beweis vom Cauchyschen Integralsatz 4.2 für Rechtecke. Auch in diesem Fall wollten wir zeigen, dass ein Integral über ein Rechteck verschwindet, aber wir hatten nur eine Aussage für kleine Rechtecke. Wir verfahren nun wie im Beweis vom Cauchyschen Integralsatz 4.2 für Rechtecke. Durch sukzessives halbieren der Seitenlängen konstruieren wir eine Folge von immer kleiner werdenden Würfeln, welche "gegen einen Punkt konvergieren".

Behauptung. Es gibt eine Folge von Würfeln

$$Q \;=\; Q_0 \;\supset\; Q_1 \;\supset\; Q_2 \;\supset\; \dots$$

so dass gilt

(1) Für alle k ist
$$\frac{|\Delta(Q_{k+1})|}{\mathrm{Vol}(Q_{k+1})} \;\ge\; \frac{|\Delta(Q_k)|}{\mathrm{Vol}(Q_k)}.$$

(2) Es ist

$$\lim_{k\to\infty} \text{Durchmesser}(Q_k) \;=\; 0.$$

Wir unterteilen jetzt den Würfel $Q_0 := Q$ durch Halbieren seiner Seiten in 2^n Würfel $R_1, \dots, R_{2^n}$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, dass

$$\text{Vol}(R_i) \;=\; \tfrac{1}{2^n}\,\text{Vol}(Q).$$

Zudem folgt aus Lemma 8.19, Satz 6.9 und Satz 6.6[82] dass

$$\sum_{i=1}^{2^n} \Delta(R_i) \;=\; \Delta(Q).$$

Es gibt also ein $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, so dass

$$\frac{|\Delta(R_i)|}{\text{Vol}(R_i)} \;\geq\; \frac{|\Delta(Q)|}{\text{Vol}(Q)}$$

Wir setzen nun $Q_1 = R_i$. Wir unterteilen jetzt wiederum Q_1 in 2^n Würfel und führen das gleiche Verfahren durch. Wir erhalten eine Folge von Würfeln mit den gewünschten Eigenschaften. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Der Beweis von Übungsaufgabe 4 in Übungsblatt 2 zeigt, dass es einen Punkt x_0 gibt, welcher in allen Q_k's enthalten ist. Wir setzen $y_0 := \Phi(x_0)$.

Behauptung.

(1) Für jede stetige Funktion g mit $g(x_0) = 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\text{Vol}(Q_k)} \int_{Q_k} g(x)\,dx \;=\; 0.$$

(2) Für jede stetige Funktion h mit $h(y_0) = 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\text{Vol}(Q_k)} \int_{\Phi(Q_k)} h(y)\,dy \;=\; 0.$$

Die erste Aussage der Behauptung folgt sofort aus Lemma 12.6. Für die zweite Aussage setzen wir

$$C \;:=\; \sup\big\{\|D\Phi(x)\| \,\big|\, x \in Q\big\}.$$

Für alle k folgt dann aus der offensichtlichen Verallgemeinerung von Lemma 4.1 aus der Funktionentheorie, dass

$$\text{Durchmesser}(\Phi(Q_k)) \;\leq\; C \cdot \text{Durchmesser}(Q_k).$$

Zudem existiert ein[83] $C' \geq 0$, so dass

$$\text{Vol}(\Phi(Q_k)) \;\leq\; C' \cdot \text{Vol}(Q_k).$$

[82]Wofür benötigen wir Satz 6.9 und Satz 6.6?

Es folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\int\limits_{\Phi(Q_k)} h(y)\,dy \;=\; \lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}{\mathrm{Vol}(Q_k)}}_{\text{beschränkt}}\underbrace{\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}\int\limits_{\Phi(Q_k)} h(y)\,dy}_{\text{aus Lemma 12.6 folgt } \lim\limits_{k\to\infty}=0} \;=\; 0.$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Nun gilt, dass

$$\frac{\Delta(Q_k)}{\mathrm{Vol}(Q_k)} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\left(\int\limits_{\Phi(Q_k)} f(y)\,dy \;-\; \int\limits_{Q_k} e(x)\,dx\right) \;=\; (*)$$

Wir wollen nun die Integranden umschreiben, so dass wir Integrale erhalten, auf welche wir entweder die obige Behauptung anwenden können, oder welche konstant sind. Wir schreiben also

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\left(\int\limits_{\Phi(Q_k)} \underbrace{f(y)-f(y_0)}_{=:h(y)} + f(y_0)\,dy \;-\; \int\limits_{Q_k} \underbrace{e(x)-e(x_0)}_{=:g(x)} + \underbrace{f(y_0)\cdot|\det D\Phi(x_0)|}_{=\,e(x_0)\text{ ausgeschrieben}}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\left(\underbrace{\int\limits_{\Phi(Q_k)} h(y)\,dy + f(y_0)\,\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}_{\text{erstes Integral}} - \underbrace{\int\limits_{Q_k} g(x)\,dx + f(y_0)|\det D\Phi(x_0)|\,\mathrm{Vol}(Q_k)}_{\text{zweites Integral}}\right)\\
&= \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\int\limits_{\Phi(Q_k)} h(y)\,dy}_{\substack{\text{es ist } h(y_0)=0\text{, also}\\ \text{folgt aus der Behauptung,}\\ \text{dass } \lim\limits_{k\to\infty}=0}} - \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\int\limits_{Q_k} g(x)\,dx}_{\substack{\text{es ist } g(x_0)=0\text{, also}\\ \text{folgt aus der Behauptung,}\\ \text{dass } \lim\limits_{k\to\infty}=0}} + f(y_0)\Bigg(\underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}{\mathrm{Vol}(Q_k)} - |\det D\Phi(x_0)|}_{\lim\limits_{k\to\infty}=0\text{ nach Hilfssatz 12.4}}\Bigg).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta(Q_k)}{\mathrm{Vol}(Q_k)} \;=\; 0,\quad \text{insbesondere auch}\quad \lim_{k\to\infty}\frac{|\Delta(Q_k)|}{\mathrm{Vol}(Q_k)} \;=\; 0.$$

Aus der Konstruktion der Folge Q_k folgt nun, dass

$$\frac{|\Delta(Q)|}{\mathrm{Vol}(Q)} \;=\; 0,\quad \text{insbesondere auch}\quad \Delta(Q) \;=\; 0. \qquad \square$$

12.4. **Das Lebesgue-Integral und Funktionenfolgen.** Für eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^n$ schreiben wir nun [84]

$$C_c(V) \;:=\; \text{Menge aller stetigen Funktionen } U\to\mathbb{R} \text{ mit kompaktem Träger.}$$

Wir haben im vorherigen Kapitel die Transformationsformel für Funktionen in $C_c(V)$ bewiesen. Die Idee ist nun den allgemeinen Fall auf diesen Fall zurückzuführen. Genauer

[83] Warum existiert solch ein C'? Wie hängt es mit C und n zusammen?

[84] Das 'grosse C' in der Notation steht für 'continuous', also stetig. Das 'kleine c' steht für 'compact'.

gesagt, wir wollen eine beliebige Lebesgue-integrierbare Funktion auf V durch Funktionen in $C_c(V)$ 'approximieren'.

Die folgende Definition gibt ermöglicht es uns nun den Begriff 'approximieren' in eine saubere Form zu bringen.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir schreiben

$$\mathcal{L}(U) \;:=\; \text{Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf } U.$$

Für $f \in \mathcal{L}(U)$ definieren wir zudem

$$\|f\|_{L^1} \;:=\; \int\limits_U |f|\, dv.$$

Das folgende Lemma fasst die wichtigsten Eigenschaften von $\|f\|_{L^1}$ zusammen.

Lemma 12.7. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.*

(1) *Für $f \in \mathcal{L}(U)$ gilt*

$$\|f\|_{L^1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \textit{ fast überall},$$

(2) *Für $f \in \mathcal{L}(U)$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\|c \cdot f\|_{L^1} \quad = \quad |c| \cdot \|f\|_{L^1}$$

(3) *Für f und g in $\mathcal{L}(U)$ gilt*

$$\|f + g\|_{L^1} \quad \leq \quad \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

Beweis. Die erste Aussage ist eine Umformulierung von Satz 8.16. Die zweite Aussage ist elementar und die dritte Aussage folgt aus der Dreiecksungleichung und aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals. □

Bemerkung. Das Lemma besagt also inbesondere, dass $\| - \|_{L^1}$ eine Seminorm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(U)$ ist.[85]

Das folgende Lemma besagt, dass das Lebesgue-Integral stetig ist bezüglich der L^1-Seminorm

Lemma 12.8. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und es sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(U)$ und es sei $f \in \mathcal{L}(U)$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^1} \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \int\limits_U f_k\, dv \;=\; \int\limits_U f\, dv.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Beobachtung, dass

$$\Big| \int\limits_U f\, dv - \int\limits_U f_k\, dv \Big| \;=\; \Big| \int\limits_U f - f_k\, dv \Big| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 8.11 (3)}}}{\leq} \int\limits_U |f - f_k|\, dv \;=\; \|f - f_k\|_{L^1}.$$

□

[85]Eine *Seminorm* $\| - \|$ erfüllt alle Eigenschaften einer Norm, bis auf die Tatsache, dass aus $\|v\| = 0$ nicht notwendigerweise $v = 0$ folgt.

Unser Ziel ist es nun folgenden Satz zu beweisen.

Satz 12.9. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(U)$ mit*

$$\|f - g\|_{L^1} \;<\; \epsilon.$$

Bemerkung. Der Satz besagt also, dass bezüglich der Seminorm $\| - \|_{L^1}$ die Menge $C_c(U)$ dicht in der Menge $\mathcal{L}(U)$ liegt.[86]

Beweis. Wir beweisen den Satz nur im Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^n$. Der allgemeine Fall wird auf Seite 65 von Forster: Analysis III bewiesen.

Nachdem jede Lebesgue-integrierbare Funktion die Differenz zweier nichtnegativer Lebesgue-integrierbare Funktionen ist, und nachdem $\| - \|_{L^1}$ die Dreiecksungleichung erfüllt genügt es den Satz für nichtnegative Funktionen zu beweisen. Das Lemma folgt nun leicht aus der Tatsache, dass $\| - \|_{L^1}$ eine Seminorm ist und aus der folgenden Behauptung.

Behauptung.

(1) Für jede nichtnegative Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und jedes $\eta > 0$ gibt es eine Stufenfunktion g mit
$$\|f - g\|_{L^1} \;<\; \eta.$$
(2) Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $\eta > 0$ gibt es ein $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ mit
$$\|\chi_A - \chi_Q\|_{L^1} \;\leq\; \eta.$$
(3) Für alle halboffenen Quader Q und alle $\eta > 0$ gibt es ein $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit
$$\|\chi_Q - g\|_{L^1} \;<\; \eta.$$

Wir beweisen nun die drei Aussagen der Behauptung.

(1) Es sei also $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Lebesgue-integrierbare Funktion und $\eta > 0$. Dann gibt es eine Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_k \uparrow f$ und
$$\int f_k \, dv \;\uparrow\; \int f \, dv.$$
Es folgt aus der Konvergenz der Folge von Integralen, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
$$\int f \, dv - \int f_k \, dv \;\;<\;\; \eta,$$
also auch
$$\|f - f_k\|_{L^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } f \geq f_k}}{=} \int f - f_k \, dv \;\;\leq\;\; \int f \, dv - \int f_k \, dv \;<\; \eta.$$

[86] Gilt dies auch bezüglich anderen Normen, z.B. der Maximumsnorm?

(2) Es sei also $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und es sei $\eta > 0$. In Übungsblatt 11 hatten wir schon bewiesen, dass es ein $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{Vol}(Q \triangle A) < \epsilon$ gibt. Daraus folgt nun, dass

$$\big\| |\chi_A - \chi_Q| \big\|_{L^1} \; = \; \|\chi_{A \triangle Q}\| \; = \; \mathrm{Vol}(Q \triangle A) \; < \; \epsilon.$$

(3) Es sei also

$$Q \; = \; [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

ein halboffener Quader. Für $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, n$ betrachten wir die Funktion $f_{i,k}$, deren Graph in Abbildung 43 skizziert ist. [87] Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir dann

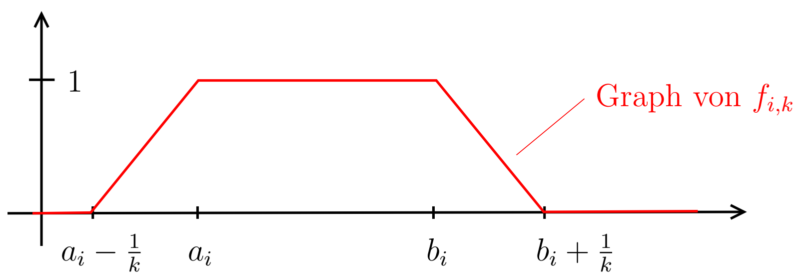


Abbildung 43.

$$\begin{array}{rcl} f_k \colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f_{1,k}(x_1) \cdot \cdots \cdot f_{n,k}(x_n). \end{array}$$

Diese Funktionen liegen alle in $C_c(\mathbb{R}^n)$, und es ist

$$\|\chi_Q - f_k\|_{L^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } f_k \geq \chi_Q}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f_k - \chi_Q \, dv \;\leq\; \underbrace{\prod_{i=1}^n \left(b_i - a_i + \tfrac{2}{k}\right) - \prod_{i=1}^n \left(b_i - a_i\right)}_{\lim_{k\to\infty} = 0}.$$

Es folgt also, dass

$$\lim_{k\to\infty} \|\chi_Q - f_k\|_{L^1} \; = \; 0.$$

Das gewünschte g ist also durch ein f_k, mit k groß genug, gegeben.

$\square$

[87] Der Form halber ist hier noch die präzise Definition der Funktion, diese ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} f_{i,k} \colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in (-\infty, a_i - \frac{1}{k}], \\ k(t - a_i - \frac{1}{k}), & \text{wenn } x \in [a_i - \frac{1}{k}, a_i), \\ 1, & \text{wenn } x \in [a_i, b_i), \\ 1 - k(t - b_i), & \text{wenn } x \in [b_i, b_i + \frac{1}{k}), \\ 0, & \text{wenn } x \in [b_i + \frac{1}{k}, \infty). \end{cases} \end{array}$$

Satz 12.10. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}(U)$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}(U)$ mit*

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{L^1} \;=\; 0.$$

Zudem gibt es eine Teilfolge $\{f_{m_k}\}_{k\geq 1}$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) \;=\; f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in U.$$

Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen

$$\mathcal{N}(U) \;:=\; \{\text{alle } f \in \mathcal{L}(U) \text{ mit } \|f\|_{L^1} = 0\}.$$

Dies ist ein Untervektorraum[88] von $\mathcal{L}(U)$ und $\|-\|_{L^1}$ definiert eine Norm auf dem Quotientenvektorraum $\mathcal{L}(U)/\mathcal{N}(U)$. Satz 12.10 besagt nun insbesondere, dass jede L^1-Cauchyfolge in dem normierten Vektorraum $\mathcal{L}(U)/\mathcal{N}(U)$ konvergiert, d.h. $\mathcal{L}(U)/\mathcal{N}(U)$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum, also ein Banachraum.

Bemerkung. Es erscheint auf den ersten Blick wohl etwas eigenartig, dass man in Satz 12.10 zu einer Teilfolge $\{f_{m_k}\}_{k\geq 1}$ übergehen muss, um punktweise Konvergenz zu erzielen. Dies ist im Allgemeinen aber unvermeidlich. Genauer gesagt, wir konstruieren eine Funktionenfolge wie folgt. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $m = 2^r + s$ mit $s \in \{0,\dots,2^{r-1}\}$. Wir betrachten dann

$$\begin{aligned} f_m\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \left[\frac{s}{2^r}, \frac{s+1}{2^r}\right], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\|f_m\|_{L^1} \;=\; \int_{\mathbb{R}} |f_m(x)|\,dx \;=\; \int_{\left[\frac{s}{2^r},\frac{s+1}{2^r}\right]} 1\,dx \;=\; \frac{1}{2^r} \;\leq\; \frac{1}{m}.$$

Die Funktionenfolge $\{f_m\}_{m\geq 1}$ konvergiert also bezüglich der L^1-Seminorm gegen die Nullfunktion. Andererseits gilt für alle $x \in [0,1]$, dass[89]

$$\liminf f_m(x) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \limsup f_m(x) \;=\; 1.$$

Wir sehen also, dass die Funktionenfolge $\{f_m\}_{m\geq 1}$ auf keinem Punkt des Intervalls $[0,1]$ gegen die Nullfunktion konvergiert.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 12.10 zuwenden halten wir noch folgendes Korollar fest.

Korollar 12.11. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{L}(U)$ mit*

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{L^1} \;=\; 0.$$

---

[88] Warum?

[89] Warum gilt das?

Dann gibt es eine Teilfolge $\{f_{m_k}\}_{k\geq 1}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) \;=\; f(x) \qquad \textit{für fast alle } x \in U.$$

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{L}(U)$, welche bezüglich der L^1-Seminorm gegen $f \in \mathcal{L}(U)$ konvergiert. Dann ist $\{f_m\}_{m\geq 1}$ insbesondere eine L^1-Cauchyfolge Es sei $f' \in \mathcal{L}(U)$ die Funktion aus Satz 12.10. Dann ist $\|f - f\|_{L^1} = 0$. Also stimmen f und f' nach Lemma 12.7 fast überall überein. Die gewünschten Aussagen über f folgen nun leicht aus den Aussagen über f'. ☐

In dem Beweis von Satz 12.10 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 12.12. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{g_k\}_{k\geq 1}$ eine Funktionenfolge in $\mathcal{L}(U)$ mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^1} \;<\; \infty.$$

Dann gibt es eine Funktion g, so dass gilt:

(1) *Es gibt eine Nullmenge N, so dass*
$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \;=\; g(x) \quad \textit{für alle } x \notin N.$$
(2) *g ist Lebesgue-integrierbar.*
(3)
$$\lim_{m\to\infty} \Big\| g - \sum_{k=1}^{m} g_k \Big\|_{L^1} \;=\; 0.$$

Beweis.

Man würde am liebsten einfach $g(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_m(x)$ setzen. Aber es gibt a priori keinen Grund, warum diese Reihe in irgendeiner Weise konvergieren muss. Wir betrachten daher zuerst $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |g_m(x)|$, denn diese Reihe konvergiert zumindest gegen ein Element in $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Behauptung. Die Funktion $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |g_k| = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} |g_k|$ ist Lebesgue-integrierbar.

Für alle $m \geq 1$ gilt

$$\int_U \sum_{k=1}^{m} |g_k|\, dv \;=\; \sum_{k=1}^{m} \|g_k\|_{L^1} \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^1} \;<\; \infty.$$

Die Lebesgue-Integrierbarkeit unserer Funktion folgt nun aus dem Satz 8.14 von der monotonen Konvergenz von Levi angewandt auf

$$\sum_{k=1}^{m} |g_k| \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|.$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Es folgt aus Satz 8.18, dass es eine Nullmenge $N \subset U$ gibt, so dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| < \infty$ für alle $x \in U \setminus N$. Jede absolut konvergente Reihe ist insbesondere konvergent. Für alle $x \in U \setminus N$ existiert daher auch der Grenzwert

$$g(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \;\in\; \mathbb{R}.$$

Für $x \in N$ setzen wir zudem $g(x) = 0$.

Wir wollen nun (2) mithilfe vom Satz 9.5 von der majorisierten Konvergenz beweisen. Für die Partialsummen gilt die Majorisierung

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} g_k\Big| \;\le\; \sum_{k=1}^{m} |g_k| \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|.$$

Wir hatten gerade gezeigt, dass die Funktion auf der rechten Seite Lebesgue-integrierbar ist. Es folgt also aus Satz 9.5 von der majorisierten Konvergenz, dass g ebenfalls Lebesgue-integrierbar ist.

Es verbleibt (3) zu beweisen. Es ist

$$\lim_{m\to\infty} \Big\|g - \sum_{k=1}^{m} g_k\Big\|_{L^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \text{ außerhalb} \\ \text{einer Nullmenge}}}{\le} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{L_1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn nach Voraussetzung} \\ \text{ist } \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{L_1} < \infty}}{=} 0.$$

$\square$

Wir sind nun in der Lage Satz 12.10 zu beweisen.

Beweis von Satz 12.10. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{f_m\}_{m\ge1}$ eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}(U)$.

Der Gedanke ist nun die Folge f_m als Reihe umzuschreiben, und dann Lemma 12.12 anzuwenden. Die erste Idee wäre wohl

$$f_m \;=\; f_1 + \sum_{k=2}^{m} (f_k - f_{k-1})$$

zu schreiben. Aber in diesem Fall ist es nicht klar, warum $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\|_{L^1} < \infty$ sein soll. Wir gehen nun zu einer Teilfolge von f_m über, um sicher zu stellen, dass diese Reihe dann doch konvergiert.

Nachdem $\{f_m\}_{m\ge1}$ eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}(U)$ ist, gibt es insbesondere eine Indexfolge $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, so dass[90]

$$\|f_{m_k} - f_{m_{k-1}}\|_{L^1} \;\le\; 2^{-k} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

[90]Warum gibt es eine solche Indexfolge? Denken Sie an eine Cauchy-Folge $(a_m)_{m\ge1}$ von reellen Zahlen. Warum gibt es eine Indexfolge $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, so dass $|a_{m_k} - a_{m_{k-1}}| \le 2^{-k}$ für alle k?

Wir können nun Lemma 12.12 auf die Reihe

$$\underbrace{f_{m_1}}_{=:g_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{(f_{m_k} - f_{m_{k-1}})}_{=:\, g_k,\ \text{wobei } \|g\| \leq 2^{-k}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\Big(f_{m_1} + \sum_{k=2}^{n} (f_{m_k} - f_{m_{k-1}}) \Big)}_{= f_{m_n}}$$

anwenden. Lemma 12.12 besagt nun, dass es ein $f \in \mathcal{L}(U)$ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) \;=\; f(x) \quad \text{für fast alle } x \in U,$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{m_k} - f\|_{L^1} \;=\; 0.$$

Da $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine L^1-Cauchyfolge ist, folgt daraus auch, dass

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^1} \;=\; 0.$$

□

12.5. **Beweis der allgemeinen Transformationsformel.** Wir beweisen nun die Transformationsformel im allgemeinen Fall.

Beweis von Satz 11.1. Es seien also $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung zudem sei eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ gegeben.

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\begin{aligned} e\colon U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e(x) := f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \end{aligned}$$

Lebesgue-integrierbar ist, und dass

$$\int_U e(x)\, dx \;=\; \int_V f(y)\, dy.$$

Die Lebesgue-integrierbare Funktion f ist insbesondere messbar. Nachdem Φ ein Homöomorphismus ist folgt leicht aus Satz 6.9, dass auch $f \circ \Phi$ messbar ist.[91] Nachdem $|\det D\Phi|$ stetig, insbesondere messbar ist, ist dann nach Lemma 8.2 auch $e = (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ messbar auf U.[92]

Es folgt aus Satz 12.9, dass es eine Folge von Funktionen $f_k \in C_c(V), k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^1} \;=\; 0.$$

[91] In der Tat, denn für $c \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \circ \Phi < c\} = \Phi^{-1}(\{f < c\})$.

[92] Wo wird im weiteren Verlauf des Beweises dieses Zwischenergebnis verwendet?

Es folgt aus Korollar 12.11, dass wir, nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge, annehmen können, dass es eine Nullmenge $N \subset V$ gibt, so dass

$$f(y) = \lim_{k\to\infty} f_k(y) \qquad \text{für alle } y \in V \setminus N.$$

Wir setzen nun

$$e_k = (f_k \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|.$$

Dann gilt

$$e(x) = \lim_{k\to\infty} e_k(x) \qquad \text{für alle } x \in U \setminus \Phi^{-1}(N).$$

Nach Satz 6.6 und Satz 6.9 ist $\Phi^{-1}(N)$ eine Nullmenge in U. Wir erhalten nun also, dass

$$\int_V f(y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 12.8} \\ \text{da } \lim_{k\to\infty} \|f-f_k\|_{L^1}=0}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_V f_k(y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 12.5}}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_U e_k(x)\,dx = (*)$$

Wir möchten jetzt natürlich am liebsten sagen, dass der Grenzwert der Lebesgue-Integrale der e_k's gerade das Lebesgue-Integral von e ist. Aber aus der punktweisen Konvergenz folgt a priori noch nicht, dass auch die Lebesgue-Integrale konvergieren. Im Hinblick auf Lemma 12.8 wollen wir nun also die Funktionenfolge e_k bezüglich der L^1-Seminorm betrachten.

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|e_k - e_l\|_{L^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 12.5 angewandt auf } |f_k - f_l|}}{=} \|f_k - f_l\|_{L^1}.$$

Nachdem $\{f_k\}_{L^1}$ bezüglich der L^1-Seminorm eine konvergente Folge ist, ist dies auch eine L^1-Cauchyfolge. Aus der obigen Gleichheit folgt nun auch, dass $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge ist. Nach Satz 12.10 existiert ein $e' \in \mathcal{L}(U)$, so dass die g_k bezüglich der L^1-Seminorm gegen e' konvergieren, und so dass eine Teilfolge der g_k's außerhalb einer Nullmenge M punktweise gegen e' konvergiert. Wir können nun jetzt oben weiterfahren und erhalten, dass

$$(*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 12.8}}}{=} \int_U e'(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } e = e' \text{ außerhalb} \\ \text{der Nullmenge } M \cup \Phi^{-1}(N)}}{=} \int_U e(x)\,dx.$$

Wir müssen nun noch die "Rückrichtung" von Beweis von Satz 11.1 zeigen. D.h. wir müssen beweisen, dass wenn

$$\begin{aligned} e\colon U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e(x) = f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \end{aligned}$$

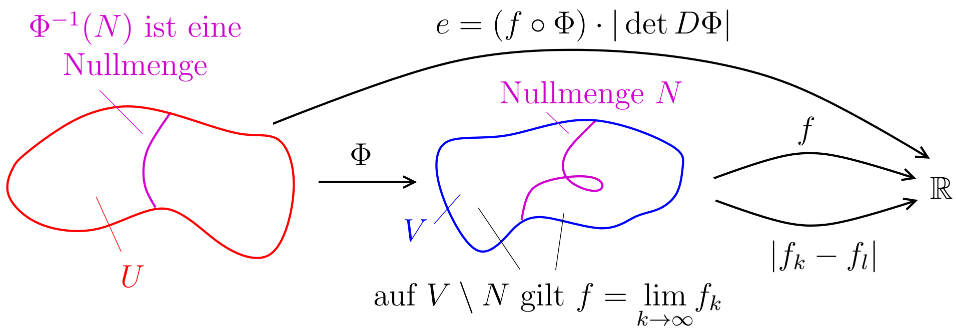


ABBILDUNG 44. Skizze zum Beweis von Satz 11.1.

Lebesgue-integrierbar ist, dann ist auch die ursprüngliche Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dies folgt jedoch aus dem ersten Teil des Beweises angewandt auf die C^1-invertierbare Funktion $\Psi := \Phi^{-1}\colon V \to U$ und die Funktion e. Denn in diesem Fall ist

$$(e \circ \Psi) \cdot |\det D\Psi| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } g}}{=} (f \circ \Phi \circ \Psi) \cdot |\det D\Phi \circ \Psi| \cdot |\det D\Psi| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } (D\Phi)\circ\Psi = (D\Psi)^{-1} \text{ und } \Phi\circ\Psi^{-1} = \mathrm{id}}}{=} f. \qquad \square$$

12.6. **Beispiel für die allgemeine Transformationsformel: der Satz von Gauss.** Wir können jetzt zum Abschluß folgenden Satz von Gauss beweisen:

Satz 12.13. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Satz ist verblüffend, nachdem man keine explizite Stammfunktion von e^{-x^2} angeben kann (weder Substitution noch partielle Integration führen zum Erfolg), insbesondere kann man daher das uneigentliche Integral nicht 'einfach per Hand' bestimmen. Es ist zudem auch überraschend, dass das Ergebnis die Kreiszahl π enthält.

Mithilfe von Substitution kann man nun auch leicht zeigen, dass für alle $\mu \in \mathbb{R}$ und alle $\sigma > 0$ die Gleichheit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1$$

gilt. Dieses Integral spielt eine wichtige Rolle in der Statistik.

BEWEIS. Mithilfe des Majoranten-Kriteriums für uneigentliche Riemann-Integrale (siehe Satz 15.9 in Analysis I) kann man leicht zeigen, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1$$

ABBILDUNG 45.

konvergiert. Wir setzen also

$$C := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 9.7}}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
C^2 = C \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy &= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \cdot C\, dy && = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx}_{=C}\, dy \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } e^{-y^2} \text{ Konstante bezüglich } x}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\, dx\, dy && = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 10.3 von Fubini, bzw. Lemma 10.5 von Tonelli}}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy && \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 11.2 über die Polarkoordinaten}}}{=} \int_{[0,2\pi]\times[0,\infty)} e^{-((r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2)} r\, dr\, d\varphi \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 10.3 von Fubini, bzw. Lemma 10.5 von Tonelli}}}{=} \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\infty)} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi && \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 9.4 und Satz 9.7}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Integrand ist konstant in } \varphi}}{=} 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr && = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-r^2}(-2r)\, dr
\end{aligned}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution } u=-r^2}}{=} 2\pi \cdot \int_0^{-\infty} -\frac{1}{2}e^u \, du \qquad = \; 2\pi \cdot \Big[-\frac{1}{2}e^u \Big]_0^{-\infty} \; = \; \pi.$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir also, dass $C = \sqrt{\pi}$. $\square$