ANALYSIS I - WINTERSEMESTER 2014-2015

STEFAN FRIEDL

Inhaltsverzeichnis

Konventionen und Definitionen aus der Mengenlehre

Wir geben in der Vorlesung Analysis I eine axiomatische Einführung in die Analysis. Die einzigen Begriffe, welche wir nicht definieren werden, sind die folgenden:

(1) der Mengenbegriff,
(2) die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ sowie $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3 \dots\}$,
(3) die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Für Mengen verwenden wir hierbei die folgenden üblichen Schreibweisen:

(1) $\emptyset$ bedeutet die leere Menge, d.h. die Menge ohne Elemente.
(2) $a \in A$ bedeutet, dass a ein Element der Menge A ist.
(3) $A \subset B$ bedeutet, dass A eine Teilmenge von B ist.
(4) Seien $A_1, \dots, A_k$ Mengen, dann schreiben wir

$$A_1 \times \dots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) \,|\, a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k\}.$$

Beispielsweise ist

$$\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{(1, A), (1, B), (2, A), (2, B), (3, A), (3, B)\}$$

und

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, a_3) \,|\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

ist die Menge der Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Eine Abbildung $f \colon A \to B$ von einer Menge A zu einer Menge B ordnet jedem Element in A genau ein Element in B zu.[1] Beispielsweise ist

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^3 - 5n + 2 \end{array}$$

eine Abbildung von der Menge $\mathbb{N}$ zur Menge $\mathbb{Z}$. Hierbei bezeichnet die erste Zeile, dass wir eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ betrachten, während die zweite Zeile die Abbildungsvorschrift angibt, d.h. in diesem Fall wird dem Element $n \in \mathbb{N}$ das Element $n^3 - 5n + 2$ zugeordnet.

[1] Man kann eine Abbildung $A \to B$ auch definieren als Teilmenge $S \subset A \times B$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in S$ gibt. Aber diese Definition ist zu Anfang des Studiums vielleicht nicht sehr hilfreich.

1. Der Körper der reellen Zahlen

1.1. **Die Körperaxiome.** In der Analysis I beschäftigen wir uns mit dem 'Körper der reellen Zahlen'. Hierbei müssen wir erst einmal den Begriff des 'Körpers' einführen.

Definition. Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit zwei Abbildungen: [2]

$$\begin{array}{rcll} K\times K & \mapsto & K & \text{‘Addition’} \\ (a,b) & \mapsto & a+b, & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcll} K\times K & \mapsto & K & \text{‘Multiplikation’} \\ (a,b) & \mapsto & a\cdot b, & \end{array}$$

welche folgende Eigenschaften erfüllen:

(A1) Für alle $x, y, z \in K$ gilt
$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad \text{(Assoziativgesetz).}$$
(A2) Für alle $x, y \in K$ gilt
$$x+y = y+x \qquad \text{(Kommutativgesetz).}$$
(A3) Es existiert ein Element $N \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt:
$$x+N = x.$$
(A4) Zu jedem $x \in K$ existiert ein Element $y \in K$, so dass
$$x+y = N.$$
(M1) Für alle $x, y, z \in K$ gilt
$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \qquad \text{(Assoziativgesetz).}$$
(M2) Für alle $x, y \in K$ gilt
$$x\cdot y = y\cdot x \qquad \text{(Kommutativgesetz).}$$
(M3) Es existiert ein Element $E \in K$, so dass $N \neq E$, und so dass für alle $x \in K$ gilt:
$$x\cdot E = x.$$
(M4) Zu jedem $x \in K$ mit $x \neq N$ existiert ein Element $z \in K$, so dass
$$x\cdot z = E.$$
(D) Für alle $x, y, z \in K$ gilt
$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \qquad \text{(Distributivgesetz).}$$

Wir nennen die Eigenschaften (A1)-(A4) die *Axiome der Addition* und die Eigenschaften (M1)-(M4) die *Axiome der Multiplikation*. Die Eigenschaften (A1)-(A4), (M1)-(M4) sowie (D), welche zusammen einen Körper definieren, werden *Körperaxiome* genannt.

[2] Eine Abbildung $K \times K \to K$ ordnet je zwei Elementen a und b in K ein Element in K zu. In diesem Fall bezeichnen wir das a und b zugeordnete Element mit $a + b$.

Beispiel.

(1) Die Eigenschaften kommen uns natürlich bekannt vor, beispielsweise erfüllt $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation alle Körperaxiome, wobei $N = 0$ und $E = 1$. Anders ausgedrückt, $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{R}$ sind Körper.

(2) Wenn wir $K = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation betrachten, dann gelten die Axiome der Addition mit $N = 0$, zudem gelten die Axiome (M1) bis (M3) mit $E = 1$ und das Distributivgesetz. Das Axiom (M4) gilt allerdings nicht, beispielsweise gibt es für $2 \in \mathbb{Z}$ kein $z \in \mathbb{Z}$, so dass $2 \cdot z = 1$.

(3) Neben den Körpern $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{R}$, welche aus der Schule bekannt sind, gibt es noch andere Körper. Betrachten wir beispielsweise $\mathbb{F}_2 = \{N, E\}$, d.h. die Menge mit zwei Elementen $\{N, E\}$. Wir definieren die Addition folgendermaßen: [3]

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 & \to & \mathbb{F}_2 \\ (N,N) & \mapsto & N + N := N \\ (N,E) & \mapsto & N + E := E \\ (E,N) & \mapsto & E + N := E \\ (E,E) & \mapsto & E + E := N \end{array}$$

und die Multiplikation wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 & \to & \mathbb{F}_2 \\ (N,N) & \mapsto & N \cdot N := N \\ (N,E) & \mapsto & N \cdot E := N \\ (E,N) & \mapsto & E \cdot N := N \\ (E,E) & \mapsto & E \cdot E := E \end{array}$$

Wir müssen nun zeigen, dass alle Körperaxiome gelten. Beispielsweise sind die Definitionen der Addition und der Multiplikation symmetrisch, also gelten die Kommutativgesetze (A2) and (M2). Es ist auch relativ elementar nachzuprüfen, dass (A3) und (A4) sowie (M3) und (M4) gelten. Es ist hingegen eine etwas umständliche Fieselarbeit zu nachzuweisen, dass die übrigen Körperaxiome ebenfalls erfüllt sind. Für (A1) muss man beispielsweise acht verschiedene Fälle verifizieren. Im Laufe der linearen Algebra Vorlesung werden Sie sehen, dass die Definition der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{F}_2$ nicht willkürlich sind, sondern sich ganz natürlich aus der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ herleiten. [4]

[3] In diesem Fall ist $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ die Menge bestehend aus $\{(N,N),(N,E),(E,N),(E,E)\}$. Eine Abbildung $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ ordnet also jedem Element in $\{(N,N),(N,E),(E,N),(E,E)\}$ entweder das Element E oder das Element N in $\mathbb{F}_2$ zu.

[4] Es stellt sich nun die Frage, ob man auf jeder Menge X geschickt eine Addition und Multiplikation definieren kann, so dass alle Axiome gelten. In der Algebravorlesung wird normalerweise gezeigt, dass man dies für eine endliche Menge durchführen kann, genau dann, wenn die Anzahl der Elemente in X eine Primpotenz ist, d.h. von der Form p^n wobei p eine Primzahl ist und $n \in \mathbb{N}$.

(4) Es gibt noch sehr viele weitere Beispiele von Körpern, beispielsweise ist

$$K = \text{Menge der rationalen Funktionen} = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \,\middle|\, p(t), q(t) \neq 0 \text{ Polynome in } t \right\}$$

mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper. [5]

1.2. **Folgerungen aus den Axiomen der Addition.** In diesem Kapitel beweisen wir verschiedene Aussagen, welche aus den Körperaxiomen folgen. Die Aussagen sind für $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{R}$ aus der Schule vertraut. Indem wir diese jetzt direkt aus den Körperaxiomen herleiten, erhalten wir diese Aussagen für alle Körper, beispielsweise für den Körper $\mathbb{F}_2$.

Satz 1.1. *Sei K ein Körper. Dann existiert genau*[6] *ein Element $k \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt*

$$x + k = x.$$

Beweis. Wegen Axiom (A3) wissen wir, dass es mindestens ein Element $k \in K$ gibt, so dass für alle $x \in K$ gilt

$$x + k = x.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass es nicht mehr als ein Element gibt, welches die Eigenschaft erfüllt. Es seien k und k' zwei Elemente mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in K$ gilt $x + k = x$ und $x + k' = x$. Wir müssen zeigen, dass $k = k'$. In der Tat gilt [7]

$$\begin{array}{rcll} k & = & k + k' & \text{Definition von } k' \text{ angewandt auf } x = k \\ & = & k' + k & \text{Kommutativgesetz (A2)} \\ & = & k' & \text{Definition von } k \text{ angewandt auf } x = k'. \end{array}$$

□

Wir nennen das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element die *Null* des Körpers, welche wir mit '0' bezeichnen. Man beachte, dass für alle $x \in K$ aus dem Kommutativgesetz (A2) folgt, dass $0 + x = x + 0 = x$.

Satz 1.2. *Sei K ein Körper und $x, y, a \in K$. Wenn $x + a = y + a$, dann gilt $x = y$.*

---

[5] Beispielsweise gilt in K, dass

$$\frac{1}{2+t} + \frac{2t^2-1}{3+t^2} = \frac{3+t^2+(2+t)(2t^2-1)}{(2+t)(3+t^2)} = \frac{2t^3+5t^2-t+1}{t^3+2t^2+3t+6}.$$

D.h. die Summe von zwei rationalen Funktionen ist wiederum eine rationale Funktion.

[6] Die Aussage 'es existiert genau ein Element mit einer Eigenschaft E' sind genau genommen zwei Aussagen auf einmal:

(1) es gibt ein Element, welches die Eigenschaft E besitzt, und
(2) es gibt nicht mehr als ein Element, welches die Eigenschaft E besitzt.

[7] Wir verwenden auch, dass aus $a = b$ folgt, dass $b = a$. Aber das ist kein Axiom, das ist offensichtlich.

Beweis. Nach Axiom (A4) gibt es ein $k \in K$, so dass $a + k = 0$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} x & = & x+0 & \text{Eigenschaft der } 0 \\ & = & x+(a+k) & \text{Wahl von } k \\ & = & (x+a)+k & \text{Assoziativgesetz (A1)} \\ & = & (y+a)+k & \text{Nach Voraussetzung ist } x+a=y+a \\ & = & y+(a+k) & \text{Assoziativgesetz (A1)} \\ & = & y+0 & \text{Wahl von } k \\ & = & y & \text{Eigenschaft der } 0. \end{array}$$

□

Satz 1.3. *Sei K ein Körper und sei $x \in K$. Dann existiert genau ein Element $y \in K$, so dass*

$$x + y = 0.$$

Beweis. Sei $x \in K$. Wegen Axiom (A4) wissen wir, dass es ein Element $y \in K$ gibt mit $x + y = 0$. Wir müssen nun wiederum die Eindeutigkeit von y zeigen. Es sei also $y' \in K$ gegeben, mit $x + y' = 0$. Wir müssen zeigen, dass $y = y'$. Dies folgt sofort aus $x + y = 0 = x + y'$ und aus Satz 1.2. □

Für $x \in K$ schreiben wir $-x$, genannt *minus* x, für das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element in K. Ab sofort schreiben wir zudem

$$x - y := x + (-y).$$

Aus Axiom (A2) folgt, dass $x - y = -y + x$.

Satz 1.4. *Sei K ein Körper und es seien $x, y \in K$. Dann gilt*

(1) $-0 = 0$,
(2) $-(-x) = x$,
(3) $-(x + y) = -x - y$.

Beweis. (1) Zur Erinnerung: für a und b in K gilt $-a = b$ genau dann, wenn $a + b = 0$. Wenn wir also zeigen wollen, dass $-0 = 0$, dann müssen wir zeigen, dass $0 + 0 = 0$. Aber dies folgt sofort aus der Eigenschaft der 0.

(2) Sei $x \in K$. Wie in Teil (1) müssen wir zeigen, dass $(-x) + x = 0$. Aber es gilt in der Tat, dass

$$\begin{array}{rcll} (-x)+x & = & x+(-x) & \text{Kommutativgesetz (A2)} \\ & = & 0 & \text{Definition von } -x. \end{array}$$

(3) Der dritte Teil ist eine Übungsaufgabe im 1. Übungsblatt.

□

1.3. **Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation.** Im Folgenden ist K durchgehend ein Körper. Der folgende Satz wird ähnlich bewiesen wie Satz 1.1. Man muss nur die Axiome der Addition (A2) und (A3) durch die entsprechenden Axiome der Multiplikation (M2) und (M3) ersetzen.

Satz 1.5. *Es existiert genau ein Element $k \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt*
$$x \cdot k = x.$$

Wir nennen das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element die *Eins* des Körpers, welche wir mit '1' bezeichnen. Man beachte, dass für alle $x \in K$ wegen dem Kommutativgesetz gilt, dass $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

Der nächste Satz wird ganz analog zu Satz 1.2 bewiesen.

Satz 1.6. *Sei K ein Körper und $x, y, a \in K$ wobei $a \neq 0$. Wenn $x \cdot a = y \cdot a$, dann gilt $x = y$.*

Der folgende Satz wird ähnlich bewiesen wie Satz 1.3.

Satz 1.7. *Sei $x \in K$ mit $x \neq 0$. Dann existiert genau ein Element $y \in K$, so dass*
$$x \cdot y = 1.$$

Für $x \neq 0$ in K bezeichnen wir mit x^{-1}, genannt *x hoch minus eins*, das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element.[8] Aus dem Kommutativgesetz (A2) folgt dann auch, dass $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.

Der nächste Satz wird ganz ähnlich wie Satz 1.4 bewiesen.

Satz 1.8. *Es seien $x, y \in K$. Dann gilt:*

(1) $1^{-1} = 1$,
(2) *falls $x \neq 0$, dann gilt $(x^{-1})^{-1} = x$,*
(3) *falls $x, y \neq 0$, dann gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$,*

Satz 1.9. *Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot 0 = 0$.*

Obwohl wir den Satz natürlich so erwarten, ist er doch etwas überraschend: Die 0 wurde definiert durch die Axiome der Addition. Aber der Satz macht eine Aussage über das multiplikative Verhalten der 0. Das einzige Axiom, welches die Addition mit der Multiplikation verbindet, ist das Distributivgesetz. Wir werden dieses dementsprechend im Beweis verwenden.

Beweis. Es sei $x \in K$. Dann gilt
$$\begin{array}{rcll} x \cdot 0 & = & x \cdot (0+0) & \text{Eigenschaft der } 0 \\ & = & x \cdot 0 + x \cdot 0 & \text{Distributivgesetz (D).} \end{array}$$
Andererseits gilt $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$. Es folgt nun aus Satz 1.2, dass $0 = x \cdot 0$. □

[8] Hierbei ist 'x hoch minus eins' nur ein feststehender Begriff, wir haben nicht eingeführt, was 'x hoch irgendwas' heißen soll.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz, in dem wiederum sowohl die Addition als auch die Multiplikation verwendet werden. Aussage (3) wird in Übungsblatt 1 behandelt.

Satz 1.10. *For alle x, y in einem Körper K gilt*

(1) $(-x) \cdot y = -x \cdot y$,
(2) $(-1) \cdot x = -x$,
(3) $(-x) \cdot (-y) = xy$.

1.4. **Weitere Definitionen.** In diesem Kapitel sei K weiterhin ein Körper. Es seien $a_1, \ldots, a_s \in K$, wir definieren

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_s := (\ldots((a_1 + a_2) + a_3) + \ldots) + a_s.$$

Es folgt aus dem Assoziativgesetz (A1), dass $a_1 + \cdots + a_s$ nicht von der Reihenfolge der Klammern abhängt. [9] Wir schreiben auch

$$\sum_{i=1}^{s} a_i \ := \ a_1 + \cdots + a_s.$$

Für $x, y \in K$ schreiben wir ab sofort

$$xy \ := \ x \cdot y.$$

Zudem, wenn $y \neq 0$, dann schreiben wir

$$\frac{x}{y} \ := \ x/y := xy^{-1}.$$

Für $a_1, \ldots, a_s \in K$ definieren wir

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_s \ := \ (\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \ldots) \cdot a_s.$$

Es folgt aus dem Assoziativgesetz (M1), dass $a_1 \cdot \cdots \cdot a_s$ nicht von der Reihenfolge der Klammern abhängt. Wir schreiben

$$\prod_{i=1}^{s} a_i := a_1 \cdot \cdots \cdot a_s.$$

Der folgende Satz folgt aus mehrfacher Anwendung des Distributivgesetzes:

Satz 1.11. *Es seien $a_1, \ldots, a_r \in K$ und $b_1, \ldots, b_s \in K$, dann gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} b_j\right) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_i b_j.$$

---

[9] Das Assoziativgesetz für $s = 4$ besagt beispielsweise, dass

$$((a_1 + a_2) + a_3) + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) = a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4)),$$

d.h. es ist völlig egal, wie wir die Klammern setzen. Wir können diese dementsprechend weglassen.

Es sei $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$x^n := \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n-\mathrm{Mal}}.$$

Zudem definieren wir $x^0 := 1$ (auch für $x = 0$) und für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 0$ definieren wir

$$x^{-n} := 1/(x^n).$$

Wie nicht anders zu erwarten, bezeichnen wir x^n als *x hoch n* oder auch als *n-te Potenz von x*.

Der folgende Satz fasst einige elementare Eigenschaften von Potenzen zusammen. Der Satz kann aus den Axiomen und den Definitionen hergeleitet werden. Wir überlassen den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe.

Satz 1.12. *Es seien $x, y \in K$ mit $x, y \neq 0$ und es seien $m, n \in \mathbb{Z}$, dann gilt*

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \\ (x^n)^m &= x^{mn} \\ x^n y^n &= (xy)^n. \end{aligned}$$

Wir haben in den letzten Kapiteln gesehen, dass für Körper die 'üblichen' Rechen- und Umformungsregeln gelten. Im Folgenden werden wir nun die verwendeten Körperaxiome nicht mehr explizit aufführen und wir werden die obigen Sätze nicht mehr explizit zitieren. Zudem verwenden wir ab sofort die üblichen Rechenregeln, ohne diese im Einzelnen herzuleiten.

Zum Abschluß der Diskussion von den Körperaxiomen, wollen wir noch kurz der Frage nachgehen, warum die Axiome so formuliert sind, wie sie sind. Beispielsweise hätten wir noch folgendes Axiom formulieren können

(A5) für alle $x, y, z \in K$ gilt, dass $(z + y) + x = z + (y + x)$.

Aber man kann sich leicht davon überzeugen, dass (A5) schon aus dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz folgt. Das Ziel ist, einen Körper über möglichst wenige Axiome zu charakterisieren, und dann ist (A5) überflüssig, nachdem es schon aus (A1) und (A2) folgt. Jetzt stellt sich die Frage, ob man nicht vielleicht eines der anderen Axiome weglassen könnte. Wir hatten gesehen, dass $\mathbb{Z}$ alle Axiome bis auf (M4) erfüllt. Nachdem (M4) jedoch nicht für $\mathbb{Z}$ gilt, kann (M4) nicht aus den anderen Axiomen folgen. Wir können Axiom (M4) also nicht weglassen.

Es ist eine amüsante Aufgabe, sich für jedes Axiom ein Beispiel zu überlegen, für welches alle anderen Axiome gelten, aber das gewählte Axiom gilt nicht. Beispielsweise erfüllen die Quaternionen

`http://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion`

alle Axiome bis auf (M2).

1.5. **Angeordnete Körper.**

Definition. Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K zusammen mit einer Relation[10] '$>$', welche folgende Ordnungsaxiome erfüllt:

(O1) Für alle $x, y \in K$ gilt *genau eine* der folgenden drei Aussagen:
$$x > y \quad \text{oder} \quad y > x \quad \text{oder} \quad x = y.$$

(O2) Für alle $x, y, z \in K$ gilt:
$$x > y \text{ und } y > z \Longrightarrow x > z.$$

(O3) Für alle $x, y, a \in K$ gilt:
$$x > y \Longrightarrow x + a > y + a.$$

(O4) Für alle $x, y, a \in K$ gilt:
$$x > y \text{ und } a > 0 \Longrightarrow xa > ya.$$

Beispiel. (1) Es sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen mit der üblichen Bedeutung von $>$, dann ist $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper.

(2) Hier ist ein etwas komplizierteres Beispiel von einem angeordneten Körper. Wie in Kapitel 1.1 sei K der Körper der rationalen Funktion, d.h.
$$K = \text{Menge der rationalen Funktionen} = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \,\middle|\, p(t), q(t) \neq 0 \text{ Polynome in } t \right\}.$$
Für $f, g \in K$ schreiben wir dann
$$f > g \;:\Leftrightarrow\; \text{Es existiert ein } \varepsilon > 0, \text{ so dass } f(x) > g(x) \text{ für alle } x \in (0, \varepsilon).$$
Beispielsweise gilt $\frac{x}{x+1} > x^3$, weil diese Ungleichheit gilt für alle $x \in (0, \frac{1}{2})$. Man kann nun zeigen, dass K mit dieser Ordnung $>$ in der Tat die Ordnungsaxiome (O1) bis (O4) erfüllt.

(3) Es stellt sich nun die Frage, ob man nicht auch auf anderen Körpern eine Ordnung $>$ einführen kann, welche die Axiome (O1) bis (O4) erfüllt. Beispielsweise, ist dies für den Körper $\mathbb{F}_2$ möglich? Wir werden diese Frage später noch beantworten.

Im Folgenden sei K ein angeordneter Körper. Für beliebige $x, y \in K$ definieren wir [11]
$$\begin{aligned} x < y \quad &:\Leftrightarrow \quad y > x, \\ x \geq y \quad &:\Leftrightarrow \quad x > y \text{ oder } x = y, \\ x \leq y \quad &:\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oder } x = y, \\ x \text{ positiv} \quad &:\Leftrightarrow \quad x > 0, \\ x \text{ negativ} \quad &:\Leftrightarrow \quad x < 0. \end{aligned}$$

[10] Strenggenommen ist eine *Relation* in K eine Teilmenge V von $K \times K$. Wir schreiben dann
$$a > b \text{ genau dann, wenn } (a, b) \in V.$$

[11] Die Notation $:\Leftrightarrow$ bedeutet hierbei, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Beispielsweise bedeutet $x < y :\Leftrightarrow y > x$, dass wir genau dann $x < y$ schreiben, wenn $y > x$.

Satz 1.13. *Es sei $x \in K$ mit $x \neq 0$, dann gilt*

$$x^2 \;>\; 0.$$

Beweis. Nachdem $x \neq 0$ folgt aus Axiom (O1), dass entweder $x > 0$ oder $0 > x$. Wir beweisen jetzt den Satz für die beiden Fälle getrennt.

1. Fall: $x > 0$. Aus $x > 0$ und aus Axiom (O4) sofort, dass $x^2 = x \cdot x > x \cdot 0 = 0$.
2. Fall: $0 > x$. Es sei also $0 > x$. Aus Axiom (O3) folgt, dass

$$-x \;=\; 0 - x \;>\; x - x \;=\; 0.$$

Nachdem $-x > 0$ folgt nun aus dem 1. Fall, dass $(-x)(-x) > 0$. Wir erhalten also, dass

$$x^2 \;=\; x \cdot x \;=\; (-x) \cdot (-x) \;>\; 0.$$

□

Korollar 1.14. *Es sei $x \in K$ mit $x > 0$, dann gilt auch $\frac{1}{x} > 0$.*

Beweis. Es sei $x \in K$ mit $x > 0$. Nach Satz 1.13 gilt $\left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$ und nach Voraussetzung gilt $x > 0$. Es folgt aus Axiom (O4), dass

$$\frac{1}{x} = x\left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0.$$

□

Das folgende Korollar folgt aus Satz 1.13 und der Tatsache, dass $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ ein Quadrat ist.

Korollar 1.15. *Es sei K ein angeordneter Körper, dann gilt:*

$$1 > 0.$$

Der folgende Satz wird in Übungsblatt 1 bewiesen.

Satz 1.16. *Sei K ein angeordneter Körper.*

(1) *Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt*

$$a > b \text{ und } c > d \Longrightarrow a + c > b + d.$$

(2) *Für alle $a, b \in K$ gilt*

$$a > b > 0 \;\Longrightarrow\; \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0.$$

Korollar 1.17. *Es sei K ein angeordneter Körper, und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{Mal}} \;>\; 0,$$

insbesondere

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{Mal}} \;\neq\; 0.$$

Beweis. Nach Korollar 1.15 wissen wir, dass $1 > 0$. Wenn wir Satz 1.16 auf $1 > 0$ und $1 > 0$, erhalten wir $1+1 > 0$. In dem wir jetzt Satz 1.16 insgesamt $(n-1)$-Mal anwenden, erhalten wir die erste Aussage des Korollars. Die zweite Aussage folgt dann sofort aus (O1). $\square$

In dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen gilt $1 + 1 = 0$. Das Korollar 1.17 besagt also insbesondere, dass der Körper $\mathbb{F}_2$ kein angeordneter Körper sein kann, d.h. man kann auf $\mathbb{F}_2$ keine Ordnung "$>$" definieren, welche alle Axiome (O1) bis (O4) erfüllt.

Definition. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$. Wir definieren den *Absolutbetrag von* x als

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Satz 1.18. *Es sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$, dann gilt:*

$$\begin{array}{rcll} |x| & \geq & 0, & \\ |x| = 0 & \Leftrightarrow & x = 0, & \\ |x \cdot y| & = & |x| \cdot |y|, & \\ |x + y| & \leq & |x| + |y| & \quad (\textit{Dreiecksungleichung}). \end{array}$$

Die ersten drei Aussagen sind leicht zu beweisen, die vierte ist eine Übungsaufgabe im 2. Übungsblatt.

Wir haben uns jetzt davon überzeugt, dass in einem angeordneten Körper die üblichen Regeln für $>$ gelten. Wie bei den Körperaxiomen werden wir daher im Folgenden auch die Ordnungsaxiome (O1) bis (O4) nicht mehr explizit angeben, und wir werden auch nicht mehr explizit auf die Sätze in diesem Kapitel verweisen.

1.6. **Der Satz über die reellen Zahlen.** Sei K ein Körper, $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$n \cdot x \ := \ \underbrace{x + \cdots + x}_{n-\text{Mal}}.$$

Beispielsweise gilt für $E \in \mathbb{F}_2 = \{E, N\}$ und $n = 3$, dass $3 \cdot E = E + E + E = N + E = E$.

Wir führen nun noch ein 5. Ordnungsaxiom ein, welches auf den ersten Blick etwas eigenwillig ist.

Definition. Wir sagen ein angeordneter Körper erfüllt *das archimedische Axiom*, wenn gilt

(N) für alle $x > 0$ und $y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \cdot x > y.$$

Bemerkung. Das archimedische Axiom ist 'so offensichtlich richtig' für $K = \mathbb{Q}$, dass man sich kaum vorstellen kann, dass es nicht immer erfüllt ist. Wenn wir aber zum vorerst letzten Mal den Körper K der rationalen Funktionen mit der oben definierten Ordnung betrachten, dann sehen wir, dass $>$ alle Axiome (O1) bis (O4) erfüllt. Aber $>$ erfüllt nicht das archimedische Axiom. In der Tat, für die rationalen Funktionen $p = 1$ und $q = x$ gilt $1 > x$ [12], aber es gilt auch für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $1 > n \cdot x$[13]

Wir führen nun noch ein allerletztes Ordnungsaxiom ein, nämlich das Vollständigkeitsaxiom.

Definition. Ein angeordneter Körper heißt *vollständig*, wenn das Vollständigkeitsaxiom gilt:

(V) Jede Cauchyfolge in K konvergiert.

Die Definition von 'Cauchyfolge' und 'Konvergenz einer Cauchyfolge' wird im übernächsten Kapitel nachgereicht. Mit diesen Definitionen können wir aber nun folgenden Satz formulieren:

Satz 1.19. *Es gibt (bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus)*[14] *genau einen angeordneten Körper, welcher das archimedische Axiom erfüllt und welcher vollständig ist.*

Dieser Satz wird erst in einer höheren Vorlesung bewiesen. [15] Wir nennen den durch den Satz eindeutig bestimmten Körper den Körper der reellen Zahlen und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$.

Dieser Körper der reellen Zahlen ist natürlich nichts anderes als die reellen Zahlen, welche Sie schon aus der Schule kennen. Allerdings werden diese in der Schule in der Regel etwas schwammig definiert ('Zahlen mit unendlich vielen Ziffern hinter dem Komma'). Wir werden in der Vorlesung nur verwenden, dass die reellen Zahlen die Körperaxiome (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D), sowie die Ordnungsaxiome (O1)-(O4), das archimedische Axiom (N) und das mysteriöse Vollständigkeitsaxiom erfüllen. Wir werden aus diesen Axiomen alle weiteren Aussagen herleiten.

1.7. **Reelle Zahlen und natürliche Zahlen.** Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den natürlichen Zahlen, und den abstrakt eingeführten reellen Zahlen klären. Dazu benötigen wir noch folgende Definition.

Definition. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen heißt *injektiv*, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2).$$

[12] In der Tat, denn für $x \in (0,1)$ gilt, dass $1 > x$.

[13] In der Tat, denn für $x \in (0, \frac{1}{n})$ gilt, dass $1 > nx$.

[14] Den Ausdruck 'bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus' können Sie erst einmal ignorieren. Der Vollständigkeit halber ist hier noch die Definition: Ein Isomorphismus $f\colon K \to K'$ zwischen zwei angeordneten Körper K und K' ist eine bijektive Abbildung $f\colon K \to K'$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $x, y \in K$ ist $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
(2) Für alle $x, y \in K$ ist $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.
(3) Für alle $x, y \in K$ gilt $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Der Satz besagt also, dass wenn K und K' zwei vollständige angeordnete Körper sind, dann gibt es genau einen Isomorphismus $f\colon K \to K'$.

[15] Wenn wir am Ende ganz viel Zeit haben sollten, werden wir den Satz auch noch in dieser Vorlesung beweisen, aber das ist leider eher unwahrscheinlich.

Beispielsweise ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ m & \mapsto & m^2 \end{array}$$

injektiv, denn für natürliche Zahlen gilt $m \neq n \Rightarrow m^2 \neq n^2$. Anderseits ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N}_0 \\ m & \mapsto & m^2 \end{array}$$

nicht injektiv, denn $(-1)^2 = 1^2$.

Satz 1.20. *Es bezeichne* 1 *das Eins-Element des Körpers* $\mathbb{R}$. *Dann ist folgende Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-\text{Mal}} = n\cdot 1 \end{array}$$

injektiv.

Beweis. Es sei $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \neq a_2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) können wir annehmen, dass $a_1 > a_2$. (Andernfalls gilt $a_2 > a_1$ und der folgende Beweis funktioniert genauso, nur mit den Rollen von a_1 und a_2 vertauscht.) Es folgt, dass ein $x \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_1 = a_2 + x$. Daraus wiederum folgt, dass

$$\varphi(a_1) \;=\; \varphi(a_2+x) \;=\; \underbrace{1+\cdots+1}_{(a_2+x)-\text{Mal}} \;=\; \underbrace{1+\cdots+1}_{a_2-\text{Mal}} + \underbrace{1+\cdots+1}_{x-\text{Mal}} \;=\; \varphi(a_2)+\varphi(x).$$

In Korollar 1.17 haben wir bewiesen, dass $\varphi(x) > 0$. Ordnungsaxiom (O3) besagt, dass

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi(a_2) + \varphi(x) > \varphi(a_2).$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\varphi(a_1) > \varphi(a_2),$$

welches nach (O1) impliziert, dass $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$. □

Nachdem die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vom Satz injektiv ist, werden wir von nun an $\mathbb{N}$ als Teilmenge der reellen Zahlen auffassen. Wir definieren nun

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{Z} & = & \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \in \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} & \text{(die Menge der ganzen Zahlen),} \\ \mathbb{Q} & = & \{\frac{p}{q} \,|\, p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} \subset \mathbb{R} & \text{(der Körper der rationalen Zahlen),} \\ \mathbb{R}_+ & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\} & \text{(die Menge der positiven reellen Zahlen).} \end{array}$$

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz. Dieser erscheint 'ganz offensichtlich', aber wir wollen diesen wiederum nur aus den Axiomen herleiten.

Satz 1.21. *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *in* $\mathbb{R}$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Der Satz besagt also, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass eine gewisse Ungleichung gilt. Das einzige Axiom, und die einzige Aussage, welche wir von diesem Typ haben, ist das archimedische Axiom (N). Es liegt also nahe, dieses zu verwenden. Die Schwierigkeit im Beweis ist nun, die Aussage des Satzes so umzuformulieren, dass das archimedische Axiom in der Tat hilfreich ist.

Beweis. Aus Korollar 1.14 folgt, dass $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Nach dem archimedischen Axiom (N) existiert daher ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n = n \cdot 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Es folgt nun aus Satz 1.16, dass

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$\square$

2. Die vollständige Induktion

Im nächsten Kapitel führen wir Folgen von reellen Zahlen und die Konvergenz von reellen Folgen ein. Dabei werden wir in den Beweisen immer wieder die vollständige Induktion verwenden. Wir unterbrechen deswegen kurzzeitig die Diskussion der reellen Zahlen, und führen die vollständige Induktion als Beweismethode ein.

Die Idee hinter einem Induktionsbeweis ist eigentlich ganz einfach. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Nehmen wir an, dass folgendes gilt:

(1) $A(0)$ ist wahr,
(2) für jedes beliebige $n \geq 1$ gilt: Falls $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann folgt aus wiederholter Anwendung von (2), dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Ein typischer Induktionsbeweis besteht aus drei Schritten:

(1) Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(0)$ gilt.
(2) Induktionsvoraussetzung: Man nimmt an, dass $A(n)$ gilt für ein beliebiges $n \geq 0$.
(3) Induktionsschritt: Man zeigt, dass unter der Induktionsvoraussetzung auch $A(n+1)$ wahr ist.

Dann hat man gezeigt, dass $A(n)$ wahr ist für alle n.

Wir werden jetzt eine ganze Reihe von Sätzen mithilfe von Induktion beweisen. Wir beginnen mit folgendem Satz, den wir in Zukunft immer mal wieder verwenden werden.

Satz 2.1. *Für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Wir müssen zeigen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq 0$.
Induktionsanfang. Wir müssen also zeigen, dass die Aussage $A(0)$ wahr ist. Dies können wir leicht verifizieren, denn es ist

$$\sum_{k=0}^{0} x^k \;=\; x^0 \;=\; 1 \;=\; \frac{1-x}{1-x},$$

d.h. $A(0)$ ist wahr.

Induktionsannahme. Wir nehmen an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Induktionsschritt. Wir müssen nun zeigen, dass auch $A(n+1)$ wahr ist. Wir müssen also $\sum_{k=0}^{n+1} x^k$ bestimmen. Die Idee ist nun, diese Summe aufzuspalten, in die ersten n Summanden und den letzten Summanden. Die Summe der ersten n Summanden kennen wir schon per Induktionsannahme. Wir führen nun diese Idee aus:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \frac{(1-x^{n+1})+(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}. \end{aligned}$$

Nach Induktion folgt nun, dass $A(n)$ wahr ist für alle n, d.h. wir haben den Satz bewiesen. □

Lemma 2.2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Beweis. Man kann dieses Lemma leicht mithilfe von Induktion beweisen[16], aber man kann dass Lemma auch direkt mithilfe vom 'Trick vom kleinen Gauss' zeigen. Nehmen wir zuerst an, dass $n = 2l$ gerade ist. Indem wir den ersten Summanden mit dem letzten addieren, den zweiten Summanden mit dem vorletzten, usw. erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{2l} k &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (2l-2) + (2l-1) + 2l \\ &= (\underbrace{1+2l}_{=1+2l}) + (\underbrace{2+2l-1}_{=1+2l}) + (\underbrace{3+2l-2}_{=1+2l}) + \cdots + (\underbrace{l+2l-(l-1)}_{=1+2l}). \end{aligned}$$

Wir haben also l Summanden, welche jeweils $1+2l$ betragen, und wir sehen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{2l} k = l(2l+1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Der Fall, dass n ungerade ist, wird ganz ähnlich bewiesen. □

[16] das ist auch eine gute freiwillige Übungsaufgabe

Lemma 2.3. *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Wir müssen zeigen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq 1$.
Induktionsanfang. Wir können leicht verifizieren, dass die Aussage $A(1)$ richtig ist. In der Tat ist

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 \;=\; 1 \;=\; \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1).$$

Induktionsannahme. Wir nehmen nun an, dass $A(n)$ wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. wir nehmen an, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Induktionsschritt. Wir müssen nun zeigen, dass auch $A(n+1)$ wahr ist. Wir müssen also die Summe $\sum_{k=1}^{n+1} k^2$ bestimmen. Die Idee ist nun wiederum, diese Summe aufzuspalten, in die ersten n Summanden und den letzten Summanden. Die Summe der ersten n Summanden kennen wir schon per Induktionsannahme. Genauer gesagt berechnen wir, dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \;&=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \;+\; (n+1)^2 \\ &=\; \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \;+\; (n+1)^2 \quad \text{(Induktionsannahme).} \end{aligned}$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass

$$\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \;=\; \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1).$$

□

Bemerkung. In Beweisen wird die Induktionsannahme oft ausgelassen, allerdings empfehle ich diese am Anfang immer noch aufzuführen, weil es im Induktionsschritt hilfreich ist, diese vor Augen zu haben.

Satz 2.4. (Bernoullische Ungleichung). *Es sei $x \geq -1$ eine reelle Zahl, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, dass*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Es sei $x \geq -1$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A(n)$ die Aussage, dass
$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$
Induktionsanfang. Man kann leicht nachrechnen, dass die Aussage $A(0)$ wahr ist.
Induktionsannahme. Wir nehmen an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass
$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$
Induktionsschritt. Es gilt
$$\begin{array}{rcll} (1+x)^{n+1} & = & (1+x)^n(1+x) & \\ & \geq & (1+nx)(1+x) & \quad \text{(Induktionsannahme)} \\ & = & 1+(n+1)x+nx^2 & \\ & \geq & 1+(n+1)x. & \end{array}$$
Beachten Sie, dass wir im 2. Schritt implizit verwendet haben, dass $1+x \geq 0$.[17] □

Das folgende Korollar besagt insbesondere, dass die Potenzen von einer Zahl $b > 1$ 'beliebig groß' werden können.

Korollar 2.5. *Es sei $b > 1$ und $C \in \mathbb{R}$, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt*
$$b^n > c.$$
Beweis. Wir wollen also ein n finden, so dass die Potenz b^n größer als eine gegebene Zahl wird. Das klingt ein bisschen wie das Archimedische Axiom, allerdings behandelt dies ein Produkt nx und keine Potenz. Andererseits können wir mithilfe der Bernoullischen Ungleichung eine Potenz durch einen Ausdruck der Form $1 + nx$ abschätzen.

Die Idee des Beweises ist also, das Korollar mithilfe der Bernoullischen Ungleichung auf das Archimedische Axiom zurück zu führen.

Wir müssen den Ausdruck b^n in die Form $(1 + x)^n$ bringen. Wir setzen daher $x = b - 1$. Es folgt aus Satz 2.4, dass für ein beliebiges n gilt:
$$b^n \;=\; (1+x)^n \;\geq\; 1+nx.$$
Das archimedischen Axiom wiederum besagt, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$n_0 x \;\geq\; C$$
gibt. Fassen wir beides zusammen, dann erhalten wir für $n \geq n_0$, dass
$$b^n \;=\; (1+x)^n \;\geq\; 1+nx \;\geq\; 1+n_0x \;>\; n_0x \;\geq\; C.$$
□

[17] Bei Sätzen in der Mathematik ist es immer eine gute Übungsaufgabe, sich zu überlegen, ob in der Tat alle Voraussetzungen verwendet wurden.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \qquad (n \text{ Fakultät}),$$

zudem definieren wir $0! := 1$. Für $0 \leq k \leq n$ in $\mathbb{N}_0$ definieren wir außerdem

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \text{genannt '}k \text{ aus } n\text{'}$$

Für $k = 0$ oder $k = n$ ist dieser Ausdruck gerade eins.

Lemma 2.6. *Für $0 \leq k \leq n$ gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \tfrac{n!}{(n-k)!k!} + \tfrac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\
&= \tfrac{(n+1-k)n!}{(n+1-k)(n-k)!k!} + \tfrac{n!k}{(n-k+1)!(k-1)!k} \\
&= \tfrac{(n+1-k)n!}{(n+1-k)!k!} + \tfrac{n!k}{(n-k+1)!k!} \\
&= ((n+1-k)+k)\tfrac{n!}{(n+1-k)!k!} = \tfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Mithilfe von diesem Lemma können wir jetzt folgenden Satz beweisen.

Satz 2.7. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \geq 0$ gilt*

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Der Satz kann als Verallgemeinerung der üblichen binomischen Formel betrachtet werden. In der Tat besagt der Satz für $n = 2$, dass

$$(a+b)^2 \;=\; \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0 \;=\; b^2 + 2ab + a^2.$$

Für $n = 3$ sieht man leicht, dass der Satz besagt, dass

$$(a+b)^3 \;=\; a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für $n \geq 0$ sei $A(n)$ die Aussage:

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsanfang. Die Aussage $A(0)$ gilt trivialerweise.[18]

Induktionsannahme. Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsschritt. Mithilfe der Induktionsannahme berechnen wir

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}.\end{aligned}$$

Wir wenden jetzt folgenden Trick an:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n+1} c_{k-1}.$$

Wir wenden jetzt diesen Trick auf die erste Summe an. Mithilfe von Lemma 2.6 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \ + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} \ + \ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}.\end{aligned}$$

Der Satz folgt nun also per Induktion. $\square$

[18] Hier 'trivial' heißt, dass man es leicht durch Einsetzen zeigen kann. Das Ganze ist so langweilig, dass man es sich sparen kann, dazu etwas zu schreiben.

3. Folgen und Reihen

Nach der Einführung in das Prinzip des Induktionsbeweises kehren wir jetzt zurück zu den reellen Zahlen. In diesem Kapitel führen wir Folgen und Reihen ein. Diese Begriffe werden uns durch die ganze Analysis begleiten.

3.1. **Folgen.**

Definition. Eine *Folge* ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n\end{array}$$

Eine solche Folge wird oft auch mit $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, oder mit $(a_n)_{n\geq 1}$ oder, noch knapper, mit (a_n) bezeichnet. [19] Wir bezeichnen zudem die einzelnen Zahlen a_n auch als *Folgenglieder.*

Wir betrachten jetzt eine ganze Reihe von Folgen, damit wir ein Gefühl dafür kriegen, wie Folgen ausschauen können. Wir wollen dabei auch 'qualitativ' beschreiben, wie sich die jeweilige Folge verhält:

	Definition der Folge	die ersten Folgenglieder	qualitatives Verhalten
(a)	$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$	die Folge geht gegen 0
(b)	$(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$	$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \ldots$	die Folge geht gegen 0
(c)	$(3)_{n\in\mathbb{N}}$	$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots$	die Folge ist immer gleich 3
(d)	$(3+\frac{2}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$	$5,\ 3\frac{1}{2},\ 3\frac{2}{9},\ 3\frac{2}{16},\ 3\frac{2}{25},\ \ldots$	die Folge nähert sich immer mehr der 3
(e)	$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$	die Folge springt zwischen 1 und -1 hin und her
(f)	$(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots$	die Folge geht gegen 0
(g)	$(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$	$1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots$	die Folge wird immer größer

Es gibt aber auch noch kompliziertere Folgen, welche man nicht mit einem einzigen mathematischen Ausdruck definieren kann. Beispielsweise

(h)	$\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade}\\ \frac{-1}{n^2}, & \text{sonst}\end{cases}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{6}, \ldots$	die Folge geht gegen 0
(i)	$\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ prim}\\ 5, & \text{sonst}\end{cases}$	$5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 5, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{7}, 5, 5, \ldots$	die Folge ist 'zumeist' 5, aber nicht immer
(j)	$\begin{cases}9, & \text{falls } n \leq 10\\ \frac{1}{n}, & \text{sonst}\end{cases}$	$9, \ldots, 9, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \ldots$	für große n geht die Folge gegen 0

Wir sehen also, dass der Fantasie bei der Definition von Folgen keine Grenzen gesetzt sind.

Wir haben in den Beispielen gesehen, dass viele von den Folgen 'gegen einen Wert streben'. Wir wollen nun dieses 'gegen einen Wert streben' mathematisch präzise formulieren. Wir führen dazu folgende Definition ein. Diese ist eine der wichtigsten Definitionen der

[19] Manchmal betrachten wir auch Abbildungen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, welche wir ebenfalls als Folgen bezeichnen.

Analysis. Sie ist leider auch zu Anfang eine der am schwersten zu verdauenden Definitionen.

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir sagen die Folge *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}$, geschrieben als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Anders ausgedrückt, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem ε-Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ um a ein $N \in \mathbb{N}$, so dass ab N alle Folgenglieder in dem ε-Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

Wenn eine Folge (a_n) gegen a konvergiert, dann schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

und wir nennen a den *Grenzwert* der Folge (a_n). Konvergiert (a_n) gegen 0, dann sagen wir, dass (a_n) eine *Nullfolge* ist.

Betrachten wir beispielsweise das erste Beispiel, d.h. die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Wir haben den Eindruck, dass die Folge gegen 0 strebt. Wenn unsere Definition von Konvergenz Sinn machen soll, dann muss diese gegen 0 konvergieren. Wie wir jetzt sehen werden ist dies in der Tat der Fall.

Behauptung. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\underbrace{\left|\frac{1}{n} - 0\right|}_{=\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Sei also $\varepsilon > 0$ eine beliebige reelle Zahl größer Null. Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Diese Aussage ähnelt ganz stark der Aussage von Satz 1.21. In der Tat, gibt es nach Satz 1.21 ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Wir wollen nun zeigen, dass dieses N die richtige Eigenschaft besitzt. Es sei also $n \geq N$, dann gilt

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

$\square$

Betrachten wir nun das vierte Beispiel, d.h. die Folge $\left(3+\frac{2}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese scheint gegen 3 zu streben. Wir sehen jetzt, dass dies auch mit unserer Definition von Konvergenz übereinstimmt.

Behauptung. [20] Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n^2}\right)=3.$$

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\underbrace{\left|\left(3+\frac{2}{n^2}\right)-3\right|}_{=\frac{2}{n^2}}<\varepsilon$$

für alle $n\geq N$.

Sei also $\varepsilon>0$ eine beliebige reelle Zahl größer Null. Wir müssen ein $N\in\mathbb{N}$ finden, so dass

$$\frac{2}{n^2}<\varepsilon$$

für alle $n\geq N$.

Nach Satz 1.21 gibt es zu jedem $\nu>0$ ein $N\in\mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{N}<\nu.$$

Wenn wir den Satz auf $\nu=\frac{\varepsilon}{2}$ an erhalten wir ein $N\in\mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass dieses N die richtige Eigenschaft besitzt. Es sei also $n\geq N$, dann gilt

$$\frac{2}{n^2}\;=\;2\frac{1}{n}\frac{1}{n}\;\leq\;2\frac{1}{n}\;\leq\;2\frac{1}{N}\;<\;2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\;=\;\varepsilon.$$

Hierbei haben wir auch verwendet, dass $\frac{1}{n}\leq 1$ und $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}$. □

In den Übungen werden wir sehen, dass die Folgen (a) bis (j), welche unserem Gefühl nach gegen eine Zahl konvergieren, auch in der Tat gegen die entsprechende Zahl konvergieren.

Der Ausdruck *der Grenzwert* legt natürlich nahe, dass wenn es einen Grenzwert gibt, dann ist dieser eindeutig. Dies ist in der Tat der Fall, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 3.1. *Eine konvergente Folge konvergiert gegen genau eine reelle Zahl.*

[20] Dieses Beispiel haben wir in der Vorlesung nicht behandelt, aber es ist vielleicht hilfreich, auch dieses zu studieren.

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Es seien a, b reelle Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Wir müssen zeigen, dass $a = b$.

Nehmen wir an, dass $a \neq b$. Wir wollen diese Annahme zu einem Widerspruch führen, d.h. wir wollen zeigen, dass dies nicht sein kann. [21]

> Grob gesprochen heißt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dass für 'ganz große n' die Folgenglieder 'ganz in der Nähe von a sind'. Ganz analog heißt $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, dass für 'ganz große n' die Folgenglieder 'ganz in der Nähe von b sind'. Der Widerspruch muss also daher kommen, dass sich für ganz große n, die Folgenglieder nicht gleichzeitig 'ganz in der Nähe von a' und 'ganz in der Nähe von b' sein kann. Um diese Idee in einen mathematischen Beweis zu verwandeln, müssen wir quantifizieren, was 'ganz in der Nähe' heißen soll. Wenn wir mit $d = |a - b|$ den Abstand zwischen a und b bezeichnen, dann kann es nicht sein, dass sowohl der Abstand von einem Folgenglied zu a kleiner als $\frac{d}{2}$ ist, als auch der Abstand zu b kleiner als $\frac{d}{2}$ ist. Wir wollen diese Idee nun ausführen.

Wir setzen $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$. Nachdem wir annehmen, dass $a \neq b$ folgt, dass $\varepsilon > 0$. Nachdem $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert daher ein $N_a \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_a$. Nachdem $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ existiert zudem auch ein $N_b \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_b$.

Es sei nun $n \geq \max\{N_a, N_b\}$, wobei wir mit $\max\{N_a, N_b\}$ das Maximum der beiden Zahlen N_a und N_b bezeichnen. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} |a-b| & = & |(a-a_n)-(b-a_n)| & \text{Umformen, so dass } a_n - a \text{ und } a_n - b \text{ auftauchen} \\ & \leq & |a-a_n| + |b-a_n| & \text{Dreiecksungleichung} \\ & < & \varepsilon + \varepsilon & \text{nachdem } n \geq N_a \text{ sowie } n \geq N_b \\ & = & |a-b| & \text{Definition von } \varepsilon. \end{array}$$

Zusammengefasst sehen wir also, dass $|a-b| < |a-b|$, was natürlich nicht sein kann. Wir erhalten daher einen Widerspruch zur Annahme, dass die Folge (a_n) zwei verschiedene Grenzwerte besitzt. □

Im Folgenden nennen wir eine Folge (a_n) *beschränkt*, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|a_n| \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Andernfalls heißt die Folge unbeschränkt. In den obigen Beispielen ist die Folge $(n^3)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 8, 27, 64, 125, \ldots)$ unbeschränkt. Alle anderen Beispiele sind hingegen beschränkt.

---

[21]Der Absatz, welcher eingerückt in blau geschrieben ist, ist streng genommen nicht Teil des Beweises. In den Kursiv geschriebenen Stellen eines Beweises, will ich nur motivieren, wie man auf die Idee für den Beweis kommt. Der eigentliche, formale Beweis, besteht nur aus den nicht-kursiv geschriebenen Absätzen.

Satz 3.2. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei (a_n) eine konvergente Folge. Wir setzen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Es existiert insbesondere ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < 1.$$

Wir setzen nun

$$C := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\},$$

d.h. C ist das Maximum der Zahlen $|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1$.

Wir wollen nun zeigen, dass C die gewünschte Eigenschaft besitzt, d.h. wir wollen zeigen, dass $|a_n| \leq C$ für alle n. Es ist offensichtlich, dass dies wahr ist für $n \in \{1, \ldots, N-1\}$. Sei nun $n \geq N$. Dann erhalten wir mithilfe der Dreiecksungleichung, dass in der Tat gilt

$$|a_n| \;=\; |a_n - a + a| \;\leq\; |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \;\leq\; C.$$

$\square$

Der folgende Satz gibt uns nun einige hilfreiche Rechenregeln für konvergente Folgen.

Satz 3.3. *Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\
(2) & \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n, \\
(3) & \lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n & = & \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n.
\end{array}$$

Wenn $b_n \neq 0$ für alle n und wenn $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann gilt zudem

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \;=\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Beweis. Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen.

> Es ist eine gute Idee, den Grenzwerten einen Namen zu geben, und die Definition der Konvergenz der Folgen (a_n) und (b_n) noch einmal hinzuschreiben. Nachdem es am Ende viele ε's geben wird, ist es auch weise, diese unterschiedlich zu bezeichnen.

Wir schreiben $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Nach Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gilt: Zu jedem $\varepsilon_a > 0$ existiert ein $N_a \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon_a$$

für alle $n \geq N_a$. Außerdem existiert zu jedem $\varepsilon_b > 0$ ein $N_b \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - b| < \varepsilon_b$$

für alle $n \geq N_b$.

(1) Wir müssen also jetzt zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Wir müssen also $|(a_n+b_n)-(a+b)|$ 'beliebig klein kriegen'. Nachdem $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, können wir $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ 'beliebig klein kriegen'. Wir müssen daher $|(a_n + b_n) - (a + b)|$ so umschreiben, dass $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ auftauchen. Wir machen dies durch folgende Ungleichung, welche aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Wir setzen jetzt $\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\varepsilon_b = \frac{\varepsilon}{2}$. Aus der Definition der Konvergenz der Folgen (a_n) und (b_n) folgt, dass es N_a und N_b gibt, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq N_a$ und

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq N_b$.

Wir setzen $N = \max\{N_a, N_b\}$. Wir wollen zeigen, dass dieses N die gewünschte Eigenschaft besitzt. Es sei nun also $n \geq N$. Wir müssen zeigen, dass

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Es folgt aus der Dreiecksungleichung und der Tatsache, dass $n \geq N_a$ und $n \geq N_b$, dass in der Tat

$$\begin{array}{rcl} |(a_n + b_n) - (a + b)| & = & |(a_n - a) - (b - b_n)| \\ & \leq & |a_n - a| + |b_n - b| \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{array}$$

(2) Sei also $\varepsilon > 0$.

Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n b_n)$ gegen ab konvergiert. In diesem Fall müssen wir also $|a_n b_n - ab|$ mithilfe von $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ abschätzen. In diesem Fall braucht das aber etwas mehr Phantasie als in (1).

Es folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{array}{rcl} |a_n b_n - ab| & = & |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ & \leq & |a_n b_n - a b_n| + |a b_n - ab| \\ & = & |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|. \end{array}$$

Nach Satz 3.2 existiert ein C, so dass $|b_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können zudem C so wählen, dass außerdem $|a| \leq C$ und $C > 0$. Dann gilt

$$|ab - a_n b_n| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \leq C(|a_n - a| + |b_n - b|)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir setzen nun $\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2C}$ und $\varepsilon_b = \frac{\varepsilon}{2C}$. Wir wählen N_a und N_b, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

für alle $n \geq N_a$ und

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

für alle $n \geq N_b$. Wir setzen $N = \max\{N_a, N_b\}$. Es sei nun $n \geq N$. Dann gilt

$$|ab - a_n b_n| \leq C(|a - a_n| + |b - b_n|) < C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}\right) = \varepsilon.$$

(3) Diese Aussage folgt sofort aus (2), wenn man $b_n = \lambda$ setzt für alle n.
(4) Wir nehmen nun also an, dass $b_n \neq 0$ für alle n, und dass $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b}\right| \leq \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot |a_n - a| + \left|\frac{a}{b b_n}\right| \cdot |b_n - b|.$$

Nachdem $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq N'$. Wir wählen zudem $C > 0$ mit $C \geq \left|\frac{2}{b}\right|$ und $C \geq \left|\frac{2a}{b^2}\right|$. Wir wählen N_a und N_b, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ für alle } n \geq N_a \text{ und } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ für alle } n \geq N_b.$$

Wir setzen $N = \max\{N', N_a, N_b\}$. Es sei nun $n \geq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &\leq \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot |a_n - a| + \left|\frac{a}{b b_n}\right| \cdot |b_n - b| \\
&\leq \left|\frac{2}{b}\right| \cdot |a_n - a| + \left|\frac{2a}{b^2}\right| \cdot |b_n - b| && \text{weil } n \geq N' \\
&< \left|\frac{2}{b}\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \left|\frac{2a}{b^2}\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2C} && \text{weil } n \geq N_a \text{ und } n \geq N_b \\
&< \left|\frac{2}{b}\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2\left|\frac{2}{b}\right|} + \left|\frac{2a}{b^2}\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2\left|\frac{2a}{b^2}\right|} && \text{weil } C \geq \left|\tfrac{2}{b}\right| \text{ und } C \geq \left|\tfrac{2a}{b^2}\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.4. *Es seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, so dass $a_n \geq b_n$ für alle n. Dann gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. Wir schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Nehmen wir an, dass $b > a$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Es ist $\varepsilon > 0$, es existiert daher ein N, so dass für alle $n \geq N$ gilt, [22] dass

$$\text{(1)} \qquad |a_n - a| < \varepsilon = \tfrac{b-a}{2}, \quad \text{daraus folgt} \quad a_n \in \big(a - \tfrac{b-a}{2}, \underbrace{a + \tfrac{b-a}{2}}_{=\frac{a+b}{2}}\big) \quad \Rightarrow \quad a_n < \tfrac{a+b}{2}, \text{ sowie}$$

$$\text{(2)} \qquad |b_n - b| < \varepsilon = \tfrac{b-a}{2}, \quad \text{daraus folgt} \quad b_n \in \big(\underbrace{b - \frac{b-a}{2}}_{=\frac{a+b}{2}}, b + \tfrac{b-a}{2},\big) \quad \Rightarrow \quad b_n > \tfrac{a+b}{2}$$

Zusammengefasst erhalten wir, dass $b_n > \frac{a+b}{2} > a_n$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $a_n \geq b_n$ für alle n. □

Beispiel. Es seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, so dass $a_n > b_n$, dann gilt nicht notwendigerweise, dass auch $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$. In der Tat, $\frac{1}{n} > 0$ für alle n, aber $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} 0$.

3.2. **Quantoren.** Im Folgenden verwenden wir folgende Abkürzungen

$$\begin{array}{lll} \underset{x}{\forall} & \text{bedeutet} & \text{‘für alle } x \text{ gilt’} \\ \underset{x}{\exists} & \text{bedeutet} & \text{‘es gibt ein } x\text{, so dass’.} \end{array}$$

Die Symbole $\forall$ und $\exists$ nennen wir *Quantoren*. Betrachten wir ein Beispiel:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall} |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{bedeutet:} \quad \begin{array}{l}\text{für alle}\\ \varepsilon > 0\end{array} \ \text{gilt} \ \begin{array}{l}\text{es gibt}\\ \text{ein } N \in \mathbb{N}\end{array} \ \text{so dass} \ \begin{array}{l}\text{für alle}\\ n \geq \mathbb{N}\end{array} \ \text{gilt} \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

oder sprachlich etwas hübscher:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall} |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{bedeutet:} \quad \begin{array}{l}\text{für alle}\\ \varepsilon > 0\end{array} \ \begin{array}{l}\text{gibt es}\\ \text{ein } N \in \mathbb{N}\end{array} \ \text{so dass} \ \begin{array}{l}\text{für alle}\\ n \geq \mathbb{N}\end{array} \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dies ist natürlich gerade die Definition der Aussage, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert. D.h. in Quantorenschreibweise gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall} |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wir können auch viele andere Aussagen und Definitionen mit Quantoren schreiben:

$$\begin{array}{rl} \text{das archimedische Axiom besagt} & \underset{x>0,y>0}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists}\ nx > y \\ \text{eine Folge } (a_n) \text{ ist beschränkt, genau dann, wenn} & \underset{C\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n| < C. \end{array}$$

[22] Genau genommen folgt aus der Definition von $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, dass es ein $N_a \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_a$ und es gibt ein $N_b \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_b$. Wir setzen $N := \max\{N_a, N_b\}$. Dann gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ und $b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

In vielen Fällen müssen wir eine Aussage negieren. Es sei beispielsweise M eine Menge und für jedes $x \in M$, sei $A(x)$ eine Aussage, welche wahr oder falsch sein kann. Dann ist

$$\text{Negation von 'für alle } x \in M, \text{gilt } A(x)\text{'} \quad = \quad \text{'es gibt ein } x \in M, \text{so dass } A(x) \text{ falsch ist'.}$$

Für eine Folge (a_n) gilt beispielsweise

$$\text{Negation von 'für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } a_n \geq 1\text{'} \quad = \quad \text{'es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \underbrace{a_n < 1}_{\substack{\text{Negation von} \\ a_n \geq 1}} \text{'}$$

oder in Quantorenschreibweise

$$\text{Negation von } \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \; a_n \geq 1 \quad = \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} a_n < 1$$

Die gleiche Logik funktioniert auch mit den Rollen von $\forall$ und $\exists$ vertauscht:

$$\text{Negation von 'für alle } x \in M, \text{ gilt } A(x) \text{ '} \quad = \quad \text{'es gibt ein } x \in M, \text{so dass } A(x) \text{ falsch ist'.}$$

Für eine Folge (a_n) gilt beispielsweise

$$\text{Negation von 'es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n^2 = 2\text{'} \quad = \quad \text{'für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } \underbrace{a_n^2 \neq 2}_{\substack{\text{Negation von} \\ a_n^2 = 2}}$$

oder in Quantorenschreibweise

$$\text{Negation von } \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} a_n^2 = 2 \quad = \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} a_n^2 \neq 2$$

Wir sehen also, dass wir die Negation dadurch erhalten, dass wir $\forall$ und $\exists$ vertauschen, und die jeweilige Aussage $A(x)$ negieren. Dies funktioniert ganz analog, für Verkettungen von Quantoren. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \text{Negation von '}a_n \text{ konvergiert gegen } a\text{'} = \text{Negation von } & \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq N}{\forall} \quad |a_n - a| < \varepsilon \\ = \; & \underset{\varepsilon>0}{\exists} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \; \underset{n\geq N}{\exists} \quad \underbrace{|a_n - a| \geq \varepsilon}_{\substack{\text{Negation von} \\ |a_n - a| < \varepsilon}} \; . \end{aligned}$$

3.3. **Bestimmte Divergenz.**

Definition. Wir sagen, eine Folge (a_n) konvergiert, wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, d.h. wenn die Folge (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Anders ausgedrückt:

$$(a_n) \text{ konvergiert} \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{a\in\mathbb{R}}{\exists} \; \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq N}{\forall} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wenn die Folge (a_n) nicht konvergiert, dann sagen wir die Folge *divergiert*, d.h.

$$(a_n) \text{ divergiert} \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{a\in\mathbb{R}}{\forall} \; \underset{\varepsilon>0}{\exists} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \; \underset{n\geq N}{\exists} \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Manchmal schreiben wir dann '$\lim_{n\to\infty} a_n$ divergiert'.

Beispiel. Im 3. Übungsblatt werden Sie zeigen, dass die Folge $n \mapsto (-1)^n$ divergiert. Es gibt viele weitere Folgen, welche divergieren, beispielsweise $(-3n^2)$.

Bei divergenten Folgen wollen wir zwei Typen von divergenten Folgen besonders betrachten.

Definition. Es sei (a_n) eine Folge. Wir sagen

$$(a_n) \text{ divergiert bestimmt gegen } +\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{K\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N}{\forall} \quad a_n > K$$

und ganz analog definieren wir

$$(a_n) \text{ divergiert bestimmt gegen } -\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{K\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N}{\forall} \quad a_n < K$$

[23] Im ersten Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und im zweiten Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beispiel.
1. Die divergente Folge $n \mapsto (-1)^n$ divergiert nicht bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$. In der Tat kann man für $K = 1$ beziehungsweise $K = -1$ kein geeignetes N finden.
2. Die divergente Folge $(-3n^2)$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$, d.h. es ist $\lim_{n\to\infty} 3n^2 = +\infty$. In der Tat: es sei $K \in \mathbb{R}$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > |K|$, dann gilt für alle $n \geq N$, dass
$$-3n^2 \;\leq\; -3N^2 \;\leq -N \;< -|K| \;\leq\; K.$$
Hierbei folgt die erste Ungleichung aus $n \geq N$, die zweite folgt aus der ganz allgemeinen Aussage, dass $3k^2 \geq k$ für jede natürliche Zahl k, die dritte Ungleichung folgt aus $N > K$, und die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt $-x \leq |x|$.

Lemma 3.5. *Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \textit{falls } |x| < 1, \\ 1, & \textit{falls } x = 1, \\ \text{divergiert}, & \textit{falls } x \leq -1, \\ +\infty, & \textit{falls } x > 1. \end{cases}$$

Beweis. Der Fall $|x| < 1$ wird wie Übungsaufgabe 3 (b) in Übungsblatt 2 bewiesen. Der Fall $x = 1$ ist offensichtlich. Der Fall $x \leq -1$ wird im 3. Übungsblatt bewiesen.

Es sei nun zuletzt $x > 1$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$, d.h. wir müssen zeigen, dass die Folge (x^n) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Aber dies folgt sofort aus Korollar 2.5. □

Das folgende Lemma wird in Übungsblatt 3 bewiesen.

[23] Manchmal wird ‘bestimmte Divergenz’ auch als ‘uneigentliche Konvergenz’ bezeichnet.

Lemma 3.6. *Es sei $d \in \mathbb{Z}$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^d = \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } d > 0, \\ 1, & \text{wenn } d = 0, \\ 0, & \text{wenn } d < 0. \end{cases}$$

Satz 3.7. *Es sei (a_n) eine Folge, welche bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt* [24]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Aus der Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ angewandt auf $K = 0$ folgt, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > K = 0$, für alle $n \geq n_0$.

Wir müssen jetzt noch zeigen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $K = \frac{1}{\varepsilon}$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n > K$$

für alle $n \geq N$. Es folgt, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| \; = \; \frac{1}{a_n} \; < \; \frac{1}{K} \; = \; \varepsilon.$$

Der Fall, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ wird ganz ähnlich bewiesen. Wir überlassen dies, mal wieder, als freiwillige Übungsaufgabe. $\square$

Zur Erinnerung, eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Der folgende Satz wird ähnlich bewiesen wie Satz 3.7 (siehe beispielsweise Forster §4 Satz 9).

Satz 3.8. *Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle n (bzw. $a_n < 0$ für alle n), dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty.$$

Wir führen auf der Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ folgende partielle Addition und partielle Multiplikation ein [25]

$+$	$a \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$
$b \in \mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$*$
$-\infty$	$-\infty$	$*$	$-\infty$

und

$\cdot$	$a > 0$	0	$a < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$b > 0$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	$*$	$*$
$b < 0$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$*$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

[24] Nachdem wir nur wissen, dass $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, ist die Folge $(\frac{1}{a_n})$ nur für $n \geq n_0$ definiert. Die Definition von Konvergenz ist dann ganz analog zur Definition von Folgen, welche bei $n = 1$ beginnen.

[25] Die Addition und die Multiplikation ist dabei definiert, wie man es sich 'naiv' denken würde. Wenn eine Verknüpfung 'naiv' nicht klar ist, z.B. $-\infty + \infty$, dann ist diese in unserem Falle auch nicht definiert.

hierbei bedeutet $*$, dass die Addition beziehungsweise die Multiplikation nicht definiert ist, d.h. wir haben $\infty + (-\infty)$ und $(-\infty) + \infty$ *nicht* definiert und wir haben auch $0 \cdot (\pm\infty)$ nicht definiert.

Es gilt folgender Satz:

Satz 3.9. *Es seien (a_n) und (b_n) Folgen, welche entweder konvergieren, oder welche bestimmt divergieren. Dann gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\ (2) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n \end{array}$$

wenn *die jeweilige rechte Seite definiert ist.*

Beweis. Wenn (a_n) und (b_n) konvergente Folgen sind, ist dies gerade die Aussage aus Satz 3.3. Wenn (a_n) eine konvergente Folge ist, und wenn (b_n) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, dann werden wir im 3. Übungsblatt zeigen, dass $(a_n + b_n)$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Wenn zudem $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$, dann werden wir im 3. Übungsblatt zeigen, dass $(a_n \cdot b_n)$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Alle weiteren Fälle werden ähnlich bewiesen. Diese sind eine freiwillige Übungsaufgabe. □

Korollar 3.10. *Es seien $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ mit $d \geq 1$ und $c_d \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{d-1} n^{d-1} + c_d n^d) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } c_d > 0, \\ -\infty, & \text{wenn } c_d < 0. \end{cases}$$

Beweis.

Die Aussage des Korollars klingt so, als sollte man wohl Satz 3.9 (1) anwenden. Aber dies ist im Allgemeinen nicht möglich. Beispielsweise divergiert bei der Folge $-3n + 4n^2$ der erste Summand bestimmt gegen $-\infty$ und der zweite Summand divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Aber die Summe $(-\infty) + \infty$ hatten wir nicht definiert. Die Idee ist daher, die Folge $c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{d-1} n^{d-1} + c_d n^d$ so umzuschreiben, dass man doch Satz 3.9 anwenden kann. Nachdem man 'additiv' wenig umschreiben kann, werden wir die Folge 'multiplikativ' umschreiben und dann Satz 3.9 (2) anwenden.

Es ist

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \left(c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{d-1} n^{d-1} + c_d n^d\right) \\ = \; & \lim_{n\to\infty} n^d \cdot \left(c_0 \tfrac{1}{n^d} + c_1 \tfrac{1}{n^{d-1}} + c_2 \tfrac{1}{n^{d-2}} + \cdots + c_{d-1} \tfrac{1}{n} + c_d\right). \end{aligned}$$

Wir wollen nun Satz 3.9 anwenden, aber dazu müssen wir zeigen, dass die Folgen

$$(n^d) \quad \text{sowie} \quad \left(c_0 \frac{1}{n^d} + c_1 \frac{1}{n^{d-1}} + c_2 \frac{1}{n^{d-2}} + \cdots + c_{d-1} \frac{1}{n} + c_d\right)$$

konvergieren oder bestimmt divergieren, und dass zudem das Produkt definiert ist.

Nachdem $d \geq 1$ folgt aus Lemma 3.6, dass $\lim_{n\to\infty} n^d = +\infty$. Durch mehrfaches Anwenden von Satz 3.9 und Lemma 3.6 erhalten wir zudem, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_0 \frac{1}{n^d} + c_1 \frac{1}{n^{d-1}} + c_2 \frac{1}{n^{d-2}} + \cdots + c_{d-1} \frac{1}{n} + c_d\right) = c_d.$$

Nachdem $(+\infty) \cdot c_d$ definiert ist, folgt nun also aus Satz 3.9, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{d-1} n^{d-1} + c_d n^d\right) = (+\infty) \cdot c_d = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } c_d > 0, \\ -\infty, & \text{wenn } c_d < 0. \end{cases}$$

□

Wir setzen die Ordnung $>$ im Folgenden auf die Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ fort, indem wir schreiben

$$+\infty > a > -\infty \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt folgender Satz.

Satz 3.11. *Es seien (a_n) und (b_n) Folgen, welche entweder konvergieren, oder welche bestimmt divergieren. Wenn $a_n \leq b_n$ für alle n, dann gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;\leq\; \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. In Satz 3.4 haben wir den Fall betrachtet, dass (a_n) und (b_n) konvergente Folgen sind.

Wir müssen nun noch die verschiedenen Spezialfälle untersuchen. Es sei beispielsweise (a_n) eine konvergente Folge und es sei (b_n) eine Folge, welche bestimmt divergiert, so dass $a_n \leq b_n$ für alle n.

Nachdem (a_n) konvergiert, ist die Folge (a_n) nach Satz 3.2 beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq C$ für alle n. Nachdem $b_n \geq a_n$ für alle n folgt nun auch, dass $b_n \geq a_n \geq -|a_n| \geq -C$ für alle n. Insbesondere kann (b_n) nicht bestimmt gegen $-\infty$ divergieren.

Nachdem (b_n) nach Voraussetzung bestimmt divergiert, wissen wir schon, dass entweder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Nachdem der erste Fall, wie oben gezeigt, nicht eintreten kann, sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Wir erhalten also, dass in der Tat $\lim_{n\to\infty} a_n = a \leq +\infty = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Die anderen Spezialfälle werden nun ganz analog bewiesen. Wir überlassen auch diese als freiwillige Übungsaufgabe. □

3.4. **Reihen.** Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir

$$s_k \;:=\; \sum_{n=0}^{k} a_n$$

als die *k-te Partialsumme* und wir bezeichnen die Folge der Partialsummen als die *Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Wenn diese Folge der Partialsummen konvergiert, dann schreiben wir auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \;=\; \lim_{k\to\infty} s_k \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n.$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 3.12. *Es seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *zwei Reihen, welche konvergieren, oder welche bestimmt divergieren.*

(1) *Es gilt*
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$
wenn *die rechte Seite definiert ist.*

(2) *Es sei* $\lambda \in \mathbb{R}$, *dann gilt*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$
wenn *die rechte Seite definiert ist.*

(3) *Wenn* $a_n \le b_n$ *für alle* n, *dann gilt auch*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \;\le\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Beweis. (1) Es folgt aus den Definitionen und aus Satz 3.9, dass
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k}(a_n+b_n) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} a_n \;+\; \sum_{n=0}^{k} b_n\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n \;+\; \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n \quad \text{nach Satz 3.9} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n
\end{aligned}$$
wenn die rechte Seite definiert ist.

(2) Die Aussage folgt sofort aus Satz 3.9, angewandt auf die Folge der Partialsummen $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ und auf die Konstante Folge $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) Die Aussage folgt sofort aus Satz 3.11, angewandt auf die Folgen der Partialsummen $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ und $t_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$.

□

Satz 3.13. *Es sei* $x \in \mathbb{R}$, *dann gilt*
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \textit{falls } |x| < 1, \\ \text{divergiert}, & \textit{falls } x \le -1, \\ +\infty, & \textit{falls } x \ge 1. \end{cases}$$

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit
$$s_k := \sum_{n=0}^{k} x^n$$

die k-te Partialsumme. Wenn $x = 1$, dann gilt natürlich, dass $s_k = k$, d.h. es ist $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} k = +\infty$. Im Folgenden sei nun $x \neq 1$. Dann folgt aus Satz 2.1, dass

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

Es folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^k\right).$$

Nach Lemma 3.5 hängt $\lim_{k\to\infty} x^k$ von der Wahl von x ab. Betrachten wir zuerst den Fall $|x| < 1$. Nach Lemma 3.5 ist $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$. Es folgt aus Satz 3.3, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^k\right) = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot 0 = \frac{1}{1-x}.$$

Die Fälle $x \geq 1$ und $x \leq -1$ werden ganz ähnlich beweisen und bleiben als freiwillige Übungsaufgabe überlassen.

$\square$

4. Cauchyfolgen und das Vollständigkeitsaxiom

4.1. Das Vollständigkeitsaxiom.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Mit Quantoren können wir die Definition auch wie folgt schreiben:

$$(a_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge } \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n,m\geq N}{\forall} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Die Definition von einer Cauchy-Folge ähnelt der Definition einer konvergenten Folge, und es stellt sich die Frage, was der Zusammenhang zwischen diesen beiden Begriffen ist. Wir beginnen dazu mit folgendem Satz.

Satz 4.1. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei (a_n) eine konvergente Folge. Wir schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Für alle $\rho > 0$ existiert also ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq M$ gilt [26]

$$|a_m - a| < \rho.$$

Wir müssen nun zeigen, dass (a_n) auch eine Cauchy-Folge ist. Es sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Wir verwenden nun folgenden Standardtrick, welcher aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a|.$$

Wir setzen jetzt $\rho = \frac{\varepsilon}{2}$. Wie wir oben gesehen haben, existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq M$ gilt

$$|a_m - a| < \rho = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen jetzt $N = M$. Für alle $n, m \geq N$ gilt dann

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Es stellt sich nun noch die Frage, ob auch jede Cauchy-Folge eine konvergente Folge ist. Dies ist eine subtile Frage. In den bisherigen Diskussionen von Folgen und deren Konvergenz haben wir eigentlich nie verwendet, dass wir mit den reellen Zahlen arbeiten. Die bisherigen Ergebnisse gelten beispielsweise genauso für den Körper der rationalen Zahlen.

Aber wir werden bald sehen, dass es Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen gibt, welche *nicht* gegen eine rationale Zahl konvergieren. Beispielsweise werden wir sehen, dass es eine

[26] In diesem Satz müssen wir die Definitionen von konvergenten Folgen und von Cauchy-Folgen verwenden. In beiden Fällen tauchen 'ε' und 'N' auf, aber nachdem diese verschiedene Rollen spielen können, ist es besser für eine der beiden Definitionen andere Symbole zu verwenden.

Folge von rationalen Zahlen gibt, welche gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, aber wir werden auch zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Satz 1.19 besagt, dass die Umkehrung von Satz 4.1 für den Körper der reellen Zahlen gilt. Zur Erinnerung, Satz 1.19 lautet wie folgt:

Satz 1.19. *Der Körper der reellen Zahlen ist der* [27] *angeordnete Körper, welcher das archimedische Axiom erfüllt und welcher das Vollständigkeitsaxiom erfüllt:*

(V) *Jede Cauchyfolge konvergiert.*

Bevor wir die Diskussion der reellen Zahlen fortführen, erinnern wir noch an einige Definitionen. Im Folgenden seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen gegeben, wir definieren: [28]

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}, && \text{(geschlossenes Intervall)}\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, && \text{(offenes Intervall)}\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}, && \text{(halboffenes Intervall)}\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}, && \text{(halboffenes Intervall)}\\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\} &&\\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} &&\\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\} &&\\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}. &&
\end{aligned}$$

Man beachte, dass an der Universität normalerweise die Schreibweise (a,b), anstatt $]a,b[$ verwendet wird.

Für eine reelle Zahl z schreiben wir zudem

$$\begin{aligned}
\lfloor z \rfloor &:= \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq z\} = \text{maximales } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \leq z && \text{‘}z\text{ abgerundet’, sowie}\\
\lceil z \rceil &:= \min\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq z\} = \text{minimales } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \geq z && \text{‘}z\text{ aufgerundet’.}
\end{aligned}$$

Die kleinen horizontalen Striche geben also an, ob man ab- oder aufrundet.

4.2. **Dezimaldarstellung von reellen Zahlen.**

Satz 4.2. *Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d > 1$ gegeben. Zudem sei (a_n) eine Folge, so dass für alle n gilt, dass $a_n \in \{0,1,2,3,\ldots,d-1\}$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{d^n}.$$

[27] Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erfüllt das archimedische Axiom und das Vollständigkeitsaxiom. Zudem gilt, dass wenn K ein weiterer angeordneter Körper ist, welche beide Axiome erfüllt, dann gibt es genau einen Isomorphismus $\mathbb{R} \to K$ von angeordneten Körpern.

[28] Hierbei bezeichnet beispielsweise $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$ die Menge aller reellen Zahlen, welche die Eigenschaft besitzen, dass $a \leq x \leq b$.

Beweis. Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d > 1$ gegeben. Zudem sei (a_n) eine Folge, so dass für alle n gilt, dass $a_n \in \{0, \dots, d-1\}$. Wir müssen zeigen, dass die Folge der Partialsummen

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{d^n}$$

konvergiert. Nach Satz 1.19 genügt es zu zeigen, dass $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Wir müssen also zeigen, dass die Differenzen $|s_k - s_l|$ für große k und l 'klein werden'. Wir machen daher erst einmal folgende Abschätzung für beliebige $k \geq l$:

$$\begin{aligned}
|s_k - s_l| &= \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{d^n} - \sum_{n=1}^{l} \frac{a_n}{d^n} \\
&= \sum_{n=l+1}^{k} \frac{a_n}{d^n} \\
&\leq \sum_{n=l+1}^{k} \frac{d}{d^n} && \text{nachdem } a_n \leq d \text{ für alle } n \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{d}\right)^n - \sum_{n=0}^{l-1} \left(\frac{1}{d}\right)^n \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{d}\right)^k}{1-\frac{1}{d}} - \frac{1-\left(\frac{1}{d}\right)^l}{1-\frac{1}{d}} && \text{nach Satz 2.1} \\
&= \frac{d}{d-1} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^k - \frac{d}{d-1} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^l \\
&\leq \frac{d}{d-1} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^k + \frac{d}{d-1} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^l .
\end{aligned}$$

Nachdem $\lim_{l\to\infty} \left(\frac{1}{d}\right)^l = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{d}\right)^k = 0$ gibt es nun ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{d}{d-1} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^m < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m \geq N$. Es folgt aus der obigen Abschätzung, dass für alle $k, l \geq N$ gilt, dass [29]

$$|s_k - s_l| \;\leq\; \frac{d}{d-1} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^k + \frac{d}{d-1} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^l \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

Wir haben also gezeigt, dass die Folge der Partialsummen (s_k) eine Cauchy-Folge ist, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{d^n}$ konvergiert. □

Satz 4.3. *Es sei $x \in [0,1)$ gegeben und es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$. Dann gibt es eine Folge (a_n) mit $a_n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, d-1\}$, so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{d^n} = x.$$

[29] Oben haben wir nur den Fall betrachtet, dass $k \leq l$. Warum gilt die Ungleichung nun auch für $k > l$?

Beweis. Es sei also $x \in [0,1)$ beliebig. Wir definieren eine Folge (a_n) iterativ wie folgt:

$$a_1 \quad := \quad \lfloor x \cdot d \rfloor$$

Wenn $a_1, \ldots, a_{n-1}$ schon definiert sind, dann definieren wir

$$a_n \quad := \quad \left\lfloor \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{d^i}\right) \cdot d^n \right\rfloor$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{d^n} \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{d^n} \;=\; x.$$

Es genügt[30] dabei folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| x - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{d^n} \right| \;<\; \frac{1}{d^k}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$\left| x - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{d^n} \right| = \frac{1}{d^k} \cdot \left| \left(x - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{d^n} \right) \cdot d^k \right| = \frac{1}{d^k} \cdot \underbrace{\left| \left(x - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{d^n} \right) \cdot d^k - a_k \right|}_{\text{in } [0,1)} < \frac{1}{d^k}.$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt $z - \lfloor z \rfloor \in [0,1)$. Wir haben hierbei diese Aussage auf $z = \left(x - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{d^n}\right) \cdot d^k \in \mathbb{R}$ angewendet. $\square$

Es sei $x \in [0,1)$. Nach Satz 4.3 gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$, so dass

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Wir schreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = 0{,}a_1\, a_2\, a_3\, \ldots$$

und nennen dies eine *Dezimaldarstellung von x*.

[30]Warum genügt es diese Aussage zu zeigen? Es sei s_k eine Folge mit $|s_k - x| < \frac{1}{d^k}$ für alle k. Nachdem $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{d^k} = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{d^k} < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Dann gilt aber auch, dass $|s_k - x| < \frac{1}{d^k}$ für alle $k \geq K$.

Die Dezimaldarstellung von x ist allerdings im Allgemeinen nicht eindeutig. Beispielsweise folgt aus Satz 3.13, dass

$$\begin{aligned} 0{,}0999999\ldots &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1 - \frac{1}{10} \right) \\ &= 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 - \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{1}{10} = 0{,}10000\ldots . \end{aligned}$$

Der folgende Satz gibt nun an, in welchen Fällen es eine nicht eindeutige Dezimaldarstellung gibt. Der Satz wird im 4. Übungsblatt bewiesen.

Satz 4.4. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei verschiedene Folgen, deren Folgenglieder in $\{0,1,2,\ldots,9\}$ liegen. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n},$$

genau dann, wenn es $c_1,\ldots,c_k$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} (a_1,a_2,\ldots) &= (c_1,c_2,\ldots,c_{k-1},c_k,9,9,9,\ldots), \text{ und} \\ (b_1,b_2,\ldots) &= (c_1,c_2,\ldots,c_{k-1},c_k+1,0,0,0,\ldots), \end{aligned}$$

oder die gleiche Aussage gilt, mit den Rollen von (a_n) und (b_n) vertauscht.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Korollar zu Satz 4.3.

Korollar 4.5. *Jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen.*

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Dann ist $x - a_0 \in [0,1)$. Also gibt es nach Satz 4.3 eine Folge (a_n) mit $a_n \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$, so dass

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \lim_{k\to\infty} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{10^n} \right).$$

Nachdem alle Folgenglieder $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{a_n}{10^n}$ rational sind, haben wir die Behauptung bewiesen. □

4.3. **Abzählbare und überabzählbare Mengen.**

Definition. Eine nichtleere Menge A heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive[31] Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt. Wir sagen zudem, dass die leere Menge auch abzählbar ist. Eine Menge, welche nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

Beispiel. (1) Die Menge $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn die Identitätsabbildung $N \to \mathbb{N}$ ist offensichtlich eine Surjektion.

[31]Zur Erinnerung, eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

(2) Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, in der Tat, denn die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{array}$$

ist surjektiv.

(3) Die Menge $\{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$ der Buchstaben des Alphabets ist abzählbar. Beispielsweise ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \{A, B, C, \dots, X, Y, Z\} \\ 1 & \mapsto & A \\ \vdots & & \vdots \\ 26 & \mapsto & Z \\ n & \mapsto & Z, \text{ wenn } n \geq 27 \end{array}$$

eine Surjektion.

(4) Man kann das vorherige Beispiel verallgemeinern und zeigen, dass jede endliche Menge abzählbar ist.

Satz 4.6. *Es sei A eine abzählbare Menge und B eine Untermenge. Dann ist B auch abzählbar.*

Beweis. Es sei A eine abzählbare Menge und B eine Untermenge. Wenn B endlich ist, dann haben wir oben schon gesehen, dass B abzählbar ist. Nehmen wir nun an, dass B unendlich ist. Wir wählen eine Surjektion $f\colon \mathbb{N} \to A$. Wir definieren nun iterativ

$$n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in B\},$$

und wenn $n_1, \dots, n_k$ schon definiert sind, dann definieren wir

$$n_{k+1} := \min\{n > n_k \mid f(n) \in B\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & B \\ k & \mapsto & f(n_k) \end{array}$$

eine Surjektion.[32] □

Wir wollen jetzt zeigen, dass auch die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

Satz 4.7. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

[32]Wo haben wir im Beweis verwendet, dass B unendlich ist?

Beweis. Wir betrachten folgendes quadratisches unendliches Schema:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & \to & \frac{1}{1} & \to & -\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \to & -\frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \to & -\frac{3}{1} & \dots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
 & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & -\frac{2}{2} & & & & & \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \iddots & & & & & \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & & & & & & \\
 & & \vdots & & & \iddots & & & & & & & &
\end{array}$$

Es ist klar, dass jede rationale Zahl in diesem Schema auftaucht. Wir definieren nun eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, indem wir $k \in \mathbb{N}$ das k-te Element in der obigen Aufführung von Elementen zuordnen. Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv. [33] $\square$

Der folgende Satz besagt dass, im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$, der Körper der reellen Zahlen nicht abzählbar ist.

Satz 4.8. *Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Nach Satz 4.6 genügt es zu zeigen, dass das Interval $[0, 1)$ nicht abzählbar ist. Wir müssen also zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1)$ gibt. Anders ausgedrückt, wir wollen zeigen, dass jede Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1)$ nicht surjektiv ist.

Es sei also $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1)$ eine Abbildung. Wir schreiben die Zahlen $f(1), f(2), \dots$ in Dezimaldarstellung:

$$\begin{array}{rcl}
f(1) & =: & 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots \\
f(2) & =: & 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots \\
f(3) & =: & 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \dots \\
\vdots & &
\end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass f nicht surjektiv ist. D.h. wir wollen ein $x \in [0, 1)$ finden, welches von allen $f(n)$ verschieden ist. Wir betrachten die reelle Zahl

$$x := 0, c_1\, c_2\, c_3 \dots$$

wobei

$$c_n := \begin{cases} 7, & \text{falls } a_{nn} \in \{0, \dots, 4\} \\ 3, & \text{falls } a_{nn} \in \{5, \dots, 9\}. \end{cases}$$

Wir haben die Ziffern c_n so gewählt, dass diese niemals 0 oder 9 werden. Es folgt aus Satz 4.4, dass die Dezimaldarstellung von x eindeutig ist.

---

[33] Dieser Beweis kann natürlich auch deutlich formaler durchgeführt werden, ohne auf Bilder zurückzugreifen.

Behauptung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x \neq f(n)$.

Es sei also $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Dezimaldarstellungen

$$\begin{array}{rcll} x & = & 0, c_1\, c_2,\, c_3, \dots, c_n, \dots, & \text{sowie} \\ f(n) & = & 0, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}, \dots \end{array}$$

Nachdem wir c_n so gewählt hatten, dass $c_n \neq a_{nn}$, unterscheiden sich die Dezimaldarstellungen sich in der n-ten Ziffer. Aber wir hatten oben bemerkt, dass die Dezimaldarstellung von x eindeutig ist. Es folgt also, dass in der Tat $x \neq f(n)$. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Wir haben nun also gezeigt, dass f nicht surjektiv ist. Es folgt, dass das Intervall $[0, 1)$ nicht abzählbar ist. ☐

Wir erhalten also jetzt folgendes Korollar.

Korollar 4.9. *Es gibt reelle Zahlen, welche nicht rational sind. Anders ausgedrückt, es ist*[34] $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Beweis. Nehmen wir an, dass $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Dann würde aus Satz 4.7 folgen, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist, aber dies ist ein Widerspruch zu Satz 4.8. ☐

Wir haben also jetzt gesehen, dass es reelle Zahlen gibt, welche nicht rational sind. Nachdem die Menge der reellen Zahl überabzählbar ist, während die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, folgt, dass die 'allermeisten'[35] reellen Zahlen nicht rational sind. Der Beweis von Korollar 4.9 ist allerdings etwas eigenartig, er besagt, dass es reelle Zahlen gibt, welche nicht rational sind, aber das Korollar gibt kein einziges Beispiel einer solchen Zahl. Im nächsten Kapitel werden wir dann explizite Beispiele von nicht-rationalen, reellen Zahlen geben.

Wir machen jetzt noch einen kurzen Ausflug in die Mengenlehre. Wir werden die folgenden Tatsachen im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht mehr verwenden. Für Mengen A und B schreiben wir $A \geq B$, wenn es eine surjektive Abbildung $A \to B$ gibt. Beispielsweise gilt $\{1, 2, 3\} \geq \{1, 2\}$. Zudem ist per Definition eine Menge A abzählbar, genau dann, wenn $\mathbb{N} \geq A$. Zudem gilt $\mathbb{R} \geq \mathbb{Q}$. In der Tat, denn die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Q} \\ z & \mapsto & \begin{cases} z, & \text{wenn } z \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases} \end{array}$$

[34] Zur Erinnerung, wenn A und B Mengen sind, dann schreiben wir $A \subset B$ oder auch $A \subseteq B$, wenn jedes Element von A auch ein Element in B ist. In diesem Fall sagen wir, dass A *eine Teilmenge von B ist.* Beispielsweise gilt

$$\{A, B, C\} \subset \text{Menge der Buchstaben}, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ aber auch } \mathbb{R} \subset \mathbb{R}.$$

Wir schreiben $A \subsetneq B$, wenn $A \subset B$ aber $A \neq B$, d.h. A ist eine Teilmenge von B aber nicht ganz B. Wir sagen, *A ist eine echte Teilmenge von B*. Beispielsweise ist die Menge der ganzen Zahlen eine echte Teilmenge der Mengen der rationalen Zahlen

[35] In Analysis III werden wir eine mathematisch-präzise Definition von 'allermeisten' geben.

ist surjektiv.

Für Mengen A und B schreiben wir $A > B$ wenn $A \geq B$, aber wenn nicht gilt, $B \geq A$. Beispielsweise gilt $\{1,2,3\} > \{1,2\}$. Andererseits ist es nicht wahr, dass $\mathbb{Q} > \mathbb{N}$. Wir haben gerade gesehen, dass $\mathbb{R} \geq \mathbb{N}$, und aus der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ folgt, dass $\mathbb{R} > \mathbb{N}$.

Es stellt sich jetzt folgende Frage:

Frage. Gibt es eine Menge M mit $M > \mathbb{R}$?

Es ist nicht ganz einfach, ein Beispiel für solch ein M zu finden. Beispielsweise 'wirkt' $\mathbb{R}^2$ größer als $\mathbb{R}$, aber man kann relativ leicht zeigen (wie?), dass es eine Bijektion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt. Die Antwort ist aber trotzdem 'Ja', beispielsweise gilt für die Potenzmenge

$$P(\mathbb{R}) := \text{Menge aller Teilmengen von } \mathbb{R},$$

dass $P(\mathbb{R}) > \mathbb{R}$.

Wir wissen schon, dass $\mathbb{R} > \mathbb{Q}$. Es stellt sich nun die Frage, ob es noch eine Menge 'dazwischen' gibt. Anders ausgedrückt, es stellt sich folgende Frage:

Frage. Gibt es eine Menge M mit $\mathbb{R} > M > \mathbb{Q}$?

Diese Frage stellt sich als außergewöhnlich subtil heraus. Verwendet man die üblichen Axiome der Mengenlehre

`http://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre`

dann kann man die obige Frage nicht beantworten, d.h. man kann nicht herleiten, ob die Frage mit 'Ja' oder mit 'Nein' beantwortet wird. Mehr Informationen dazu findet man unter

`http://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese`

4.4. **Monotone Folgen.** Wir haben im vorherigen Kapitel gezeigt, dass $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, aber wir haben kein einziges explizites Beispiel einer reellen Zahl gefunden, welche nicht rational ist. Wir wollen im Folgenden unter Anderem ganz explizite reelle Zahlen angeben, welche nicht rational sind. Um dies zu bewerkstelligen, müssen wir allerdings etwas ausholen und uns mehr Theorie erarbeiten.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt *monoton steigend*, falls

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{für alle } n,$$

und sie heißt *monoton fallend*, falls

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{für alle } n.$$

Wir sagen (a_n) ist *monoton*, wenn die Folge entweder monoton fallend oder monoton steigend ist.

Beispielsweise gilt

$$\begin{array}{rcll} (n^2) & = & (1,4,9,25,\ldots\ldots) & \text{ist monoton steigend} \\ (\frac{1}{n}) & = & (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots) & \text{ist monoton fallend,} \\ (4-\frac{1}{n^2}) & = & (3,3\frac{3}{4},3\frac{8}{9},\ldots) & \text{ist monoton steigend,} \\ (5) & = & (5,5,5,\ldots) & \text{ist sowohl monoton steigend als auch monoton fallend,} \\ ((-1)^n) & = & (-1,1,-1,\ldots) & \text{ist nicht monoton.} \end{array}$$

Satz 4.10. *Es sei (a_n) eine monotone Folge. Dann gilt:*

(1) *Wenn (a_n) monoton steigend und unbeschränkt ist, dann gilt*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$
(2) *Wenn (a_n) monoton fallend und unbeschränkt ist, dann gilt*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$
(3) *Wenn (a_n) beschränkt ist, dann konvergiert die Folge (a_n).*

Beweis. Es sei (a_n) eine monotone Folge. Der Fall, dass (a_n) unbeschränkt ist, ist nicht weiter schwierig und wird in Übungsblatt 5 behandelt.

Wir wenden uns also dem Fall zu, dass (a_n) eine beschränkte Folge ist. Dies bedeutet, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten nun zuerst den Fall, dass die Folge (a_n) monoton steigend ist. Wir müssen zeigen, dass die Folge (a_n) konvergiert. Nach Satz 1.19 genügt es zu zeigen, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Es sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass
$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n,m\ge N}{\forall}\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$
Wir werden dies nun mithilfe von einem Widerspruchsbeweis zeigen. Anders ausgedrückt, wir nehmen jetzt an, dass
$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{n,m\ge N}{\exists}\ |a_n - a_m| \ge \varepsilon,$$
und wir werden diese Annahme zu einem Widerspruch führen. Nachdem (a_n) monoton steigend ist, folgt aus der obigen Annahme, dass
$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{n>m\ge N}{\exists}\ a_n - a_m \ge \varepsilon.$$
Wir wenden die obige Annahme zuerst auf $N = 1$ an. Es existieren also $n_1 > m_1 \ge 1$, so dass
$$a_{n_1} - a_{m_1} \ge \varepsilon.$$
Wir wenden nun die obige Annahme auf $N = n_1$ an. Es existieren wiederum $n_2 > m_2 \ge N = n_1$, so dass
$$a_{n_2} - a_{m_2} \ge \varepsilon.$$

Wir wenden dann die obige Annahme auf $N = n_2$ an, und erhalten $n_3 > m_3 \geq N = n_2$ mit $a_{n_3} - a_{m_3} \geq \varepsilon$. Indem wir dieses Verfahren iterieren, erhalten wir eine aufsteigende Folge

$$\cdots \geq n_k \geq m_k \geq \cdots \geq n_2 \geq m_2 \geq n_1 \geq m_1 \geq 1$$

so dass jeweils

$$a_{n_k} - a_{m_k} \geq \varepsilon.$$

Wir erhalten also, dass

$$\cdots \geq \underbrace{a_{n_3} \geq \cdots \geq a_{m_3}}_{\substack{\text{Differenz} \\ \geq \varepsilon}} \cdots \geq \underbrace{a_{n_2} \geq \cdots \geq a_{m_2}}_{\substack{\text{Differenz} \\ \geq \varepsilon}} \cdots \geq \underbrace{a_{n_1} \geq \cdots \geq a_{m_1}}_{\substack{\text{Differenz} \\ \geq \varepsilon}} \geq \cdots \geq a_1$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt also, dass $a_{n_k} > a_1 + k\varepsilon$. Aus dem archimedischem Axiom folgt, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_{n_k} \geq a_1 + k\varepsilon > C$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von C. Wir haben also gezeigt, dass die monoton steigende, beschränkte Folge (a_n) konvergiert.

Wir müssen nun noch den Fall betrachten, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist. Wir können diesen Fall entweder ganz analog zum monoton steigenden Fall betrachten oder wir betrachten anstatt der monoton fallenden Folge (a_n) die monoton steigende Folge $(-a_n)$. Diese konvergiert, wie wir gerade gezeigt hatten, also konvergiert auch die ursprüngliche Folge (a_n). □

4.5. **Infimum und Supremum.** Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir führen folgende Begriffe ein:

(1) Wir sagen, $C \in \mathbb{R}$ ist eine *obere Schranke* für M, wenn $x \leq C$ für alle $x \in M$. Wenn M eine obere Schranke besitzt, dann nennen wir M *nach oben beschränkt*.
(2) Wenn es ein $m \in M$ gibt, so dass $x \leq m$ für alle $x \in M$, dann bezeichnen wir

$$\max(M) := m$$

als *das Maximum von M*. Das Maximum einer Menge ist immer auch eine obere Schranke. Insbesondere ist jede Menge mit einem Maximum auch nach oben beschränkt.

Wir betrachten ein paar Beispiele:

(1) Es sei $M = [2, 4]$. Dann ist 4 eine obere Schranke, aber auch jede andere Zahl größer als 4 ist eine obere Schranke. Das Maximum vom Intervall $[2, 4]$ ist 4.
(2) Das Intervall $[3, \infty)$ ist nicht nach oben beschränkt, und besitzt daher auch kein Maximum.
(3) Es sei $M = [2, 3)$. Dann ist beispielsweise 3 eine obere Schranke, d.h. die Menge ist nach oben beschränkt. Andererseits besitzt $M = [2, 3)$ *kein* Maximum. In der Tat, denn es gibt kein $x \in [2, 3)$, welches die Eigenschaft besitzt, dass für alle $y \in [2, 3)$ gilt $y \leq x$.

Wir umgehen jetzt das Problem, dass das Maximum einer nach oben beschränkten Menge nicht notwendigerweise definiert ist, indem wir das Supremum einführen.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir sagen $s \in \mathbb{R}$ ist *Supremum* $\sup(M)$ von M, wenn gilt:

(1) s ist eine obere Schranke für M, d.h. $x \leq s$ für alle $x \in M$,
(2) s ist die kleinste obere Schranke für M. D.h. für alle $y < s$ gibt es ein $x \in M$ mit $y < x$.

Der folgende Satz besagt nun, dass jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge ein eindeutig bestimmtes Supremum besitzt.

Satz 4.11. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge. Dann besitzt M ein Supremum und das Supremum $\sup(M)$ ist eindeutig bestimmt.*

Beispiel.

(1) Wir betrachten $M = (-\infty, 3)$. Dann ist $x = 3$ eine obere Schranke für $(-\infty, 3)$. Zudem gibt es keine kleinere obere Schranke für $(-\infty, 3)$. In der Tat: wenn $y < 3$, dann gibt es immer eine Zahl zwischen y und 3, also kann y keine obere Schranke für M sein.
(2) Ganz analog zeigt man, dass für alle abgeschlossenen, halboffenen oder offenen Intervalle, dass Supremum durch 'die Zahl rechts' gegeben. Beispielsweise gilt für $a \leq b \in \mathbb{R}$, dass
$$\sup((-\infty, b)) = \sup([a, b]) = \sup((a, b]) = \sup([a, b)) = b.$$

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge. Wir zeigen zuerst, dass ein Supremum existiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $p_n \in \mathbb{Z}$ die kleinste ganze Zahl, mit der Eigenschaft, dass $\frac{p_n}{2^n}$ eine obere Schranke für M ist. [36] [37]

Behauptung. Die Folge $\left(\frac{p_n}{2^n}\right)$ ist monoton fallend und beschränkt.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\frac{2p_n}{2^{n+1}} = \frac{p_n}{2^n}$ eine obere Schranke für M. Per Definition von p_{n+1} folgt dann, dass $p_{n+1} \leq 2p_n$. Also folgt, dass $\frac{p_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \frac{2p_n}{2^{n+1}} = \frac{p_n}{2^n}$. Die Folge $\left(\frac{p_n}{2^n}\right)$ ist also in der Tat monoton fallend. Es folgt sofort aus den Definition, dass jedes $m \in M$ eine untere Schranke für die Folge $\left(\frac{p_n}{2^n}\right)$ ist. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Es folgt nun aus Satz 4.10, dass die Folge $\left(\frac{p_n}{2^n}\right)$ konvergiert. Wir setzen
$$s := \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{2^n}.$$

[36] Es kann hilfreich sein, den Beweis mit einer expliziten Menge M, wie beispielsweise dem Intervall $M := (1, 3\frac{1}{4})$ durchzuarbeiten. In diesem Fall gilt
$$\begin{array}{lllll} p_1 = 7, & \text{d.h.} & \frac{p_1}{2^1} = \frac{7}{2}, & \text{denn } \frac{p_1-1}{2} = \frac{6}{2} \text{ ist keine obere Schranke für } M = (1, 3\frac{1}{4}) \\ p_2 = 13, & \text{d.h.} & \frac{p_2}{2^2} = \frac{13}{4} & \\ p_3 = 26, & \text{d.h.} & \frac{p_3}{2^3} = \frac{26}{8} & \end{array}$$

[37] Hierbei haben wir schon implizit verwendet, dass M nichtleer ist. Denn wäre M die leere Menge, dann wäre jede Zahl eine obere Schranke, also gäbe es kein kleinstes $p_n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{p_n}{2^n}$ eine obere Schranke ist.

Wir behaupten, dass s die gewünschten Eigenschaft (1) und (2) vom Supremum besitzt.

(1) Es sei $x \in M$. Nachdem für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x \le \frac{p_n}{2^n}$, folgt aus Satz 3.4, dass
$$x \le \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{2^n} = s.$$
Insbesondere ist s eine obere Schranke für M.

(2) Wir müssen noch zeigen, dass s die kleinste obere Schranke ist. Es sei also $y < s$. Wir müssen zeigen, dass y keine obere Schranke für M sein kann. Nachdem $s - y > 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass [38] $\frac{1}{2^n} \le s - y$, d.h.
$$y \;\le\; s - \frac{1}{2^n} \;\le\; \frac{p_n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \;=\; \frac{p_n - 1}{2^n}.$$
Aber dann folgt, dass $\frac{p_n-1}{2^n}$ auch eine obere Schranke für M ist, im Widerspruch zur Konstruktion von p_n.

Wir haben also gezeigt, dass s die Eigenschaften vom Supremum erfüllt, d.h. M besitzt ein Supremum.

Wir müssen nun noch zeigen, dass das Supremum eindeutig bestimmt ist. Es seien x und x' reelle Zahlen, welche beide die Eigenschaften (1) und (2) erfüllen. Wir müssen zeigen, dass $x = x'$. Wir zeigen dies durch einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, dass $x \ne x'$. O.B.d.A. sei $x < x'$. Dann ist x nach Eigenschaft (1) eine obere Schranke für M, aber kleiner als x', was nach Eigenschaft (2) von x' nicht sein darf. Wir haben also einen Widerspruch zur Annahme $x \ne x'$ gefunden. □

Der folgende Satz gibt uns eine hilfreiche Charakterisierung vom Supremum einer nichtleeren, nach oben beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$. Der Satz erlaubt es uns zudem oft Aussagen über Suprema auf Aussagen über Grenzwerte zurückzuführen.

Satz 4.12. *Es sei M eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) *Es existiert eine Folge (a_n) von Elementen in M, welche gegen $\sup(M)$ konvergiert.*
(2) *Wenn es eine Folge (a_n) von Elementen in M gibt, welche konvergiert, und so dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ eine obere Schranke für M ist, dann ist $\sup(M) = \lim_{n\to\infty} a_n$.*

Beweis. Es sei M eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir schreiben $s := \sup(M)$.

(1) Wir definieren nun zuerst geschickt eine Folge (a_n). Es sei also $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für M, also gibt es ein $a_n \in M$ mit $s - \frac{1}{n} < a_n$. Andererseits ist s eine obere Schranke für M, also gilt $a_n \le s$.
Zusammengefasst haben wir also eine Folge (a_n) gefunden, so dass alle Folgenglieder in M liegen, und so dass $s - \frac{1}{n} < a_n \le s$. Es folgt insbesondere, dass die Folge (a_n) gegen $s = \sup(M)$ konvergiert.[39]

[38] Hierbei haben wir implizit verwendet, dass wir schon wissen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.
[39] Warum folgt aus $s - \frac{1}{n} < a_n \le s$ für alle n, dass die Folge (a_n) gegen s konvergiert?

(2) Es sei (a_n) eine Folge von Elementen in M gibt, welche konvergiert, und so dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ eine obere Schranke für M ist. Wir müssen zeigen, dass $a = \sup(M)$. Nachdem a eine obere Schranke für M ist, genügt es zu zeigen, dass es keine kleinere obere Schranke für M geben kann.

Es sei also $y < a$. Wir müssen zeigen, dass y keine obere Schranke für M ist. Anders ausgedrückt, wir müssen zeigen, dass es ein Element in M gibt, welches größer als y ist. Nachdem $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es insbesondere ein n, so dass $|a_n - a| < a - y$. Dann gilt aber, dass $a_n - a \geq -|a_n - a| > y - a$, d.h. $a_n > y$. Wir haben also ein Element in M gefunden, nämlich a_n, welches größer als y ist.

□

Beispiel. Wir betrachten

$$M := \mathbb{Q} \cap (-1, 1) = \{\text{alle rationalen Zahlen im Intervall } (0, 1)\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\sup(M) = 1$. Dies kann man mithilfe der Definition zeigen, oder, falls diese doch zu verwirrend ist, mithilfe von Satz 4.12. In diesem Fall wählen wir $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Dies ist eine Folge von Zahlen in M, und der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = 1$ ist offensichtlich eine obere Schranke für M. Also gilt nach Satz 4.12, dass $\sup(M) = 1$.

Korollar 4.13. *Wenn eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, dann gilt, dass $\max(M) = \sup(M)$.*

Beweis. Wir schreiben $m = \max(M)$. Das Korollar folgt dann sofort aus Satz 4.12 angewandt auf die konstante Folge $a_n := m, n \in \mathbb{N}$. □

Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ definieren wir im Folgenden nun ganz analog *Minimum*, *untere Schranke*, *nach unten beschränkt* und das *Infimum* $\inf(M)$. Genauer gesagt sagen wir:

(a) Wenn es ein $m \in M$ gibt, so dass $m \leq x$ für alle $x \in M$, dann bezeichnen wir

$$\min(M) := m$$

als *das Minimum von M*.

(b) Wir sagen, $C \in \mathbb{R}$ ist eine *untere Schranke* für M, wenn $C \leq x$ für alle $x \in M$. Wenn M eine untere Schranke besitzt, dann nennen wir M *nach unten beschränkt.*

(c) Wir sagen $i \in \mathbb{R}$ ist *Infimum* $\inf(M)$ von M, wenn gilt:
   (1) i ist eine untere Schranke für M, d.h. $i < x$ für alle $x \in M$,
   (2) i ist die größte untere Schranke für M. D.h. für alle $i < y$ gibt es ein $x \in M$ mit $x < y$.

Es gelten dann auch die offensichtlichen Varianten von Satz 4.11, Satz 4.12 und Korollar 4.13. Der Beweis ist jeweils fast wort-wörtlich der gleiche wie bei den beiden vorhergehenden Sätzen.

Satz 4.14. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge. Dann ist das Infimum $\inf(M)$ definiert und eindeutig bestimmt.*

Satz 4.15. *Es sei M eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) *Es existiert eine Folge* (a_n) *von Elementen in* M*, welche gegen* $\inf(M)$ *konvergiert.*
(2) *Wenn es eine Folge* (a_n) *von Elementen in* M *gibt, welche konvergiert, und so dass* $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ *eine untere Schranke für* M *ist, dann ist* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(M)$*.*

Korollar 4.16. *Wenn eine Menge* $M \subset \mathbb{R}$ *ein Minimum besitzt, dann gilt* $\min(M) = \inf(M)$*.*

Beispiel. Wir betrachten

$$M := \mathbb{Q} \cap (2,4) = \{x \in (2,4) \,|\, x \in \mathbb{Q}\}.$$

Dann ist $\inf(M) = 2$. Dies folgt leicht aus den Definitionen, oder es folgt auch aus Satz 4.15. In der Tat, betrachten wir die Folge $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, dann liegen alle Folgenglieder in M, und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n}) = 2$ ist eine untere Schranke für M. Also gilt nach Satz 4.15, dass $\inf(M) = 2$.

Wir werden jetzt die Existenz von Suprema verwenden, um die n-te Wurzel von nicht-negativen Zahlen einzuführen.

Satz 4.17. *Es sei* $x \geq 0$*. Dann existiert genau ein* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a \geq 0$*, so dass* $a^2 = x$*.*

Beweis. Wenn $x = 0$, dann setzen wir $a = 0$. Wir können also im Folgenden annehmen, dass $x > 0$. Wir setzen

$$M := \{y \in \mathbb{R} \,|\, y^2 \leq x\}.$$

Wir wollen zeigen, dass das Supremum $\sup(M)$ von M die gewünschte Eigenschaft besitzt, d.h. wir wollen zeigen, dass $\sup(M)^2 = x$. Dazu müssen wir aber erst einmal zeigen, dass das Supremum von M definiert ist:

Behauptung. Die Menge M enthält ein positives Element und ist nach oben beschränkt.

Wir unterscheiden die beiden Fälle $x \leq 1$ und $1 < x$.

(1) Wenn $x \leq 1$, dann ist $x^2 \leq x$, d.h. x liegt in M. Zudem ist 1 eine obere Schranke. In der Tat, denn für $y > 1$ gilt $y^2 > 1 \geq x$, d.h. y kann nicht in M liegen.
(2) Wenn $1 < x$, dann ist auch $1^2 = 1 < x$, d.h. 1 liegt in M. Zudem ist x eine obere Schranke, denn aus $y > x$ folgt auch, dass $y^2 > x^2 > x$, d.h. y kann nicht in M liegen.

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Nach Satz 4.11 existiert also das Supremum vom M. Wir setzen nun

$$a := \sup(M).$$

Für später machen wir schon mal die Beobachtung, dass $a > 0$, nachdem M eine positive Zahl enthält.

Wir wollen nun zeigen, dass $a^2 = x$. Wir fangen mit der folgenden Behauptung an.

Behauptung. Es ist $a^2 \leq x$.

Nach Satz 4.12 (1) gibt es eine Folge (a_n) von Zahlen in M mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $a_n^2 \leq x$. Aber dann folgt aus Satz 3.4, dass auch $\lim_{n\to\infty} a_n^2 \leq x$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.3, welcher besagt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = (\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = a^2$. Wir haben also damit die Behauptung bewiesen.

Wir wissen also, dass entweder $a^2 < x$ oder $a^2 = x$. Nehmen wir nun an, dass $a^2 < x$. Wir wollen dies zu einem Widerspruch führen, indem wir zeigen, dass dann a keine obere Schranke für M sein kann. Anders ausgedrückt, wir wollen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $a + \delta \in M$. Wiederum anders ausgedrückt, wir wollen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ mit $(a + \delta)^2 \leq x$ gibt.

> [40] Um solch ein δ zu finden, machen wir folgende Nebenrechnung:
>
> $$(a + \delta)^2 = a^2 + 2a\delta + \delta^2 = a^2 + \delta(2a + \delta).$$
>
> Wir wollen nun also ein $\delta > 0$ finden, so dass $\delta(2a + \delta) \leq x - a^2$. Wählen wir ein δ, so dass $\delta \leq a$, dann gilt schon mal $2a + \delta \leq 3a$, d.h. dieser Faktor wird nicht zu groß. Insbesondere genügt es nun ein δ zu finden, so dass $\delta(2a + \delta) \leq \delta \cdot 3a \leq x - a^2$. Aber dies ist beispielsweise gegeben durch ein beliebiges δ mit $\delta \leq \frac{x-a^2}{3a}$. Zusammengefasst wollen wir also ein $\delta > 0$ mit $\delta \leq a$ und $\delta \leq \frac{x-a^2}{3a}$. Wir wählen daher $\delta = \min\{a, \frac{x-a^2}{3a}\}$.

Wir setzen nun $\delta = \min\{a, \frac{x-a^2}{3a}\}$. Aus $a > 0$ und $x - a^2 > 0$ folgt, dass $\delta > 0$. Zudem gilt

$$\begin{aligned}(a + \delta)^2 = a^2 + 2a\delta + \delta^2 = a^2 + (2a + \delta)\delta &\leq a^2 + 3a\delta && \text{weil } \delta \leq a \\ &\leq a^2 + (x - a^2) && \text{weil } \delta \leq \tfrac{x-a^2}{3a} \\ &= x.\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass die Annahme $a^2 < x$ zu einem Widerspruch führt.

Wir müssen nun noch die Eindeutigkeit von a zeigen. Es seien also $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $a, a' \geq 0$ und $a^2 = (a')^2 = x$. Nehmen wir an, dass $a \neq a'$. O.B.d.A. können wir dann annehmen, dass $a > a'$. Dann gilt aber $x = a^2 > (a')^2 = x$ und dies ist ein Widerspruch. □

Wir können den Satz auch verallgemeinern.

Satz 4.18. *Es sei $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$, so dass $a^n = x$.*

Der Beweis von Satz 4.18 ist ganz analog zum Beweis von Satz 4.17, man muss 'nur' das δ im Beweis geschickter wählen. Für $n = 3$ ist der Beweis von Satz 4.18 eine Übungsaufgabe im 5. Übungsblatt.

Es sei $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 4.18 gibt es genau genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$, so dass $a^n = x$. Wir bezeichnen a als die *n-te Wurzel von x* und bezeichnen es mit $\sqrt[n]{x}$. Wie üblich schreiben wir $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$.

[40] Zur Erinnerung, der eingerückte blaue Text ist nicht Teil des Beweises, er dient nur dazu den Beweis zu motivieren.

In Korollar 4.9 hatten wir gezeigt, dass es reelle Zahlen gibt, welche nicht rational sind. Der Beweis war allerdings sehr indirekt, insbesondere hatten wir kein explizites Beispiel einer reellen Zahl angegeben, welche nicht rational ist. Wir holen dies mit folgendem Satz nach.

Satz 4.19. *Die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational.*

Beweis. Nehmen wir an, $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann könnten wir schreiben $\sqrt{2} = a/b$ wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind. Durch quadrieren erhalten wir, dass $2b^2 = a^2$. Wir sehen, dass 2 die linke Seite teilt, also muss 2 auch die rechte Seite teilen, also ist a gerade, d.h. $a = 2\tilde{a}$ für ein $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$. Es folgt also, dass $2b^2 = 4\tilde{a}^2$. Durch Kürzen sehen wir, dass $b^2 = 2\tilde{a}^2$. Die rechte Seite ist also gerade, also muss auch die linke Seite gerade sein, d.h. b muss gerade sein.

Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass a und b gerade sind. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass a und b teilerfremd sind. □

4.6. **Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß.** Es sei (a_n) eine Folge und es seien $n_1, n_2, \dots$ natürliche Zahlen, so dass

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

dann ist

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

auch eine Folge, welche wir als *Teilfolge* von (a_n) bezeichnen. Man beachte, dass wenn (a_n) gegen a konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge gegen a. [41]

Satz 4.20. (*Satz von Bolzano-Weierstraß*) *Jede beschränkte Folge besitzt eine Teilfolge, welche konvergiert.*

Betrachten wir beispielsweise die Folge

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \leq 10, \\ 1 + \frac{1}{n}, & \text{wenn } n > 10 \text{ Primzahl}, \\ 4 - \frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n > 10 \text{ keine Primzahl}. \end{cases}$$

Dann betrachten wir die Teilfolge, welche den geradzahligen Folgenglieder entspricht. D.h. wir betrachten die Teilfolge

$$(a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}, a_{16}, \dots) \quad = \quad (0, 0, 0, 0, 0, 4 - \frac{1}{12^2}, 4 - \frac{1}{14^2}, 4 - \frac{1}{16^2}, \dots).$$

Diese konvergiert offensichtlich gegen 4. Wir können aber auch die Teilfolge betrachten, welche durch die ‘Primzahl-Folgenglieder’ gegeben ist. D.h. wir betrachten die Teilfolge

$$(a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}, a_{17}, \dots) \quad = \quad (0, 0, 0, 0, 1\frac{1}{11}, 1\frac{1}{13}, 1\frac{1}{17}, 1\frac{1}{19}, \dots)$$

[41] In der Tat, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann gilt auch $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Denn sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für jedes k gilt aber $n_k \geq k$. Es folgt also, dass für alle $k \geq N$ gilt, dass $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Diese konvergiert offensichtlich gegen 1.

Beweis. Es sei (a_n) eine beschränkte Folge. Es existieren also $x_1 \leq y_1 \in \mathbb{R}$, so dass $a_n \in [x_1, y_1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung. Es gibt eine Folge von Intervallen $[x_k, y_k]$, $k \geq 2$, so dass für alle k gilt:

(1) $[x_k, y_k]$ ist ein Teilintervall von $[x_{k-1}, y_{k-1}]$ von halber Länge, und
(2) $[x_k, y_k]$ enthält unendlich viele Folgenglieder.

Wir betrachten zuerst den Fall $k = 2$. Es sei $z := \frac{x_1+y_1}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls $[x_1, y_1]$. Nachdem $[x_1, y_1] = [x_1, z] \cup [z, y_1]$ und nachdem $[x_1, y_1]$ unendlich viele Folgenglieder enthält, enthält $[x_1, z]$ unendlich viele Folgenglieder, oder $[z, y_1]$ enthält unendlich viele Folgenglieder. [42] Wir setzen nun

$$[x_2, y_2] := \begin{cases} [x_1, z], & \text{falls } [x_1, z] \text{ unendlich viele Folgenglieder enthält,} \\ [z, y_1], & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Wir erhalten jetzt $[x_3, y_3]$ dadurch, dass wir wiederum $[x_2, y_2]$ in zwei Hälften aufschneiden, und dann die erste Hälfte wählen, wenn diese unendlich viele Folgenglieder besitzt. Ansonsten nehmen wir die zweite Hälfte. Indem wir dieses Verfahren iterieren, erhalten wir die gewünschte Folge von Intervallen. Wir haben damit die Behauptung bewiesen. [43]

Wir setzen $d := y_1 - x_1$, d.h. d ist die Länge vom ersten Intervall $[x_1, y_1]$. Nachdem wir die Länge des Intervalls bei jedem Schritt halbiert haben, folgt, dass die Länge des Intervalls $[x_k, y_k]$ gegeben ist durch $\frac{1}{2^{k-1}}d$. Die Länge der Intervalle konvergiert also insbesondere gegen 0. Wir werden jetzt eine Teilfolge (a_{n_k}) konstruieren, so dass jedes Folgenglied (a_{n_k}) im Intervall $[x_k, y_k]$ liegt.

---

[42] Es können auch beide Intervalle unendlich viele Folgenglieder enthalten.

[43] Es ist hilfreich, den Beweis mit einem explizitem Beispiel durchzuarbeiten. Betrachten wir also wiederum die Folge

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \leq 10, \\ 1 + \frac{1}{n}, & \text{wenn } n > 10 \text{ Primzahl,} \\ 4 - \frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n > 10 \text{ keine Primzahl.} \end{cases}$$

In unserem Beweis können wir $x_0 = 0$ und $y_0 = 4$ wählen. Der 'Algorithmus' im Beweis der Behauptung liefert dann insbesondere folgende Intervalle:

$$\begin{aligned} [x_1, y_1] &= [0, 4] \\ [x_2, y_2] &= [0, 2] \\ [x_3, y_3] &= [1, 2] \\ [x_4, y_4] &= [1, 1\tfrac{1}{2}] \\ [x_5, y_5] &= [1, 1\tfrac{1}{4}] \end{aligned}$$

Wir definieren diese Teilfolge von (a_n) wie folgt: Wir setzen $n_1 = 1$. Iterativ definieren wir jetzt [44] [45]

$$\begin{array}{rcl} n_2 & := & \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_1 \text{ und } a_n \in [x_2, y_2]\} \\ n_3 & := & \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_2 \text{ und } a_n \in [x_3, y_3]\} \\ \vdots & & \\ n_k & := & \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_{k-1} \text{ und } a_n \in [x_k, y_k]\} \\ \vdots & & \end{array}$$

Behauptung. Die Teilfolge (a_{n_k}) konvergiert.

Es genügt zu zeigen, dass die Teilfolge (a_{n_k}) eine Cauchyfolge ist. Es sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}}d = 0$ existiert insbesondere ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{2^{K-1}}d < \varepsilon.$$

Es seien $k, l \geq K$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} |a_{n_k} - a_{n_l}| & \leq & \text{Länge von } [x_K, y_K] & \text{weil } a_{n_k}, a_{n_l} \in [x_K, y_K] \\ & = & \frac{1}{2^{K-1}}d & \text{nach Konstruktion von } [x_K, y_K] \\ & < & \varepsilon. & \end{array}$$

□

[44] Der Satz 'es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, wir definieren $n := \min(M)$' ist a priori etwas gefährlich, weil diese Definition nur Sinn macht, wenn M nicht die leere Menge ist. Wenn wir also schreiben, 'es sei $n := \min(M)$', dann müssen wir immer überprüfen, dass die Menge nichtleer ist. In unserem Fall ist dies in der Tat der Fall, die Mengen $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_{k-1} \text{ und } a_n \in [x_k, y_k]\}$ sind nichtleer ist, weil nach Konstruktion jedes Intervall $[x_k, y_k]$ unendlich viele Folgenglieder enthält.

[45] Im obigen Beispiel gilt dann

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 11, \quad n_4 = 13, \ldots.$$

5. Konvergenz von Reihen

5.1. **Konvergenzkriterien für Reihen.** Wir wenden uns jetzt wieder den Reihen zu. Wir hatten schon einige Eigenschaften von Reihen bewiesen, welche man leicht aus der Definition von Reihen und den Konvergenzeigenschaften von Folgen herleiten konnte. Zudem hatten wir in Satz 3.13 gezeigt, dass für $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Diese Reihe wird oft auch als die *geometrische Reihe* bezeichnet.

In diesem Kapitel werden wir die Konvergenzeigenschaften von Reihen deutlich ausführlicher als bisher studieren.

Satz 5.1. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe, dann ist (a_n) eine Nullfolge.*

Beweis. Es sei also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Dies bedeutet, dass die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

konvergiert, insbesondere, dass die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein N, so dass

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$. Insbesondere folgt für alle $n \geq N+1$, dass

$$|a_n| \;=\; |s_n - s_{n-1}| \;<\; \varepsilon.$$

Wir haben damit also gezeigt, dass (a_n) eine Nullfolge ist. □

Beispiel. Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 1$. Dann folgt aus Satz 5.1, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ divergiert.

Satz 5.2. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe gegeben, so dass $a_n \geq 0$ für alle n.*

(1) *Wenn die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist, dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.*
(2) *Wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Beweis. Nachdem $a_n \geq 0$, folgt, dass die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

monoton wachsend ist. Der Satz folgt nun sofort aus Satz 4.10. □

Wir nennen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ die *harmonische Reihe*. Der folgende Satz zeigt unter Anderem, dass die Umkehrung von Satz 5.1 nicht gilt.

Korollar 5.3. *Die harmonische Reihe divergiert bestimmt gegen $+\infty$, d.h.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Beweis. Wir betrachten die n-te Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Nachdem alle Reihenglieder von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}$ positiv sind, genügt es nach Satz 5.2 zu zeigen, dass die Folge (s_n) nicht beschränkt ist. Wir betrachten im Folgenden die Partialsummen, welche zur Zweierpotenz $n = 2^l$ gehören. Es gilt dabei, dass

$$\begin{aligned} s_n = s_{2^l} = 1 + {} & \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{2^{l-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^l} \\ \geq 1 + {} & \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}}_{=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}}_{=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\tfrac{1}{2^l} + \cdots + \tfrac{1}{2^l}}_{=2^{l-1}\cdot\frac{1}{2^l}=\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ein genauer Blick zeigt, dass wir hier l Summanden haben, welche $\frac{1}{2}$ betragen. Man sieht nun also, dass für jedes l gilt

$$s_{2^l} \geq 1 + \frac{l}{2}.$$

Wir sehen also, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist. □

Der folgende Satz besagt nun, dass im Gegensatz zur harmonische Reihe, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}$ konvergiert, sofern $d \geq 2$.

Satz 5.4. *Für jedes $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}$.*

Beweis. Nachdem alle Reihenglieder von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}$ positiv sind, genügt es nach Satz 5.2 zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^d}$$

beschränkt ist.

Wir werden jetzt im Folgenden die Partialsummen geschickt nach oben abschätzen. Es sei also $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen ein m, so dass $2^{m+1} - 1 \geq n$. Dann gilt [46]

$$
\begin{aligned}
s_n &\leq s_{2^{m+1}-1} \\
&= \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^d} \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1}{2^d} + \frac{1}{3^d}}_{\leq \frac{1}{2^d}+\frac{1}{2^d}=\frac{2}{2^d}} + \underbrace{\frac{1}{4^d} + \frac{1}{5^d} + \frac{1}{6^d} + \frac{1}{7^d}}_{\leq \frac{1}{4^d}+\frac{1}{4^d}+\frac{1}{4^d}+\frac{1}{4^d}=\frac{4}{4^d}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{(2^m)^d} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^d}}_{\leq \underbrace{\frac{1}{(2^m)^d} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^d}}_{2^m-\text{mal}} = \frac{2^m}{(2^m)^d}} \\
&\leq 1 + \frac{2}{2^d} + \frac{(2^2)}{(2^2)^d} + \cdots + \frac{2^m}{(2^m)^d} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{2^i}{(2^i)^d} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \left(2^{-d+1}\right)^i \\
&= \frac{1-(2^{-d+1})^{m+1}}{1-2^{-d+1}} \qquad \text{nach Satz 2.1, hierbei verwenden wir, dass } 1-2^{-d+1} \neq 0, \text{ da } d > 1 \\
&\leq \frac{1}{1-2^{-d+1}}.
\end{aligned}
$$

Wir haben also gezeigt, dass die Folge der Partialsummen nach oben durch $\frac{1}{1-2^{-d+1}}$ beschränkt ist. Die Folge der Partialsummen konvergiert also. $\square$

Der Satz besagt also insbesondere, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, aber der Satz sagt nichts über den Grenzwert der Reihe aus. Wir werden später sehen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aber um dies zu beweisen, werden wir erst mal π mathematisch präzise einführen müssen. Dies geschieht in einem späteren Kapitel.

[46] Das Argument ähnelt auf dem ersten Blick dem Beweis von Korollar 5.3, aber in diesem Fall schätzen wir nach oben ab, während wir im Beweis von Korollar 5.3 nach unten abgeschätzt hatten.

Satz 5.5. (*Leibniz'sches Konvergenz-Kriterium*) *Es sei* (a_n) *eine monoton fallende Folge, so dass* $a_n \geq 0$ *für alle* n*, und so dass* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. [47] *Dann konvergiert die alternierende*[48] *Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Es folgt beispielsweise aus dem Satz, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

konvergiert.

Beweis. Wir werden zeigen, dass die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

eine Cauchyfolge ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen nun zeigen, dass es ein N gibt, so dass

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.

Nachdem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ existiert ein N, so dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wir wollen nun zeigen, dass dieses N die gewünschte Eigenschaft hat.

Es seien also $n, m \geq N$ gegeben. Durch eventuelles Vertauschen von n und m können wir O.B.d.A., dass $n \geq m$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass n ungerade und m ungerade ist. Wir müssen nun also die Differenzen der Partialsummen $s_n - s_m$ 'in den Griff kriegen'. Es gilt

$$s_n - s_m = \sum_{i=m+1}^{n} (-1)^i a_i = \underbrace{a_{m+1} - a_{m+2}}_{\geq 0,\text{ weil monoton fallend}} + \ldots + \underbrace{a_{n-1} - a_n}_{\geq 0,\text{ weil monoton fallend}} \geq 0.$$

---

[47] Wenn (a_n) eine monoton fallende Folge ist mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann folgt (wie? warum?), dass $a_n \geq 0$ für alle n. Wir hätten also im Satz gar nicht fordern müssen, dass die $a_n \geq 0$ sind. Aber es ist vielleicht leichter, sich zu merken, dass die a_n's nicht-negativ sind.

[48] Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ heißt alternierend, weil die Reihenglieder mit alternierendem Vorzeichen auftauchen. Beispielsweise ist die 8-te Partialsumme gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{8} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8,$$

wobei die a_n's nach Voraussetzung jeweils nicht-negativ sind.

Andererseits gilt

$$\begin{array}{rcl} s_n - s_m & = & \sum\limits_{i=m+1}^{n} (-1)^i a_i \\ & = & a_{m+1} \quad \underbrace{-a_{m+2} + a_{m+3}}_{\leq 0,\text{ weil monoton fallend}} \quad \dots \quad \underbrace{-a_{n-2} + a_{n-1}}_{\leq 0,\text{ weil monoton fallend}} \quad - a_n \\ & \leq & a_{m+1} - a_n \\ & \leq & a_{m+1} \qquad\qquad \text{weil } a_n \geq 0 \\ & < & \varepsilon. \end{array}$$

Es folgt also, dass $s_n - s_m \in [0, \varepsilon)$, insbesondere erhalten wir, dass $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

Wir haben nun also gezeigt, dass wenn sowohl n ungerade als auch m ungerade ist, dann gilt $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Die anderen Fälle können ganz ähnlich bewiesen werden. Den Fall, dass n gerade ist und m ungerade ist, werden wir insbesondere in Übungsblatt 6 behandeln. □

Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Beispielsweise konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ wegen dem Leibniz-Kriterium, aber die Reihe konvergiert nicht absolut, weil wir in Korollar 5.3 gesehen hatten, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Satz 5.6. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Der Satz besagt also, dass wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe ist, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Betrachten wir beispielsweise die Folge

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n \text{ Primzahl,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n \text{ keine Primzahl.} \end{cases}$$

Dann folgt aus Satz 5.4 und aus Satz 5.6, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Beweis. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ und } t_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Wir müssen zeigen, dass (s_n) eine Cauchyfolge ist. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Nachdem $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, bilden die (t_n) eine Cauchyfolge. Es existiert also ein N, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt:

$$|t_n - t_m| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber auch für alle $n \geq m \geq N$, dass

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = |t_m - t_n| < \varepsilon.$$

□

Satz 5.7. (*Majoranten-Kriterium*) *Es sei (c_n) eine Folge von nicht-negativen Zahlen und es sei (a_n) eine Folge, so dass $|a_n| \leq c_n$ für alle n. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

Beispielsweise konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2},$$

nachdem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, und nachdem $\frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n^2}$ für alle n.

Wir geben jetzt den Beweis von Satz 5.7. Der Beweis ist dabei fast wort-wörtlich der gleiche wie der Beweis von Satz 5.6.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| \text{ und } t_n := \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Wir müssen zeigen, dass (s_n) eine Cauchyfolge ist. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Nachdem $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, bilden die (t_n) eine Cauchyfolge. Es existiert also ein N, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt:

$$|t_n - t_m| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber auch für alle $n \geq m \geq N$, dass

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k = |t_m - t_n| < \varepsilon.$$

□

Satz 5.8. (*Quotienten-Kriterium*) *Es sei (a_n) eine Folge von Zahlen $a_n \neq 0$. Wenn es ein $\theta \in (0,1)$ gibt, so dass für alle n gilt:*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Betrachten wir beispielsweise die Folge $a_n = \frac{n+1}{5^n}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \frac{(n+2)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot(n+1)} \;=\; \frac{n+2}{5(n+1)} \;\le\; \frac{1}{2}.$$

Es folgt aus aus Satz 5.8, angewandt auf die Folge a_n und $\theta = \frac{1}{2}$, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{5^n}$$

konvergiert.

Beweis. Die Voraussetzung besagt also, dass $|a_{n+1}| \le \theta|a_n|$ für alle n. Es folgt, dass für beliebiges n gilt:

$$|a_n| \;\le\; \theta|a_{n-1}| \;\le\; \theta^2|a_{n-2}| \;\le\; \ldots \;\le\; \theta^n|a_0|.$$

Nachdem $\theta \in (0,1)$ folgt aus Satz 3.13, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_0|\theta^n \;=\; |a_0| \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \;=\; \frac{|a_0|}{1-\theta},$$

insbesondere konvergiert die Reihe. Es folgt nun aus dem Majoranten-Kriterium, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. □

Es sei $N \in \mathbb{Z}$ und $(a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots)$ eine Folge von reellen Zahlen. Wir definieren $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ als die Folge der Partialsummen $\sum_{n=N}^{N+k} a_n$. Wenn diese Folge konvergiert oder bestimmt divergiert, dann schreiben wir

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{n=N}^{N+k} a_n.$$

Für $N = 0$ oder $N = 1$ ist dies die übliche Definition.

Bemerkung 5.9. *Die bisherigen Sätze über die Konvergenz und bestimmte Divergenz von Reihen gelten auch mit den offensichtlichen Abänderungen für Reihen, welche mit N beginnen.*

Lemma 5.10. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen und es sei $N \in \mathbb{N}_0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergiert.*

Beweis. Für $n \ge N$ bezeichnen wir mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ beziehungsweise mit } t_n := \sum_{k=N}^{n} a_k$$

die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ beziehungsweise von $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$. Dann gilt für alle $n > m \ge N$, dass

$$s_n - s_m \;=\; \sum_{k=m+1}^{n} a_k \;=\; t_n - t_m.$$

Wir sehen also, dass die Partialsummen (s_n) eine Cauchy-Folge bilden, genau dann, wenn die Partialsummen (t_n) eine Cauchy-Folge bilden. Insbesondere konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergiert. $\square$

Korollar 5.11. *Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen, welche sich nur in endlich vielen Reihengliedern unterscheiden. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.*

Beispielsweise folgt aus Satz 5.4 und aus Korollar 5.11 angewandt auf $N = 11$, dass für

$$a_n := \begin{cases} 10^{10}, & \text{wenn } n \leq 10, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n > 10 \end{cases}$$

die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Beweis. Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen, welche sich nur in endlich vielen Reihengliedern unterscheiden. Dies bedeutet, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $(a_n) = (b_n)$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{n=N}^{\infty} b_n$. Das Korollar folgt nun sofort aus Reihe 5.10 angewandt auf beide Reihen. $\square$

5.2. **Umordnung von Reihen.** Es folgt aus dem Kommutativgesetz, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge wir endlich viele reelle Zahlen addieren. Beispielsweise gilt

$$a_1 + a_2 + a_3 \ = \ a_3 + a_1 + a_2 \ = \ a_2 + a_3 + a_1.$$

Etwas allgemeiner, wenn $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ endlich viele reelle Zahlen sind, und wenn zudem $\tau\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Bijektion ist, dann gilt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \ = \ a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + a_{\tau(3)} + \cdots + a_{\tau(n)}.$$

Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass die 'naive' Verallgemeinerung dieser Aussage auf Reihen im Allgemeinen nicht gilt.

Definition. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und es sei $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann nennt man die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine *Umordnung von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Es stellt sich nun die Frage, ob eine Umordnung die Konvergenz, oder den Grenzwert, einer Reihe ändern kann. Wir werden im folgenden Beispiel sehen, dass dies tatsächlich vorkommen kann.

Die Idee im folgenden Beispiel ist ganz einfach: Wir betrachten eine alternierende Reihe, welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Wir werden die Reihe dann allerdings so umordnen, dass wir die positiven Summanden nach 'vorne ziehen' und die negativen Summanden nach 'hinten schieben'. Das Endergebnis wird eine Reihe sein, welche nicht mehr konvergiert.

Wir betrachten die Folge

$$(a_n) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \ \frac{1}{16}, \ldots\right).$$

Anders ausgedrückt, zu jedem $k \geq 1$ gibt es also 2^k Folgenglieder, welche zwischen $-\frac{1}{2^k}$ und $\frac{1}{2^k}$ alternieren.[49] Es folgt aus dem Leibniz-Kriterium, dass die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Wir werden jetzt zeigen, dass es jedoch eine Umordnung dieser Reihe gibt, welche nicht konvergiert. Wir betrachten die Umordnung

$$\Big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \underbrace{\frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{16}}_{8-\text{Mal}}, -\frac{1}{8}, \underbrace{\frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{32}}_{16-\text{Mal}}, -\frac{1}{8}, \dots\Big),$$

d.h. wir schreiben immer als 'Block' die 2^k Folgenglieder $\frac{1}{2^k}$ und dann schreiben wir die k-te negative Zahl der ursprünglichen Folge. [50] Wir wollen nun zeigen, dass diese umgeordnete Reihe divergiert. Es genügt zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe unbeschränkt ist. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir dazu die Summe der ersten

$$(1+1) + (2+1) + (2^2+1) + (2^3+1) + \cdots + (2^n+1)$$

Reihenglieder der umgeordneten Reihe. Diese Summe beträgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{=\frac{1}{2}} \underbrace{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\dots}_{\substack{\text{die ersten } n \text{ negativen}\\ \text{Reihenglieder der}\\ \text{ursprunglichen Reihe}}} \\
= \ &\frac{1}{2}(n-1) \quad - \frac{1}{2} \qquad \underbrace{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\dots}_{(n-1)-\text{Summanden} \geq -\frac{1}{4}} \\
\geq \ &\frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(n-1) \\
= \ &\frac{1}{4}(n-1) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

---

[49] Eine formale Definition der Folge ist wie folgt: für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $d_k := 2^k - 2$, für $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n \in \{d_k+1, \dots d_{k+1}\}$ und wir setzen $a_n := (-1)^n \frac{1}{2^k}$.

[50] Wir können die Umordnung auch präzise mithilfe einer Bijektion τ angeben. Wir setzen dazu $m_k := (2^{k-1}-1) + k - 1$ und wir definieren

$$\begin{aligned}
\tau \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
n &\mapsto \begin{cases} 2(n-k), & \text{falls es ein } k \text{ mit } n \in \{m_k+1, \dots m_{k+1}-1\} \text{ gibt} \\ 2(k-1)-1, & \text{falls es ein } k \text{ mit } n = m_k \text{ gibt.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Man kann leicht nachweisen, dass dies ist eine Bijektion ist. (In der Tat kommt jede gerade Zahl genau einmal als $\tau(n)$ auf und auch jede ungerade Zahl erscheint genau einmal als $\tau(n)$.) Dann gilt in der Tat, dass

$$(a_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \underbrace{\frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{16}}_{8-\text{Mal}}, -\frac{1}{8}, \underbrace{\frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{32}}_{16-\text{Mal}}, -\frac{1}{8}, \dots\Big).$$

[51] Es folgt, dass die Partialsummen der umgeordneten Reihen nicht beschränkt sind, d.h. die umgeordnete Reihe divergiert.

Es gilt sogar folgende viel stärkere Aussage:

Satz 5.12. (Riemannscher Umordnungssatz) *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe welche konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Dann gibt es für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *eine Umordnung, so dass die umgeordnete Reihe gegen* x *konvergiert.*

Wir werden diesen Satz nicht verwenden, und wir werden ihn daher auch nicht beweisen. Die Beweisidee ist sehr hübsch auf

`http://de.wikipedia.org/wiki/Riemannscher_Umordnungssatz`

skizziert.

Wir haben jetzt also gesehen, dass eine Umordnung das Konvergenzverhalten völlig abändern kann. Der folgende Satz besagt nun, dass dieses Problem nicht auftaucht, wenn wir eine absolut konvergenten Reihe umordnen.

Satz 5.13. (Umordnungssatz) *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe, welche absolut konvergiert, dann konvergiert auch jede Umordnung von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut gegen denselben Grenzwert.*

Wir werden diesen Satz im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht benötigen. Wir haben deswegen den Satz in der Vorlesung nicht bewiesen. Der Vollständigkeithalber geben wir hier im Skript den Beweis.

Im Beweis vom Umordungssatz werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 5.14. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass*

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Es sei also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Wie üblich bezeichnen wir mit $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ die k-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nachdem die Reihe konvergiert bilden die Partialsummen eine Cauchy-Folge. Insbesondere gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \geq N-1$ gilt: $|s_k - s_l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Insbesondere gilt für alle $k \geq N$, dass

$$\left| \sum_{n=N}^{k} a_n \right| \;=\; |s_k - s_{N-1}| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

[51] Auch dieses Argument kann noch etwas präziser formuliert werden. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die m_k-te Partialsumme:

$$\sum_{j=1}^{m_k} a_{\tau(j)} = \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} a_{2i} + \sum_{i=1}^{k} a_{2k-1} > k \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{k} \frac{-1}{2^i} \geq \frac{k-1}{2} - \frac{k-2}{4} \geq \frac{k-1}{4}.$$

Wir sehen also, dass die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ unbeschränkt ist.

Es folgt dann aus Lemma 3.4, dass

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\sum_{n=N}^{k} a_n\right| = \lim_{k\to\infty}|s_k - s_N| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Wir wenden uns nun dem Beweis vom Umordnungssatz zu.

Beweis. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, welche absolut konvergiert und es sei $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Wir müssen zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein N finden, so dass

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Lemma 5.14 besagt nun, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass[52]

$$\sum_{k=K}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir müssen im Folgenden also den Betrag $\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right|$ 'klein kriegen'. Nachdem wir Information über die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ besitzen, ist es sinnvoll, diese ins Spiel zu bringen. Für beliebiges n machen wir dazu folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k + \sum_{k=1}^{K-1} a_k - a\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \left|a - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \left|\sum_{k=K}^{\infty} a_k\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \sum_{k=K}^{\infty} |a_k| \\
&< \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Wir müssen also jetzt noch ein N finden, so dass für alle $n \geq N$ der erste Summand $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist.

[52]Dieser Anfang vom Beweis erscheint vielleicht etwas 'aus der Luft gegriffen', aber irgendwann Mal müssen wir ja die Voraussetzung verwenden, und mit dem $\frac{\varepsilon}{2}$-Trick sind wir bis jetzt immer wieder gut gefahren.

Die Idee ist nun n so groß zu wählen, dass alle Summanden von der Summe $\sum_{k=1}^{K-1} a_k$ auch in der Summe $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}$ auftreten. Nachdem τ eine Bijektion ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass [53]

$$\{1,2,\dots,K-1\} \;\subset\; \{\tau(1),\tau(2),\dots,\tau(N)\}. \tag{5.1}$$

Dann gilt für alle $n \geq N$, dass

$$\begin{array}{rcll} \left|\sum\limits_{l=1}^{n} a_{\tau(l)} \;-\; \sum\limits_{k=1}^{K-1} a_k\right| & = & \left|\sum\limits_{k=1,\dots,n \text{ mit } \tau(k)\geq K} a_{\tau(k)}\right| & \begin{array}{l}\text{denn zu jedem } k\in\{1,\dots,K-1\}\\ \text{gibt es ein } l\in\{1,\dots,n\} \text{ mit } \tau(l)=k\end{array} \\ & \leq & \sum\limits_{k=1,\dots,n \text{ mit } \tau(k)\geq K} |a_{\tau(k)}| & \text{Dreiecksungleichung} \\ & \leq & \sum\limits_{k=K}^{\infty} |a_k| & \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} & \text{nach Wahl von } K. \end{array}$$

Zusammengefaßt erhalten wir also, dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Wir haben damit gezeigt, dass die Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch gegen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch absolut konvergiert. Aber dies folgt aus dem obigen Beweis, wenn wir $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ anstatt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ betrachten. □

5.3. **Das Cauchy-Produkt für absolut konvergente Reihen.** Für endliche Summen gilt folgendes Distributivgesetz:

$$\left(\sum_{p=0}^{k} a_p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{l} b_q\right) = \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{l} a_p b_q,$$

denn jedes Produkt $a_p b_q$ taucht auf der rechten Seite genau einmal auf. Man kann sich nun fragen, ob eine ähnliche Aussage für Reihen gilt. Es seien beispielsweise $\sum_{p=0}^{\infty} a_p$ und $\sum_{q=0}^{\infty} b_q$ konvergente Reihen. Gilt dann notwendigerweise, dass

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \;?$$

Auf den ersten Blick erscheint das ziemlich logisch, denn auf der rechten Seite taucht jedes Produkt $a_p b_q$ genau einmal auf.

[53] Wir können beispielsweise $N = \max\{\tau^{-1}(1),\dots,\tau^{-1}(K-1)\}$ wählen.

In Übungsblatt 6 werden wir sehen, dass die Antwort im Allgemeinen jedoch nein ist. Genauer gesagt, wir werden sehen, dass es konvergente Reihen $\sum_{p=0}^{\infty} a_p$ und $\sum_{q=0}^{\infty} b_q$ gibt, so dass

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\right) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

In der Tat gibt es Reihen, so dass die Reihe auf der rechten Seite noch nicht einmal konvergiert.

Der folgende Satz besagt nun, dass dieses Problem nicht auftreten kann, wenn die beiden ursprünglichen Reihen absolut konvergent sind.

Satz 5.15. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen, welche absolut konvergieren. Dann gilt*

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ wird manchmal auch das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum_{p=0}^{\infty} a_p$ und $\sum_{q=0}^{\infty} b_q$ genannt. Im Beweis von Satz 5.15 werden wir folgendes einfaches Lemma benötigen.

Lemma 5.16. *Es sei*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

eine konvergente Folge, dann konvergiert auch die Folge

$$\left(a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$$

gegen die gleiche reelle Zahl.

Beweis von Lemma 5.16. Wir setzen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wir wollen nun also zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = a$. Es sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt aber auch für alle $n \geq 2N$, dass $|a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - a| < \varepsilon$. $\square$

Beweis von Satz 5.15. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} Q_n &:= \{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,|\, p \leq n \text{ und } q \leq n\}, \text{ sowie} \\ D_n &:= \{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,|\, p + q \leq n\}. \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, die Menge Q_n beschreibt das 'Quadrat' in $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit den Eckpunkten $(0,0), (0,n), (n,0)$ und (n,n), und die Menge D_n beschreibt das 'Dreieck' in $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit den Eckpunkten $(0,0), (0,n)$ und $(n,0)$. Für jedes n gilt, dass $Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \subset D_n \subset Q_n$.

Es seien nun $\sum_{p=0}^\infty a_p$ und $\sum_{q=0}^\infty b_q$ absolut konvergente Reihen. Es folgt aus Satz 3.3 und aus dem Distributivgesetz, dass

$$\begin{array}{lrcccl}
\text{(a)} & \left(\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{\infty} b_q\right) & = & \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{n} a_p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n} b_q\right) & = & \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(p,q)\in Q_n} a_pb_q, \text{ und}\\
\text{(b)} & \left(\sum\limits_{p=0}^{\infty} |a_p|\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{\infty} |b_q|\right) & = & \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{n} |a_p|\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n} |b_q|\right) & = & \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(p,q)\in Q_n} |a_pb_q|
\end{array}$$

Zudem ist

$$\text{(c)} \qquad \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{d} a_kb_{d-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{d=0}^{n}\sum_{k=0}^{d} a_kb_{d-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{(p,q)\in D_n} a_pb_q.$$

Nach (a) und (c) genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{(p,q)\in Q_n} a_pb_q - \sum_{(p,q)\in D_n} a_pb_q\right| = 0.$$

Es ist

$$\begin{array}{rll}
& \lim\limits_{n\to\infty}\left|\sum\limits_{(p,q)\in Q_n} a_pb_q - \sum\limits_{(p,q)\in D_n} a_pb_q\right| & \\
= & \lim\limits_{n\to\infty}\left|\sum\limits_{(p,q)\in Q_n\setminus D_n} a_pb_q\right| & \text{nachdem } D_n\subset Q_n\\
\leq & \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(p,q)\in Q_n\setminus D_n} |a_pb_q| & \text{Dreiecksungleichung}\\
\leq & \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(p,q)\in Q_n\setminus Q_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}} |a_pb_q| & \text{nachdem } Q_n\setminus D_n\subset Q_n\setminus Q_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\\
= & \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{(p,q)\in Q_n} |a_pb_q| - \sum\limits_{(p,q)\in Q_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}} |a_pb_q|\right) & \\
= & * &
\end{array}$$

Um die Notation etwas zu vereinfachen, setzen wir

$$c_n := \sum_{(p,q)\in Q_n} |a_pb_q|$$

In (b) hatten wir gesehen, dass die Folge (c_n) konvergiert. Mit dieser Notation können wir jetzt die obige Abschätzung weiterführen

$$\begin{array}{rcll}
* & = & \lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n - c_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\right) & \\
& = & \lim\limits_{n\to\infty} c_n - \lim\limits_{n\to\infty} c_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} & \\
& = & 0. & \text{nach Lemma 5.16}
\end{array}$$

$\square$

5.4. **Die Exponentialreihe.** In diesem Kapitel führen wir die Exponentialreihe ein, welche zusammen mit der geometrischen Reihe eine der wichtigsten Reihen überhaupt ist.

Satz 5.17. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; \lim_{k\to\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\right)$$

absolut konvergent.

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\exp(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \text{genannt die } \textit{Exponentialreihe von } x.$$

Wir definieren zudem

$$e \;:=\; \exp(1), \qquad \text{genannt die } \textit{Eulersche Zahl}.$$

Eine Computerberrechnung zeigt, dass

$$e \;\approx\; 2.7182818284590\ldots$$

[54]

Beweis. Wir schreiben $a_n := \frac{x^n}{n!}$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \left|\frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!}\right| \;=\; \frac{|x|}{n+1}.$$

Insbesondere gilt für alle $n \geq N := \lceil 2|x| \rceil$, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \frac{|x|}{n+1} \;\leq\; \frac{1}{2}.$$

Es folgt nun aus dem Quotienten-Kriterium (Satz 5.8) angewandt auf $\theta = \frac{1}{2}$ und aus Bemerkung 5.9, dass die Reihe

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \;=\; \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergiert. Also konvergiert nach Lemma 5.10 auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut.
[55] □

[54]Die ersten 50 Stellen der Eulerschen Zahl sind

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995$$

Hierbei ist bei den Stellen kein 'System' zu erkennen. Das legt den Schluß nahe, dass e wohl keine rationale Zahl ist. Dies ist in der Tat der Fall, der Beweis dazu ist sogar relativ einfach:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_der_Irrationalität_der_eulerschen_Zahl`

Es gilt allerdings auch noch eine deutlich stärkere Aussage: die Eulersche Zahl e ist transzendental, d.h. e kann nicht die Nullstelle von einem Polynom sein. Diese Aussage wurde erst 1873 von Hermite bewiesen, also 150 Jahre nachdem die Eulersche Zahl eingeführt wurde.

[55]Warum macht Lemma 5.10 eine Aussage über absolute Konvergenz?

Theorem 5.18. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*
$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Es seien also $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt
$$\begin{array}{rcll} \exp(x)\cdot\exp(y) & = & \left(\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{x^p}{p!}\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{\infty}\dfrac{y^q}{q!}\right) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\cdot\dfrac{y^{n-k}}{(n-k)!} & \text{nach Satz 5.15} \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} & \text{nach Definition von } \binom{n}{k} \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(x+y)^n & \text{nach Satz 2.7} \\ & = & \exp(x+y). & \end{array}$$

□

Satz 5.19. *Die Exponentialreihe hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Es ist* $\exp(0) = 1$,
(2) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
(3) *für alle* $x > 0$ *gilt* $\exp(x) \in (1, \infty)$,
(4) *für alle* $x < 0$ *gilt* $\exp(x) \in (0, 1)$,
(5) *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\exp(n) = e^n$.

Beweis.

(1) Durch Einsetzen von $x = 0$ in die Exponentialreihe, erhält man sofort, dass $\exp(0) = 1$.
(2) Es folgt aus Theorem 5.18, dass
$$\exp(-x)\exp(x) \;=\; \exp(-x+x) \;=\; \exp(0) \;=\; 1.$$
(3) Es sei also $x > 0$. Dann gilt
$$\begin{array}{rcll} \exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} & = & 1 + x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!} & \\ & = & 1 + x + \lim_{k\to\infty}\sum\limits_{n=2}^{k}\frac{x^n}{n!} & \\ & \geq & 1 + x \;>\; 1 & \text{nach Satz 3.4 da } x > 0. \end{array}$$
(4) Für $x < 0$ folgt die Aussage nun aus (2) und (3).
(5) Es folgt wiederum aus Theorem 5.18, dass
$$\exp(n) \;=\; \exp(\underbrace{1+\cdots+1}_{n-\text{Mal}}) \;=\; \underbrace{\exp(1)\cdot\cdots\cdot\exp(1)}_{n-\text{Mal}} \;=\; \underbrace{e\cdot\cdots\cdot e}_{n-\text{Mal}} \;=\; e^n.$$

□

6. Stetige Funktionen

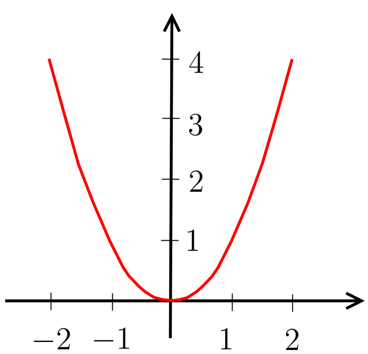
6.1. **Definition von Stetigkeit und erste Eigenschaften.** Wir hatten uns bislang ausführlich mit Folgen und Reihen beschäftigt aber jetzt wenden wir uns endlich dem eigentlichen Ziel der Analysis zu, nämlich dem Studium von Funktionen.

Definition. Eine *Funktion* ist eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Wir nennen D den *Definitionsbereich von* f. Zudem bezeichnen wir

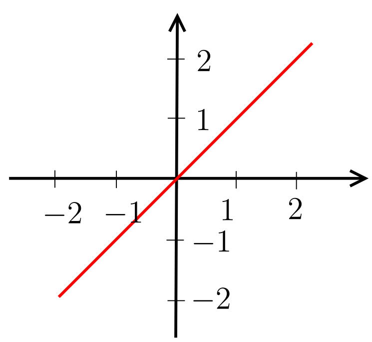
$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$

als den *Graphen von* f.

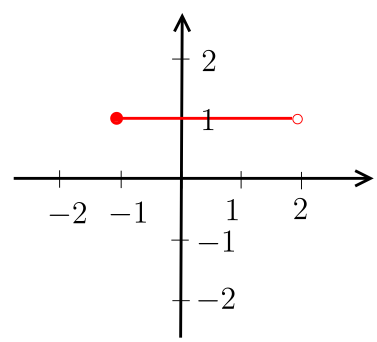
Im Folgenden betrachten wir mehrere Beispiele von Funktionen und deren dazugehörige Graphen. Wie bei Folgen sehen wir dabei, dass der Phantasie bei der Definition von Funktion keine Grenzen gesetzt sind.



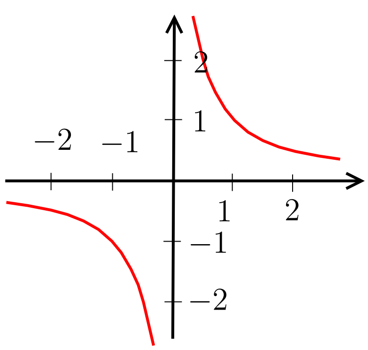
$$\begin{array}{rcl} a\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$



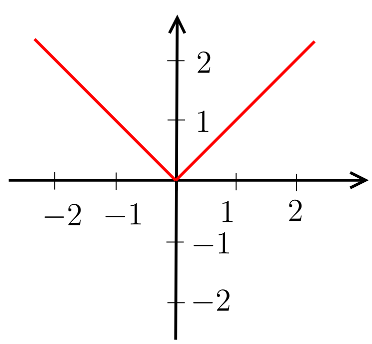
$$\begin{array}{rcl} b\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$



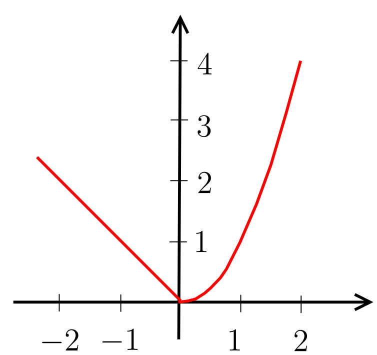
$$\begin{array}{rcl} c\colon [-1,2) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$



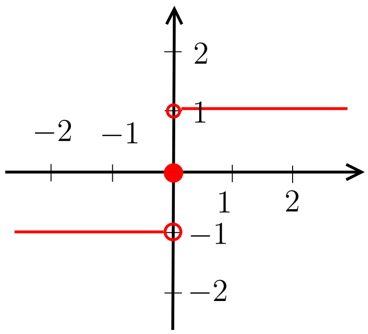
$$\begin{array}{rcl} d\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

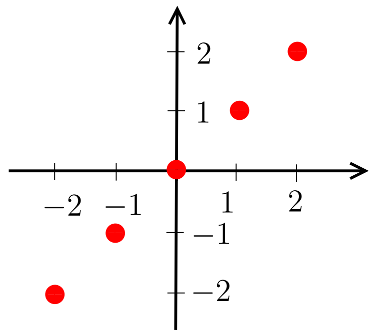


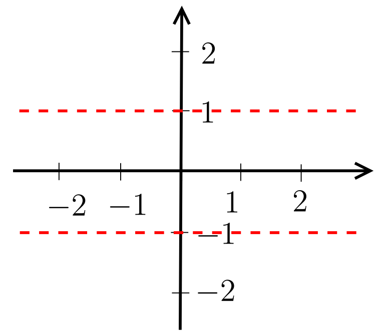
$$\begin{array}{rcl} e\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -x, & \text{wenn } x \le 0, \\ x^2, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \end{array}$$



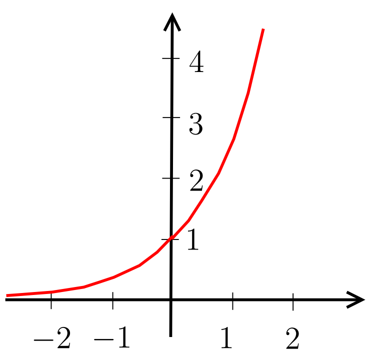


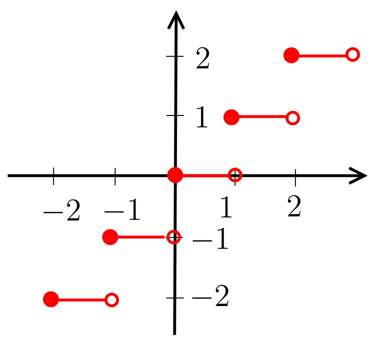


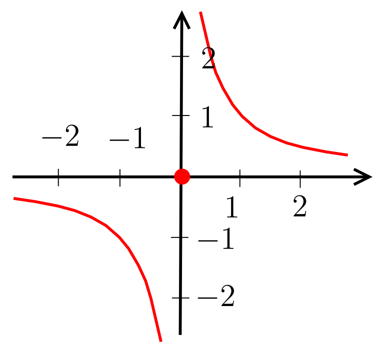
$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1, & \text{wenn } x < 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \\ 1, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$







$$\begin{aligned} j\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Definition. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir sagen, f *ist stetig im Punkt* x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| \ < \ \varepsilon.$$

In Quantorenschreibweise gilt also

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{x \in D \text{ mit} \\ |x - x_0| < \delta}}{\forall} \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir sagen $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ist stetig*, wenn f in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist.

Die Definition der Stetigkeit hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Definition der Konvergenz von Folgen. [56] Die anschauliche Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ war, dass 'für große n' die Folgenglieder a_n gegen a 'streben'. Die anschauliche Definition von Stetigkeit im Punkt x_0 ist nun, dass für x 'nahe an x_0' die Funktionswerte $f(x)$ gegen $f(x_0)$ 'streben'.

Noch einmal anders gesagt, die anschauliche Bedeutung von Stetigkeit im Punkt x_0 ist, dass die Funktion im Punkt x_0 keine Sprungstelle besitzt. Wir werden im Folgenden in der Tat sehen, dass die Funktionen $a,\dots,f$ und j stetig sind. Zudem werden wir sehen, dass die Funktion g überall stetig ist, außer im Punkt $x_0 = 0$. Im Moment ist es vielleicht weniger klar, wie es mit der Stetigkeit der Funktionen h und i bestellt ist.

Das folgende Lemma zeigt, dass die zwei einfachsten Funktionen überhaupt stetig sind.

Lemma 6.1.

(1) *Die Funktion*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

ist stetig.

(2) *Es sei $c \in \mathbb{R}$, dann ist die konstante Funktion*

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

stetig.

Beweis.

(1) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta = \varepsilon$. Dann gilt

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \delta = \varepsilon.$$

(2) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann hat jedes $\delta > 0$ die gewünschte Eigenschaft.

□

Beispiel. (1) Wenden wir uns nun der Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1, & \text{wenn } x < 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \\ 1, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

zu. Vom Graphen her hat die Funktion im Punkt $x_0 = 0$ eine Sprungstelle. Wir wollen nun zeigen, dass unsere abstrakte Definition dies auch erkennt. Wir wollen

[56] Hier sind zum Vergleich noch einmal beide Definitionen:

$$\begin{array}{rcllll} f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 & :\Longleftrightarrow & \underset{\varepsilon>0}{\forall} & \underset{\delta>0}{\exists} & \underset{\substack{x \in D \text{ mit} \\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} & |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a & :\Longleftrightarrow & \underset{\varepsilon>0}{\forall} & \underset{N>0}{\exists} & \underset{n\ge N}{\forall} & |a_n - a| < \varepsilon. \end{array}$$

also zeigen, dass g im Punkt x_0 nicht stetig ist. Die übliche Methode Aussagen mit Quantoren zu verneinen gibt uns die allgemeine Aussage

$$f\colon D \to \mathbb{R} \text{ ist nicht stetig im Punkt } x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\exists} \ \underset{\delta>0}{\forall} \ \underset{\substack{x \in D \text{ mit} \\ |x-x_0|<\delta}}{\exists} \ |f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

In unserem Beispiel vereinfacht sich das etwas zu

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist nicht stetig im Punkt } 0 \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\exists} \ \underset{\delta>0}{\forall} \ \underset{|x|<\delta}{\exists} |g(x)| \geq \varepsilon.$$

Wir wählen beispielsweise $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Es sei $\delta > 0$ beliebig. Dann gilt $x = \frac{\delta}{2} < \delta$, und wir haben die Ungleichung $|g(\frac{\delta}{2})| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$. Wir haben also gezeigt, dass die Funktion g im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

(2) Ganz analog kann man zeigen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} k\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

in den Punkten $x_0 \in \mathbb{Z}$ nicht stetig ist.

(3) Auf ähnliche Weise kann man auch sehen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} l\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

Das folgende Lemma besagt, dass die Einschränkung einer stetigen Funktion auf eine Teilmenge wiederum stetig ist.

Lemma 6.2. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist für jede Teilmenge $E \subset D$ die Einschränkung* [57]

$$\begin{array}{rcl} f|_E\colon E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

ebenfalls stetig.

Beweis. Es sei $x_0 \in E$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$. Dann gilt diese Ungleichung natürlich auch für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$. Wir haben also gezeigt, dass die Funktion $f|_E$ stetig im Punkt x_0 ist. $\square$

[57] Wenn $f\colon A \to B$ irgendeine Abbildung ist, und wenn $C \subset A$ eine Teilmenge ist, dann bezeichnet man in der Mathematik mit $f|_C$ die Einschränkung von f auf C. D.h. $f|_C$ bezeichnet die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f|_C\colon C & \to & B \\ c & \mapsto & f(c). \end{array}$$

Beispielsweise folgt aus Lemma 6.1 und aus Lemma 6.2, dass die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} c\colon [-1,2) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} h\colon \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

stetig sind.

Der folgende Satz besagt insbesondere, dass die Summe und das Produkt von stetigen Funktionen wiederum stetig ist.

Satz 6.3. *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche im Punkt $x_0 \in D$ stetig sind. Dann gilt*

(1) *Die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} f+g\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

ist stetig im Punkt x_0.

(2) *Die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} f\cdot g\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array}$$

ist stetig im Punkt x_0.

(3) *Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \lambda f\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cdot f(x) \end{array}$$

stetig im Punkt x_0.

(4) *Wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \frac{f}{g}\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

stetig im Punkt x_0.

Beweis.

Die Definition von Stetigkeit hat große formale Ähnlichkeiten mit der Definition der Konvergenz von Folgen. Insbesondere kann man viele Aussagen über die Konvergenz von Folgen ganz analog auch für die Stetigkeit von Funktionen beweisen. Der Beweis von Satz 6.3 ist daher ganz ähnlich dem Beweis von Satz 3.3.

Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche stetig im Punkt $x_0 \in D$ sind. Zu jedem $\varepsilon_1 > 0$ existiert also ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_1$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1,$$

zudem existiert zu jedem $\varepsilon_2 > 0$ ein $\delta_2 > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_2$ gilt:

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2.$$

(1) Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:
$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon.$$
Man beachte, dass
$$\begin{array}{rcl} |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| & = & |f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| \\ & \leq & |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|. \end{array}$$
Wir setzen jetzt $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ und nach Voraussetzung existieren $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_1$ gilt
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2},$$
und für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_2$ gilt:
$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$
Wir setzen nun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass
$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \ \leq \ |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon.$$
(2) Der Beweis dieser Aussage ist formal ähnlich zum Beweis von Satz 3.3 (2). Der Beweis ist eine Übungsaufgabe im 7. Übungsblatt.
(3) Diese Aussage folgt aus Teil (2), angewandt auf die konstante Funktion $g\colon D \to \mathbb{R}$, welche definiert ist durch $x \mapsto \lambda$, und welche nach Lemma 6.1 stetig ist.
(4) Auch dieser Beweis ist formal ähnlich zum Beweis von Satz 3.3 (4). Der Beweis der Aussage ist eine freiwillige Übungsaufgabe.

□

Es seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben, dann nennen wir
$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \end{array}$$
eine *Polynomfunktion*. Es seien $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen. Dann heißt
$$\begin{array}{rcl} f\colon \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$
eine *rationale Funktion*. Beispielsweise ist
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3 + 7x + 2}{x^2 - 2} \end{array}$$
eine rationale Funktion. Der folgende Satz folgt sofort aus Lemma 6.1 und Satz 6.3:

Satz 6.4. *Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind stetig.*

Im 7. Übungsblatt werden Sie zudem noch folgende Aussage beweisen.

Satz 6.5. *Es sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und es sei* $g\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(b) = g(b)$. *Dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} h\colon [a,c] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in [a,b], \\ g(x), & \text{wenn } x \in (b,c] \end{cases} \end{aligned}$$

stetig. Die gleiche Aussage gilt auch, wenn f *und* g *auf Intervallen der Form* $(a,b]$ *oder* $(-\infty,b]$ *beziehungsweise* $[b,c)$ *oder* $[b,\infty)$ *definiert sind.*

Es folgt insbesondere aus Satz 6.5, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & \text{wenn } x \leq 0, \\ x^2, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

stetig ist. In der Tat, denn es folgt aus Lemma 6.2 und aus Satz 6.4, dass die Einschränkung von $x \mapsto x$ auf den Definitionsbereich $(-\infty,0]$ stetig ist, und dass die Einschränkung von $x \mapsto x^2$ auf den Definitionsbereich $[0,\infty)$ stetig ist. Ganz analog folgt auch, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \leq 0 \\ x, & \text{falls } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

stetig ist.

Wir haben jetzt also gezeigt, dass von den Beispielsfunktionen $a, b, c, \ldots, l$ die meisten Funktionen stetig sind. In Übungsblatt 7 werden wir noch zeigen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

in keinem Punkt stetig ist.

6.2. **Weitere Beispiele von stetigen Funktionen.** Die obige Abbildung des Graphen der Exponentialfunktion legt natürlich nahe, dass die Exponentialfunktion stetig ist. Dies ist in der Tat der Fall, wie wir jetzt beweisen werden.

Satz 6.6. *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

Beweis. Wir wollen zuerst zeigen, dass die Funktion exp im Punkt 0 stetig ist. Dazu benötigen wir folgende Abschätzung.

Behauptung. Es sei $|x| < \frac{1}{2}$, dann gilt

$$|\exp(x) - 1| < 2|x|.$$

Es sei also $|x| < \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| = |x| \cdot \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\right| \\
&= |x| \cdot \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right| \\
&\leq |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} && \text{Dreiecksungleichung} \\
&< |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} && \text{weil } |x| < \tfrac{1}{2} \text{ und } n! \geq 1 \\
&= |x| \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} && \text{geometrische Reihe} \\
&= 2|x|.
\end{aligned}$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir wenden uns nun wieder dem Beweis der Stetigkeit von exp im Punkt 0 zu. Es sei also $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$. Es folgt aus der Behauptung, dass für alle $|x| < \delta$ gilt

$$|\exp(x) - \exp(0)| = |\exp(x) - 1| < 2|x| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass exp in jedem beliebigen Punkt stetig ist. Es sei also $x_0 \in \mathbb{R}$. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt nach Theorem 5.18, dass

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = |\exp(x_0) \cdot \exp(x - x_0) - \exp(x_0)| = \exp(x_0) \cdot |\exp(x - x_0) - 1|.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2\exp(x_0)}, \frac{1}{2}\right\}$. Dann gilt für ein beliebiges x mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$$\begin{aligned}
|\exp(x) - \exp(x_0)| &= \exp(x_0) \cdot |\exp(x - x_0) - 1| \\
&< \exp(x_0) \cdot \frac{\varepsilon}{\exp(x_0)} && \text{nachdem } |x - x_0| < \delta = \min\left\{\tfrac{\varepsilon}{2\exp(x_0)}, \tfrac{1}{2}\right\} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz besagt insbesondere, dass die Verknüpfung von stetigen Funktionen wiederum stetig ist.

Satz 6.7. *Es seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, so dass $f(D) \subset E$. Wenn f im Punkt x_0 stetig ist und wenn g im Punkt $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned}
g \circ f\colon D &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto g(f(x))
\end{aligned}$$

stetig im Punkt x_0.

Es seien beispielsweise [58] $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = \exp(x)$. Wir hatten schon gezeigt, dass diese Funktionen stetig sind. Es folgt aus Satz 6.7, dass dann auch die Verknüpfung $g(f(x)) = \exp(x^2 - 2)$ stetig ist.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir nur den Fall $D = \mathbb{R}$ und $E = \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall wird im Prinzip ganz genauso bewiesen. Es sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Nachdem g im Punkt $f(x_0)$ stetig ist, existiert ein $\eta > 0$, so dass gilt

$$|y - f(x_0)| < \eta \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Nachdem f im Punkt x_0 stetig ist, existiert auch ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \eta.$$

Kombinieren wir beide Aussagen, so folgt, dass

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \eta \;\Rightarrow\; |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

□

6.3. **Stetigkeit und Grenzwerte von Folgen.**

Satz 6.8. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei (a_n) eine konvergente Folge in D, so dass f im Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n \in D$ stetig ist. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \;=\; f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

Insbesondere folgt aus dem Satz, dass wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gilt für jede konvergente Folge (a_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n \in D$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \;=\; f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

Wenn die Funktion f stetig ist, dann können wir also die Funktion und Grenzwert vertauschen. Dies bedeutet, wir können entweder zuerst die Funktion f auf die Folgenglieder anwenden und dann den Grenzwert bilden, oder wir können zuerst den Grenzwert der Folge bilden und dann die Funktion f anwenden.

Beispielsweise folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion, dass

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(1 - \frac{1}{n}\right) \;=\; \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \;=\; \exp(1) \;=\; e.$$

---

[58] Bei einer Funktion muss man immer angeben, was der Definitionsbereich sein soll. Beispielsweise sind die Funktionen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

verschieden, nachdem diese verschiedene Definitionsbereiche besitzen. Wenn wir nun schreiben, "$f(x) = x^2 - 2$", oder "$f(x) = \frac{1}{x}$', oder "$f(x) = \frac{x}{2-\exp(x)}$", ohne eine Angabe vom Definitionsbereich, dann ist der Definitionsbereich die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}$, für die die rechte Seite definiert ist.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir nur den Fall $D = \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Es sei (a_n) eine konvergente Folge in D, so dass f im Grenzwert $x_0 := \lim_{n\to\infty} a_n$ stetig ist. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$, das heißt, wir wollen zeigen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$n \geq N \quad\Rightarrow\quad |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Es sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem f im Punkt x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir setzen jetzt $\eta = \delta$ und wählen ein N, so dass gilt

$$n \geq N \quad\Rightarrow\quad |a_n - x_0| < \delta.$$

Dann gilt aber auch, dass

$$n \geq N \quad\Rightarrow\quad |a_n - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

Es gilt sogar folgende stärkere Aussage.

Satz 6.9. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in D$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{c} f \text{ ist stetig} \\ \text{im Punkt } x_0 \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{für jede Folge } (a_n) \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = x_0, \\ \text{gilt, dass auch } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0). \end{array}$$

Der obige Satz besagt unter anderem, dass man die Definition der Stetigkeit von Funktionen auf die Definition von Konvergenz von Folgen zurückführen kann. Welche von den beiden Aussagen im Satz 6.9 man bevorzugt ist letztendlich Geschmackssache. Forster verwendet die rechte Aussage als Definition von Stetigkeit und beweist auf Seite 109, dass beide Aussagen äquivalent sind.

Wir werden den Satz im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht verwenden. Wir haben den Satz deswegen in der Vorlesung auch nicht bewiesen. Der Vollständigkeithalber ist hier aber noch der Beweis.

Beweis. Die Richtung '$\Rightarrow$' hatten wir schon in Satz 6.8 bewiesen.

Wir beweisen jetzt '$\Leftarrow$'. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir wiederum nur den Fall $D = \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Wir setzen also voraus, dass für jede Folge (a_n) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Nehmen wir an, dass f im Punkt x_0 *nicht* stetig ist. Zur Erinnerung, in Quantorenschreibweise gilt:

$$f \text{ nicht stetig im Punkt } x_0 \quad\iff\quad \underset{\varepsilon>0}{\exists}\;\underset{\delta>0}{\forall}\;\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\exists} |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Sei also solch ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann existiert zu jedem $\delta_n = \frac{1}{n}$ ein Punkt a_n mit $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$, so dass $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Dann folgt leicht aus der Definition von

Konvergenz von Folgen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, und dass $f(a_n)$ *nicht* gegen $f(x_0)$ konvergiert. Dies ist also ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Mithilfe von Satz 6.9 kann man viele Aussagen über Stetigkeit auf Aussagen über Konvergenz von Folgen zurückführen. Beispielsweise kann man Satz 6.3 leicht aus Satz 3.3 herleiten.

6.4. **Grenzwerte von Funktionen.** Im Folgenden sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Nehmen wir an, es gibt ein $\eta > 0$ gibt, so dass $(x_0, x_0+\eta) \subset D$. [59] Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0,x_0+\delta)\cap D}{\forall} |f(x)-a| < \varepsilon$$

und wir nennen $\lim_{x\searrow x_0} f(x)$ den *rechtsseitigen Grenzwert von f am Punkt x_0*. [60] Wir betrachten beispielsweise die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1, & \text{wenn } x < 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \\ 1, & \text{wenn } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\lim_{x\searrow x_0} g(x) \ = \ 1,$$

denn für jedes $\varepsilon > 0$ hat $\delta = 1$ die gewünschte Eigenschaft.

Ganz analog, wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass $(x_0-\eta, x_0) \subset D$, dann schreiben wir

$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0-\delta,x_0)\cap D}{\forall} |f(x)-a| < \varepsilon$$

und wir nennen $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ den *linksseitigen Grenzwert von f am Punkt x_0*. Im obigen Beispiel gilt beispielsweise, dass $\lim_{x\nearrow x_0} g(x) = -1$.

Zudem, wenn sowohl $\lim_{x\searrow x_0} f(x)$ als auch $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ definiert sind, und wenn die Grenzwerte übereinstimmen, dann schreiben wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ := \ \lim_{x\searrow x_0} f(x) \ = \ \lim_{x\nearrow x_0} f(x)$$

und wir nennen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ den *Grenzwert am Punkt x_0*. Im obigen Beispiel stimmen der linksseitige Grenzwert und der rechtsseitige Grenzwert nicht überein. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} g(x)$ existiert also nicht.

In Übungsblatt 7 werden wir folgenden Satz beweisen. Der Beweis des Satzes folgt dabei ziemlich einfach aus den Definitionen.

[59] Die Aussage, dass es ein $\eta > 0$ gibt mit $(x_0, x_0+\eta) \subset D$ bedeutet, dass die Funktion f 'rechts' von x_0 definiert ist.

[60] Der rechtsseitige Grenzwert von f am Punkt x_0 wird manchmal auch mit $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ bezeichnet.

Satz 6.10. *Es sei* $f\colon D\to\mathbb{R}$ *eine Funktion, so dass es ein* $\eta>0$ *mitt* $(x_0-\eta,x_0+\eta)\subset D$ *gibt. Dann gilt*

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Wir führen nun noch einige weitere Definitionen ein. Wenn es ein $\eta>0$ gibt, so dass $(x_0,x_0+\eta)\subset D$, dann schreiben wir

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x)=+\infty \quad :\Longleftrightarrow\quad \underset{C\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0,x_0+\delta)\cap D}{\forall} f(x)>C,$$

sowie

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x)=-\infty \quad :\Longleftrightarrow\quad \underset{C\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0,x_0+\delta)\cap D}{\forall} f(x)<C.$$

Ganz analog definieren wir auch $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)=+\infty$ und $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)=-\infty$. Beispielsweise gilt

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x} = +\infty \text{ und } \lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x} = -\infty.$$

Für Grenzwerte von Funktionen gelten nun die gleichen Aussagen wie für Grenzwerte von Folgen. Beispielsweise gilt folgender Satz, welcher ganz ähnlich wie Satz 3.9 bewiesen wird.

Satz 6.11. *Es seien* $f\colon D\to\mathbb{R}$ *und* $g\colon D\to\mathbb{R}$ *zwei Funktionen. Es sei* $x_0\in\mathbb{R}$. *Wir nehmen an, dass es ein* $\eta>0$ *gibt, so dass* $(x_0,x_0+\eta)\subset D$. *Wenn* $\lim_{x\searrow x_0} f(x)$ *und* $\lim_{x\searrow x_0} g(x)$ *definiert sind, dann gilt*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\searrow x_0}(f(x)+g(x)) &= \lim_{x\searrow x_0} f(x) + \lim_{x\searrow x_0} g(x)\\
\lim_{x\searrow x_0}(f(x)\cdot g(x)) &= \lim_{x\searrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x\searrow x_0} g(x)
\end{aligned}$$

wenn *die rechte Seite definiert ist.* [61] *Die gleichen Aussagen gelten analog auch für den linksseitigen Grenzwert* $\lim_{x\nearrow x_0}$ *und für* $\lim_{x\to x_0}$.

Es gelten auch die offensichtlichen Analogien von Satz 3.1, Satz 3.3 (4), Satz 3.7, Satz 3.8 sowie Satz 3.11. Die Beweise sind dabei ganz ähnlich den ursprünglichen Beweisen.

Wir führen nun die letzten Definitionen von diesem Kapitel ein. Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ wiederum eine Funktion. Wenn es ein x_0 gibt, so dass $(x_0,\infty)\subset D$, dann schreiben wir für $a\in\mathbb{R}$, dass

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a \quad :\Longleftrightarrow\quad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{X\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in(X,\infty)\cap D}{\forall} |f(x)-a|<\varepsilon.$$

Wir bezeichnen dann $\lim_{x\to\infty} f(x)$ als den *Grenzwert von* f *für* x *gegen* $+\infty$. Ganz analog definieren wir auch $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$, sowie die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Auch hier gelten wieder die üblichen Aussagen mit den ganz analogen Beweisen.

[61] Auf Seite 33 hatten wir die partielle Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$ eingeführt.

Beispielsweise kann man ganz analog zu Lemma 3.6 zeigen, dass für $d \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^d = \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } d > 0, \\ 1, & \text{wenn } d = 0, \\ 0, & \text{wenn } d < 0. \end{cases}$$

Für die Grenzwerte gegen $+\infty$ und $-\infty$ gilt natürlich auch die Summenformel und die Produktformel wie in Satz 6.11.

7. Eigenschaften von stetigen Funktionen

7.1. **Der Zwischenwertsatz.** Im Folgenden ist es hilfreich verschiedene Typen von Intervallen zu unterscheiden.

Definition.

(1) Ein Intervall vom Typ $[a, b]$, $[a, \infty)$ oder $(-\infty, a]$ heißt *abgeschlossen*.
(2) Ein Intervall vom Typ $(a, b), (a, \infty)$ oder $(-\infty, a)$ heißt *offen*.
(3) Ein *kompaktes Intervall* ist ein beschränktes und geschlossenes Intervall, das heißt, ein Intervall vom Typ $[a, b]$.

Der folgende Satz besagt, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind.

Satz 7.1. *Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| \le C$ für alle $x \in [a, b]$.* [62]

Die Aussage des Satzes gilt nicht, wenn wir stetige Funktionen auf offenen Intervallen betrachten. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon (0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

unbeschränkt.

Beweis. Nehmen wir an, es gibt kein solches C. Dann existiert insbesondere zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$, so dass $|f(x_n)| > n$.

Die Folge (x_n) von reellen Zahlen ist beschränkt, also existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß , siehe Satz 4.20, eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Wir setzen $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Nachdem $a \le x_{n_k} \le b$ folgt aus Satz 3.4, dass auch $a \le x \le b$, das heißt $x \in [a, b]$.

Aus Satz 6.8, folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \;=\; f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) \;=\; f(x).$$

Insbesondere konvergiert die Folge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, also ist die Folge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ nach Satz 3.2 beschränkt. Dies ist jedoch im Widerspruch zu $|f(x_{n_k})| > n_k$, für alle $k \in \mathbb{N}$. $\square$

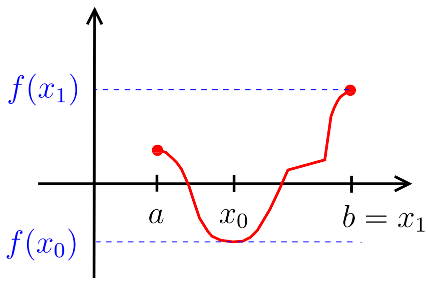
Satz 7.2. *Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren $x_0, x_1 \in [a, b]$, so dass*

$$f(x_0) \;\le\; f(x) \;\le\; f(x_1)$$

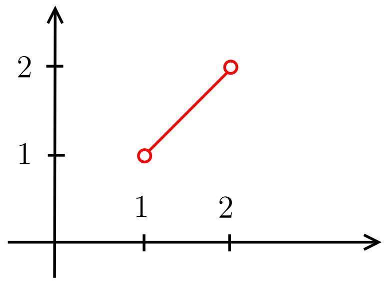
für alle $x \in [a, b]$.

---

[62] Hier und in vielen anderen Sätzen ist es eine gute Übung zu zeigen, dass alle Voraussetzungen wirklich notwendig sind. Beispielsweise, wenn $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem *offenen* Intervall ist, dann ist die Aussage des Lemmas im Allgemeinen nicht mehr gültig, das heißt es existiert im Allgemeinen kein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| \le C$ für alle $x \in [a, b]$. Man betrachte beispielsweise die Funktion. $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, diese ist offensichtlich nicht beschränkt.



Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum



Die Funktion $f\colon (1,2) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ besitzt weder ein Maximum noch ein Minimum

Die Aussage des Satzes gilt nicht, wenn wir stetige Funktionen auf offenen Intervallen betrachten. Die Aussage ist selbst dann falsch, wenn wir beschränkte Funktionen auf endlichen offenen Intervallen (a,b) betrachten. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon (1,2) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

beschränkt, aber die Funktion besitzt kein Maximum. Das heißt, es gibt kein $x_1 \in (1,2)$, so dass $f(x) < f(x_1)$ für alle $x \in (1,2)$.

Beweis. Es folgt aus Satz 7.1, dass die Menge $f([a,b])$ beschränkt ist. Insbesondere existiert also $y_1 := \sup(f([a,b]))$. Es folgt nun aus Satz 4.12 (1), dass es eine Folge (z_n) in $f([a,b])$ gibt, welche gegen y_1 konvergiert. Wir wählen jetzt eine Folge (c_n) in $[a,b]$, so dass für jedes n gilt: $f(c_n) = z_n$.

Nachdem die Folge (c_n) beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß, siehe Satz 4.20, eine Teilfolge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Wir setzen $x_1 := \lim_{k\to\infty} c_{n_k}$. Wie im Beweis von Satz 7.1 sehen wir, dass $x_1 \in [a,b]$. Es folgt aus der Stetigkeit von f und aus Satz 6.8, dass

$$f(x_1) \;=\; f\left(\lim_{k\to\infty} c_{n_k}\right) \;=\; \lim_{k\to\infty} f(c_{n_k}) \;=\; \lim_{k\to\infty} z_{n_k} \;=\; \sup(f([a,b])).$$

Nachdem das Supremum $\sup(f([a,b]))$ insbesondere eine obere Schranke für $f([a,b])$ ist, folgt nun, dass $f(x_1) \geq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

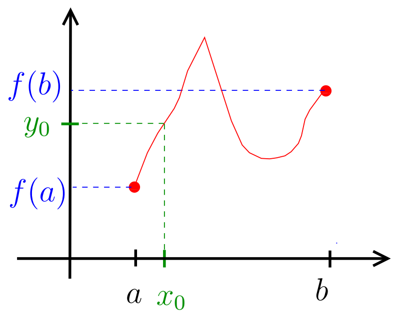
Ganz analog zeigt man auch die Existenz von x_0. $\square$

Der folgende Satz besagt, dass eine stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als Funktionswert annimmt.

Satz 7.3. (*Zwischenwertsatz*) *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und zudem sei $y_0 \in \mathbb{R}$ zwischen* [63] *$f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$.*

[63] Wir sagen $r \in \mathbb{R}$ *liegt zwischen s und t*, wenn folgendes gilt:

(1) falls $s \leq t$, dann ist $r \in [s,t]$,
(2) falls $t \leq s$, dann ist $r \in [t,s]$.



wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gibt es zu jedem y_0 zwischen $f(a)$ und (b) ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Abbildung 1. Veranschaulichung der Aussage vom Zwischenwertsatz.

Betrachten wir beispielsweise die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2. \end{array}$$

Dann gilt $f(0) < 0$ und $f(3) > 0$. Der Zwischenwertsatz also, dass es ein $x \in [0,3]$ mit $x^2 - 2 = 0$ gibt. Ganz analog kann man mithilfe vom Zwischenwertsatz zeigen, dass jedes $c \geq 0$ eine Quadratwurzel besitzt.

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $f(a) \leq f(b)$. Es sei $y_0 \in [f(a), f(b)]$. [64]

Wie wir gerade gesehen hatten, impliziert der Zwischenwertsatz, dass es Quadratwurzeln von nicht-negativen Zahlen gibt. Wir wollen nun den Zwischenwertsatz dadurch beweisen, dass wir den Beweis von Satz 4.17 geeignet modifizieren.

Wir setzen

$$M := \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \leq y_0\}.$$

Nachdem $f(a) \leq y_0$ folgt, dass $a \in M$. Die Menge M ist also nichtleer und natürlich durch b nach oben beschränkt. Wir setzen $x_0 := \sup(M)$. Wir müssen jetzt zeigen, dass $f(x_0) = y_0$. Nachdem f stetig ist, folgt, wie im Beweis von Satz 4.17, dass $f(x_0) \leq y_0$. [65]

[64] Wenn $f(a) \geq f(b)$, dann betrachten wir die durch $g(x) = -f(x)$ definierte Funktion, und dann gilt wiederum $g(a) \leq g(b)$, und der Zwischenwertsatz für g impliziert den Zwischenwertsatz für f.

[65] Hier ist zur Erinnerung das ausführliche Argument: Nach Satz 4.12 (1) existiert eine Folge (a_n) in M, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Nachdem $f(a_n) \leq y_0$ für alle n, folgt auch aus Satz 6.8 und Satz 3.4, dass

$$f(x_0) \;=\; f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(a_n) \;\leq\; y_0.$$

Wir wollen nun mithilfe von einem Widerspruchsbeweis zeigen, dass $f(x_0) = y_0$. Nehmen wir also an, dass $f(x_0) < y_0$. Wie im Beweis von Satz 4.17 genügt es zu zeigen, dass es ein $\eta > 0$ gibt, so dass $f(x_0 + \eta) < y_0$ ist. [66]

> Wir müssen also ein $\eta > 0$ finden, so dass gilt $f(x_0+\eta) < y_0 = f(x_0)+(y_0 - f(x_0))$. Aber nachdem wir angenommen haben, dass $y_0 - f(x_0) > 0$, folgt die Existenz von η relativ leicht aus der Stetigkeit von f. Wir werden diese Idee nun ausführen.

Wir setzen $\varepsilon = y_0 - f(x_0)$. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, welche im Intervall $[a, b]$ liegen. Nachdem $x_0 + \frac{\delta}{2} \in x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ folgt insbesondere, dass

$$f\left(x_0 + \tfrac{\delta}{2}\right) \;=\; f(x_0) + \underbrace{f\left(x_0 + \tfrac{\delta}{2}\right) - f(x_0)}_{\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \;<\; f(x_0) + \varepsilon \;= y_0.$$

Wir haben also die Annahme, dass $f(x_0) < y_0$ zu einem Widerspruch geführt. □

Es seien $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ wobei $a_k \neq 0$. Wir bezeichnen dann

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \end{array}$$

als *Polynomfunktion von Grad k* oder manchmal kurz auch als *Polynom von Grad k*. In Übungsblatt 8 werden wir mithilfe vom Zwischenwertsatz folgenden Satz beweisen.

Satz 7.4. *Jede Polynomfunktion von ungeradem Grad besitzt eine Nullstelle.*

Beispielsweise besagt der Satz, dass die Funktion $f(x) = x^5 - 2x^2 + 3$ eine Nullstelle besitzt.

7.2. **Gleichmäßige Stetigkeit.** In diesem Kapitel zeigen wir, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig sind. Die Definition von 'gleichmäßig stetig' ist auf den ersten, und oft auch auf den zweiten Blick verwirrend. Dieses Ergebnis wird aber im späteren Verlauf der Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen.

Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Wir nennen das *offene* Intervall

$$U_\delta(x) \;:=\; (x - \delta, x + \delta)$$

die *δ-Umgebung* von x. Es nun $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt, mit der neuen Notation, dass

$$f \text{ ist stetig} \qquad \Leftrightarrow \quad \underset{x_0\in D}{\forall} \;\; \underset{\varepsilon>0}{\forall} \;\; \underset{\delta>0}{\exists} \;\; \underset{x\in U_\delta(x_0)\cap D}{\forall} \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir definieren nun

$$f \text{ gleichmäßig stetig} \;\;:\Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \;\; \underset{\delta>0}{\exists} \;\; \underset{x_0\in D}{\forall} \;\; \underset{x\in U_\delta(x_0)\cap D}{\forall} \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

[66] Wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass $f(x_0 + \eta) < y_0$, dann ist $x_0 + \eta \in M$. Nachdem $x_0 = \sup(M)$ insbesondere eine obere Schranke für M ist folgt, dass $x_0 \geq x_0 + \eta$, aber dies ist nicht möglich, da $\eta > 0$. Wir haben also einen Widerspruch gefunden.

Etwas vereinfacht ausgedrückt, eine Funktion f ist gleichmäßig stetig, wenn "es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, welches für alle x_0 passt".

Wir werden in den Übungen sehen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} (0,1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

nicht gleichmäßig stetig ist. Andererseits besagt der folgende Satz, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig sind.

Satz 7.5. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f stetig ist, dann ist f auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir werden den Satz mit einem Widerspruchsbeweis beweisen. Nehmen wir also an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dies bedeutet, dass

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{x\in[a,b]}{\exists}\ \underset{y\in[a,b]\ mit\ |x-y|<\delta}{\exists}\ |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon.$$

Sei also solch ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Für jedes $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir also $x_n, y_n \in [a,b]$, so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Die Folge (x_n) ist beschränkt (weil sie in $[a,b]$ liegt), insbesondere existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß (Satz 4.20) eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Wir setzen $c := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Nachdem $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass auch [67] $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = c$.

Nachdem f stetig ist, folgt aus Satz 6.8, dass

$$\lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) \;=\; f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) - f\left(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}\right) \;=\; f(c) - f(c) \;=\; 0.$$

Dies ist aber im Widerspruch zu der Aussage, dass $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ für alle k. □

[67] Wir verwenden also folgende Aussage: es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Diese Folgerung folgt, jetzt da wir etwas Übung besitzen, leicht aus der Definition von Konvergenz.

8. Die Umkehrfunktion

8.1. **Stetigkeit von Umkehrfunktionen.**

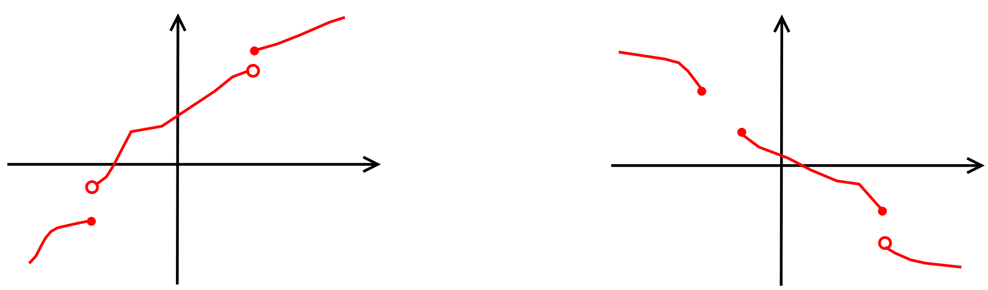
Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton steigend*, wenn für alle Zahlen $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Die Funktion f heißt *streng monoton fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Wir sagen, f ist *streng monoton*, wenn f entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist.



eine streng monoton steigende Funktion   eine streng monoton fallende Funktion

Im 7. Übungsblatt wird gezeigt, dass die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist. Das folgende Lemma gibt weitere Beispiele von streng monoton steigenden Funktionen.

Lemma 8.1. *Es sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$$

streng monoton steigend. Wenn k ungerade ist, dann ist auch die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$$

streng monoton steigend.

Beweis. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$$

streng monoton steigend. Es sei also $x_1 > x_2 \geq 0$. Wenn $x_2 = 0$, dann gilt offensichtlich, das $x_1^k > 0 = x_2^k$. Wir nehmen nun also an, dass $x_2 > 0$. Dann folgt aus Satz 2.7, dass

$$x_1^k \;=\; (x_2 + \underbrace{(x_1 - x_2)}_{=:a>0})^k \;=\; (x_2+a)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \underbrace{x_2^n a^{k-n}}_{>0} \;=\; x_2^k + \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k}{n} \underbrace{x_2^n a^{k-n}}_{>0} \;>\; x_2^k.$$

Wir sehen also, dass in der Tat $x_1^k > x_2^k$. Wir haben damit die erste Aussage des Lemmas bewiesen.

Es sei nun k ungerade. Wir schreiben $k = 2l + 1$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen zeigen, dass dann auch die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$$

streng monoton steigend ist. Es seien also $x_1 > x_2$. Wir betrachten drei Fälle.

1. Fall: $x_1 > x_2 \geq 0$. Dann hatten wir gerade gezeigt, dass $x_1^k > x_2^k$.
2. Fall: $x_1 > 0 > x_2$. Dann folgt aus den Ordnungsaxiomen, dass $x_1^k > 0$. Zudem folgt aus Satz 1.13, dass $x_2^{2l} = (x_1^l)^2 > 0$. Es folgt dann aus den Ordnungsaxiomen, dass $x_2^{2l+1} < 0$. Wir sehen also, dass $x_1^k > 0 > x_2^k$.
3. Fall: $0 \geq x_1 > x_2$. Dann ist $0 \leq -x_1 \leq -x_2$. Es folgt also aus dem 1. Fall, dass gilt $(-x_1)^k < (-x_2)^k$. Aber nachdem k ungerade ist gilt $(-x_1)^k = -x_1^k$ sowie $(-x_2)^k = -x_2^k$. Also folgt, dass $-x_1^k < -x_2^k$. Aus den Ordnungsaxiomen folgt dann, dass $x_1^k > x_2^k$.

$\square$

Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ als den Wertebereich von f. Mithilfe des folgenden Lemmas können wir für streng monotone Funktionen den Wertebereich ohne großen Aufwand bestimmen.

Lemma 8.2. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monoton steigende Funktion.*

(1) *Wenn $D = [a, b]$ ein kompaktes Intervall ist, dann ist $f\big([a, b]\big) = [f(a), f(b)]$.*
(2) *Wenn $D = (a, b)$ ein offenes Intervall ist, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$, dann ist* [68]

$$f\big((a, b)\big) = \left(\lim_{x \searrow a} f(x) \;,\; \lim_{x \nearrow b} f(x) \right).$$

Zudem gelten die offensichtlichen Abänderungen für Intervalle vom Typ $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$ sowie $[a, \infty)$. Wenn f streng monoton fallend ist, dann gelten die gleichen Aussagen, allerdings mit den Grenzen der Intervalle vertauscht.

Für die streng monoton steigende Funktion

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon [0, 4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

folgt beispielsweise aus Lemma 8.2, dass $\exp([0, 4]) = [e^0, e^4] = [1, e^4]$. Betrachten wir zudem die streng monoton fallende Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [1, \infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

[68] Hierbei definieren wir natürlich $\lim_{x \nearrow \infty} f(x)$ als $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und ganz analog $\lim_{x \nearrow -\infty} f(x)$ als $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Dann besagt also Lemma 8.2, dass
$$f\big([1,\infty)\big) = \Big(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ ,\ f(1)\Big] = (0,1].$$

Beweis. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion.

(1) Es sei $D=[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Nachdem f streng monoton steigend ist, folgt
$$x\in[a,b] \quad\Longrightarrow\quad f(x)\in[f(a),f(b)],$$
d.h. $f\big([a,b]\big)$ ist enthalten im Intervall $[f(a),f(b)]$. Andererseits besagt der Zwischenwertsatz 7.3, dass es zu jedem $y\in[f(a),f(b)]$ ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$ gibt. Wir sehen also, dass $f\big([a,b]\big)=[f(a),f(b)]$.

(2) Es sei nun $D=[a,\infty)$ ein halb-offenes, unbeschränktes Intervall mit der Eigenschaft, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Dann gilt [69]
$$\begin{aligned} f\left([a,\infty)\right) = f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z},n>a}[a,n]\Big) &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z},n>a} f\big([a,n]\big) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z},n>a}[f(a),f(n)] && \text{nach dem ersten Fall} \\ &= [f(a),\infty) && \text{nachdem } \lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty. \end{aligned}$$

Die anderen Aussagen werden ganz analog bewiesen. □

Eine Funktion $f\colon D\to\mathbb{R}$ ist *bijektiv auf ihr Bild*, wenn die Abbildung $f\colon D\to f(D)$ bijektiv ist. Wir werden öfters folgendes elementare Lemma verwenden.

Lemma 8.3. *Jede streng monotone Funktion ist bijektiv auf ihr Bild.*

Beispielsweise folgt aus dem Lemma, dass die Funktion
$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$
bijektiv auf ihr Bild ist.

Beweis. Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Dann folgt sofort, dass f injektiv ist. Andererseits ist die Abbildung $f\colon D\to f(D)$ per Definition surjektiv. Also ist f bijektiv auf ihr Bild. □

Definition. Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine Funktion, welche bijektiv auf ihr Bild ist. Dann existiert zu jedem $a\in f(D)$ genau ein $b\in D$ mit der Eigenschaft $f(b)=a$. Dieses b wird mit $f^{-1}(a)$ bezeichnet und die Funktion
$$\begin{aligned} f^{-1}\colon f(D) &\to D \\ a &\mapsto f^{-1}(a) = \text{das einzige } b\in D \text{ mit } f(b)=a \end{aligned}$$

[69] Hierbei verwenden wir folgende Tatsache, welche sofort aus den Definitionen folgt: Wenn $f\colon X\to Y$ eine beliebige Abbildung zwischen Mengen X und Y ist, und wenn $A,B\subset X$ Teilmengen von X sind, dann gilt
$$f(X\cup Y) = f(X)\cup f(Y).$$

heißt die *Umkehrfunktion von* f.

Wir können die Definition der Umkehrfunktion auch so formulieren: Es gilt

$$f^{-1}(a) = b \quad \Longleftrightarrow \quad f(b) = a. \tag{8.1}$$

Wir können jetzt folgendes elementare Lemma beweisen.

Lemma 8.4. *Es sei* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, welche bijektiv auf ihr Bild ist. Dann gilt*

$$f^{-1}(f(x)) \;=\; x, \quad \text{für alle } x \in D,$$

sowie

$$f(f^{-1}(x)) \;=\; x, \quad \text{für alle } x \in f(D).$$

Beweis. Es sei also $x \in D$. Dann ist $f^{-1}(f(x)) = a$ das eindeutig bestimmte Element a mit $f(a) = f(x)$. Es folgt also, dass $a = x$.

Es sei nun $x \in f(D)$. Wir schreiben $a = f^{-1}(x)$. Es folgt aus (8.1), dass $f(a) = x$. Wir sehen also, dass $f(f^{-1}(x)) = x$. □

Zur Erinnerung, wir hatten den Graphen von einer Funktion $g\colon E \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\mathrm{Graph}(g) = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in E\}.$$

Das folgende Lemma besagt nun, dass wir den Graphen von f^{-1} dadurch erhalten, indem wir den Graphen von f an der xy–Diagonale spiegeln.

Lemma 8.5. *Es sei* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, welche bijektiv auf ihr Bild ist. Dann gilt*

$$\mathrm{Graph}(f^{-1}) = \textit{Spiegelung von } \mathrm{Graph}(f) \textit{ an der } xy\textit{–Diagonale.}$$

Beweis. Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} (x,y) \in \mathrm{Graph}(f^{-1}) & \Longleftrightarrow & y = f^{-1}(x) & \\ & \Longleftrightarrow & f(y) = x & \text{nach (8.1)} \\ & \Longleftrightarrow & (y,x) \in \mathrm{Graph}(f), & \text{denn } (y,x) = (y, f(y)). \end{array}$$

Wir sehen also, dass wir den Graphen von f^{-1} aus dem Graphen von f durch Vertauschen der x- und der y-Koordinate erhalten. Anders ausgedrückt, wir erhalten den Graphen von f^{-1}, indem wir den Graphen von f an der xy–Diagonale spiegeln. □

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,2] & \to & [0,4] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

In Lemma 8.1 hatten wir gezeigt, dass die Funktion f streng monoton ist. Es folgt aus Lemma 8.2, dass $f(0,2]) = [f(0), f(2)] = [0,4]$. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\colon [0,4] & \to & [0,2] \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

Die Graphen der Funktionen f und f^{-1} werden in Abbildung 2 skizziert.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir mehrmals folgendes Lemma verwenden.

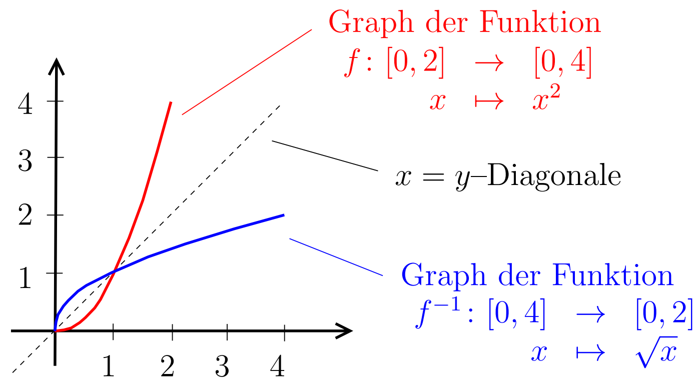


ABBILDUNG 2. Die Funktion $f(x) = x^2, x \in [0,2]$ und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \in [0,4]$.

Lemma 8.6. *Wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend (bzw. fallend) ist, dann ist $f^{-1}\colon f(D) \to D$ ebenfalls streng monoton steigend (bzw. fallend).*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend ist. Wir wollen zeigen, dass dann auch $f^{-1}\colon f(D) \to D$ streng monoton steigend ist.

Es seien also $y_1 > y_2 \in f(D)$. Wir schreiben $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Wir müssen zeigen, dass $x_1 > x_2$. Nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist, d.h. wir nehmen an, dass $x_1 \leq x_2$. Wenn $x_1 = x_2$, dann ist natürlich auch $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Dies ist ein Widerspruch. Wenn $x_1 < x_2$, dann folgt aus der strengen Monotonie von f, dass $y_2 = f(x_2) > f(x_1) = y_1$, aber dies ist im Widerspruch zu $y_1 > y_2$. Wir haben also gezeigt, dass $f^{-1}\colon f(D) \to D$ streng monoton steigend ist.

Der Fall, dass $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend ist, wird ganz analog bewiesen. □

In der Analysis interessieren wir uns hauptsächlich für stetige Funktionen. Es stellt sich also nun folgende Frage: wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ bijektiv auf ihr Bild ist, und wenn f stetig ist, folgt dann, dass f^{-1} ebenfalls stetig ist? Wir werden im folgenden Beispiel sehen, dass die Antwort im Allgemeinen Nein ist.

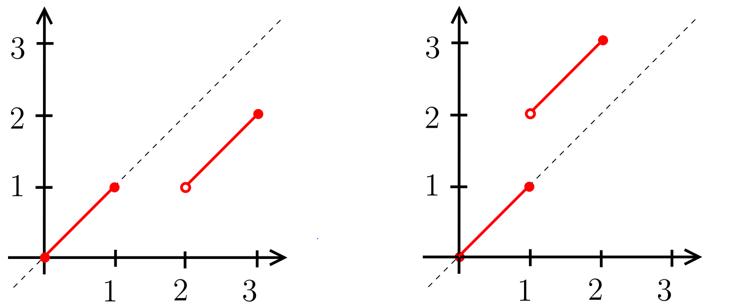
Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] \cup (2,3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ x-1, & \text{falls } x \in (2,3]. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist f stetig und man sieht leicht, dass die Funktion f bijektiv auf ihr Bild ist. Die Wertemenge beträgt dabei $f([0,1] \cup (2,3]) = [0,2]$. Die Umkehrfunktion ist dann wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} f\colon [0,2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ x+1, & \text{falls } x \in (1,2]. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist also im Punkt $x_0 = 1$ nicht stetig. Die Graphen von f und f^{-1} sind in Abbildung 3 skizziert.



die Funktion f ist stetig und bijektiv auf ihr Bild

Die Umkehrfunktion f^{-1} ist nicht stetig

Abbildung 3. Eine stetige Funktion, deren Umkehrfunktion unstetig ist.

Wir sehen also, dass die Umkehrfunktion im Allgemeinen nicht stetig ist, aber wir sehen auch, dass zumindest in dem obigen Beispiel die nicht-Stetigkeit von f^{-1} an der 'Zerissenheit' vom Definitionsbereich von f liegt. Wir werden deswegen im Folgenden Funktionen betrachten, welche auf einem Intervall definiert sind.

Der folgende Satz ist der Hauptsatz dieses Kapitels.

Satz 8.7. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion.* [70] *Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to D$ stetig.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $D = \mathbb{R}$, und dass $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion ist.

Es sei also $y_0 \in f(\mathbb{R})$. Wir wollen zeigen, dass f^{-1} stetig im Punkt y_0 ist. Wir setzen $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Wir wollen also zeigen, dass

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{|y-y_0|<\delta}{\forall} |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Nachdem f streng monoton steigend ist, folgt, dass

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 = f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon).$$

[70] Wir setzen hier also *nicht* voraus, dass f stetig ist. Dies ist kein Tippfehler. Wenn f streng monoton ist, dann ist die Umkehrfunktion stetig, selbst wenn f selber nicht stetig ist. Es ist vielleicht hilfreich mal explizit den Graphen von solchen Funktionen aufzuzeichnen.

Wir wählen nun ein $\delta > 0$, so dass [71]

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)).$$

Dann gilt für $y \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned}
|y - y_0| < \delta \quad &\Rightarrow \quad (y_0 - \delta < y < y_0 + \delta) \\
&\Rightarrow \quad (f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)) \\
&\Rightarrow \quad \big(f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon))\big) \quad \text{nach Lemma 8.6} \\
&\Rightarrow \quad (x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon) \\
&\Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

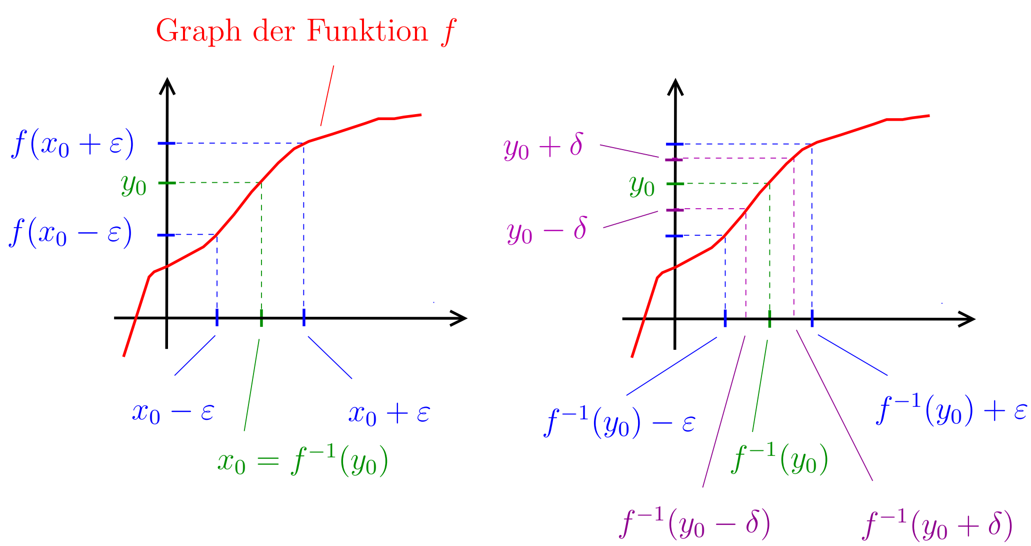


Abbildung 4. Skizze für den Beweis der Stetigkeit von Umkehrfunktionen von streng monotonen Funktionen.

Wir müssen nun noch die Fälle betrachten, dass D ein beliebiges Intervall ist, oder dass f streng monoton fallend ist. Diese Fälle werden ganz ähnlich bewiesen und sind eine freiwillige Übungsaufgabe. $\square$

8.2. **Die Wurzelfunktionen.** Es sei $k \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 8.1 ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^k \end{aligned}$$

[71] Beispielsweise könnten wir

$$\delta := \min\{f(x_0 + \varepsilon) - y_0, y_0 - f(x_0 - \varepsilon)\}$$

setzen.

streng monoton steigend und wir hatten schon längst gesehen, dass die Funktion stetig ist. Zudem folgt aus Lemma 8.2, dass

$$f([0,\infty)) \;=\; \big[f(0), \lim_{x\to\infty} x^k\big) \;=\; [0,\infty).$$

Die Umkehrfunktion

$$\begin{array}{rcl} [0,\infty) & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[k]{x} := f^{-1}(x) \end{array}$$

heißt die *k-te Wurzelfunktion*. Die Umkehrfunktion ist stetig nach Satz 8.7.

Wenn k ungerade ist, dann ist nach Lemma 8.1 die Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$$

streng monoton steigend und es folgt aus Lemma 8.2, dass

$$f((-\infty,\infty)) \;=\; \big(\lim_{x\to-\infty} x^k, \lim_{x\to\infty} x^k\big) \;=\; (-\infty,\infty).$$

Die Umkehrfunktion ist also auch auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und wird ebenfalls als Wurzelfunktion bezeichnet.

8.3. **Die Logarithmusfunktionen.** Wir fassen zuerst die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion zusammen.

Lemma 8.8. *Die Exponentialfunktion*

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \end{array}$$

besitzt folgende Eigenschaften:

(1) $\exp(0) = 1$,
(2) $e := \exp(1)$ *ist die Eulersche Zahl, es gilt* $e \approx 2.718281828\ldots$,
(3) *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,
(4) *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
(5) *für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\exp(n) = e^n$,
(6) *für alle* $x \in (-\infty, 0)$ *gilt* $\exp(x) \in (0,1)$,
(7) *für alle* $x \in (0,\infty)$ *gilt* $\exp(x) \in (1,\infty)$,
(8) $\exp$ *ist stetig,*
(9) *die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend,*
(10) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$,
(11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$,
(12) $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.

Beweis.

(1)-(8) Die ersten acht Aussagen haben wir in Theorem 5.18, Satz 5.19 und Satz 6.6 bewiesen.

(9) Wir wollen nun zeigen, dass die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist. Es sei also $x_1 > x_2$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} \exp(x_1) & = & \exp((x_1 - x_2) + x_2) & \\ & = & \exp(x_1 - x_2) \cdot \exp(x_2) & \text{nach Eigenschaft (3)} \\ & > & \exp(x_2) & \text{nach Eigenschaft (7), weil } x_1 - x_2 > 0. \end{array}$$

(10) Es folgt aus (5), dass die Funktionswerte der Exponentialfunktion nach oben unbeschränkt sind. Es folgt nun aus der strengen Monotonie der Exponentialfunktion, dass $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$.[72]

(11) Diese Aussage folgt aus den Eigenschaften (3) und (10).

(12) Es folgt aus Lemma 8.2 und aus (10) und (11), dass $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

□

Die Umkehrfunktion von $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird die *Logarithmusfunktion* (kurz ln) genannt. Der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion ist $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Der Graph der Exponentialfunktion und der Graph der Logarithmusfunktion sind in Abbildung 5 skizziert.

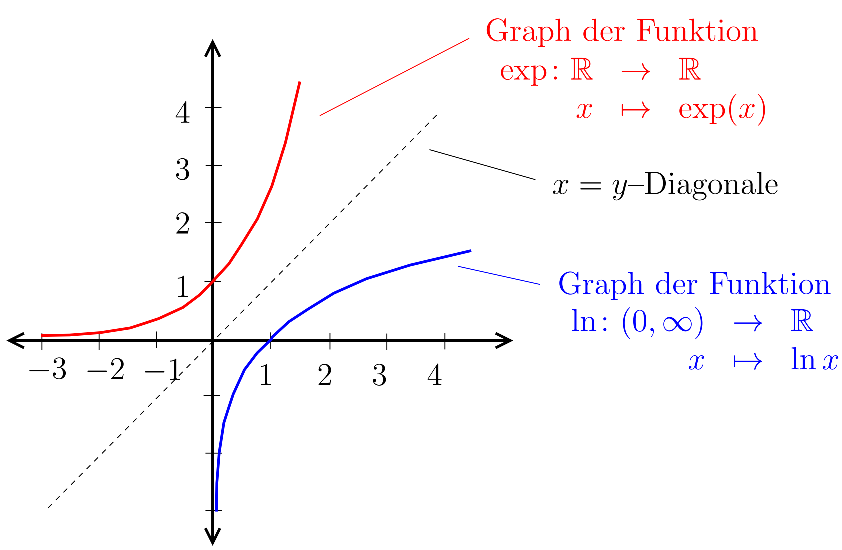


Abbildung 5. Die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion.

Der folgende Satz folgt nun aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion, welche wir in Lemma 8.8 zusammen getragen hatten und aus den allgemeinen Eigenschaften von Umkehrfunktionen.

[72]Warum folgt das aus der strengen Monotonie?

Satz 8.9. *Die Logarithmusfunktion*

$$\begin{array}{rcl} \ln\colon (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

hat folgende Eigenschaften:

(1) $\ln(1) = 0$,
(2) $\ln(e) = 1$,
(3) *für alle* $x, y \in (0,\infty)$ *gilt* $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$,
(4) *für alle* $x \in (0,\infty)$ *gilt* $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$,
(5) *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\ln(e^n) = n$,
(6) *die Logarithmusfunktion ist stetig,*
(7) *die Logarithmusfunktion ist streng monoton steigend,*
(8) *es ist*

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ sowie } \exp(\ln(x)) = x \text{ für alle } x \in (0,\infty),$$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$,
(10) $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty$.

Beweis.

(1) Nachdem $\exp(0) = 1$, folgt, dass $\ln(1) = \exp^{-1}(1) = 0$.
(2) Dies folgt wie (1) sofort aus der Definition der Umkehrabbildung, und der Tatsache, dass $\exp(1) = e$.
(3) Es seien also $x, y \in (0,\infty)$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \ln(x \cdot y) = \ln(\exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y))) & = & \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) \\ & = & \ln(x) + \ln(y). \end{array}$$

(4) Es sei $x \in (0,\infty)$. Aus (1) und (3) folgt, dass $0 = \ln(1) = \ln(x \cdot \frac{1}{x}) = \ln(x) + \ln(\frac{1}{x})$.
(5) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Nachdem $\exp(n) = e^n$ folgt, wie in (1) und (2), dass $\ln(e^n) = n$.
(6) Nachdem die Exponentionalfunktion stetig ist, folgt aus Satz 8.7, dass die Logarithmusfunktion stetig ist.
(7) Nachdem die Logarithmusfunktion streng monoton steigend ist, folgt aus Lemma 8.6, dass die Logarithmusfunktion streng monoton steigend ist.
(8) Diese Aussage folgt aus Lemma 8.4.
(9) Es folgt aus (5), dass $\ln(e^n) = n$, d.h. die Logarithmusfunktion ln ist nach oben unbeschränkt. Nachdem die Logarithmusfunktion zudem streng monoton steigend ist, folgt, dass $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$. [73]

[73]Hierbei verwenden wir folgende einfache Tatsache: es sei $f\colon (x_0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion, welche nach oben unbeschränkt ist. Dann gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. In der Tat, denn sei $C \in \mathbb{R}$. Nachdem f nach oben unbeschränkt ist, gibt es ein $X \in (x_0,\infty)$ mit $f(X) > C$. Nachdem streng monoton steigend ist, gilt dann für alle $x \geq X$, dass $f(x) > C$.

(10) Für $n \in \mathbb{N}$ folgt aus (4) und (5), dass $\ln(e^{-n}) = -\ln(e^n) = -n$. Es folgt, dass die Logarithmusfunktion ln nach unten unbeschränkt ist. Nachdem die Logarithmusfunktion streng monoton steigend ist, folgt nun, dass $\lim_{x\searrow 0}\ln(x) = -\infty$.

□

8.4. **Potenzen von reellen Zahlen.** Es sei $a \in (0,\infty)$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$a^x \quad := \quad \exp(x \cdot \ln(a))$$

gesprochen 'a hoch x'. Insbesondere folgt aus $\ln(e) = 1$, dass

$$e^x \quad = \quad \exp(x).$$

Der folgende Satz besagt nun, dass 'a hoch x' alle Eigenschaften erfüllt, die man erwarten würde.

Satz 8.10. *Es seien $a, b \in (0,\infty)$ und $x, y \in \mathbb{R}$, zudem sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & a^0 & = & 1, \\
(2) & a^n & = & \underbrace{a \cdot \ldots a}_{n-\text{Mal}} \\
(3) & a^x a^y & = & a^{x+y} \\
(4) & a^{-x} & = & \frac{1}{a^x} \\
(5) & (a^x)^y & = & a^{xy} \\
(6) & a^x b^x & = & (ab)^x.
\end{array}$$

Wir hatten natürlich schon ganz am Anfang, auf Seite 10, die Notation a^n für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ eingeführt. Die erste Aussage des Satzes besagt also, dass die zwei Definitionen für a^n mit $n \in \mathbb{N}$ übereinstimmen.

Beweis. Es seien also $a, b \in (0,\infty)$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) Es ist $a^0 = \exp(\ln(a)\cdot 0) = \exp(0) = 1$.

(2) Es sei also $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll}
\exp(n \cdot \ln(a)) & = & \exp(\underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n-\text{Mal}}) & \\
& = & \underbrace{\exp(\ln(a)) \cdot \cdots \cdot \exp(\ln(a))}_{n-\text{Mal}} & \text{weil } \exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \\
& = & \underbrace{a \cdot \ldots a}_{n-\text{Mal}} & \text{weil } \exp(\ln(x)) = x \text{ für alle } x \in (0,\infty).
\end{array}$$

(3) Es ist

$$\begin{array}{rclcl}
a^x a^y & = & \exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(y \cdot \ln a) & = & \exp(x \cdot \ln a + y \cdot \ln a) \\
& & & = & \exp((x+y)\cdot \ln a) \;=\; a^{x+y}.
\end{array}$$

(4) Aus (1) und (3) folgt, dass $a^{-x} \cdot a^x = a^{-x+x} = a^0 = 1$, also erhalten wir, dass $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

(5), (6) Diese beiden Aussagen folgen leicht aus den Definitionen und den Eigenschaften der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion. Diese Aussagen werden im 8. Übungsblatt bewiesen.

□

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma, welches in Übungsblatt 8 bewiesen wird.

Lemma 8.11. *Es sei $a \in (0, \infty)$ und $x \in \mathbb{R}$, dann gilt*
$$\ln\left(a^x\right) \;=\; x \cdot \ln(a).$$

9. Die komplexen Zahlen

9.1. **Der Körper der komplexen Zahlen.** Wir bezeichnen nun mit

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller formalen Summen $a+bi$, wobei i ein festgewähltes Symbol ist. Wir nennen $\mathbb{C}$ die *Menge der komplexen Zahlen*. Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir hierbei $a + 0i = a$ und $0 + ai = ai$. Wir können komplexe Zahlen wie folgt addieren

$$(x + yi) + (x' + y'i) \quad := \quad (x + x') + (y + y')i, \qquad \text{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R},$$

und wie folgt mit einem Skalar, d.h. mit einer reellen Zahl, multiplizieren

$$\lambda \cdot (x + yi) \quad := \quad \lambda x + \lambda yi, \qquad \text{wobei } x, y, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Man kann nun leicht überprüfen, dass $\mathbb{C}$ mit dieser Addition und dieser Skalarmultplikation ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum ist. Insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + yi \end{array}$$

ein Isomorphismus von reellen Vektorräumen. Wir stellen uns deswegen die komplexen Zahlen bildlich auch als die 2-dimensionale Ebene vor.

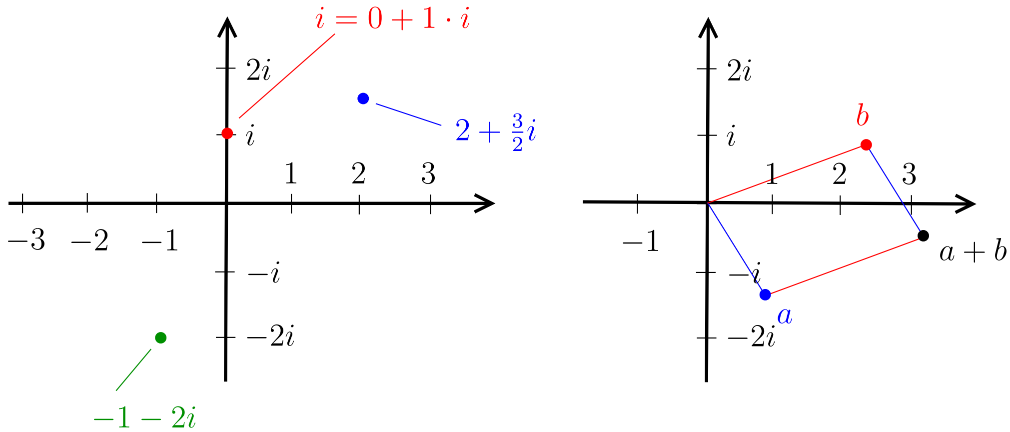


Abbildung 6. Graphische Darstellung von komplexen Zahlen und deren Addition.

Der folgende Satz besagt nun, dass man auf den komplexen Zahlen eine Multiplikation einführen kann, so dass alle Körperaxiome erfllt sind.

Satz 9.1. *Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit der Addition*

$$(x + yi) + (x' + y'i) \quad := \quad (x + x') + (y + y')i, \qquad \textit{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R},$$

und der Multiplikation

$$(x + yi) \cdot (x' + y'i) \quad := \quad (xx' - yy') + (xy' + x'y)i, \quad \textit{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R}.$$

ist ein Körper.

Die Multiplikation

$$(x+yi)\cdot(x'+y'i) \;=\; (xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

erfolgt also durch Ausmultiplizieren und indem wir $i^2=-1$ setzen.

Beweis. Wir müssen also jetzt zeigen, dass alle Körperaxiome erfüllt sind.

(A1)-(A4) Elementares Nachrechnen zeigt, dass die Additionsaxiome (A1) bis (A4) erfüllt sind.

(M1) Das Assoziativgesetz zeigt man durch explizites Nachrechnen.

(M2) Die Definition der Multiplikation ist symmetrisch in $x+yi$ und $x'+y'i$, also ist die Multiplikation kommutativ.

(M3) Für alle $x+iy\in\mathbb{C}$ gilt

$$(x+iy)\cdot 1=(x+iy)(1+0i)=x+yi,$$

d.h. $1=1+0i$ ist ein multiplikativ neutrales Element.

(M4) Es sei also $x+iy\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dann ist

$$(x+iy)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(x-iy) \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}(x+iy)(x-iy) \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2) \;=\; 1.$$

Anders ausgedrückt, es ist

$$(x+iy)^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2}(x-iy).$$

(D) Das Distributivgesetz zeigt man ebenfalls durch explizites Nachrechnen.

□

Wir schreiben manchmal auch $i=:\sqrt{-1}$, und für eine reelle Zahl $a\geq 0$ schreiben wir manchmal

$$\sqrt{-a} \;:=\; \sqrt{a}\cdot i$$

Dann gilt in der Tat, dass

$$\sqrt{-a}^2 \;=\; (\sqrt{a}\cdot i)^2=\sqrt{a}^2\cdot i^2=a\cdot(-1)=-a.$$

Lemma 9.2. *Es sei $p(x)=ax^2+bx+c$ ein Polynom mit $a,b,c\in\mathbb{R}$ und $a\neq 0$. Dann existiert eine komplexe Zahl z mit $p(z)=0$.*

Beweis. Die quadratische Lösungsformel besagt, dass $p(z)=0$ für

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite definiert im Allgemeinen keine reelle Zahl. Aber wie wir gerade gesehen hatten, definiert der Ausdruck komplexe Zahlen. Diese sind dann die Nullstellen von p. □

In Analysis III werden wir folgenden viel allgemeineren Satz beweisen.

Satz 9.3. (***Fundamentalsatz der Algebra***) *Es sei* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ *ein beliebiges Polynom mit komplexen Koeffizienten, wobei* $k \geq 1$ *und* $a_k \neq 0$. *Dann existiert ein* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $p(z) = 0$.

Bemerkung. Es sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann besagt der Fundamentalsatz der Algebra, dass das Polynom $x^2 - w$ eine komplexe Nullstelle besitzt. D.h. es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = w$. Anders ausgedrückt, jede komplexe Zahl besitzt eine Wurzel. In Übungsblatt 9 werden wir der Frage nachgehen, was die Wurzel(n) aus i sind.

Wir führen jetzt weitere Definitionen ein. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt

$\mathrm{Re}(z)$	$:=$	x	der *Realteil von* z,
$\mathrm{Im}(z)$	$:=$	y	der *Imaginärteil von* z,
$\overline{z}$	$:=$	$x - iy$	die *zu* z *konjugiert komplexe Zahl*.

Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ wird oft als z *quer* bezeichnet. Die geometrische Bedeutung dieser Definitionen wird in Abbildung 7 skizziert.

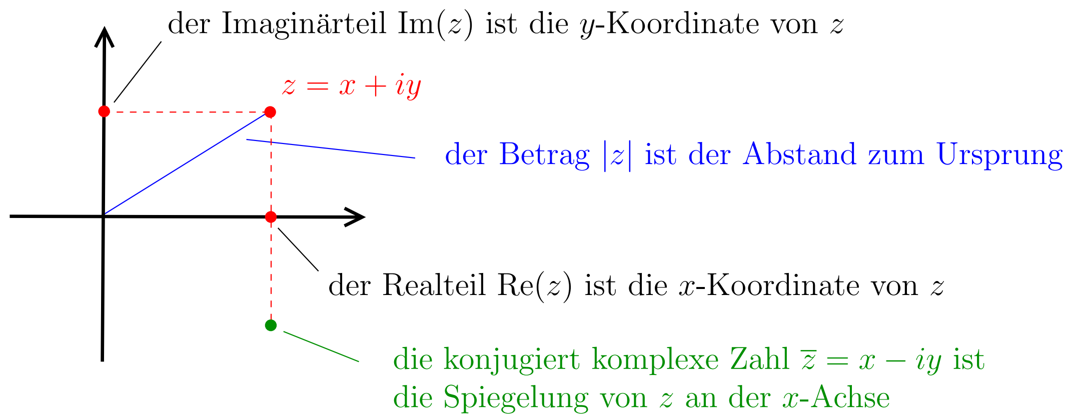


ABBILDUNG 7. Die geometrische Bedeutung von Realteil, Imaginärteil und konjugiert komplexer Zahl.

Lemma 9.4. *Es seien* $w, z \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathrm{Re}(z) & = & \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \\
(2) & \mathrm{Im}(z) & = & \frac{1}{2i}(z - \overline{z}), \\
(3) & \overline{w + z} & = & \overline{w} + \overline{z}, \\
(4) & \overline{wz} & = & \overline{w} \cdot \overline{z}.
\end{array}$$

Beweis. Alle diese Aussagen können durch elementares Nachrechnen bewiesen werden. Es seien also $w = u + vi$ und $z = x + yi$ komplexe Zahlen. Dann gilt in der Tat

$$\begin{array}{llcl}
(1) & \mathrm{Re}(z) & = & \frac{1}{2}\big(x + yi + \overline{x + yi}\big) \ = \ \frac{1}{2}(x + yi + x - yi) \ = \ x \\
(2) & \mathrm{Im}(z) & = & \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \ = \ \frac{1}{2i}\big(x + yi - \overline{(x + iy)}\big) \ = \ \frac{1}{2i}(x + yi - x + yi) \ = \ y \\
(3) & \overline{w + z} & = & \overline{u + x + (v + y)i} \ = \ u + x - vi - yi \ = \ \overline{w} + \overline{z} \\
(4) & \overline{wz} & = & \overline{ux - vy + (uy + vx)i} \ = \ ux - vy - (uy + vx)i \\
 & & = & (u - vi)(x - yi) \ = \ \overline{w} \cdot \overline{z}.
\end{array}$$

□

Es sei $z = x + yi$ eine komplexe Zahl. Wir bezeichnen dann $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ als den *Betrag von z*. Das folgende Lemma fasst einige Eigenschaften des Betrags von komplexen Zahlen zusammen.

Lemma 9.5. *Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & |z| & \geq & 0 & \textit{und } |z| = 0 \textit{ genau dann, wenn } z = 0, \\
(2) & |z| & = & \sqrt{z \cdot \overline{z}}, & \\
(3) & \textit{für } z \neq 0 \textit{ gilt } z^{-1} & = & \frac{1}{|z|^2}\overline{z} & \\
(4) & |w \cdot z| & = & |w| \cdot |z|, & \\
(5) & |w + z| & \leq & |w| + |z| & (\textit{Dreiecksungleichung}), \\
(6) & |z| & \geq & |\mathrm{Re}(z)| & \textit{und } |z| \geq |\mathrm{Im}(z)|.
\end{array}$$

Beweis. Alle diese Aussagen können durch elementares Nachrechnen bewiesen werden. Es seien also $w = u + vi$ und $z = x + yi$ komplexe Zahlen.

(1) Es ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, und wenn $|z| = 0$, dann ist auch $x^2 + y^2 = 0$, d.h. $x = 0$ und $y = 0$.
(2) Es ist $\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
(3) Es ist $z \cdot \frac{1}{|z|^2}\overline{z} = \frac{1}{z\overline{z}} z\overline{z} = 1$, also ist $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.
(4) Aus (2) und aus Lemma 9.4 (4) folgt, dass
$$|w \cdot z| = \sqrt{wz \cdot \overline{wz}} = \sqrt{w \cdot \overline{w} \cdot z \cdot \overline{z}} = \sqrt{w\overline{w}} \cdot \sqrt{z\overline{z}} = |w| \cdot |z|.$$
(5) Die Dreiecksungleichung wird in Übungsblatt 8 bewiesen.
(6) Es ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |\mathrm{Re}(z)|$. Die zweite Ungleichung wird ganz analog bewiesen.

□

Bemerkung. Wir haben nun also gesehen, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist. Es stellt sich die Frage, ob man eine Relation $>$ auf $\mathbb{C}$ definieren kann, so dass $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper ist. Dies ist allerdings nicht möglich. In der Tat, denn in einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt nach Satz 1.13, dass $a^2 > 0$ für alle $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dies impliziert, dass $1 = 1 \cdot 1 > 0$. Aus (O3) folgt dann, dass $0 > -1$. Aber in $\mathbb{C}$ gilt $i^2 = -1$, welches nach Satz 1.13 positiv sein müsste, wenn $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper wäre.

Bemerkung. Wir haben jetzt also gesehen, dass wir auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ eine Addition und Multiplikation einführen können, welche alle Körperaxiome erfüllt. Es stellt sich dann die Frage, ob man auch auf $\mathbb{R}^3$ oder allgemeiner, dem $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ eine Multiplikation einführen kann, welche zusammen mit der offensichtlichen Addition einen Körper definiert und welcher $\mathbb{R}$ als Teilkörper enthält. Mit den Methoden der Algebra-Vorlesung kann man zeigen, dass dies nicht möglich ist. Man kann allerdings auf $\mathbb{R}^4$ eine Multiplikation einführen, so dass alle Axiome bis auf die Kommutativität (M2) gelten: [74]

`http://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion`

Zudem kann man auf $\mathbb{R}^8$ eine Multiplikation einführen, so dass alle Axiome bis auf die Assoziativität (M1) und die Kommutativität (M2) gelten:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Oktave_(Mathematik)`.

9.2. **Konvergenz von Folgen und Reihen von komplexen Zahlen.** Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass wir ohne größere Probleme die meisten bisherigen Definitionen und Sätze von reellen Folgen und Reihen auf Folgen und Reihen von komplexen Zahlen übertragen können.

Wir beginnen mit der Definition der Konvergenz von einer Folge von komplexen Zahlen. Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir [75]

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N}{\forall} \ |z_n - z| < \varepsilon.$$

Für die Konvergenz von Folgen von komplexen Zahlen gelten fast die gleichen Aussagen wie in Satz 3.1, Satz 3.2 und Satz 3.3, mit fast wort-wörtlich den gleichen Beweisen. Insbesondere gilt:

(1) Wenn eine komplexe Folge konvergiert, dann ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.
(2) Eine komplexe Folge (a_n), welche konvergiert, ist auch beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen von komplexen Zahlen. Dann gilt zudem

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,
(4) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$,
(5) es sei $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$,
(6) wenn $b_n \neq 0$ für alle n und wenn $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Der folgende Satz besagt nun, dass man die Konvergenz von Folgen von komplexen Zahlen auf die Konvergenz von den Real- und Imaginärteilen zurückführen kann.

---

[74] Die Quaternionen sind definiert als die Summen $a + bi + cj + dk$, wobei i, j, k wiederum Symbole sind und a, b, c, d reelle Zahlen sind. Die Addition wird ganz 'naiv' definiert, und die Multiplikation ist definiert durch Ausmultiplizieren und durch die Regeln $i^2 = j^2 = k^2 = 1$ und $ij = k, jk = i, ki = j$.

[75] Hier ist ε eine positive reelle Zahl und $|z_n - z|$ bedeutet den Betrag der komplexen Zahl $z_n - z$

Satz 9.6. *Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt* [76]

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z).$$

Beweis. Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir jetzt $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$, wobei $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Wir schreiben zudem $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen zuerst die "$\Leftarrow$"-Richtung. Wir nehmen also an, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Dann folgt aus den obigen Eigenschaften (3) und (4), dass

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} iy_n \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n \;=\; x + iy.$$

Wir zeigen nun die "$\Rightarrow$"-Richtung. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus Lemma 9.5, dass

$$|x_n - x| \;=\; |\,\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z)| \;=\; |\,\mathrm{Re}(z_n - z)| \;\le\; |z_n - z|.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass aus $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Genauso zeigt man, dass $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. □

Lemma 9.7. *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von komplexen Zahlen. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} \;=\; \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}.$$

Beweis. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen, welche gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für alle n gilt

$$|\overline{z_n} - \overline{z}| \;=\; |\overline{z_n - z}| \;=\; |z_n - z|.$$

Es folgt sofort aus den Definitionen, dass $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z} = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}$. □

Die Definition einer Cauchy-Folge von komplexen Zahlen ist wort-wörtlich die Gleiche wie für reelle Folgen. Der folgende Satz besagt nun, dass auch Cauchy-Folgen von komplexen Zahlen immer konvergieren.

Satz 9.8. *Jede Cauchy-Folge von komplexen Zahlen konvergiert in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von komplexen Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $z_n = x_n + iy_n$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ folgt aus Lemma 9.5, dass

$$|x_n - x_m| \;=\; |\,\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| \;\le\; |z_n - z_m|.$$

Es folgt also, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist. Ganz analog zeigt man, dass (y_n) eine Cauchy-Folge ist. Aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen folgt, dass die Cauchy-Folgen (x_n) und (y_n) von reellen Zahlen konvergieren. Es folgt nun aus Satz 9.6, dass

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n,$$

insbesondere konvergiert die Folge (z_n) gegen eine Zahl in $\mathbb{C}$. □

Satz 9.9. (*Satz von Bolzano–Weierstraß*) *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine Teilfolge, welche konvergiert.*

[76] Die linke Seite betrifft die Konvergenz von einer Folge von komplexen Zahlen, während die rechte Seite von der Konvergenz von zwei Folgen von reellen Zahlen handelt.

Beweis. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von komplexen Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $z_n = x_n + iy_n$. Nachdem $|x_n| \le |z_n|$ und $|y_n| \le |z_n|$ sehen wir also, dass die Folgen (x_n) und (y_n) ebenfalls beschränkt sind.

Die Idee ist nun natürlich, den Satz von Bolzano–Weierstraß auf die beschränkten reellen Folgen (x_n) und (y_n) anzuwenden. Wir erhalten dann $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ und $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, so dass die Teilfolgen (x_{n_k}) und (y_{m_k}) konvergieren. Aber es gibt keinen Grund anzunehmen, dass diese Folgen n_k und m_k übereinstimmen. Wir müssen also die gleiche Idee etwas geschickter ausführen.

Es folgt aus Satz 4.20, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, welche gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wir betrachten jetzt die Folge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese Folge ist beschränkt, nach Satz 4.20 gibt es also eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, welche gegen ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert. Nachdem $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, gilt auch, dass $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Es folgt nun aus Satz 9.6, dass

$$\lim_{l\to\infty} z_{n_{k_l}} = \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} + i \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = x + iy.$$

□

Für eine Folge (z_n) von komplexen Zahlen definieren wir wiederum die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ als die Folge der Partialsummen. Falls diese Folge gegen eine komplexe Zahl konvergiert, dann bezeichnen wir mit $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ auch den Grenzwert. Beispielsweise gilt ganz analog zu Satz 3.13, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Für konvergente Reihen gelten dann die üblichen Rechenregeln wie in Satz 3.12. Zudem gilt auch folgendes Lemma.

Lemma 9.10. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ eine konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} z_n}.$$

Beweis. Es folgt sofort aus den Definitionen, aus Lemma 9.4 sowie aus Lemma 9.7, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \overline{z_n} = \lim_{k\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{k} z_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} z_n}.$$

□

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ von komplexen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ der Beträge konvergiert. Mit wort-wörtlich den gleichen Formulierungen und Beweisen gelten folgende Aussagen:

(1) jede absolut konvergente Reihe konvergiert, siehe Satz 5.6,

(2) das Majorantenkriterium Satz 5.7, [77]
(3) das Quotientenkriterium Satz 5.8,
(4) der Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen (Satz 5.13),
(5) Satz 5.15 für komplexe Reihen.

Beispielsweise folgt, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\exp(z) \quad := \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \in \mathbb{C}$$

absolut konvergiert, und für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + z') \quad = \quad \exp(z) \cdot \exp(z').$$

Zudem folgt leicht aus Lemma 9.10, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(\overline{z}) \quad = \quad \overline{\exp(z)}.$$

Wir haben jetzt also gesehen, dass viele Definitionen und Aussagen über reelle Folgen und Reihen problemlos auf Folgen und Reihen von komplexen Zahlen übertragen werden können. Insbesondere alle Aussagen, welche nur mit dem Absolutbetrag $| \ |$ von reellen Zahlen formuliert wurden, übertragen sich problemlos. Allerdings können die Definitionen und Aussagen über reelle Zahlen, Folgen und Reihen, welche die Anordnung $>$ verwenden, *nicht* auf die komplexen Zahlen übertragen werden. Insbesondere gilt:

(1) es gibt *kein* Analogon vom Leibniz-Kriterium für komplexe Folgen,
(2) das Supremum und Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist *nicht* definiert,
(3) es macht keinen Sinn zu sagen, dass eine Folge von komplexen Zahlen (z_n) bestimmt gegen $-\infty$ oder $+\infty$ divergiert.

9.3. **Stetige Funktionen.** Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass wir ohne größere Probleme die meisten bisherigen Definitionen und Sätze von reellen Funktionen auf komplexe Funktionen übertragen können. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in D$. Wir definieren

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{z \in D \text{ mit} \\ |z-z_0|<\delta}}{\forall} \ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Folgender Satz wird ganz ähnlich wie Satz 9.6 bewiesen.

[77] Das Majorantenkriterium lautet nun wie folgt: Es sei (c_n) eine Folge von nicht-negativen reellen Zahlen und es sei (a_n) eine komplexe Folge, so dass $|a_n| \le c_n$ für alle n. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

Satz 9.11. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt:*

$$f \text{ ist stetig im Punkt } z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathrm{Re}(f(z)) \end{array} \text{ und } \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathrm{Im}(f(z)) \end{array}$$
$$\textit{sind stetig im Punkt } z_0.$$

Durch einfaches Umschreiben der Beweise für reelle Funktionen erhalten wir folgende Aussagen:

(1) Es sei $c \in \mathbb{C}$, dann sind die Funktionen
$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & c \end{array}$$
stetig.

(2) In Übungsblatt 9 werden wir zeigen, dass die Funktion
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$$
stetig ist.

(3) Die Summe, das Produkt, der Quotient und die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen sind stetig. Insbesondere sind Polynomfunktionen und rationale Funktionen stetig.

(4) Die Einschränkung einer stetigen Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf eine Teilmenge $E \subset D$ ist wiederum stetig.

Der Beweis von Satz 6.6 überträgt sich auch wort-wörtlich auf komplexe Zahlen und wir erhalten, dass die komplexe Exponentialfunktion
$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \exp(z) \end{array}$$
stetig ist.

10. Trigonometrische Funktionen

10.1. **Definition von Sinus und Kosinus.** Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir nun

$$e^z := \exp(z).$$

Das folgende Lemma besagt, dass für jedes t die komplexe Zahl e^{it} auf dem Einheitskreis liegt.

Lemma 10.1. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{it}| = 1$.*

Beweis. Es sei also $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} |e^{it}|^2 & = & e^{it}\overline{e^{it}} & \\ & = & e^{it}e^{\overline{it}} & \text{weil } \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)} \\ & = & e^{it}e^{-it} \;=\; e^{it-it} \;=\; e^0 \;=\; 1. & \end{array}$$

Also ist auch $|e^{it}| = 1$. □

Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{array}{rcll} \sin(t) & := & \mathrm{Im}(e^{it}), & \text{genannt } \textit{Sinus von } t \\ \cos(t) & := & \mathrm{Re}(e^{it}), & \text{genannt } \textit{Kosinus von } t. \end{array}$$

Die Definition von Sinus und Kosinus wird in Abbildung 8 veranschaulicht. Die komplexe

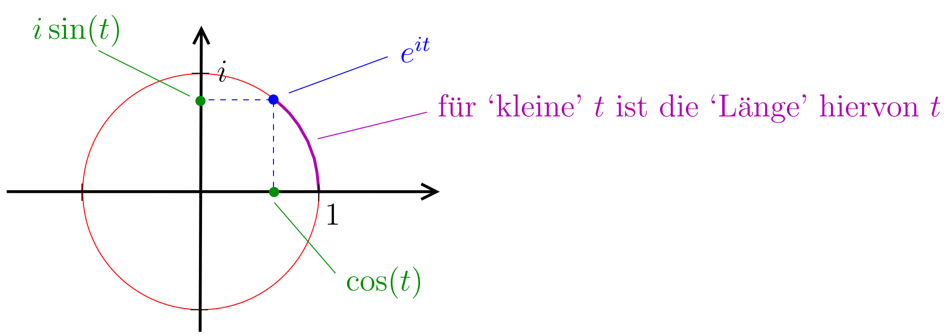


Abbildung 8. Die Definition von Sinus und Kosinus durch die komplexe Exponentialfunktion.

Zahl e^{it} liegt auf dem Einheitskreis um die Null in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und der Sinus ist die y-Koordinate von e^{it} und der Kosinus ist die x-Koordinate von e^{it}. Die anschauliche Bedeutung von e^{it} ist hierbei, dass, zumindest für 'kleine' t, der Kreisbogen zwischen $1 \in \mathbb{C}$ und e^{it} gerade die 'Länge' t besitzt. [78]

[78] Wir werden später sehen, dass dies für alle t zwischen $[0, 2\pi)$ gilt. Allerdings müssen wir erst noch die Zahl π sauber einführen. Im Moment haben wir auch keinen sauberen Begriff der Länge von einem Kreisbogen. Wir werden diesen Begriff erst in Analysis II einführen.

Wir können die Gleichungen $\sin(t) = \operatorname{Im}(e^{it})$ und $\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it})$ auch zusammenfassen zu

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \qquad \text{Eulersche Formel.}$$

Für eine beliebige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ und $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$. Es folgt also, dass

$$\begin{array}{rcccl} \sin(t) & = & \operatorname{Im}(e^{it}) & = & \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}), \\ \cos(t) & = & \operatorname{Re}(e^{it}) & = & \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}). \end{array}$$

Lemma 10.2. *Für $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \sin(t)^2 + \cos(t)^2 & = & 1, \\ (2) & \sin(-t) & = & -\sin(t) \\ (3) & \cos(-t) & = & \cos(t), \end{array}$$

.

Beweis. Es sei also $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \sin(t)^2 + \cos(t)^2 & = & \operatorname{Im}(e^{it})^2 + \operatorname{Re}(e^{it})^2 \;=\; |e^{it}|^2 \;=\; 1, \quad \text{nach Lemma 10.1} \\ (2) & \sin(-t) & = & \operatorname{Im}(e^{-it}) \;=\; \operatorname{Im}\left(e^{\overline{it}}\right) \;=\; \operatorname{Im}\left(\overline{e^{it}}\right) \;=\; -\operatorname{Im}(e^{it}) \;=\; -\sin(t) \\ (3) & \cos(-t) & = & \operatorname{Re}(e^{-it}) \;=\; \operatorname{Re}\left(e^{\overline{it}}\right) \;=\; \operatorname{Re}\left(\overline{e^{it}}\right) \;=\; \operatorname{Re}(e^{it}) \;=\; \cos(t). \end{array}$$

□

Wir hatten schon gesehen, dass die komplexe Exponentialfunktion stetig ist. Mithilfe von Satz 9.11 erhalten wir dann folgendes Lemma.

Lemma 10.3. *Die Funktionen*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(t) \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos(t) \end{array}$$

sind stetig.

Ein Vorteil von der Definition von Kosinus und Sinus mithilfe der komplexen Exponentialfunktion ist, dass sich nun die Additionstheoreme sehr leicht beweisen lassen.

Satz 10.4. (Additionstheoreme) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{array}{rcl} \cos(x+y) & = & \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) & = & \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y). \end{array}$$

Beweis. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \cos(x+y) + i\sin(x+y) & = & e^{i(x+y)} \\ & = & e^{ix} \cdot e^{iy} \qquad \text{weil } \exp(w+z) = \exp(w)\cdot\exp(z) \text{ für } w, z \in \mathbb{C} \\ & = & (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y)) \\ & = & (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) \;+\; i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)). \end{array}$$

Der Satz folgt nun aus dem Vergleich von den Realteilen und den Imaginärteilen. □

Korollar 10.5. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{array}{rcl} \sin(x) - \sin(y) & = & 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \textit{und} \\ \cos(x) - \cos(y) & = & -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{array}$$

Beweis. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $u := \frac{x+y}{2}$ und $v := \frac{x-y}{2}$. Dann folgt aus Satz 10.4, dass

$$\begin{array}{rcl} \sin(x) - \sin(y) & = & \sin(u+v) - \sin(u-v) \\ & = & (\sin u \cos v + \cos u \sin v) \; - \; (\sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v)) \\ & = & 2\cos u \sin v \qquad \text{denn } \cos(-v) = \cos(v) \text{ und } \sin(-v) = -\sin(v) \\ & = & 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \end{array}$$

Die zweite Aussage des Korollars wird ganz analog bewiesen. □

Satz 10.6. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{array}{rcl} \cos(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad = \quad \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) \\ \sin(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad = \quad \lim\limits_{k\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right). \end{array}$$

Beide Reihen konvergieren zudem absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\cos(x) + i\sin(x) \; = \; e^{ix} \; = \; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!} \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} i^n\frac{x^n}{n!}.$$

Nach Satz 9.6 können wir diese Reihe jetzt zerlegen, in Reihen mit reellen beziehungsweise imaginären Summanden. Wie man leicht sieht ist i^n reell, genau dann reell, wenn n gerade ist. [79] Es folgt also, dass

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n\frac{x^n}{n!} & = & \sum\limits_{n\,gerade} i^n\frac{x^n}{n!} \quad + \quad \sum\limits_{n\,ungerade} i^n\frac{x^n}{n!} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{\infty} i^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad + \quad i\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty} i^{2k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad + \quad i\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right), \quad \text{denn } i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k. \end{array}$$

Die Aussage des Satzes folgt nun, indem man den Real- und Imaginärteil zu Beginn und am Ende vergleicht. □

[79] Beispielsweise ist $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$, und so weiter.

10.2. **Definition von π.** Wir wollen im Folgenden die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion eingeschränkt auf das Intervall $[0,2]$ besser verstehen. Nachdem $e^{0t} = e^0 = 1$ folgt, dass $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$.

Lemma 10.7.

(1) *Für alle* $x \in (0,2]$ *gilt* $\sin(x) > 0$.
(2) *Es ist* $\cos(2) < 0$.

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit folgender Behauptung:

Behauptung. Es sei $\sum_{k=2m}^{\infty}(-1)^k a_k$ eine Reihe, wobei $(a_k)_{k\geq 2m}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Dann gilt

$$\sum_{k=2m}^{\infty}(-1)^k a_k \;\in\; [0, a_{2m}].$$

Es folgt aus dem Beweis vom Leibniz-Kriterium, siehe Satz 5.5 zeigt nun, dass für alle $n \geq 2m$ gilt, dass

$$\sum_{k=2m}^{n}(-1)^k a_k \;=\; a_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} - \cdots + (-1)^n a_n \;\in\; [0, a_{2m}].$$

Es folgt nun aus Satz 3.4, dass auch der Grenzwert der Folge in $[0, a_{2m}]$ liegt. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Lemmas zu.

(1) Es sei $x \in (0,2]$. Wir setzen $a_k = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Die Folge $(a_k)_{k\geq 2}$ ist monoton fallend. In der Tat, denn für $k \geq 2$ und $x \in (0,2]$ gilt, dass

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \;=\; \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}} \;=\; \frac{x}{2k+2} \;<\; 1,$$

denn $k \geq 2$ und $x \in (0,2]$. Es folgt nun, dass aus der obigen Behauptung, dass für $x \in (0,2]$ gilt, dass

$$\sin(x) \;=\; x - \frac{x^3}{6} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\in[0,\frac{x^5}{5!}]} \;\geq\; x - \frac{x^3}{6} \;=\; x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \;\geq\; x\left(1 - \frac{4}{6}\right) \;>\; 0.$$

(2) Die zweite Aussage wird ganz analog bewiesen. Es sei $x \geq 0$. Das gleiche Argument wie oben zeigt, dass

$$\cos(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \;=\; 1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\in[0,\frac{x^4}{4!}]} \;\leq\; 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Insbesondere gilt $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} < 0$.

□

Lemma 10.8. *Die Einschränkung der Kosinusfunktion auf das Intervall* $[0,2]$ *ist streng monoton fallend.*

Beweis. Es seien $x_2 > x_1$ zwei reelle Zahlen in $[0,2]$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} \cos(x_2)-\cos(x_1) & = & -2\sin\underbrace{\frac{x_2+x_1}{2}}_{\in(0,2]}\sin\underbrace{\frac{x_2-x_1}{2}}_{\in(0,2]} & \text{nach Korollar 10.5} \\ & < & 0 & \text{nach Lemma 10.7 (1).} \end{array}$$

□

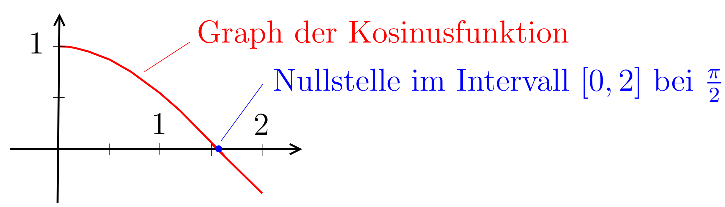


Abbildung 9. Der Graph der Kosinusfunktion im Intervall $[0,2]$.

Nachdem $\cos(0) > 0$ und $\cos(2) < 0$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (0,2)$, so dass $\cos(x) = 0$. Nachdem der Kosinus auf dem Intervall $[0,2]$ streng monoton fallend ist, gibt es *genau* eine Nullstelle im Intervall $[0,2]$. Wir definieren jetzt

$$\pi := 2 \cdot \text{die Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall } [0,2].$$

Aus $\sin(\frac{\pi}{2})^2 = \sin(\frac{\pi}{2})^2 + \cos(\frac{\pi}{2})^2 = 1$ und aus Lemma 10.7 (1), folgt dass $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Wir erhalten insbesondere

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \;=\; \cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}) \;=\; i.$$

Daraus können wir auch herleiten, dass

$$\begin{array}{rcl} e^{i\pi} & = & e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \;=\; i^2 \;=\; -1, \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} & = & e^{i\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \;=\; (-1)\cdot i \;=\; -i \\ e^{2\pi i} & = & e^{i\frac{3\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \;=\; (-i)\cdot i \;=\; 1. \end{array}$$

Diese komplexen Zahlen sind in Abbildung 10 skizziert. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \;=\; \cos(t) + i\sin(t). \end{array}$$

Diese Abbildung ist stetig mit $\gamma(0) = 1$ und $\gamma(\frac{\pi}{2}) = i$. Zudem hatten wir oben gesehen, dass die Kosinusfunktion eingeschränkt auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend ist. Wir sehen also, dass die Abbildung γ eingeschränkt auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ den Kreisbogen zwischen 1 und i gegen

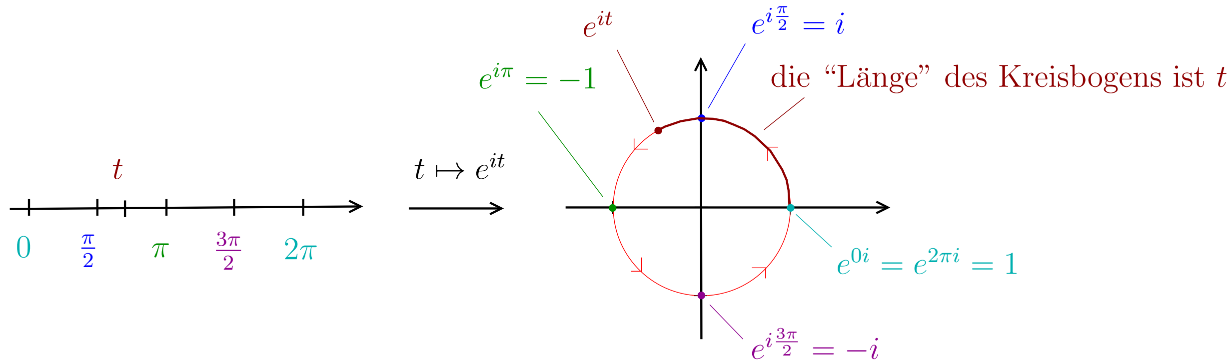


ABBILDUNG 10. Die komplexen Zahlen $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ und $e^{2\pi i}$.

den Uhrzeigersinn ‘durchfährt’. Ganz analog sieht man, dass die Abbildung γ eingeschränkt auf $[0, 2\pi]$ den Einheitskreis genau einmal gegen den Uhrzeigersinn ‘durchfährt’.

Folgendes elementare Lemma fasst jetzt einige Eigenschaften der Sinus- und der Kosinusfunktion zusammen.

Lemma 10.9. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dass*

$$\begin{array}{rcl} \cos(t+\pi) &=& -\cos(t), \\ \sin(t+\pi) &=& -\sin(t) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} \cos(t+2\pi) &=& \cos(t), \\ \sin(t+2\pi) &=& \sin(t) \end{array}$$

Zudem gilt

$$\sin(t) = -\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Beweis. Es sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcccl} e^{i(t+\pi)} &=& e^{it} \cdot e^{\pi i} &=& -e^{it}, \\ e^{i(t+2\pi)} &=& e^{it} \cdot e^{2\pi i} &=& e^{it}. \end{array}$$

Die ersten Aussagen folgen nun aus den Definitionen. Die Gleichheit $\sin(t) = -\cos(t + \frac{\pi}{2})$ folgt ebenso leicht aus den Definitionen. Diese Gleichheit wird in Übungsblatt 9 bewiesen. $\square$

Diese Symmetrieeigenschaften zusammen mit dem Graphen in Abbildung 9 geben uns nun die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$, welche in Abbildung 11 skizziert sind.

Satz 10.10. (*Satz über die Polarkoordinatendarstellung*) *Zu jeder Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert genau ein $r \in \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass*

$$z = re^{i\varphi}.$$

Zu jeder Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert also genau ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass $z = re^{i\varphi}$. Dieses Zahlenpaar (r, φ) nennt man die *Polarkoordinaten* von z.

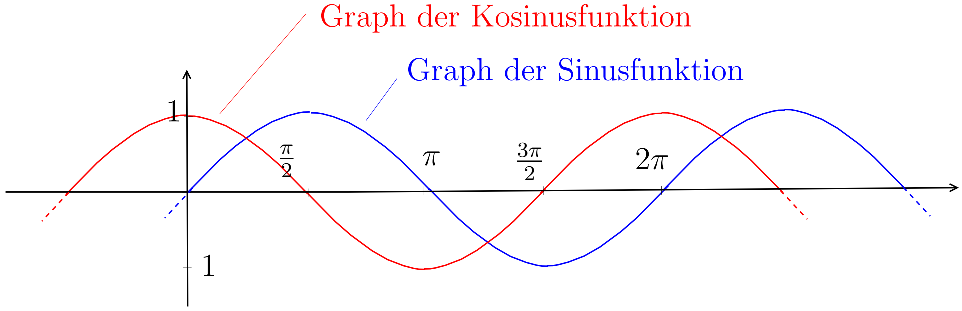


Abbildung 11. Die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion.

Beweis. Es sei also $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir zeigen zuerst die Existenz von $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = re^{i\varphi}$. Wir betrachten dabei zuerst den Spezialfall, dass $|z| = 1$. Wir müssen also zeigen, dass es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ gibt. Wir schreiben $z = x + iy$. Nachdem $|z| = 1$ folgt aus $|z|^2 = x^2 + y^2$, dass $|x| \leq 1$ und auch $|y| \leq 1$.

Wir beginnen mit folgender Behauptung.

Behauptung. Es gibt gibt ein $\psi \in [0, \pi]$ mit $\cos(\psi) = x$.

Für den Kosinus gilt $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -\cos(0) = -1$. Die Kosinusfunktion ist stetig, also existiert, nach dem Zwischenwertsatz 7.3 ein $\psi \in [0, \pi]$, so dass $\cos(\psi) = x$. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Behauptung. Es ist $\sin(\psi) = y$ oder $\sin(\psi) = -y$.

Wir müssen also zeigen, dass $\sin(\psi)^2 = y^2$. Dies ist in der Tat der Fall, denn

$$\sin(\psi)^2 \;=\; 1 - \cos(\psi)^2 \;=\; 1 - x^2 \;=\; \underbrace{x^2 + y^2}_{=|z|^2=1} - x^2 \;= y^2.$$

Wir haben damit diese Behauptung bewiesen.

Wenn $\sin(\psi) = y$, dann gilt natürlich, dass

$$e^{i\psi} \;=\; \cos(\psi) + i \sin(\psi) \;=\; x + iy \;=\; z.$$

Andererseits, wenn $\sin(\psi) = -y$, dann gilt nach Lemma 10.2 und Lemma 10.9, dass

$$e^{i(2\pi-\psi)} \;=\; \cos(2\pi-\psi)+i\sin(2\pi-\psi) \;=\; \cos(-\psi)+i\sin(-\psi) \;=\; \cos(\psi)-i\sin(\psi) \;=\; x+iy \;=\; z.$$

Nachdem $2\pi - \psi \in [\pi, 2\pi]$ haben wir also ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $z = e^{i\varphi}$ gefunden. Nachdem $e^{2\pi i} = e^{0i}$ gibt es auch ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = e^{i\varphi}$. Wir haben nun also die erste Behauptung bewiesen für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|z| = 1$.

Es sei nun $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$. Also folgt aus der vorherigen Behauptung, dass

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Es verbleibt zu zeigen, dass r und $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt sind. Es ist klar, dass r eindeutig bestimmt ist, da $r = |z|$. Die Kosinusfunktion ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend. [80] Man kann damit auch leicht zeigen, dass $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt. Die Ausarbeitung der Details verbleibt hierbei eine freiwillige Übungsaufgabe. $\square$

Mit diesem Satz können wir jetzt die Multiplikation von komplexen Zahlen geometrisch interpretieren. Es seien also $z, w \in \mathbb{C}$. Nach Satz 10.10 können wir schreiben $w = re^{i\varphi}$ und $z = se^{i\psi}$. Dann gilt

$$wz \;=\; rse^{i(\varphi+\psi)}.$$

Wir sehen also, dass sich die Winkel addieren und die Beträge multiplizieren.

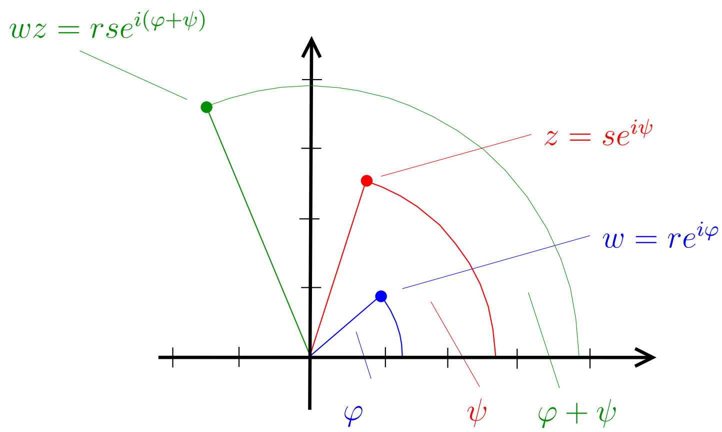


Abbildung 12. Die Multiplikation von komplexen Zahlen in Polarkoordinaten.

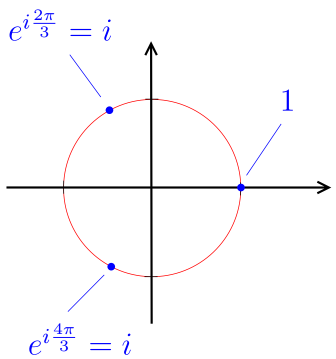
Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz, welcher in Übungsblatt 10 bewiesen wird.

Satz 10.11. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$, dass*

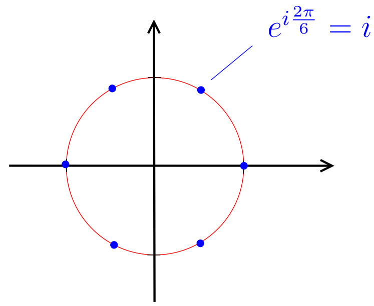
$$z^n = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad z = e^{2\pi ik/n}, \text{ wobei } k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Die komplexen Zahlen $z = e^{2\pi ik/n}$, $k = 0, \ldots, n-1$ werden oft als die *n-ten Einheitswurzeln* bezeichnet. Die letzte Abbildung des Kapitels zeigt die 3-ten, 6-ten sowie die 8-ten Einheitswurzeln.

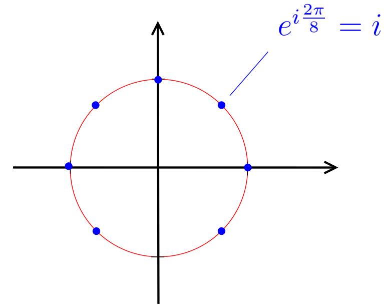
[80] In der Tat, es folgt aus $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ und aus Lemma 10.7, dass $\sin(x) > 0$ für $x \in (0, \pi)$. Es folgt dann aus dem Beweis von Lemma 10.8, dass die Kosinusfunktion auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist.



die 3-ten Einheitswurzeln



die 6-ten Einheitswurzeln



die 8-ten Einheitswurzeln

11. Differentiation

11.1. **Definition der Ableitung und erste Eigenschaften.** Im Folgenden betrachten wir nur Funktionen, welche auf offenen Intervallen (a,b) definiert sind. Hierbei gilt, dass $\{-\infty\} \leq a < b \leq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in (a,b)$. Wir sagen, f ist *differenzierbar in* x_0, wenn der Grenzwert [81]

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Wir nennen $f'(x_0)$ die *Ableitung von* f *im Punkt* x_0.

Bemerkung. Es folgt direkt aus den Definitionen, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Manchmal wird in der Literatur der Ausdruck auf der rechten Seite bevorzugt.

Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f differenzierbar im Punkt $x_0 \in (a,b)$ ist, dann bezeichnen wir die Funktion

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

als die *Tangente zu* f *am Punkt* x_0. Es folgt aus den Eigenschaften von Grenzwerten und aus der Definition von $f'(x_0)$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-t(x_0+h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-(f(x_0)+f'(x_0)h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0)h}{h} = f'(x_0)-f'(x_0) = 0.\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Tangente t die Funktion f in der Nähe vom Punkt x_0 'approximiert'. Die anschauliche Bedeutung der Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0 ist also, dass f in der Nähe von f durch eine Gerade 'approximiert' werden kann.

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen f ist *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist. Wir nennen dann die Funktion

$$\begin{aligned} f'\colon (a,b) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x)\end{aligned}$$

die *1. Ableitung von* f.

[81] Wir betrachten also streng genommen die Funktion

$$\begin{aligned}(a-x_0,0)\cup(0,b-x_0) &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

und wir betrachten dann den Grenzwert mit $h \to 0$ für diese Funktion.

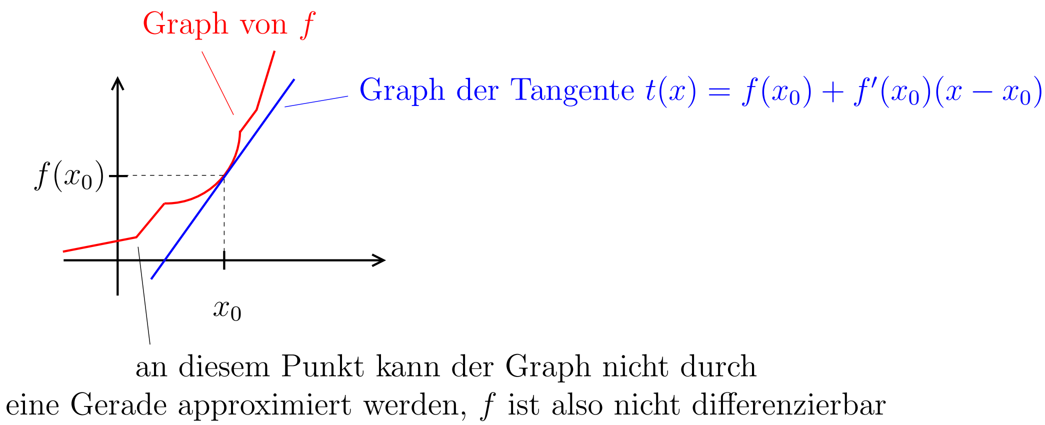


ABBILDUNG 13. Anschauliche Bedeutung von Differenzierbarkeit im Punkt x_0.

Lemma 11.1. *Es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt* [82]

$$(x)' \;=\; 1 \qquad \textit{und} \qquad (c)' \;=\; 0.$$

Insbesondere sind die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = c$ differenzierbar.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x$. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} 1 \;=\; 1.$$

Die Aussage über die konstante Funktion wird ganz analog bewiesen. □

Das nächste Lemma besagt nun, dass die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ im Punkt 0 nicht differenzierbar ist.

Lemma 11.2. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \;&\to\; \mathbb{R} \\ x \;&\mapsto\; |x| = \begin{cases} -x, & \textit{wenn } x \le 0, \\ x, & \textit{wenn } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

---

[82] Genauer gesagt betrachten wir also die Funktionen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c. \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind differenzierbar, und die 1. Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f'\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1. \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} g'\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Beweis. Wir erinnern zuerst an die Definition von $\lim_{h\to 0} g(h)$. Dieser existiert per Definition genau dann, wenn der linksseitige Grenzwert $\lim_{h\nearrow 0} g(h)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{h\searrow 0} g(h)$ existieren und übereinstimmen. Wir wenden dies nun an auf die Funktion

$$g(h) \;=\; \frac{f(h)-f(0)}{h-0} \;=\; \frac{f(h)}{h}.$$

In diesem Fall gilt, dass

$$\begin{array}{lllllll} \lim\limits_{h\nearrow 0} \frac{f(h)}{h} & = & \lim\limits_{h\nearrow 0} \frac{-h}{h} & = & \lim\limits_{h\nearrow 0} -1 & = & -1, \quad \text{und} \\ \lim\limits_{h\searrow 0} \frac{f(h)}{h} & = & \lim\limits_{h\searrow 0} \frac{h}{h} & = & \lim\limits_{h\searrow 0} 1 & = & 1. \end{array}$$

Wir sehen also, dass die beiden Grenzwerte nicht übereinstimmen. Die Funktion f ist also im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. □

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn die Ableitung f' differenzierbar ist, dann schreiben wir

$$f^{(2)} := f'' := (f')',$$

genannt die *2. Ableitung von f*. Allgemeiner, wenn die $(n-1)$-te Ableitung von f differenzierbar ist, dann definieren wir die *n-te Ableitung von f* als

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$$

und wir sagen, f ist *n-fach differenzierbar*.

Notation. Manchmal verwenden wir auch folgende alternative Schreibweisen für Ableitungen:

$$\tfrac{d}{dx}f \;:=\; \tfrac{df}{dx} := f', \quad \text{und} \qquad \tfrac{d^n f}{dx^n} \;:=\; f^{(n)},$$

sowie

$$\tfrac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} \;:=\; f'(x_0), \qquad \text{und} \quad \tfrac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=x_0} \;:=\; f^{(n)}(x_0).$$

Lemma 11.3. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge. Zudem sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in D$. Wenn f im Punkt x_0 differenzierbar ist, dann ist f insbesondere stetig im Punkt x_0.*

Beweis. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Satz 6.10 besagt, dass die Funktion f im Punkt x_0 stetig ist, genau dann, wenn $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Wenn f im Punkt x_0 differenzierbar ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) \;&=\; \lim_{h\to 0}\left(\tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right) \\ &=\; \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{=f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} h}_{=0} \quad \text{weil beide Grenzwerte existieren} \\ &=\; f'(x_0)\cdot 0 \;=\; 0. \end{aligned}$$

□

Satz 11.4. (*Ableitungsregeln*) *Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche differenzierbar im Punkt $x \in (a,b)$ sind. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, dass*

$$\begin{array}{lrcll} (1) & (f+g)'(x) & = & f'(x)+g'(x) & \\ (2) & (\lambda f)'(x) & = & \lambda \cdot f'(x) & \\ (3) & (f \cdot g)'(x) & = & f'(x)g(x)+f(x)g'(x) & (\textit{Produktregel}) \end{array}$$

Wenn $g(x) \neq 0$, dann gilt zudem, dass

$$(4) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2} \qquad (\textit{Quotientenregel}).$$

Beweis. Es seien also $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche differenzierbar im Punkt $x \in (a,b)$ sind. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass die ersten beiden Eigenschaften gelten.

Wir beweisen nun die Produktregel. Es ist

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\right)$$

Wir wollen jetzt in den Ausdruck $f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)$ die Differenzen $f(x+h)-f(x)$ und $g(x+h)-g(x)$ einführen, welche in den Definitionen von $f'(x)$ und $g'(x)$ auftauchen. Wir wenden jetzt genau den gleichen Trick wie im Beweis von Satz 3.3 an.

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)\big) + \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\big(f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\big) \\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{=g(x),\text{ weil } g \text{ stetig}} + f(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g(x+h)-g(x))}_{=g'(x)} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun dem Beweis der Quotientenregel zu. Diese wird ganz ähnlich bewiesen wie die Produktregel. In der Tat, es ist

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right) \\ &= \frac{1}{g(x)^2}(f'(x)g(x) - g'(x)f(x)). \end{aligned}$$

□

Korollar 11.5. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mithilfe von Induktion über n. Die Aussage für $n = 1$ wurde in Lemma 11.1 bewiesen. Nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Dann folgt

$$\begin{array}{rclll} \frac{d}{dx}x^{n+1} & = & \frac{d}{dx}(x\cdot x^n) & = & \frac{d}{dx}x\cdot x^n + x\cdot \frac{d}{dx}x^n \quad \text{Produktregel} \\ & & & = & 1\cdot x^n + x\cdot nx^{n-1} \quad \text{Induktionsannahme} \\ & & & = & (n+1)\cdot x^n. \end{array}$$

□

11.2. **Die Ableitungen von der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.** Wir bestimmen im Folgenden erst einmal zwei grundlegende Grenzwerte.

Satz 11.6. *Es ist*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} & = & 1, \text{ und} \\ (2) & \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} & = & 1. \end{array}$$

Im Beweis von Satz 11.6 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 11.7. *Es sei $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $C \in \mathbb{R}$. Es sei $g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $|g(x)| \le C|x|^k$ für alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^{k-1}} = 0.$$

Das Lemma wird in Übungsblatt 10 bewiesen. Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 11.6 zu.

Beweis von Satz 11.6. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\right) + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}_{=:R_k(x)}.$$

Im Beweis von Satz 6.6 hatten wir gezeigt, dass für alle $|x| < \frac{1}{2}$ gilt, dass

$$|R_0(x)| = |\exp(x) - 1| < 2|x|.$$

Wort-wörtlich fast der gleiche Beweis zeigt auch, dass für alle $|x| < \frac{1}{2}$ gilt, dass

$$|R_1(x)| = |\exp(x) - (1 + x)| < 2|x|^2.$$

Es folgt nun, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x+R_1(x))-1}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}}_{=1} + \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{R_1(x)}{x}}_{\substack{=0 \text{ nach Lemma 11.7,} \\ \text{weil } |R_1(x)| \le 2|x|^2}} = 1.$$

Wir haben damit die erste Behauptung bewiesen.

Wir wenden uns nun dem zweiten Grenzwert zu. Wir schreiben

$$\sin(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; x+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=:R_0(x)}.$$

Genau wie im Beweis von Lemma 10.7 kann man zeigen, dass für $x\in[-1,1]$ gilt

$$|R_0(x)| \;=\; \Big|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\substack{\text{monotone}\\ \text{Folge}}}\Big| \;\le\; \left|(-1)\frac{x^3}{3!}\right| \;=\; \frac{|x|^3}{6}.$$

Es folgt nun aus Lemma 11.7, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{x+R_0(x)}{x} \;=\; \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}}_{=1}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{R_0(x)}{x}}_{\substack{=0 \text{ nach Lemma 11.7,}\\ \text{weil } |R_0(x)|\le\frac{|x|^3}{6}}} = 1.$$

□

Im Folgenden werden wir auch mehrmals folgendes Lemma verwenden, welches ganz ähnlich wie Satz 6.7 bewiesen wird.

Lemma 11.8. *Es seien $b,c\in\mathbb{R}$ und es seien*

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R}\setminus\{b\} & \to & \mathbb{R}\\ k & \mapsto & g(k)\end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{rcl} k\colon \mathbb{R}\setminus\{c\} & \to & \mathbb{R}\\ h & \mapsto & k(h)\end{array}$$

stetige Funktionen mit $\lim_{h\to c}k(h)=b$. Dann gilt

$$\lim_{h\to c} g(k(h)) \;=\; \lim_{k\to b} g(k).$$

Beispielsweise folgt aus Satz 11.6 und Lemma 11.8 angewandt auf $g(k)=\frac{\sin(k)}{k}$ und $k(h)=\frac{k}{2}$, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \;=\; \lim_{k\to 0}\frac{\sin(k)}{k} \;=\; 1.$$

Mithilfe von Satz 11.6 und Lemma 11.8 können wir jetzt die Ableitungen der Exponentialfunktion, der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion bestimmen.

Satz 11.9. *Es gilt*

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dx}\exp(x) & = & \exp(x)\\ \frac{d}{dx}\sin(x) & = & \cos(x)\\ \frac{d}{dx}\cos(x) & = & -\sin(x).\end{array}$$

Beweis. Wir betrachten zuerst die Exponentialfunktion. Es ist

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\exp(x) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} &&= \exp(x)\cdot\lim_{h\to 0}\tfrac{\exp(h)-1}{h} \\ & &&= \exp(x)\cdot 1 && \text{nach Satz 11.6} \\ & &&= \exp(x). \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun der Sinusfunktion zu. Hierbei ist [83]

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} && \text{nach Korollar 10.5} \\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{=\cos(x),\text{ weil }\cos\text{ stetig}}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}}_{\substack{=1\text{ nach Satz 11.6}\\ \text{und Lemma 11.8}}} \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

Ganz ähnlich kann man auch mithilfe von Korollar 10.5 zeigen, dass $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$. Dies ist eine Übungsaufgabe auf Übungsblatt 10. □

11.3. Die Kettenregel und die Umkehrregel.

Satz 11.10. (*Kettenregel*) *Es seien zwei $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ und $g\colon(c,d)\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f((a,b))\subset(c,d)$. Wenn f im Punkt $x_0\in(a,b)$ differenzierbar ist und wenn g im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist $g\circ f$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Beweis.

Die Idee ist folgende Umformung auszuführen

$$\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Allerdings macht diese Umformung keinen Sinn, wenn $f(x_0+h) = f(x_0)$. Wir müssen deswegen einen kleinen Trick anwenden.

Wir setzen $y_0 := f(x_0)$ und wir definieren

$$\begin{aligned} g^*\colon M &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & \text{falls } y\neq y_0, \\ g'(y_0), & \text{falls } y = y_0. \end{cases} \end{aligned}$$

[83] Zur Erinnerung, Korollar 10.5 besagt, dass für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Behauptung. (1) Die Funktion g^* ist im Punkt y_0 stetig,

(2) Für alle h gilt, dass

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = g^*(f(x_0+h)) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

(1) Wir müssen nach Satz 6.10 zeigen, dass $\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)$. In der Tat ist

$$\lim_{y\to y_0} g(y) \;=\; \lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{g(y_0+h)-g(y_0)}{y_0+h-y_0} \;=\; g'(y_0) \;=\; g^*(y_0).$$

(2) Wir beweisen die zweite Behauptung, indem wir eine Fallunterscheidung durchführen. Es sei also h gegeben. Wenn $f(x_0+h) = y_0 = f(x_0)$, dann folgt, dass

$$\tfrac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} \;=\; 0 \;=\; g^*(f(x_0+h)) \cdot \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Wenn hingegen $f(x_0+h) = y_0 = f(x_0)$, dann folgt aus der Definition von g^*, dass

$$\tfrac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} \;=\; \tfrac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; g^*(f(x_0+h)) \cdot \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Es folgt nun aus der Behauptung, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \tfrac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(g^*(f(x_0+h)) \cdot \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right) \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} g^*(f(x_0+h))}_{=g^*(f(x_0)) \text{ weil } f, g^* \text{ stetig}} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{=f'(x_0)} \\
&= g^*(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\
&= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).
\end{aligned}$$

□

Korollar 11.11. *Es sei $a \in (0,\infty)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass*

$$\frac{d}{dx} a^x \;=\; a^x \cdot \ln(a).$$

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx} a^x &= \tfrac{d}{dx} \exp(\ln(a)\cdot x) && \text{Definition von } a^x \\
&= \exp(\ln(a)\cdot x) \cdot (\ln(a)\cdot x)' && \text{Kettenregel mit } f(x) = \ln(a)\cdot x \text{ und } g(x) = \exp(x) \\
&= \exp(\ln(a)\cdot x) \cdot \ln(a) \\
&= a^x \cdot \ln(a).
\end{aligned}$$

□

Satz 11.12. (*Umkehrregel*) *Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion. Wenn f in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} im*

Punkt $f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Anders ausgedrückt, für $y_0 = f(x_0)$ gilt, dass

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Die anschauliche Bedeutung der Umkehrregel wird in Abbildung 14 skizziert. Wir erhal-

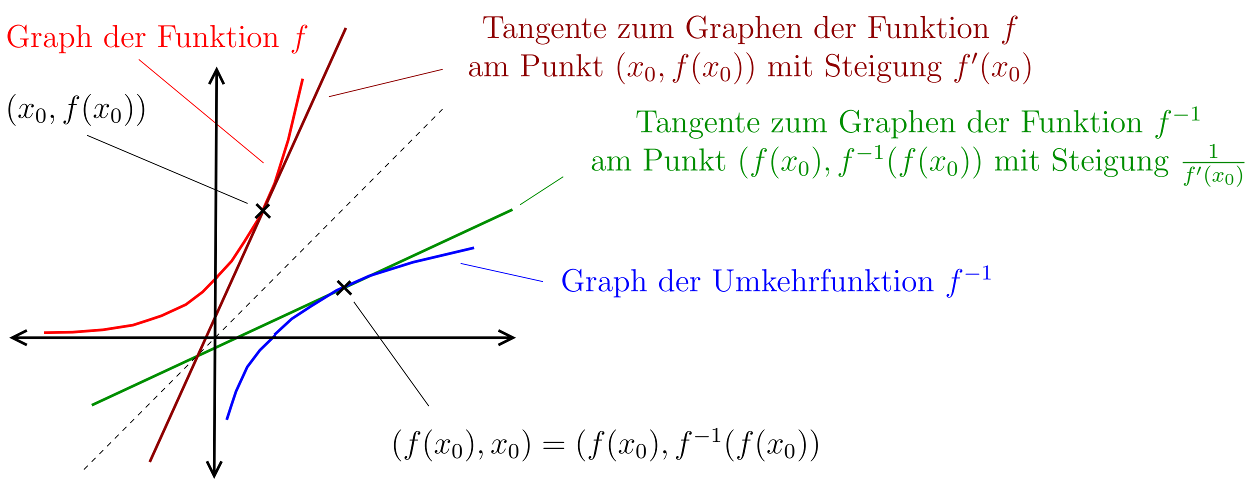


Abbildung 14. Die Ableitung der Umkehrfunktion.

ten den Graphen von f^{-1}, indem wir den Graphen von f an der xy-Diagonale spiegeln. Ganz analog erhalten wir die Tangente zum Graphen von f^{-1} am Punkt $(f(x_0), f^{-1}(f(x_0)) = (f(x_0), x_0)$, indem wir die Tangente zum Graphen von f am Punkt $(x_0, f(x_0))$ an der xy-Diagonale spiegeln. Ganz allgemein gilt jedoch, dass wenn wir eine Gerade mit Steigung m an der xy-Diagonale spiegeln, erhalten wir eine Gerade mit Steigung $\frac{1}{m}$.

Beweis. Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion und es sei $x_0\in(a,b)$. Wir nehmen an, dass f im Punkt x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0)\neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{f^{-1}(f(x_0)+h)-f^{-1}(f(x_0))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{f^{-1}(f(x_0)+h)-x_0}{h} \;=\; (*)\end{aligned}$$

Wir schreiben jetzt $k(h)=f^{-1}(f(x_0)+h)-x_0$. Diese Funktion ist nach Satz 8.7 stetig im Punkt $h=0$. Durch Auflösen nach h erhält man, dass $h=f(k(h)+x_0)-f(x_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(*) &= \lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{f(k(h)+x_0)-f(x_0)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(k(h)+x_0)-f(x_0)}{k(h)}}\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(k(h)+x_0)-f(x_0)}{k(h)}}\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(k+x_0)-f(x_0)}{k}} \quad \text{folgt aus Lemma 11.8 und } \lim_{h\to 0}k(h)=0\\ &= \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Man kann die Gleichheit

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$$

auch leicht aus der Kettenregel herleiten.[84] In der Tat, denn aus der Kettenregel folgt, dass

$$1=\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=x_0} x=\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=x_0} f^{-1}(f(x))=\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))\cdot f'(x_0),$$

also erhält man durch Auflösen, dass für jedes x_0 gilt:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \;=\; \tfrac{1}{f'(x_0)}.$$

Insbesondere gilt für $y_0=f(x_0)$, dass

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) \;=\; \tfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Korollar 11.13. *Für alle $x\in(0,\infty)$ ist*

$$\frac{d}{dx}\ln(x) \;=\; \frac{1}{x}.$$

[84] Allerdings kann man aus der Kettenregel nicht die Differenzierbarkeit von f^{-1} herleiten.

Beweis. Es folgt aus der Umkehrregel und aus $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$, dass

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

□

11.4. C^∞-Funktionen.

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) Wenn f differenzierbar ist, und wenn zudem f' stetig ist, dann heißt f *stetig differenzierbar* und wir sagen f *ist eine C^1-Funktion*.
(2) Wenn f eine C^n-Funktion, und wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}$ eine C^1-Funktion ist, so heißt f eine C^{n+1}-Funktion.
(3) Wir sagen f ist eine *C^∞-Funktion*, wenn f für alle n eine C^n-Funktion ist.

Beispielsweise sind Polynomfunktionen, die Exponentialfunktion, die Sinusfunktion sowie die Kosinusfunktion C^∞-Funktionen. Andererseits haben wir in Übungsblatt 10 gesehen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

in jedem Punkt differenzierbar ist, insbesondere auch im Punkt $x = 0$. Aber die Ableitung von f ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} f'\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \end{cases} \end{array}$$

und diese Ableitungsfunktion ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

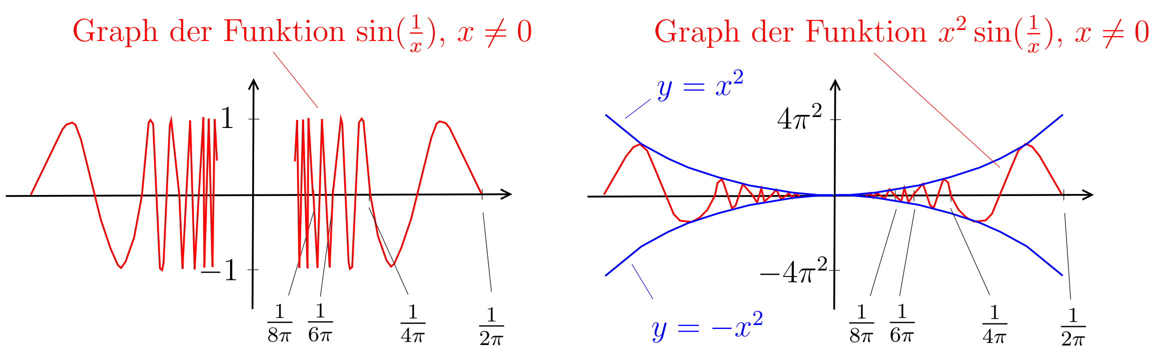


Abbildung 15.

12. Der Mittelwertsatz

12.1. **Der Mittelwertsatz und lokale Extrema.**

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f hat bei x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt, dass } f(x) \le f(x_0).$$

Ganz analog definieren wir *lokales Minimum*. Wir sagen x_0 ist ein *lokales Extremum*, wenn x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.

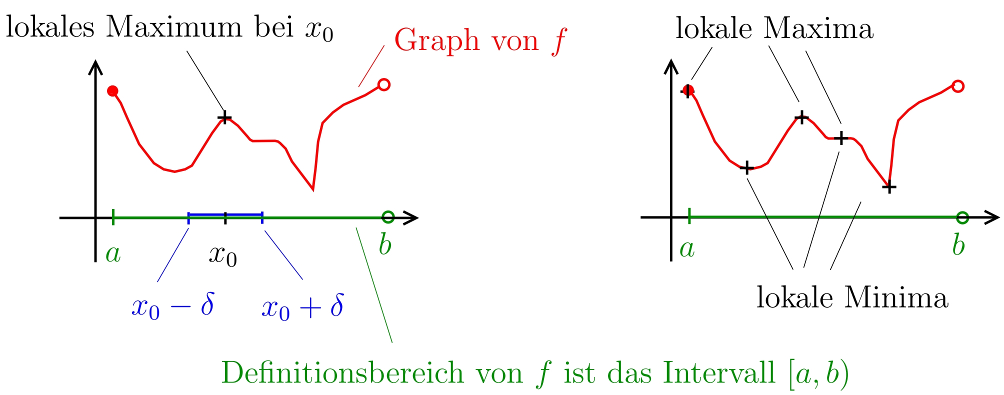


Abbildung 16. Die anschauliche Bedeutung von lokalem Maximum und lokalem Minimum.

Wir sagen x ist ein *innerer Punkt* einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset M$. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass für Intervalle von der Form $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ und $(a, b]$ die Menge der inneren Punkte gerade gegeben ist durch das offene Intervall (a, b). [85]

Es sei nun $M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in M$ ein innerer Punkt. Nachdem x_0 ein innerer Punkt ist, macht es Sinn die Grenzwerte $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ zu betrachten und wir führen wie zuvor die Differenzierbarkeit von f am Punkt x_0 ein.

Lemma 12.1. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$ ein innerer Punkt. Wenn f ein lokales Extremum in x_0 annimmt, dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Die Aussage des Lemmas ist im Allgemeinen nicht richtig, wenn x_0 kein innerer Punkt ist. Betrachten wir beispielsweise die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, welche durch $f(x) = 3x$ definiert ist. Dann ist $x_0 = 0$ ein lokales Minimum und $x_0 = 1$ ein lokales Maximum. Wir hatten die Ableitung an den Endpunkten nicht definiert, aber selbst wenn man diese über einseitige Grenzwerte definieren würde, wäre die Ableitung an den Endpunkten nicht null.

[85] In der Tat, denn sei beispielsweise $x \in (a, b)$, dann gilt $\varepsilon = \min\{b-x, x-a\} > 0$ und es ist $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a, b)$.

Beweis. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in D$ ein innerer Punkt, so dass f im Punkt x_0 differenzierbar ist. Es sei zudem x_0 entweder ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum. O.B.d.A. können wir annehmen, dass x_0 ein lokales Minimum ist. Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$ für alle $h \neq 0 \in (-\delta, \delta)$. Wir betrachten nun den rechtsseitigen und den linksseitigen Grenzwert in der Definition der Ableitung. Es ist

$$\lim_{h \searrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{\geq 0 \text{ für } h \in (0,\delta), \\ \text{weil } h > 0 \text{ und } f(x_0+h) \geq f(x_0)}} \geq 0.$$

Andererseits gilt

$$\lim_{h \nearrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{\leq 0 \text{ für } h \in (-\delta,0), \\ \text{weil } h < 0 \text{ und } f(x_0+h) \geq f(x_0)}} \leq 0.$$

Aber nachdem f im Punkt x_0 differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte übereinstimmen. Dies ist nur möglich, wenn beide Grenzwerte Null sind, d.h. wenn $f'(x_0) = 0$. □

Wir sagen im Folgenden, dass eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ [86] differenzierbar ist, wenn sie auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist, und wenn die Funktion zudem auf $[a,b]$ stetig ist.

Satz 12.2. (*Satz von Rolle*) *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Es folgt aus Lemma 11.3, dass die Funktion f stetig ist. Also existieren nach Satz 7.2 zwei reelle Zahlen $x_0, x_1 \in [a,b]$, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \geq f(x_1) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Es folgt sofort aus den Definitionen, dass x_0 insbesondere ein lokales Maximum ist, und dass x_1 insbesondere ein lokales Minimum ist. Wenn $x_0 \in (a,b)$, dann ist x_0 zudem ein innerer Punkt und es folgt aus Lemma 12.1, dass $f'(x_0) = 0$. Genauso, wenn $x_1 \in (a,b)$, dann ist x_1 zudem ein innerer Punkt und es folgt wiederum aus Lemma 12.1, dass $f'(x_1) = 0$.

Wenn x_0 und x_1 auf den Endpunkten liegen, dann folgt aus $f(a) = f(b)$, dass $f(a) = f(b)$ sowohl das Maximum als auch das Minimum von f ist. Anders ausgedrückt, die Funktion f ist konstant. Dies bedeutet aber, dass $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. □

Satz 12.3. (*Mittelwertsatz der Differentialrechnung*) *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

[86] Bisher hatten wir Differenzierbarkeit nur für Funktionen eingeführt, welche auf offenen Intervallen definiert sind. Wir erweitern jetzt also die Definition von Differenzierbarkeit auf Funktionen, welche auf kompakten Intervallen definiert sind.

Wir können uns $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ als 'durchschnittliche Steigung' der Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vorstellen. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt also, dass es ein $\xi \in (a,b)$ gibt, so dass an dem Punkt ξ die Ableitung, d.h. die Steigung der Tangente, gerade der durchschnittlichen Steigung entspricht. Diese Aussage wird in Abbildung 17 veranschaulicht.

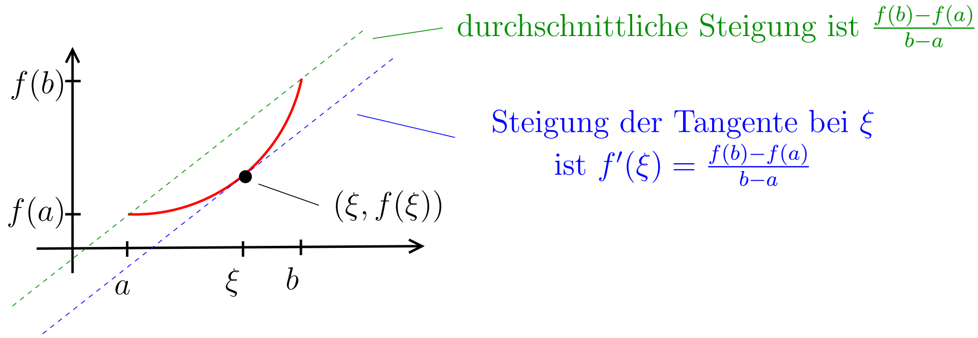


Abbildung 17. Die anschauliche Bedeutung vom Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Beweis.

Wenn $g(a) = g(b)$, dann ist die gewünschte Aussage gerade der Satz von Rolle. In der Tat werden wir nun den allgemeinen Fall mit einem kleinen Trick auf den Satz von Rolle zurück führen.

Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$g(x) \quad := \quad f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

welche auf dem Intervall $[a,b]$ definiert ist. Es gilt offensichtlich, dass $g(a) = f(a) = g(b)$. Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $\xi \in (a,b)$, so dass $g'(\xi) = 0$. Daraus folgt aber, dass

$$f'(\xi) \quad = \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Zur Erinnerung, eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton steigend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) > f(x_1).$$

Im Folgenden sagen wir, f ist *monoton steigend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1).$$

Ganz analog definiert man streng monoton fallend und monoton fallend. Beispielsweise ist die konstante Funktion $f(x) = 3$ sowohl monoton steigend als auch monoton fallend, aber die konstante Funktion ist weder streng monoton steigend noch streng monoton fallend.

Satz 12.4. (*Monotoniesatz*) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt*

(1) $f'(x) \geq 0$ *für alle inneren Punkte x von I* $\iff$ *f ist monoton steigend*

und

(2) $f'(x) > 0$ *für alle inneren Punkte x von I* $\implies$ *f ist streng monoton steigend.*

Zudem gelten die offensichtlichen analogen Aussagen für (streng) monoton fallende Funktionen.

Im Allgemeinen gilt in (2) nicht die Umkehrung. Beispielsweise ist die Funktion $f(x) = x^3$ streng monoton steigend, aber $f'(0) = 0$, d.h. die Ableitung ist nicht immer positiv.

Beweis. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(1) Wir beweisen zuerst die $\Leftarrow$-Richtung. Es sei also f monoton steigend. Dann gilt für alle inneren Punkte x in I, dass

$$f'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{\geq 0 \text{ für } h>0 \text{ und } h<0 \\ \text{weil } f \text{ monoton steigend}}} \;\geq\; 0.$$

Wir beweisen nun die $\Rightarrow$-Richtung. Es sei also $f'(x) \geq 0$ für alle inneren x in I. Wir nehmen nun an, dass f nicht monoton steigend ist. D.h. wir nehmen an, es gibt $x_2 > x_1$ in I, so dass $f(x_2) < f(x_1)$. Wenn wir den Mittelwertsatz auf die Einschränkung von f auf $[x_1, x_2]$ anwenden, erhalten wir ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) Die zweite Aussage des Satzes wird ganz ähnlich wie (1) bewiesen. Dies ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 11.

□

Lemma 12.5. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Nehmen wir an, dass die Funktion$f$ nicht konstant ist. Dann gibt es $x \in (a,b]$ mit $f(x) \neq f(a)$. Nach dem Mittelwertsatz 12.3, angewandt auf die Einschränkung von f auf $[a,x]$, gibt es dann aber ein $\xi \in (a,x)$, mit

$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\neq\; 0,$$

im Widerspruch zur Annahme, dass $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. □

Lemma 12.6. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $C \in \mathbb{R}$. Wenn $f'(x) \leq C$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt für alle $x \in [a,b]$, dass*
$$f(x) \;\leq\; f(a) + C \cdot (x-a).$$

Genauso zeigt man, dass wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist und wenn $f'(x) \geq C$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt für alle $x \in [a,b]$, dass
$$f(x) \;\geq\; f(a) + C \cdot (x-a).$$

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $C \in \mathbb{R}$, so dass $f'(x) \leq C$ für alle $x \in (a,b)$. Nehmen wir an, es gibt ein $x \in [a,b]$, so dass
$$f(x) - f(a) \;>\; C \cdot (x-a).$$
Nach dem Mittelwertsatz 12.3, angewandt auf die Einschränkung von f auf $[a,x]$, gibt es dann aber ein $\xi \in (a,x)$, mit
$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;>\; \frac{C(x-a)}{x-a} \;=\; C,$$
im Widerspruch zur Annahme, dass $f'(x) \leq C$ für alle $x \in (a,b)$. □

Der folgende Satz erlaubt es oft für eine gegebene Funktion lokale Minima und Maxima zu bestimmen.

Satz 12.7. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweifach differenzierbare Funktion und es sei $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

1. *Wenn $f''(x_0) > 0$, dann nimmt f bei x_0 ein lokales Minimum an.*
2. *Wenn $f''(x_0) < 0$, dann nimmt f bei x_0 ein lokales Maximum an.*

Betrachten wir beispielsweise die Funktion $f(x) = x^2$. Dann gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2$, und f nimmt in der Tat in $x = 0$ ein Minimum an.

Beweis. Es sei also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweifach differenzierbare Funktion. Es sei zudem $x_0 \in (a,b)$, so dass $f'(x_0) = 0$. Wir betrachten nur den Fall, dass $f''(x_0) > 0$. Der zweite Fall wird natürlich ganz analog bewiesen. Es folgt aus $f''(x_0) > 0$, dass
$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \;=\; f''(x_0) \;>\; 0.$$
Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass
$$\frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} > 0 \text{ für alle } h \neq 0 \in (-\delta,\delta).$$
Es folgt, dass
$$\begin{array}{rcll} f'(x_0+h) & > & f'(x_0) = 0, & \text{für alle } h \in (0,\delta), \text{ und} \\ f'(x_0+h) & < & f'(x_0) = 0, & \text{für alle } h \in (-\delta,0). \end{array}$$
Es folgt aus Satz 12.4

f ist auf dem Intervall $[x_0, x_0+\delta)$ streng monoton steigend, und
f ist auf dem Intervall $(x_0-\delta, x_0]$ streng monoton fallend.

Dies wiederum impliziert, dass x_0 ein lokales Minimum ist. □

12.2. **Umkehrfunktionen von trigonometrischen Funktionen.** Die *Tangensfunktion* ist definiert als die Funktion

$$\begin{aligned} \tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Wir fassen einige Eigenschaften der Tangensfunktion in einem Lemma zusammen.

Lemma 12.8.

(1) *Es ist*

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

(2) *Die Einschränkung der Tangensfunktion auf das Intervall* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *ist streng monoton steigend.*

(3) *Es ist*

$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x \nearrow +\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty.$$

Beweis.

(1) Es folgt aus der Quotientenregel, dass die Ableitung der Tangensfunktion gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \frac{\cos(x)\frac{d}{dx}\sin(x) - \sin(x)\frac{d}{dx}\cos(x)}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}. \end{aligned}$$

(2) Die Kosinusfunktion ist positiv auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, insbesondere ist die Ableitung der Tangensfunktion auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ positiv. Es folgt aus dem Monotoniesatz 12.4, dass die Einschränkung der Tangensfunktion auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend ist.

(3) Für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist $\sin(x) > 0$ und $\cos(x) > 0$. Zudem gilt, dass

$$\lim_{x \nearrow +\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1 \text{ und } \lim_{x \nearrow +\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0.$$

Es folgt nun leicht aus den Definitionen von Grenzwerten, ähnlich wie in Satz 3.8, dass

$$\lim_{x \nearrow +\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty.$$

Der andere Grenzwert wird ganz analog bestimmt.

□

Die Einschränkung der Tangensfunktion auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist also nach Lemma 8.3 und Lemma 12.8 bijektiv auf ihr Bild. Wir bezeichnen die Umkehrfunktion

$$\begin{array}{rcl} \arctan\colon \mathbb{R} & \to & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x & \mapsto & \arctan(x) := \tan^{-1}(x) \end{array}$$

als die *Arkustangensfunktion*, oder kurz, als den *Arkustangens*. Wir fassen nun einige Eigenschaften der Arkustangensfunktion in einem Lemma zusammen.

Lemma 12.9.

(1) *Es ist*

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2}.$$

(2) *Die Arkustangensfunktion ist streng monoton steigend.*

(3) *Es ist*

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan(x) \;=\; -\frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty}\arctan(x) \;=\; +\frac{\pi}{2}.$$

Die Aussage, dass in der Ableitung der Arkustangensfunktion keine trigonometrische Funktion auftaucht, ist überraschend und wird später noch eine sehr wichtige Rolle spielen, wenn wir Stammfunktionen betrachten.

Die Graphen der Tangensfunktion und der Arkustangensfunktion sind in Abbildung 18 skizziert.

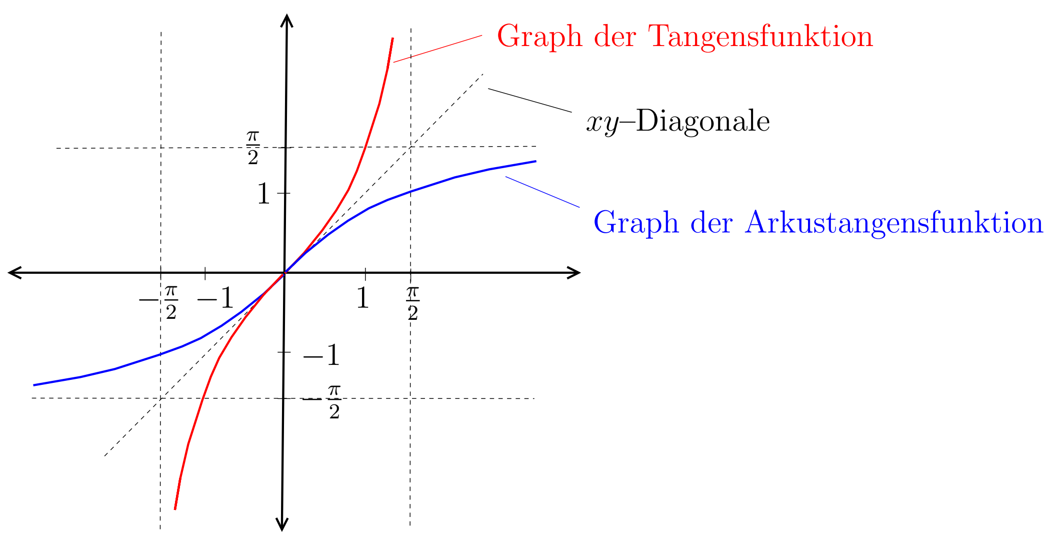


Abbildung 18. Die Graphen der Tangensfunktion und der Arkustangensfunktion .

Beweis.

(1) Es folgt aus der Umkehrregel für Ableitungen, siehe Satz 11.12, dass

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{\cos(\arctan(x))^2}} \;=\; \cos(\arctan(x))^2.$$

Wir müssen also noch zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\cos(\arctan(x))^2 = \frac{1}{1+x^2}$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $x \geq 0$. Wir schreiben $\alpha = \arctan(x) \in (0, \frac{\pi}{2})$. In einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α wie in Abbildung 19 gilt, dass

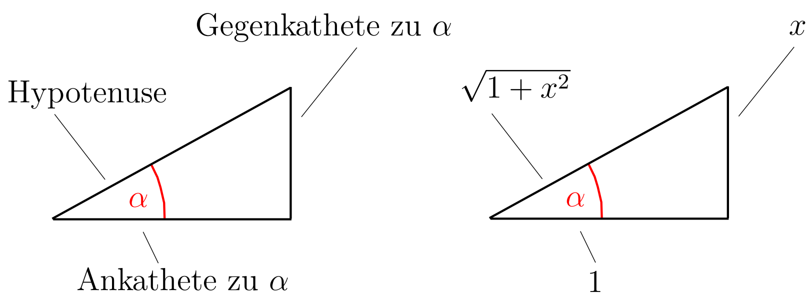


Abbildung 19. Die Definition von Hypotenuse, Gegenkathete und Ankathete.

$$\sin(\alpha) \;=\; \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) \;=\; \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Also folgt, dass

$$\tan(\alpha) \;=\; \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

In Abbildung 19 betrachten wir jetzt ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel α und Ankathete der Länge 1. Aus $\tan(\alpha) = x$ folgt dann, dass die Länge der Gegenkathete x beträgt. Aus dem Satz von Pythagoras folgt dann, dass die Hypotenuse die Länge $\sqrt{1+x^2}$ besitzt. Zusammengefasst erhalten wir also, dass

$$\cos(\alpha) \;=\; \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Daraus folgt nun aber, dass

$$\cos(\arctan(x))^2 \;=\; \cos(\alpha)^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Wir müssen nun noch den Fall $x < 0$ betrachten. In diesem Fall folgt aus den Symmetrien $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$, dass

$$\begin{aligned}
\cos(\arctan(x))^2 = \cos(-\arctan(-x))^2 &= \cos(\arctan(-x))^2 \\
&= \tfrac{1}{1+(-x)^2} \qquad \text{weil } -x \geq 0 \\
&= \tfrac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

[87]

(2) Diese Aussage folgt aus Lemma 12.8 (2) und Lemma 8.6. Alternativ folgt die Aussage aus (1) und aus Satz 12.4.
(3) Diese Aussage folgt leicht aus den Definitionen und Lemma 12.8 (3). Der Beweis dazu ist eine freiwillige Übungsaufgabe.

□

Wir betrachten nun die Einschränkung der Sinusfunktion auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Nachdem $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ folgt aus Satz 12.4, dass die Sinusfunktion auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend ist. Die dazugehörige Umkehrfunktion

$$\arcsin\colon [-1,1] \;\to\; [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

wird die *Arkussinusfunktion* genannt. Ganz analog kann man zeigen, dass die Einschränkung der Kosinusfunktion auf das Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend ist. Die dazugehörige Umkehrfunktion

$$\arccos\colon [-1,1] \;\to\; [0,\pi]$$

wird die *Arkuskosinusfunktion* genannt. Die Graphen der Arkussinusfunktion und der Arkuskosinusfunktion sind in Abbildung 20 skizziert.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma, welches in Übungsblatt 11 bewiesen wird.

Lemma 12.10. *Die Arkussinusfunktion und die Arkuskosinusfunktion sind differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textit{und} \qquad \frac{d}{dx}\arccos(x) \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Auch in diesem Fall sehen wir also, dass die Ableitungen nicht durch trigonometrische Funktionen gegeben sind.

12.3. **Die Regel von l'Hôpital.**

Satz 12.11. (*Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung*) *Es seien im Folgenden $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Wenn $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$*

[87] Das Argument kann man auch etwas abstrakter, ohne Dreiecke durchführen. Wir setzen dabei zuerst $y = \arctan(x)$. Dann gilt nach Definition der Umkehrabbildung, dass

$$\tan(y) \;=\; x \quad \text{insbesondere} \quad \tfrac{\sin(y)^2}{\cos(y)^2} = x^2.$$

Wir erhalten also, dass

$$x^2 \;=\; \tfrac{\sin(y)^2}{\cos(y)^2} = \tfrac{1-\cos(y)^2}{\cos(y)^2}.$$

Durch Auflösen nach $\cos(y)^2$ und Einsetzen von $y = \arctan(x)$ erhalten wir dann, dass

$$\cos(\arctan(x))^2 \;=\; \cos(y)^2 = \tfrac{1}{1+x^2}$$

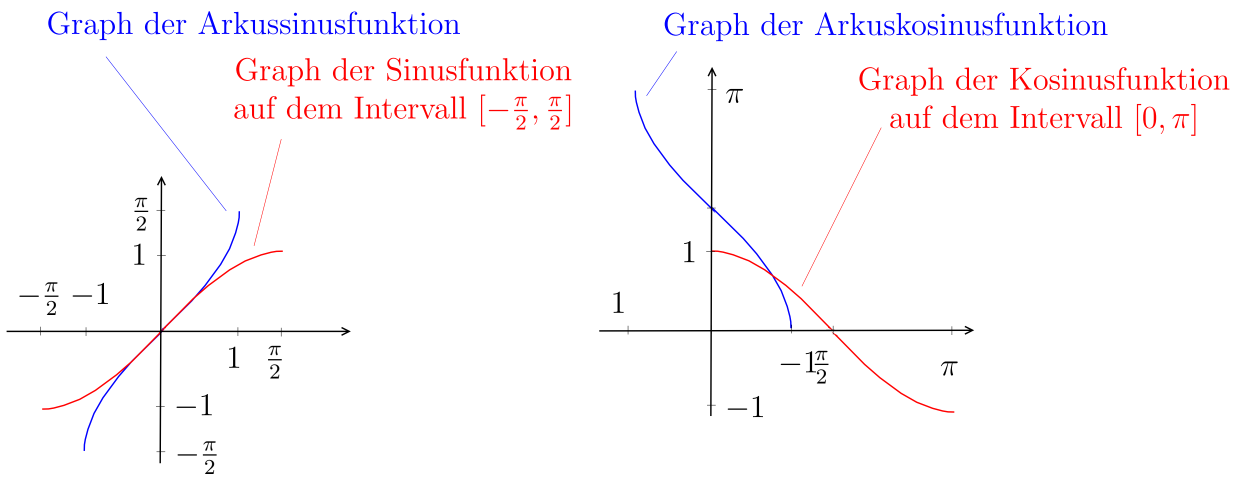


Abbildung 20. Die Graphen der Arkussinusfunktion und der Arkuskosinusfunktion.

und wenn $g(a) \neq g(b)$, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Wenn $g(x) = x$, dann erhalten wir gerade die Aussage vom üblichen Mittelwertsatz 12.3 der Differentialrechnung.

Beweis.

> Wie wir gerade gesehen haben, ist der Satz eine Verallgemeinerung vom Mittelwertsatz 12.3, welchen wir mithilfe des Satz von Rolle 12.2 bewiesen hatten. Auch diesen Satz können wir mit fast dem gleichen Trick auf den Satz von Rolle zurück führen.

Wir betrachten die Funktion

$$F(x) \quad := \quad f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Es gilt $F(a) = f(a)$ und $F(b) = f(a)$. Wir können also den Satz von Rolle auf die differenzierbare Funktion F anwenden. Es existiert also ein $\xi \in (a, b)$, so dass $F'(\xi) = 0$. Dann gilt

$$0 \;=\; F'(\xi) \quad = \quad f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi).$$

Nach Voraussetzung gilt $g'(\xi) \neq 0$. Wir erhalten also, dass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad = \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

wie gewünscht. $\square$

Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren

$$\lim_{x\searrow a} f(x) := 0^+ \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\searrow a} f(x) = 0 \text{ und } f(x)>0 \text{ für } x\in(a,a+\delta), \text{ wobei } \delta>0$$

und ganz analog

$$\lim_{x\searrow a} f(x) := 0^- \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\searrow a} f(x) = 0 \text{ und } f(x)<0 \text{ für } x\in(a,a+\delta), \text{ wobei } \delta>0.$$

Ganz analog zur partiellen Multiplikation auf Seite 33 führen wir nun für $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ folgende partielle Division ein:

:	$a<0$	0	$a>0$	$+\infty$	$-\infty$
$b>0$	$\frac{a}{b}$	0	$\frac{a}{b}$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	$-\infty$	$*$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$b<0$	$\frac{a}{b}$	0	$\frac{a}{b}$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	$*$	$*$
$-\infty$	0	0	0	$*$	$*$

Hierbei bedeutet $*$ wiederum, dass die Division nicht definiert ist. Der folgende Satz wird ganz ähnlich wie Satz 3.8 und Satz 3.9 bewiesen.

Satz 12.12. *Es seien $f,g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ Funktionen, so dass $g(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$, und so dass $\lim_{x\searrow a} f(x)$ und $\lim_{x\searrow a} g(x)$ existieren oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergieren. Dann gilt*

$$\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{\lim_{x\searrow a} f(x)}{\lim_{x\searrow a} g(x)},$$

wenn *der Quotient auf der rechten Seite definiert ist.*

Der Satz gibt also keine allgemeine Regel für folgende zwei Fälle

(1) $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=0$ und $\lim\limits_{x\searrow a} g(x)=0$, oder wenn

(2) $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=\pm\infty$ und $\lim\limits_{a\searrow a} g(x)=\pm\infty$,

Die Regel von l'Hôpital erlaubt es zum Glück viele von solchen Grenzwerten zu bestimmen.

Satz 12.13. (Regel von l'Hôpital) *Es seien $f,g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass $g(x)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Wenn*

(1) $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=0$ *und* $\lim\limits_{x\searrow a} g(x)=0$, *oder wenn*

(2) $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=\pm\infty$ *und* $\lim\limits_{x\searrow a} g(x)=\pm\infty$,

dann gilt

$$\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\},$$

wenn *der Grenzwert auf der rechten Seite existiert oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.*

Beispielsweise gilt nach der Regel von l'Hôpital, dass

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{x}}{\sin(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos(x)} = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2\sqrt{x}\cos(x)} = +\infty.$$

Hierbei zeigen wir mit $\overset{l'H}{=}$ an, an welcher Stelle wir die Regel von l'Hôpital anwenden. Die Regel von l'Hôpital gilt ganz analog auch für rechtsseitige Grenzwerte. Oft können wir auch die Regel von l'Hôpital für den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert gleichzeitig anwenden. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)}{1} = \frac{\exp(0)}{1} = 1,\\
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1, \text{ und}\\
\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Zum Abschluß betrachten wir noch ein Beispiel bei dem der Nenner bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Es ist

$$\lim_{x\searrow 0}(x\cdot\ln(x)) = \lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0} -x = 0.$$

Beweis. Wir betrachten folgenden Spezialfall: Es seien $f,g\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass $g(x)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$, so dass $f(a)=g(a)=0$, und so dass $\lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ eine reelle Zahl ist. Alle anderen Fälle werden in Forster, Kapitel 16 bewiesen.

Wir erinnern zuerst daran, dass für eine beliebige Funktion $h\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ und $d\in\mathbb{R}$ gilt, dass

$$\lim_{x\searrow a}h(x)=d \;:\Leftrightarrow\; \underset{\varepsilon>0}{\forall}\;\underset{\delta>0}{\exists}\;\underset{x\in(a,a+\delta)}{\forall}\;|h(x)-d|<\varepsilon.$$

Wir setzen nun $d:=\lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Wir müssen also zeigen, dass

$$\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=d.$$

Es sei also $\varepsilon>0$. Nachdem $\lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=d$ folgt aus der obigen Definition vom rechtsseitigen Grenzwert, dass es ein $\delta>0$ gibt, so dass

$$x\in(a,a+\delta) \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-d\right|<\varepsilon.$$

Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

$$x\in(a,a+\delta) \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}-d\right|<\varepsilon.$$

Es sei also $x \in (a, a+\delta)$. Wir wenden den verallgemeinertem Mittelwertsatz auf die Einschränkung von f und g auf $[a, x]$ an. Nach dem verallgemeinertem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (a, x)$, so dass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overset{\substack{f(a)=0\\ g(a)=0}}{=\!=\!=\!=} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es folgt also, dass

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - d\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - d\right|.$$

Aber nachdem $\xi \in (a, x)$, insbesondere $\xi \in (a, \delta)$, folgt, dass der Ausdruck auf der rechten Seite kleiner als ε ist. $\square$

Der folgende Satz besagt nun, dass die Regel von l'Hôpital auch für Grenzwerte $x \to \pm\infty$ angewandt werden kann.

Satz 12.14. *Es seien $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, \infty)$. Wenn entweder*

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, *oder wenn*

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$,

dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn *der Grenzwert auf der rechten Seite existiert oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert. Genau die gleiche Aussage gilt auch für den Grenzwert $x \to -\infty$.*

Im Beweis von Satz 12.14 werden wir folgendes Lemma verwenden. Das Lemma folgt hierbei leicht aus den Definitionen.

Lemma 12.15. *Es sei $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt für $a \in \mathbb{R}$, dass*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \iff \lim_{x\searrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = a.$$

Die gleiche Aussage gilt auch für bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$.

Wir wenden uns jetzt dem Beweis von Satz 12.14 zu.

Beweis von Satz 12.14. Wir definieren $k(x) = f(\frac{1}{x})$ und $l(x) = g(\frac{1}{x})$, dann gilt nach Lemma 12.15, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{k(x)}{l(x)}.$$

Wir wollen jetzt natürlich Satz 12.13 anwenden, aber dazu müssen wir erst zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x\searrow 0}\frac{k'(x)}{l'(x)}$ existiert oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert. Nun gilt aber, dass

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{k'(x)}{l'(x)} = \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{d}{dx}f(\frac{1}{x})}{\frac{d}{dx}g(\frac{1}{x})} = \lim_{x\searrow 0}\frac{f'(\frac{1}{x})\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'(\frac{1}{x})\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\searrow 0}\frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

D.h. es folgt aus der Voraussetzung, dass der Grenzwert $\lim_{x\searrow 0}\frac{k'(x)}{l'(x)}$ existiert oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Jetzt können wir also Satz 12.13 anwenden, und erhalten mit der obigen Berechnung, dass

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0}\frac{k(x)}{l(x)} = \lim_{x\searrow 0}\frac{k'(x)}{l'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Beispielsweise gilt für jedes $\alpha > 0$, dass

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Das heißt für $x\to\infty$ wächst die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ ‘langsamer’ als jede positive Potenz von x. Andererseits erhält man für jedes $n\in\mathbb{N}$, durch mehrmaliges Anwenden der Regel von l’Hôpital, dass

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}\\ &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \overset{l'H}{=} \ldots \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1} = +\infty,\end{aligned}$$

das heißt für $x\to\infty$ wächst die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ‘schneller’ als jede Potenz von x.

13. Das Riemannsche Integral

13.1. **Definitionen und erste Eigenschaften.** Es sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Eine *Zerlegung Z von* $[a,b]$ ist eine Menge $Z=\{z_0,z_1,\dots,z_n\}$ von reellen Zahlen, so dass

$$a=z_0<z_1<z_2<\dots<z_{n-1}<z_n=b.$$

Sei nun $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$U(Z,f) \;:=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\inf f([z_k,z_{k+1}])$$

die *Untersumme von f bezüglich der Zerlegung Z* und

$$O(Z,f) \;:=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\sup f([z_k,z_{k+1}])$$

heißt die *Obersumme von f bezüglich der Zerlegung Z*.

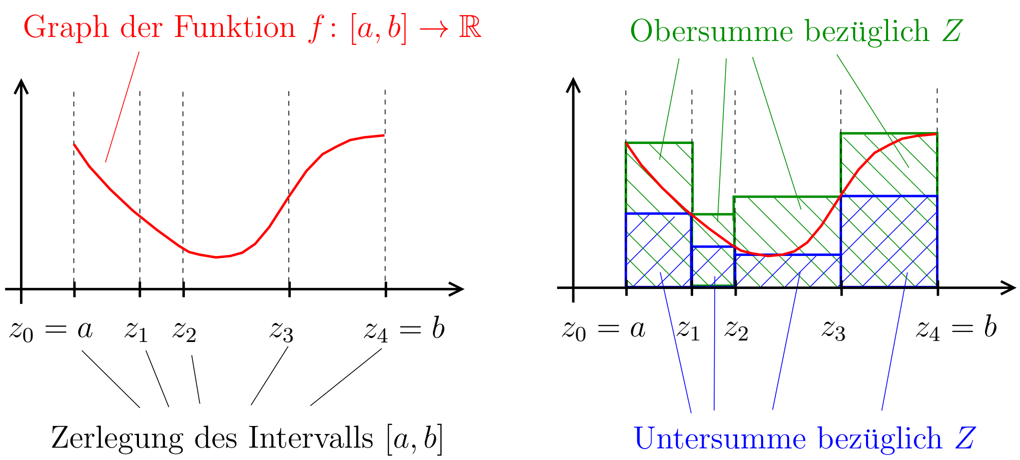


Abbildung 21. Die Untersumme und die Obersumme von f bezüglich einer Zerlegung $Z=\{z_0,z_1,z_2,z_3,z_4\}$.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ die Zerlegung von $[0,1]$ in n Intervalle der Länge $\frac{1}{n}$. Dann folgt aus Lemma 2.2, dass

$$U(Z_n, f) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\tfrac{k+1}{n} - \tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\inf f([\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}])}_{=\frac{k}{n}} \;=\; \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k}_{=\frac{(n-1)n}{2}} \;=\; \frac{n-1}{2n}$$

sowie

$$O(Z_n, f) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\tfrac{k+1}{n} - \tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\sup f([\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}])}_{=\frac{k+1}{n}} \;=\; \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)}_{=\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \;=\; \frac{n+1}{2n}$$

Definition. Es sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$. Wenn man Z' aus Z durch Zufügen von Punkten in $[a,b]$ erhält, das heißt, wenn $Z \subset Z'$, dann nennen wir Z' eine *Verfeinerung der Zerlegung* Z.

Es seien beispielsweise Z und Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$, dann ist $Z \cup Z'$ eine Verfeinerung sowohl von Z als auch von Z'. Wir fassen im folgenden Lemma einige grundlegende Eigenschaften von Untersummen und Obersummen zusammen.

Lemma 13.1. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

(1) *Wenn Z' eine Verfeinerung einer Zerlegung Z ist, dann gilt*

$$U(Z,f) \le U(Z',f) \quad \text{und} \quad O(Z',f) \le O(Z,f).$$

(2) *Es seien Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$, dann gilt*

$$U(Z',f) \;\le\; O(Z,f).$$

(3) *Es ist*

$$\sup\{U(Z,f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \;\le\; \inf\{O(Z,f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}.$$

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(1) Es sei nun Z' eine Verfeinerung einer Zerlegung Z. Wenn $Z' = Z \cup \{w\}$, d.h. wenn wir Z' durch Hinzufügen von einem Punkt erhalten, dann werden wir in Übungsblatt 12 zeigen, dass

$$U(Z,f) \le U(Z',f) \quad \text{und} \quad O(Z',f) \le O(Z,f).$$

Der allgemeine Fall folgt nun indem wir dieses Argument iterieren.

(2) Nehmen wir zuerst an, dass $Z = Z'$. Nachdem für eine beliebige beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ gilt, dass $\inf(M) \le \sup(M)$, folgt sofort aus den Definitionen, dass $U(Z,f) \le O(Z,f)$.

Es seien nun Z, Z' zwei beliebige Zerlegungen von $[a,b]$. Dann folgt, dass

$$\begin{array}{rcll} U(Z',f) & \le & U(Z\cup Z',f) & \text{nach (1)} \\ & \le & O(Z\cup Z',f) & \text{für jede Zerlegung } Y \text{ gilt } U(Y,f)\le O(Y,f) \\ & \le & O(Z,f) & \text{nach (1).} \end{array}$$

(3) Diese Aussage folgt aus (2) und aus der Definition von Supremum und Infimum.

□

Im Folgenden sagen wir nun, dass eine Funktion f *Riemann-integrierbar* ist, wenn die Gleichheit in (3) gilt. Genauer gesagt haben wir folgende Definition.

Definition. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\sup\{U(Z,f)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \quad = \quad \inf\{O(Z,f)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b].\}$$

Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\;dx \quad := \quad \inf\{O(Z,f)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

das *Riemann-Integral über* f *von* a *nach* b.

Wir sagen in Zukunft oft auch 'integrierbar' anstatt 'Riemann-integrierbar' und 'Integral' anstatt 'Riemann-Integral'. Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann sagen wir auch, dass $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert. [88]

Beispiel. Es sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine konstante Funktion, das heißt es gibt ein $c\in\mathbb{R}$, so dass $f(x)=c$ für alle $x\in[a,b]$. Dann gilt für jede Zerlegung $Z=\{z_0,\dots,z_n\}$ von $[a,b]$, dass

$$U(Z,f) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\underbrace{\inf f([z_k,z_{k+1}])}_{=c} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\cdot c \;=\; c(z_n-z_0)=c(b-a).$$

Genauso zeigt man auch, dass $O(Z,f)=c(b-a)$. Wir haben also gezeigt, dass f Riemann-integrierbar ist, und dass

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; c(b-a).$$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{wenn } x\in\mathbb{Q}\cap[0,3] \\ 2, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{array}$$

[88] Wenn wir schreiben 'Riemann-integrierbar', dann stellt sich die Frage, ob es denn noch andere Definitionen von 'Integrierbarkeit' gibt, außer der Riemann-Integrierbarkeit. Dies ist in der Tat der Fall, in Analysis III werden wir das Lebesgue-Integral kennenlernen, welches noch mal viel allgemeiner (und auch deutlich komplizierter) ist.

Es sei $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt

$$U(Z,f) = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \underbrace{\inf f([z_k, z_{k+1}])}_{\substack{=0,\text{ weil }[z_k,z_{k+1}]\\ \text{rationale Zahlen enthalt}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot 0 = 0$$

$$O(Z,f) = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \underbrace{\sup f([z_k, z_{k+1}])}_{\substack{=2,\text{ weil }[z_k,z_{k+1}]\\ \text{irrationale Zahlen enthalt}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot 2 = 3 \cdot 2.$$

Die Funktion f ist also nicht Riemann-integrierbar. [89]

Der folgende Satz erlaubt es, die Integrabilität einer Funktion zu zeigen, ohne direkt mit Infimum und Supremum zu arbeiten.

Satz 13.2. *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es eine Folge von Zerlegungen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$ gibt, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

Zudem, wenn es eine solche Folge von Zerlegungen gibt, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir nehmen zuerst an, dass $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Wir setzen $I := \int_a^b f(x)\,dx$. Nach Satz 4.12 existieren also Folgen von Zerlegungen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) = I = \lim_{n\to\infty} O(Z'_n, f).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} I = \lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) &\le \lim_{n\to\infty} U(Z_n \cup Z'_n, f) && \text{nach Lemma 13.1 (1)} \\ &\le \lim_{n\to\infty} O(Z_n \cup Z'_n, f) && \text{nach Lemma 13.1 (2)} \\ &\le \lim_{n\to\infty} O(Z'_n, f) && \text{nach Lemma 13.1 (1)} \\ &= I. \end{aligned}$$

Nachdem der erste Ausdruck gleich dem letzten Ausdruck ist, müssen alle Ungleichheiten also schon Gleichheiten sein. Die Folge von Zerlegungen $(Z_n \cup Z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat also die gewünschte Eigenschaft.

Nehmen wir nun an, es gibt eine Folge von Zerlegungen Z_n von $[a,b]$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

[89] In Analysis III werden wir sehen, dass f Lebesgue-integrierbar ist mit Lebesgue-Integral $2 \cdot 3 = 6$.

Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} \lim\limits_{n\to\infty} U(Z_n, f) & \leq & \sup\{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} & \text{Definition von Supremum} \\ & \leq & \inf\{O(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} & \text{weil } U(Z,f) \leq O(Z,f) \\ & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} O(Z_n, f) & \text{Definition von Infimum.} \end{array}$$

Wir haben angenommen, dass der erste Ausdruck gleich dem letzten Ausdruck ist. Wir sehen also wiederum, dass alle Ungleichheiten schon Gleichheiten sind. Insbesondere ist f integrierbar. □

Für später halten wir auch schon folgendes Korollar zu Satz 13.2 fest.

Korollar 13.3. (*Riemannsches Integrabilitätskriterium*) *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$ gibt, so dass*

$$O(Z,f) - U(Z,f) \ < \ \varepsilon.$$

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir nehmen zuerst an, dass $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Wir setzen $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Dann gibt es nach Satz 13.2 eine Zerlegung Z mit $I - U(Z,f) < \frac{\varepsilon}{2}$ und mit $O(Z,f) - I < \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt die Ungleichung $O(Z,f) - U(Z,f) < \varepsilon$.

Umgekehrt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z vom Intervall $[a,b]$ gibt, so dass $O(Z,f) - U(Z,f) < \varepsilon$, dann gibt es insbesondere zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n von $[a,b]$, so dass $O(Z_n,f) - U(Z_n,f) < \frac{1}{n}$. Es folgt wiederum aus der Definition der Konvergenz von Folgen, dass

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) \ = \ \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

Also ist f nach Satz 13.2 integrierbar. □

Im Folgenden werden wir aber erst einmal nur Satz 13.2 anwenden.

Beispiel.

(1) Wir betrachten wiederum die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

zusammen mit der Folge von Zerlegungen $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Auf Seite 147 hatten wir berechnet, dass $U(Z_n,f) = \frac{n-1}{2n}$ und $O(Z_n,f) = \frac{n+1}{2n}$. Es folgt dann, dass

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{U(Z_n,f)}_{=\frac{n-1}{2n}} \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} \ = \ \frac{1}{2} \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} \ = \ \lim_{n\to\infty} \underbrace{O(Z_n,f)}_{=\frac{n+1}{2n}}.$$

Es folgt also aus Satz 13.2, dass $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

(2) Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{wenn } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

zusammen mit der Folge von Zerlegungen $Z_n := \{-1, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, 1\}$, siehe Abbildung 22. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} U(Z_n, f) & = & 0, \\ O(Z_n, f) & = & \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2n} - (-\frac{1}{2n})) \ = \ \frac{1}{3n}. \end{array}$$

Die Grenzwerte dieser Folgen von Untersummen und Obersummen sind jeweils 0. Es folgt also aus Satz 13.2, dass $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

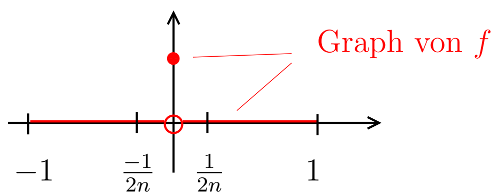


ABBILDUNG 22.

Satz 13.4. *Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$ und $\lambda \cdot f$ integrierbar und es gilt*

$$\begin{array}{rcl} \int\limits_a^b f(x) + g(x)\,dx & = & \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx \\ \int\limits_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx & = & \lambda \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx. \end{array}$$

Beweis. Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Wir müssen zeigen, dass $f+g$ integrierbar ist mit

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Nach Satz 13.2 existieren Folgen von Zerlegungen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$, so dass

$$\begin{array}{rcccl} \lim\limits_{n\to\infty} U(X_n, f) & = & \lim\limits_{n\to\infty} O(X_n, f) & = & \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{und} \\ \lim\limits_{n\to\infty} U(Y_n, g) & = & \lim\limits_{n\to\infty} O(Y_n, g) & = & \int_a^b g(x)\,dx. \end{array}$$

Nach Satz 13.2 genügt es nun zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} U(X_n \cup Y_n, f+g) \ = \ \lim_{n\to\infty} O(X_n \cup Y_n, f+g) \ = \ \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir folgende Behauptung.

Behauptung. Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt, dass
$$U(Z,f)+U(Z,g) \;\leq\; U(Z,f+g)$$
sowie
$$O(Z,f+g) \;\leq\; O(Z,f)+O(Z,g).$$

Wir beweisen die Aussage für die Untersummen. Die Aussage für die Obersummen wird dann ganz analog bewiesen. Es folgt sofort aus den Definitionen, dass es genügt zu zeigen, dass für jedes Intervall $[c,d]$ folgende Ungleichung gilt:
$$\inf\big(f([c,d])\big)+\inf\big(g([c,d])\big) \;\leq\; \inf\big((f+g)([c,d])\big).$$
Wir müssen also zeigen, dass
$$\inf\big(f([c,d])\big)+\inf\big(g([c,d])\big) \;\leq\; (f+g)(x) \qquad \text{für alle } x\in[c,d]$$
Es gilt aber in der Tat für ein beliebiges $x\in[c,d]$, dass
$$(f+g)(x) \;=\; f(x)+g(x) \;\geq\; \inf\big(f([c,d])\big)+\inf\big(g([c,d])\big).$$
Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Es folgt nun, dass
$$\begin{array}{rcll}
\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx & = & \lim\limits_{n\to\infty} U(X_n,f)+\lim\limits_{n\to\infty} U(Y_n,g) & \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} U(X_n\cup Y_n,f)+\lim\limits_{n\to\infty} U(X_n\cup Y_n,g) & \text{nach Lemma 13.1 (1)}\\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} U(X_n\cup Y_n,f+g) & \text{nach der Behauptung}\\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} O(X_n\cup Y_n,f+g) & \text{nach Lemma 13.1 (2)}\\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} O(X_n\cup Y_n,f)+\lim\limits_{n\to\infty} O(X_n\cup Y_n,g) & \text{nach der Behauptung}\\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} O(X_n,f)+\lim\limits_{n\to\infty} O(Y_n,g) & \text{nach Lemma 13.1 (1)}\\
& = & \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx. &
\end{array}$$
Dies ist jedoch nur möglich, wenn alle Ungleichheiten schon Gleichheiten sind. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Es sei nun $\lambda\in\mathbb{R}$. Die Aussage für λf zeigt man fast genauso. Dies verbleibt als freiwillige Übungsaufgabe. □

Korollar 13.5. *Es sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und es sei $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion, welche sich von f nur in endlich vielen Punkten unterscheidet. Dann ist g ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt*
$$\int_a^b g(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Wir definieren $h(x):=g(x)-f(x)$. Bis auf endlich viele Ausnahmen gilt dann $h(x)=0$ für $x\in[a,b]$. Ähnlich wie im Beispiel auf Seite 151 kann man zeigen, dass h Riemann-integrierbar ist mit $\int_a^b h(x)\,dx=0$. Das Korollar folgt nun aus Satz 13.4 nachdem $g=f+h$. □

Lemma 13.6. (Monotonieeigenschaft des Integrals) *Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen, so dass $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\le\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis. Die Aussage folgt leicht aus den Definitionen, nachdem für jedes Intervall $[c,d]$ in $[a,b]$ gilt, dass

$$\inf\big(f([c,d])\big) \;\le\; \inf\big(g([c,d])\big).$$

□

Lemma 13.7. *Es sei $a < b < c$ und $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt*

$$\int_a^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

wenn die beiden Integrale auf der rechten Seite existieren.

Beweis. Nach Satz 13.2 existieren Folgen von Zerlegungen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[b,c]$ gibt, so dass

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U(Y_n,f) &= \lim_{n\to\infty} O(Y_n,f) &&= \textstyle\int_a^b f(x)\,dx,\\
\lim_{n\to\infty} U(Z_n,f) &= \lim_{n\to\infty} O(Z_n,f) &&= \textstyle\int_b^c f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Für eine beliebige Zerlegung Y von $[a,b]$ und eine beliebige Zerlegung Z von $[b,c]$ ist $Y \cup Z$ eine Zerlegung von $[a,c]$. Es folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$(*) \qquad \begin{aligned}
U(Y,f) + U(Z,f) &= U(Y\cup Z,f)\\
O(Y,f) + O(Z,f) &= O(Y\cup Z,f)
\end{aligned}$$

Es folgt also, dass

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} U(Y_n,f) \;+\; \lim_{n\to\infty} U(Z_n,f)\\
&= \lim_{n\to\infty} U(Y_n\cup Z_n,f) && \text{nach } (*)\\
&\le \lim_{n\to\infty} O(Y_n\cup Z_n,f)\\
&= \lim_{n\to\infty} O(Y_n,f) \;+\; \lim_{n\to\infty} O(Z_n,f) && \text{nach } (*)\\
&= \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Alle Ungleichheiten müssen also Gleichheiten sein und es folgt aus Satz 13.2, dass

$$\int_a^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

□

Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $b < a$ in I definieren wir dann

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;:=\; -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Für $a \in I$ definieren wir zudem

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx \;:=\; 0.$$

Mit dieser Konvention erhalten wir nun folgendes Korollar zu Lemma 13.7.

Korollar 13.8. *Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für beliebige $a, b, c \in I$ gilt, dass*

$$\int_a^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

wenn alle drei Integrale existieren.[90]

Beweis. Das Korollar folgt leicht durch 'richtiges Anordnen von a, b, c' und Lemma 13.7. Beispielsweise, wenn $b < c < a$, dann folgt aus Lemma 13.7, dass

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx \;=\; \int\limits_b^c f(x)\,dx + \int\limits_c^a f(x)\,dx,$$

Mithilfe der Konvention erhalten wir, dass

$$-\int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; \int\limits_b^c f(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx,$$

also ist

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Die anderen Fälle werden ganz analog bewiesen. □

13.2. **Integrabilitätskriterien.** In diesem Kapitel wollen wir verschiedene Integrabilitätskriterien beweisen. Beispielsweise wollen wir zeigen, dass stetige Funktionen immer integrierbar sind. Wir werden dabei mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium, d.h. mit Korollar 13.3, arbeiten. Zur Erinnerung, dieses besagt, dass eine beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, so dass

$$O(Z, f) - U(Z, f) \;<\; \varepsilon.$$

[90] Man kann die Aussage noch etwas verbessern: wenn zwei der drei Integrale existieren, dann existiert auch das dritte. Um dies zu beweisen müßte man dann auch die Aussage von Lemma 13.7 leicht abändern. Dies verbleibt als freiwillige Übungsaufgabe.

Bevor wir uns der Formulierung und den Beweisen von verschiedenen Integrabilitätskriterien zuwenden, ist es also hilfreich die Differenzen $O(Z,f)-U(Z,f)$ zwischen Obersummen und Untersummen etwas umzuschreiben. Es sei also $Z=\{z_0,z_1,\ldots,z_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann können wir $O(Z,f)-U(Z,f)$ auch folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} O(Z,f)-U(Z,f) &= \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\sup f([z_i,z_{i+1}]) - \sum_{i=0}^{n}(z_{i+1}-z_i)\inf f([z_i,z_{i+1}]) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\Big(\sup f([z_i,z_{i+1}]) - \inf f([z_i,z_{i+1}])\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\sup\big\{|f(x)-f(x')|\,\big|\,x,x'\in[z_i,z_{i+1}]\big\}. \end{aligned}$$

Für ein Teilintervall $[r,s]$ von $[a,b]$ bezeichnen wir jetzt

$$d(f,[r,s]) \;:=\; \sup\big\{|f(x)-f(x')|\,\big|\,x,x'\in[r,s]\big\}$$

als die maximale Differenz auf dem Teilinterval $[r,s]$. Mit dieser Notation gilt dann also, dass

$$O(Z,f)-U(Z,f) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)d(f,[z_i,z_{i+1}]).$$

Insbesondere gilt also, dass

$$\begin{aligned} O(Z,f)-U(Z,f) &= \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)d(f,[z_i,z_{i+1}]) \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\max\big\{d(f,[z_i,z_{i+1}])\,\big|\,i=0,\ldots,n-1\big\} \\ &= (b-a)\max\big\{d(f,[z_i,z_{i+1}])\,\big|\,i=0,\ldots,n-1\big\}. \end{aligned}$$

Nach dieser langen Vorbemerkung können wir jetzt endlich den wichtigsten Satz dieses Kapitels beweisen:

Satz 13.9. *Jede stetige Funktion $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Es sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium und nach der obigen Ungleichung genügt es zu nun also zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Zerlegung $Z=\{z_0,\ldots,z_n\}$ gibt, so dass

$$(b-a)\max\big\{d(f,[z_i,z_{i+1}])\,\big|\,i=0,\ldots,n-1\big\} \;<\; \varepsilon$$

oder, so dass die äquivalente Ungleichung

$$\max\big\{d(f,[z_i,z_{i+1}])\,\big|\,i=0,\ldots,n-1\big\} \;<\; \frac{\varepsilon}{b-a}$$

gilt. Es sei also $\varepsilon>0$.

Wir müssen also eine Zerlegung vom Intervall $[a,b]$ finden, welche so 'fein' ist, dass die maximale Differenz auf jedem Teilintervall $[z_i,z_{i+1}]$ höchstens $\frac{\varepsilon}{b-a}$ beträgt. Anders ausgedrückt, die z_i's müssen so eng beieinander liegen, dass die Funktionswerte dazwischen sich nur noch um höchstens $\frac{\varepsilon}{b-a}$ unterscheiden können. Eine solche Zerlegung finden wir, wenn wir uns der gleichmäßigen Stetigkeit entsinnen.

Nachdem f stetig ist und auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ definiert ist, folgt aus Satz 7.5, dass f gleichmäßig stetig ist. Zur Erinnerung, das heißt

$$\underset{\eta>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x,x'\in[a,b] \\ \text{mit } |x-x'|<\delta}}{\forall} \quad |f(x)-f(x')|<\eta.$$

Anders ausgedrückt, es gilt

$$\underset{\eta>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{\text{Intervalle} \\ [c,d]\subset[a,b] \\ \text{mit Lange } \leq\delta}}{\forall} \quad d\big(f,[c,d]\big)<\eta.$$

Wir setzen nun $\eta=\frac{\varepsilon}{b-a}$ und wir wählen ein $\delta>0$ mit der obigen Eigenschaft.

Die Idee ist nun eine Zerlegung zu wählen, so dass das Intervall von jedem Teilintervall $[z_k,z_{k+1}]$ höchstens δ beträgt.

Wir wählen ein $n\in\mathbb{N}$, so dass $\frac{b-a}{n}<\delta$. Wir betrachten dann die Zerlegung $z_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$ wobei $i=0,\dots,n$. Es folgt aus der obigen Ungleichung, dass wie gewünscht $d(f,[z_i,z_{i+1}])<\frac{b-a}{n}$ für alle i. ☐

In Übungsblatt 12 werden Sie folgenden Satz beweisen:

Satz 13.10. *Jede monotone Funktion $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar.*

13.3. **Lipschitz-stetige Funktionen und Integrabilität.** Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass das Produkt von zwei integrierbaren Funktion $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ wiederum integrierbar ist. Um dies zu zeigen, müssen wir allerdings etwas ausholen. Insbesondere benötigen wir dazu den Begriff der Lipschitz-stetigen Funktion.

Definition. Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f ist *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L*, wenn für alle $x,y\in D$ gilt, dass

$$|f(x)-f(y)| \;\leq\; L|x-y|.$$

Beispiel.
(1) Für jedes $C\in\mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x)=Cx$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $|C|$.
(2) In Übungsblatt 12 werden wir sehen, dass die Funktion $x\mapsto|x|$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L=1$ ist.
(3) Andererseits werden wir in Übungsblatt 12 sehen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon[0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

nicht Lipschitz-stetig ist.

Der folgende Satz gibt nun viele weitere Beispiele von Lipschitz-stetigen Funktionen.

Satz 13.11. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass $|f'(x)| \leq C$ für alle inneren Punkte x von I, dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante C.*

Der Satz folgt leicht aus den Definitionen und dem Mittelwertsatz 12.3. Der Beweis erfolgt in Übungsblatt 12. Es folgt beispielsweise aus dem Satz, dass für jedes $a > 0$ die Quadratfunktion

$$\begin{array}{rcl} [-a,a] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $2a$. In der Tat, denn für alle $x \in (-a,a)$ gilt, dass $|f'(x)| = |2x| \leq 2a$. [91]

Der Name 'Lipschitz-stetig' suggestiert, dass eine solche Funktion stetig ist. Das folgende Lemma gibt sogar eine etwas stärkere Aussage

Lemma 13.12. *Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Es sei also $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante L. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta := \frac{\varepsilon}{\max\{L,1\}}$, [92] dass in der Tat

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; L|x-y| \;<\; L\frac{\varepsilon}{\max\{L,1\}} \;\leq\; \varepsilon.$$

□

Wir kehren jetzt wieder zurück zum Studium von integrierbaren Funktionen.

Lemma 13.13. *Es sei $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und es sei $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion, so dass $h([a,b]) \subset M$. Dann ist die Funktion $\phi \circ h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls integrierbar.*

Beweis. Es sei ϕ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L.

> Wir wollen auch hier wieder mit dem Kriterium für Integrierbarkeit arbeiten. Wir müssen dazu die Differenzen $O(Z, \phi\circ h) - U(Z, \phi \circ h)$ abschätzen.

Es sei nun $Z = \{z_0, \ldots, z_n\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Nach der Gleichung auf Seite 155 folgt, dass

$$\begin{aligned} O(Z,\phi\circ h) - U(Z,\phi\circ h) \;&=\; \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\,\sup\Big\{\underbrace{|\phi(h(x)) - \phi(h(x'))|}_{\substack{\leq L\cdot|h(x)-h(x')| \\ \text{da } \phi \textit{ Lipschitz}-\textit{stetig}}}\,\Big|\, x,x' \in [z_i, z_{i+1}]\Big\} \\ &\leq\; L\sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\,\sup\Big\{|h(x)-h(x')|\,\Big|\, x,x' \in [z_i,z_{i+1}]\Big\} \\ &\leq\; L\cdot\big(O(Z,h) - U(Z,h)\big). \end{aligned}$$

[91] Andererseits kann man leicht sehen, dass die Funktion $f(x) = x^2$ betrachtet auf ganz $\mathbb{R}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

[92] Der einzige Grund warum wir $\frac{\varepsilon}{\max\{L,1\}}$ anstatt $\frac{\varepsilon}{L}$ schreiben ist, dass wir nicht ausschließen können, dass $L = 0$, aber wir wollen natürlich nicht durch 0 teilen.

Wir zeigen nun mithilfe des Kriteriums, dass $\phi \circ f$ integrierbar ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem f integrierbar ist, existiert eine Zerlegung Z von $[a, b]$, so dass

$$O(Z, h) - U(Z, h) \;<\; \tfrac{\varepsilon}{L},$$

es folgt aus der obigen Ungleichung, dass wie gewünscht

$$O(Z, \phi \circ h) - U(Z, \phi \circ h) \;<\; L \cdot \tfrac{\varepsilon}{L} \;=\; \varepsilon.$$

□

Wir hatten schon gesehen, dass die Funktion $\phi(x) = |x|$ Lipschitz-stetig ist. Wir erhalten also folgendes Korollar zu 13.13.

Korollar 13.14. *Wenn $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion ist, dann ist auch $|f|$ integrierbar.*

Wir können jetzt endlich, wie am Anfang versprochen, zeigen, dass das Produkt von zwei integrierbaren Funktionen wiederum integrierbar ist.

Satz 13.15. *Es seien $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen. Dann ist die Produktfunktion $f \cdot g$ ebenfalls integrierbar.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass das Quadrat einer integrierbaren Funktion $h: [a, b] \to \mathbb{R}$ wiederum integrierbar ist. Nachdem jede integrierbare Funktion per Definition beschränkt ist, existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|h(x)| \leq C$ für alle x. Wie wir im Anschluß an Satz 13.11 gesehen hatten, ist die Funktion

$$\begin{aligned} \phi: [-C, C] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Lipschitz-stetig. Es folgt also aus Lemma 13.13, dass $h^2 = \phi \circ h$ integrierbar ist.

Es seien $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen. Die Aussage des Satzes folgt nun aus Satz 13.4, der obigen Aussage, und der Beobachtung, dass

$$f \cdot g \;=\; \frac{1}{4}\left((f + g)^2 - (f - g)^2)\right).$$

□

Lemma 13.16. *Wenn $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, dann gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Beweis. Aus der Tatsache, dass

$$-|f(x)| \;\leq\; f(x) \;\leq\; |f(x)| \qquad \text{für alle } x \in [a, b],$$

und aus Lemma 13.6 folgt, dass

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \;\leq\; \int_a^b f(x)\, dx \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Es folgt also wie gewünscht, dass $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

Satz 13.17. (*Mittelwertsatz der Integralrechnung*) *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so dass*

$$f(\xi) \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis.

Die Aussage erinnert etwas an den Zwischenwertsatz 7.3 für stetige Funktionen. Allerdings gibt es keinen Grund anzunehmen, dass $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt. Beispielsweise ist dies nicht der Fall für die Funktion, welche in Abbildung 23 skizziert ist. Die Idee ist nun, dass wir uns auf ein Teilintervall $[x_0, x_1]$ von $[a,b]$ einschränken, so dass das Intervall $[f(x_0), f(x_1)]$ 'so groß wie möglich' ist.

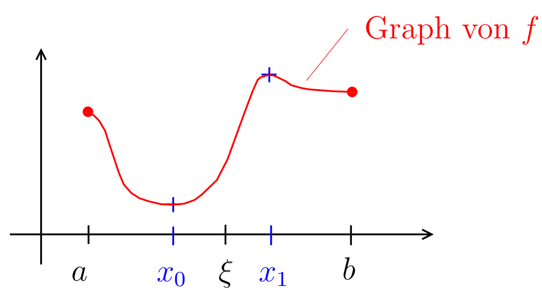


Abbildung 23.

Nach Satz 7.2 existieren $x_0, x_1 \in [a,b]$, so dass

$$f(x_0) \quad\leq\quad f(x) \quad\leq\quad f(x_1)$$

für alle $x \in [a,b]$.Dann folgt aus Lemma 13.6, dass

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x_0)\,dx}_{=f(x_0),\,\text{da Integrand konstant}} \;\leq\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x_1)\,dx}_{=f(x_1),\,\text{da Integrand konstant}}$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt nun also aus dem Zwischenwertsatz 7.3, angewandt auf die Einschränkung von f auf das Intervall mit den Endpunkten x_0 und x_1. □

14. Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

In diesem Kapitel sei I durchgehend ein Intervall. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir führen folgende Definitionen ein:

(1) Wir sagen f ist differenzierbar, wenn f in allen inneren Punkten von I differenzierbar ist und wenn zudem f auf ganz I stetig ist. Für $I = [a, b]$ ist dies gerade die Definition von Differenzierbarkeit, welche wir zu Beginn von Kapitel 12.1 eingeführt hatten.
(2) Eine *Stammfunktion von f* ist eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$, so dass $F'(x) = f(x)$ für alle inneren Punkte x von I.

Wir können nun einen der wichtigsten Sätze der Analysis I formulieren.

Satz 14.1. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*) *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei $x_0 \in I$. Dann ist*

$$F(x) \ := \ \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

eine Stammfunktion von f.

Beweis. Es sei $x \in I$ ein beliebiger innerer Punkt. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} F'(x) & = & \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} & \\ & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int\limits_{x_0}^{x+h} f(t)\, dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right) & \\ & = & \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} f(t)\, dt}_{\substack{= f(\xi_h) \text{ fur ein } \xi_h \in [x, x+h], \\ \text{nach dem Mittelwertsatz} \\ \text{der Integralrechnung}}} & \text{nach Korollar 13.8} \\ & = & \lim\limits_{h\to 0} f(\xi_h) & \\ & = & f\Big(\lim\limits_{h\to 0} \xi_h\Big) & \text{weil } f \text{ stetig} \\ & = & f(x), & \text{denn aus } \xi_h \in [x, x+h] \text{ folgt } \lim\limits_{h\to 0} \xi_h = x. \end{array}$$

□

Lemma 14.2. *Wenn F und G Stammfunktionen von $f\colon I \to \mathbb{R}$ sind, dann ist die Funktion $F - G$ eine konstante Funktion.*

Beweis. Es gilt $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Es folgt nun aus Lemma 12.5, dass $F - G$ eine konstante Funktion ist. □

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann schreiben wir im Folgenden

$$\int f(x)\,dx \;=\; F.$$

Diese Schreibweise ist zwar etwas problematisch, weil F nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Aber uns ist dies im weiteren Verlauf der Vorlesung egal. Wir nennen $\int f(x)\,dx$ manchmal auch das *unbestimmte Integral von f*.

Satz 14.3. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion. Dann gilt für alle $a, b \in I$, dass*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a).$$

Für eine beliebige Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ und $a, b \in I$ schreiben wir

$$\big[F(x)\big]_a^b \;:=\; F(x)\Big|_a^b \;:=\; F(b) - F(a).$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$G(x) \;:=\; \int_a^x f(t)\,dt.$$

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt, dass G ebenfalls eine Stammfunktion von f ist. Nach Lemma 14.2 existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $F(x) = G(x) + C$ für alle $x \in I$. Per Definition ist $G(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ und $G(a) = 0$. Es folgt, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; G(b) - G(a) \;=\; (G(b) + C) - (G(a) + C) \;=\; F(b) - F(a).$$

□

Aus den schon bestimmten Ableitungen erhalten wir jetzt folgende Tabelle:

Funktion	Ableitung	Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x	e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\ln(x), x > 0$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\big(\lvert x\rvert\big)$
$\ln(-x), x < 0,$	$\frac{1}{x}$		

Aus Satz 11.4 erhalten wir zudem sofort folgendes Lemma.

Lemma 14.4. *Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int f(x) + g(x)\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \qquad \textit{sowie} \\ \int \lambda f(x)\,dx &= \lambda \int f(x)\,dx. \end{aligned}$$

14.1. **Partielle Integration.** Wie wir schon im vorherigen Kapitel gesehen haben, können wir aus unseren Ergebnisse über Ableitungen neue Aussagen über Stammfunktionen gewinnen. In diesem Kapitel werden wir neue Integrationsregeln aus den Ableitungsregeln gewinnen.

In diesem Kapitel sei I weiterhin ein Intervall.

Satz 14.5. (Partielle Integration) *Es seien $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare* [93] *Funktionen. Dann gilt*

$$\int u(x)v'(x)\,dx \;=\; u(x)v(x) \;-\; \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Beweis. Aus der Produktregel der Ableitung folgt, dass

$$(u(x)v(x))' \;=\; u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

also

$$u(x)v'(x) \;=\; (u(x)v(x))' - u'(x)v(x).$$

Aus Lemma 14.4 und der Definition einer Stammfunktion folgt nun, dass

$$\int u(x)v'(x)\,dx \;=\; u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Der Satz folgt nun aus Satz 14.3.[94] □

Die Formel aus dem vorherigen Satz kann man auch etwas knapper wie folgt formulieren:

$$\int uv'\,dx \;=\; uv - \int u'v\,dx.$$

Mithilfe der partiellen Integration kann man also ein Integral durch ein anderes, hoffentlich deutlich leichteres, Integral ersetzen. Die partielle Integration bietet sich normalerweise dann an, wenn sich durch das Ableiten der Funktion u der Integrand $u'v$ vereinfacht. Dies ist beispielsweise oft der Fall, wenn $u = x^n$ oder wenn $u = \ln(x)$.

Beispiel.

(1) Wir betrachten $f(x) = x \cdot \cos(x)$. Dann gilt

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}\,dx \;=\; \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}\,dx \;=\; x\sin(x) + \cos(x).$$

[93] Zur Erinnerung, eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar ist, und wenn f' stetig ist.

[94] An welcher Stelle haben wir die Voraussetzung verwendet, dass u und v stetig differenzierbar sind?

(2) Manchmal muss man ein Integral erst geschickt als Produkt umschreiben, um partielle Integration erfolgreich anwenden zu können. Beispielsweise ist

$$\int \ln(x)\,dx \;=\; \int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'}\,dx \;=\; \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v}\,dx \;=\; \ln(x)\cdot x - x.$$

14.2. **Substitution.** Das folgende Lemma folgt sofort aus der Kettenregel für Ableitungen.

Lemma 14.6. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Für alle $c, d \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int f(cx+d)\,dx \;=\; \frac{1}{c}F(cx+d).$$

Beispielsweise gilt

$$\int \cos(2x+3)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\sin(2x+3).$$

Beweis. Es folgt aus der Kettenregel für Ableitungen, dass

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{c}F(cx+d) \;=\; \frac{1}{c}(F')(cx+d)\cdot(cx+d)' \;=\; f(cx+d).$$

□

Der folgende Satz ist nun eine Verallgemeinerung vom vorherigen Lemma.

Satz 14.7. *Es sei $u\colon [a,b] \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx \;=\; \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Beweis. Es sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt nach der Kettenregel für Ableitungen, dass

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) \;=\; f(u(x))\cdot u'(x).$$

Anders ausgedrückt, $F(u(x))$ ist eine Stammfunktion von $f(u(x))\cdot u'(x)$. Es folgt also aus Satz 14.3, dass

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx \;=\; \big[F(u(x))\big]_{x=a}^{x=b} \;&=\; F(u(b)) - F(u(a)) \\ &=\; \big[F(u)\big]_{u=u(a)}^{u=u(b)} \\ &=\; \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.\end{aligned}$$

□

Wenn wir nur unbestimmte Integrale betrachten, dann besagt die Substitutionsregel, dass

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx \;=\; \int f(u)\, du.$$

Beispiel. Wir wollen nun eine Stammfunktion von $\sin(x^2+3)\cdot x$ finden. Die Idee ist, die Substitution $u = x^2+3$ durchzuführen. Damit wir diese Substitution durchführen können, müssen wir allerdings $\sin(x^2+3)\cdot x$ in die Form von

$$f(u(x))\cdot u'(x) \;=\; f(x^2+3)\cdot 2x$$

bringen. Wir führen diese Idee jetzt aus

$$\begin{aligned}
\int \sin(x^2+3)\cdot x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int \sin(\underbrace{x^2+3}_{=:u(x)})\cdot \underbrace{2x}_{=u'(x)}\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int \sin(u)\, du && \text{Substitution } u = x^2+3 \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos(u) \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos(x^2+3) && \text{Rücksubstitution } u = x^2+3.
\end{aligned}$$

Wir beschließen das Kapitel über die Substitution mit folgendem Lemma.

Lemma 14.8. *Es ist*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\pi.$$

Nachdem der Graph von $\sqrt{1-x^2}$ gerade einen Halbkreis von Radius 1 beschreibt, besagt dieses Lemma, dass 'unsere' Definition von π aus Kapitel 10.2 in der Tat mit der 'üblichen' Definition von π über den Flächeninhalt übereinstimmt.

Beweis. Wir bestimmen erst einmal eine Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$. Es ist

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int (1-x^2)\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= \int (1-\sin(\underbrace{\arcsin(x)}_{=:u(x)})^2)\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{=u'(x)}\, dx \\
&= \int 1-\sin(u)^2\, du && \text{Substitution } u(x) = \arcsin(x) \\
&= \int \cos^2(u)\, du \;=\; (*).
\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt eine Stammfunktion für $\cos^2(u)$ finden, indem wir $\cos^2(u)$ umschreiben. Wir wissen, dass

$$\begin{aligned}
1 &= \sin^2(u)+\cos^2(u), && \text{und} \\
\cos(2u) &= \cos^2(u)-\sin^2(u), && \text{nach Satz 10.4 mit } x = y = u.
\end{aligned}$$

Durch Auflösen nach $\cos^2(u)$ erhalten wir also, dass

$$\cos^2(u) \;=\; \tfrac{1}{2}(1+\cos(2u)).$$

[95] Wir können jetzt mit dem Integral oben weiterrechnen, und erhalten mithilfe von Lemma 14.6, dass

$$(*) \;=\; \tfrac{1}{2}\int 1+\cos(2u)\,du \;=\; \tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{4}\sin(2u)$$

Durch Einsetzen erhalten wir jetzt, dass

$$\int\limits_{x=-1}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; \left[\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin(2u)\right]_{u=\arcsin(-1)}^{u=\arcsin(1)} \;=\; \left[\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin(2u)\right]_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

□

14.3. **Uneigentliche Integrale.**

Definition. Es sei $f\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a\in\mathbb{R}$ und $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, so dass für jedes $a\le d<b$ das Integral $\int_a^d f(x)\,dx$ existiert. Wir definieren dann

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \lim_{d\nearrow b}\int_a^d f(x)\,dx,$$

und nennen es das *uneigentliche Integral auf* $[a,b)$. [96] Ganz analog definiert man das uneigentliche Integral auf einem halb-offenen Intervall $(a,b]$.

Beispiel. Es ist

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty}\int_0^d e^{-x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty}\big[-e^{-x}\big]_0^d \;=\; \lim_{d\to\infty}(-e^{-d}+1) \;=\; 1.$$

Für später formulieren wir das nächste Beispiel als Lemma.

Lemma 14.9. *Für $s>1$ gilt*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \;=\; \frac{1}{s-1}.$$

[95] Alternativ kann man eine Stammfunktion für $\cos^2(x)$ auch geschickt mithilfe von partieller Integration bestimmen. Genauer gesagt, es ist

$$\begin{aligned}\textstyle\int\cos^2(x)\,dx=\int\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx &= \cos(x)\cdot\sin(x)-\textstyle\int(-\sin(x))\cdot\sin(x)\,dx\\ &= \cos(x)\cdot\sin(x)+\textstyle\int(1-\cos^2(x))\,dx\\ &= \cos(x)\sin(x)+x-\textstyle\int\cos^2(x)\,dx.\end{aligned}$$

Wir lösen jetzt nach $\int\cos^2(x)\,dx$ auf, und erhalten, dass

$$\textstyle\int\cos^2(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}(\cos(x)\sin(x)+x).$$

[96] Es gibt also drei Möglichkeiten: entweder konvergiert das uneigentliche Integral gegen eine reelle Zahl, oder es divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$, oder es existiert nicht.

Beweis. Es sei $s > 1$. Dann ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty}\int_1^d x^{-s}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty}\left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^d \;=\; \lim_{d\to\infty}\left(\frac{d^{-s+1}}{-s+1}+\frac{1}{s-1}\right) \;=\; \frac{1}{s-1}.$$

[97] □

Definition. Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ und $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, so dass für ein $c\in(a,b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ existieren oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergieren. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

wenn die rechte Seite definiert ist. Wir nennen dann $\int_a^b f(x)\,dx$ das *uneigentliche Integral von f auf (a,b).* [98]

Folgender Satz folgt sofort aus Satz 14.3 und aus den Definitionen.

Satz 14.10. *Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{x\nearrow b}F(x)-\lim_{x\searrow a}F(x),$$

wenn *die rechte Seite definiert ist.*

Beispielsweise ist

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \lim_{x\to\infty}\arctan(x)-\lim_{x\to-\infty}\arctan(x) \;=\; \frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}) \;=\; \pi.$$

Im Folgenden werden wir noch kurz die Konvergenz von Reihen und von uneigentlichen Integralen in Verbindung bringen. Genauer gesagt können wir nun folgenden Satz formulieren, welcher auf Seite 222 von Forster Analysis I bewiesen wird.

Satz 14.11. *Es sei $f\colon [1,\infty)\to\mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)\ \textit{konvergiert} \iff \int_1^\infty f(x)\,dx\ \textit{konvergiert.}$$

Beispiel. Es sei $s > 1$. Wir hatten in Lemma 14.9 gezeigt, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ konvergiert. Es folgt dann aus Satz 14.11, angewandt auf $f(x)=\frac{1}{x^s}$, dass für jedes $s\in(1,\infty)$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

[97] An welcher Stelle haben wir verwendet, dass $s > 1$?

[98] Man kann leicht mithilfe von Korollar 13.8 zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl von $c\in(a,b)$ abhängt.

konvergiert.

In Satz 5.4 hatten wir zwar schon gezeigt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Aber es erscheint eher schwierig, einen direkten Beweis dafür zu geben, dass beispielsweise die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.

Beispiel. Andererseits gilt, dass

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \int_1^d \frac{1}{x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \Big[\ln(x)\Big]_1^d \;=\; \lim_{d\to\infty} (\ln(d) - \ln(1)) \;=\; \infty.$$

Zusammen mit Satz 14.11 angewandt auf $f(x) = \frac{1}{x}$ gibt dies einen neuen Beweis dafür, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

14.4. **Die Gamma-Funktion** $(*)$**.** Dieses kurze Kapitel wurde *nicht* in der Vorlesung behandelt, und ist deswegen nicht Teil des offiziellen Stoffes. Es lohnt sich trotzdem dieses Kapitel durchzulesen, nachdem es eine besonders schöne Anwendung von unseren bisherigen Ergebnissen und Methoden gibt.

In diesem Kapitel werden wir folgendes Lemma beweisen.

Lemma 14.12. *Für jedes $s > 0$ konvergiert das uneigentliche Integral*

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,dt.$$

Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt \end{array}$$

heißt *Gamma-Funktion*. In diesem Kapitel werden wir zudem den folgenden Satz beweisen, welcher einige der wichtigsten Eigenschaften der Gamma-Funktion zusammenfasst.

Satz 14.13.

(1) $\Gamma(1) = 1$,

(2) *für alle $x \in (0,\infty)$ gilt*

$$\Gamma(x+1) \;=\; x \cdot \Gamma(x),$$

(3) *für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\Gamma(n) \;=\; (n-1)!.$$

Man kann also die Gamma-Funktion als Erweiterung der Fakultät auf positive reelle Zahlen auffassen.

Wir werden nun im Folgenden Lemma 14.12 und Satz 14.13 beweisen. Für den Beweis von Lemma 14.12 benötigen wir dabei den folgenden Satz, welchen man mithilfe von Lemma 13.6 leicht beweisen kann. Wir überlassen den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe.

Satz 14.14. (*Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale*) *Es seien $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen gegeben, wobei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nehmen wir an, es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass*

$$g(x) \geq |f(x)| \quad \text{für alle } x \in [C, b).$$

Dann gilt:

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \text{ konvergiert.}$$

Eine analoge Aussage gilt auch für Funktionen, welche auf $(a, b]$ definiert sind.

Beispiel. Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x+10}{x^3+x^2+2}\,dx.$$

Man kann leicht zeigen, dass $\frac{x+10}{x^3+x^2+2} \leq \frac{2}{x^2}$ für alle $x \geq 10$. Es folgt also aus Lemma 14.9 und aus Satz 14.14, dass das obige uneigentliche Integral konvergiert.

Mithilfe von Satz 14.14 können wir nun Lemma 14.12 beweisen.

Beweis von Lemma 14.12. Es sei also $s > 0$ gegeben. Die Funktion $t^{s-1}e^{-t}$ ist nur auf dem Intervall $(0, \infty)$ definiert. Per Definition von einem uneigentlichen Integral gilt

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt \;=\; \underbrace{\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt}_{=(1)} + \underbrace{\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt}_{=(2)}.$$

Wir müssen zeigen, dass beide uneigentliche Integrale existieren.

(1) Wir beginnen mit dem ersten Integral. Für alle $t \in (0, 1]$ gilt, dass $t^{s-1}e^{-t} \leq t^{s-1}$. Nach Satz 14.14 genügt es zu zeigen, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 t^{s-1}\,dt$ konvergiert. Dieses wiederum bestimmen wir wie folgt:

$$\int_0^1 t^{s-1}\,dt \;=\; \lim_{d\to 0}\left[\frac{t^s}{s}\right]_d^1 \;=\; \lim_{d\to 0}\left(\frac{1}{s} - \frac{d^s}{s}\right) \;=\; \frac{1}{s}.$$

Wir zeigen nun, dass auch das zweite Integral $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ existiert. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \geq C$ gilt:

$$t^{s-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Am Ende von Kapitel 12.3 hatten wir mithilfe der Regel von l'Hôpital gesehen, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{s-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{t^{s+1}}{e^t} \;=\; 0.$$

Wenden wir die Definition von $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ auf $\varepsilon = 1$ an, sehen wir, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \geq C$ gilt:

$$t^{s-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir hatten in Lemma 14.9 gezeigt, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ konvergiert. Es folgt dann wieder aus Satz 14.14, dass auch $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ konvergiert. □

Wir werden uns nun dem Beweis von Satz 14.13 zu.

Beweis von Satz 14.13. Wie wir schon zu Beginn von Kapitel 14.3 gesehen hatten, ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1.$$

Wir wenden uns nun dem Beweis der zweiten Aussage zu. Für $a, b \in (0,\infty)$ folgt aus partieller Integration, dass

$$\int_a^b t^x e^{-t}\,dt \;=\; \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} + x \cdot \int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt \\
&= \int_0^1 t^x e^{-t}\,dt \;+\; \int_1^\infty t^x e^{-t}\,dt \\
&= \lim_{a\to 0}\left(\Big[-t^x e^{-t}\Big]_{t=a}^{t=1} + x\cdot\int_a^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\Big[-t^x e^{-t}\Big]_{t=1}^{t=b} + x\cdot\int_1^b t^{x-1}e^{-t}\,dt\right) \\
&= \underbrace{-\lim_{a\to 0}(-a^x e^{-a})}_{=0 \text{ nach l'Hopital}} + \underbrace{\lim_{b\to\infty} -b^x e^{-b}}_{=0 \text{ nach l'Hopital}} + x\cdot\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \\
&= x\cdot\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \\
&= x\cdot\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Wir haben damit die zweite Aussage bewiesen.

Die letzte Aussage des Satzes folgt nun aus (1) und (2) durch Induktion. □

14.5. **Eine C^∞-Treppenfunktion.** Wir erinnern zuerst daran, dass wir eine Funktion, welche beliebig oft differenzierbar ist, als C^∞-Funktion bezeichnet hatten. In diesem Kapitel werden wir zuerst folgendes Lemma beweisen.

Lemma 14.15. *Die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \textit{wenn } x > 0, \\ 0, & \textit{wenn } x \le 0 \end{cases} \end{array}$$

ist C^∞ und es gilt, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Funktion f hat also folgende eigenartige Eigenschaft: obwohl alle Ableitungen am Punkt 0 verschwinden, ist die Funktion trotzdem nicht konstant. Der Graph der Funktion f wird in Abbildung 24 skizziert.

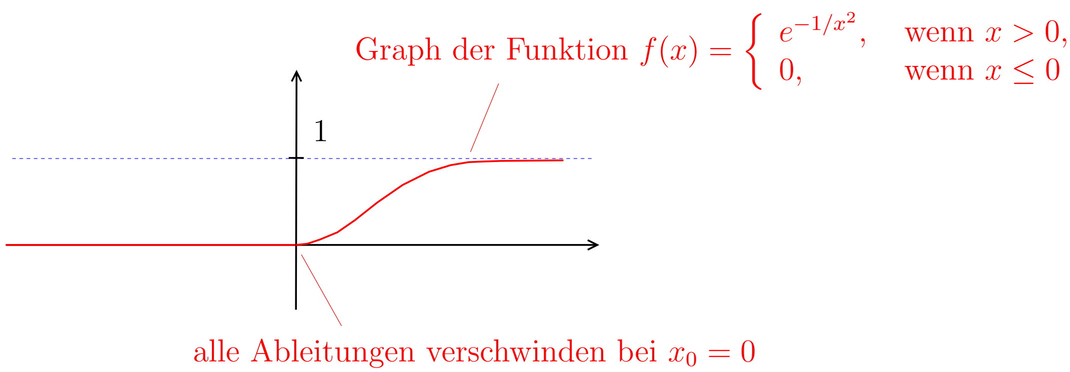


Abbildung 24.

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass $f'(0) = 0$. Es gilt

$$\begin{array}{rcll} \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & = & \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} & \\ & = & \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x}} & \text{nach Lemma 12.15} \\ & = & \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} & \\ & \overset{l'H}{=} & \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} & \text{nach der Regel von l'Hôpital.} \\ & = & 0. & \end{array}$$

Andererseits ist es offensichtlich, dass

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass in der Tat $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Wir haben jetzt also bewiesen, dass $f'(0) = 0$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass auch die höheren Ableitungen verschwinden. Wir werden im Folgenden den Beweis dieser Aussage nur skizzieren. Es sei jetzt $A(n)$ die Aussage:

f ist n-fach differenzierbar und es gibt ein Polynom $p_n(x)$, [99] so dass

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Wir wissen schon, dass $A(0)$ und $A(1)$ gelten. Ein einfaches Induktionsargument zeigt nun, dass $A(n)$ für alle n gilt. Beim Beweis, dass unter Annahme von $A(n)$ auch $A(n+1)$ gilt, muss man mehrmals verwenden, dass

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^k} \cdot e^{-1/x^2} = 0.$$

Diesen Grenzwert bestimmt man genauso wie oben mithilfe der Regel von l'Hôpital. ☐

Satz 14.16. *Es gibt eine C^∞-Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*
(1) *$f(x) = 0$ für $x \leq 0$,*
(2) *$f(x) = 1$ für $x \geq 1$, und*
(3) *f ist monoton steigend.*

Anders ausgedrückt, die Funktion von Satz 14.16 ist also konstant $= 0$ für $x \leq 0$ und konstant $= 1$ für $x \geq 1$, aber die Funktion ist trotzdem beliebig oft differenzierbar. Eine solche Funktion wird manchmal als C^∞-Treppenfunktion bezeichnet.

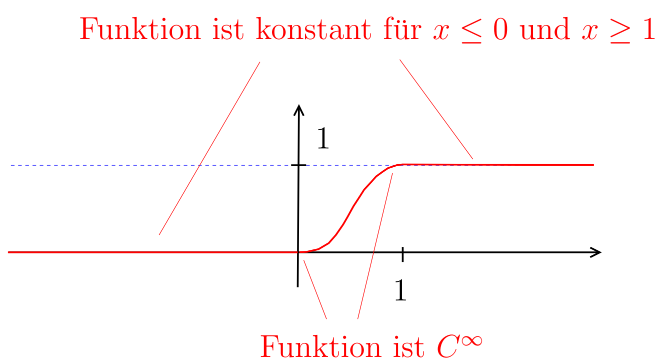


Abbildung 25.

Beweis. Wir betrachten wiederum die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

[99] Anders gesagt, $p_n(\frac{1}{x})$ ist ein Ausdruck vom Typ

$$a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \cdots + a_d \left(\frac{1}{x}\right)^d, \text{ wobei } a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}.$$

Wir hatten in Lemma 14.15 gezeigt, dass dies eine C^∞-Funktion ist. Wir betrachten nun die durch $g(x) := f(x) \cdot f(1-x)$ definierte Funktion. Nachdem $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ folgt sofort, dass $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = 0$ für $x \geq 1$, sowie $g(x) > 0$ für $x \in (0,1)$. Der Graph von g wird auch in Abbildung 26 skizziert. Wir setzen[100] $C := \int_0^1 g(t)\,dt$. Wir

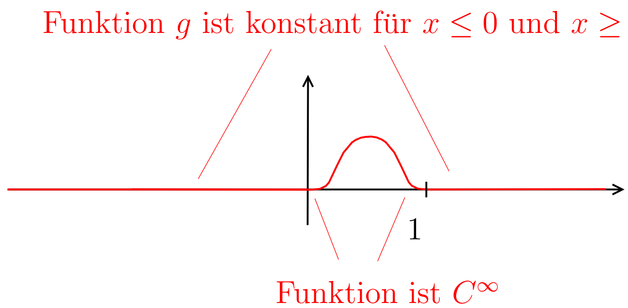


Abbildung 26.

müssen nun noch folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Die Funktion

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{C}\int_0^x g(t)\,dt \end{aligned}$$

hat die gewünschten Eigenschaften.

Es folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass h differenzierbar ist, mit Ableitung $h'(x) = \frac{1}{C}g(x)$. Nachdem g eine C^∞-Funktion ist, ist also auch h eine C^∞-Funktion. Es folgt nun leicht aus der Definition von h und den Eigenschaften von f, dass $h(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $h(x) = 1$ für $x \geq 1$. Der Graph der Funktion h wird in Abbildung 25 skizziert. $\square$

[100] Warum ist das Integral > 0?

15. Das Taylorpolynom

In diesem Kapitel sei I durchweg ein offenes Intervall, beschränkt oder unbeschränkt. Zur Erinnerung: Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt C^n-Funktion, wenn die Funktion n-mal differenzierbar ist und wenn $f^{(n)}$ zudem stetig ist. Wir sagen, f ist eine C^∞-Funktion, wenn f beliebig oft differenzierbar ist.

Es sei nun $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in I$. Wir sagen eine Funktion $g\colon I \to \mathbb{R}$ ist eine *Approximation von f am Punkt x_0 von k-ter Ordnung*, wenn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^k} \;=\; 0.$$

Wenn g ein Approximation von k-ter Ordnung ist, dann ist g auch für jedes $l \leq k$ eine Approximation von l-ter Ordnung. [101]

Das Ziel ist nun eine ‘komplizierte’ Funktion f durch eine einfachere Funktion zu approximieren. Beispielsweise, wenn f stetig ist, dann ist die konstante Funktion $g(x) := f(x_0)$ eine Approximation von f am Punkt x_0 von 0-ter Ordnung. Etwas interessanter ist da schon folgendes Lemma.

Lemma 15.1. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Dann ist die* Tangentenfunktion

$$p(x) \;=\; f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

eine Approximation von f am Punkt x_0 von erster Ordnung.

Beweis. Es folgt aus den Eigenschaften von Grenzwerten und aus der Definition von $f'(x_0)$, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{=f'(x_0)\text{ per Definition}} - \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)}}_{=f'(x_0)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Wir wollen jetzt zeigen, dass man eine Funktion durch Polynome noch besser approximieren kann. Zur Erinnerung, ein *Polynom vom Grad n* ist ein Ausdruck der Form

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und x eine Variable ist.

---

[101] In der Tat, denn wenn $l < k$, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^l} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^k} \cdot (x-x_0)^{k-l} = \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^k}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{k-l}}_{=0,\text{ da } k>l} = 0.$$

Für eine C^n-Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, wollen wir nun ein Polynom von Grad n finden, welches eine Approximation von f am Punkt x_0 von n-ter Ordnung ist. Um solch ein Polynom zu finden, beweisen wir erst einmal folgendes Lemma.

Lemma 15.2. *Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei C^n-Funktionen und es sei $x_0 \in I$. Dann gilt*

$$\begin{array}{c} g \text{ ist eine Approximation von } f \\ \text{am Punkt } x_0 \text{ von } n\text{-ter Ordnung} \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{für alle } k \in \{0,\dots,n\} \\ \text{gilt } f^{(k)}(x_0) \;=\; g^{(k)}(x_0). \end{array}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die '$\Leftarrow$'-Aussage. Wir nehmen also an, dass $f^{(k)}(x_0)-g^{(k)}(x_0)=0$ für $k=0,\dots,n$. Durch n-faches Anwenden der Regel von l'Hôpital erhalten wir, dass in der Tat

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(1)}(x)-g^{(1)}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \\ &\overset{l'H}{=} \dots \overset{l'H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)}{n!} \;=\; \frac{f^{(n)}(x_0)-g^{(n)}(x_0)}{n!} \;=\; 0. \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun den Beweis der '$\Rightarrow$'-Aussage zu. [102] Wir setzen $r(x)=f(x)-g(x)$. Wir nehmen also an, dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} \;=\; 0,$$

und wir müssen zeigen, dass $r^{(k)}(x_0)=0$ für $k=0,\dots,n$.

Wir beweisen diese Aussage per Induktion nach k. Für $k=0$ gilt

$$0 \;=\; \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^0} \;=\; \lim_{x\to x_0} r(x) \;=\; r(x_0),$$

d.h. es ist $r(x_0)=0$. Wir haben damit den Induktionsanfang vollzogen. Nehmen wir nun an, dass wir schon wissen, dass $r(x_0)=r^{(1)}(x_0)=\dots=r^{(k)}(x_0)=0$ für ein $k\in\{0,\dots,n-1\}$. Dann gilt auch, dass

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}} && \text{nach Voraussetzung} \\ &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(1)}(x)}{(k+1)(x-x_0)^k} && \text{nach der Regel von l'Hôpital, da } r(x_0)=0 \\ &\overset{l'H}{=} \dots \\ &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(k+1)}(x)}{(k+1)!} && \text{nach der Regel von l'Hôpital, da } r^{(k)}(x_0)=0 \\ &= \tfrac{1}{(k+1)!} \lim_{x\to x_0} r^{(k+1)}(x) \\ &= \tfrac{1}{(k+1)!} r^{(k+1)}(x_0) && \text{weil } r^{(k+1)} \text{ stetig.} \end{aligned}$$

[102] Im weiteren Verlauf der Vorlesung benötigen wir nur die '$\Leftarrow$'-Aussage. Wir geben deswegen den Beweis der '$\Rightarrow$'-Aussage nur der vollständigkeithalber.

Wir haben also gezeigt, dass $r^{(k+1)}(x_0) = 0$, d.h. wir haben den Induktionsschritt vollzogen. $\square$

Es sei nun $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und es sei $x_0 \in I$. Wir suchen jetzt also ein Polynom p von Grad n, welches am Punkt x_0 eine Approximation von n-ter Ordnung ist. Nach Lemma 15.2 genügt es ein Polynom zu finden, dessen Funktionswert und dessen erste n-Ableitungen am Punkt x_0 mit denen von f übereinstimmen.

Die Idee ist nun Polynome von der Form

$$p(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i$$

zu betrachten. [103] Wir wollen dabei die Ableitungen von solch einem Polynom $p(x)$ am Punkt x_0 studieren. Wir beweisen dazu folgendes elementare Lemma.

Lemma 15.3. *Es seien $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_0$, dass*

$$k\text{-te Ableitung von } \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i \text{ am Punkt } x_0 \;=\; \begin{cases} k! \cdot b_k, & \text{wenn } k \le n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für ein beliebiges $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt, dass

$$k\text{-te Ableitung von } b_i (x-x_0)^i \;=\; \begin{cases} 0, & \text{wenn } i < k, \\ i(i-1)\ldots(i-k+1) b_i (x-x_0)^{i-k}, & \text{wenn } i \ge k. \end{cases}$$

Insbesondere verschwindet die k-te Ableitung am Punkt x_0, außer für $k = i$. Für $k = i$ ist die Ableitung am Punkt x_0 dann gerade $k! \cdot b_k$. Das Lemma folgt nun aus der Summenformel für Ableitungen. $\square$

Wenn die k-te Ableitung von einem Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i$ mit der k-ten Ableitung von einer gegebenen Funktion f übereinstimmen soll, dann muss also insbesondere $b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$ gelten. Diese Diskussion führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und es sei $x_0 \in I$. Wir bezeichnen

$$p_{n,x_0}(f)(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

---

[103] Man kann in der Tat jedes Polynom p von Grad n als eine Summe $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i$ schreiben. Wir werden diese Aussage jetzt durch Induktion nach dem Grad von $p(x)$ beweisen. Die Aussage ist trivial, wenn der Grad null ist, d.h. wenn das Polynom konstant ist. Nehmen wir nun an, dass wir die Aussage schon für Polynome von Grad n bewiesen haben. Es sei nun $p(x)$ ein Polynom von Grad $n+1$. Es sei a_{n+1} der höchste Koeffizient von $p(x)$. Dann ist $p(x) - a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ ein Polynom von Grad n. Also folgt aus der Induktionsannahme, dass es $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$p(x) - a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} \;=\; b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n.$$

Dann ist aber

$$p(x) \;=\; b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n + a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

als das *n-te Taylorpolynom von f bei x_0*. [104] Wenn f und x_0 aus dem Kontext klar ersichtlich sind, dann schreiben wir oft einfach auch $p_n(x)$.

Betrachten wir beispielsweise die Exponentialfunktion am Punkt $x_0 = 0$. Nachdem alle Ableitungen der Exponentialfunktion wiederum die Exponentialfunktion sind, folgt, dass alle Ableitungen am Punkt $x_0 = 0$ gerade $\exp(0) = 1$ betragen. Es folgt also, dass das n-te Taylorpolynom von der Exponentialfunktion am Punkt $x_0 = 0$ gegeben ist durch

$$p_n(x) \;=\; 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Das fünfte Taylorpolynom von der Sinusfunktion am Punkt $x_0 = 0$ ist hingegen gegeben durch

$$\begin{aligned} p_5(x) &= \sin(0) + \cos(0)x + \frac{-\sin(0)}{2!}x^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^5 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, dass es *kein* Zufall ist, dass diese Taylorpolyome gerade den ersten Partialsummen der Reihen $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ entsprechen.

Satz 15.4. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und es sei $x_0 \in I$. Dann gibt das n-te Taylorpolynom $p_{n,x_0}(f)$ eine Approximation zu f am Punkt x_0 von n-ter Ordnung. Zudem ist es das einzige Polynom von Grad n, welches f im Punkt x_0 von n-ter Ordnung approximiert.*

Beweis. Per Konstruktion gilt $f^{(k)}(x_0) = p_{n,x_0}(f)^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Es folgt also aus Lemma 15.2, dass $p_n(x)$ eine Approximation von f von n-ter Ordnung liefert.

Zudem zeigt die Diskussion vor der Definition des Taylorpolynoms, dass die Koeffizienten des Polynoms eindeutig durch die Ableitungen von f bestimmt sind. Das n-te Taylorpolynom ist also das einzige Polynom von Grad n, welches f im Punkt x_0 von n-ter Ordnung approximiert. $\square$

Wir haben jetzt also gesehen, dass das n-te Taylorpolynome $p_n(x)$ die ursprüngliche Funktion f in einem gegebenen Punkt x_0 approximiert, in dem Sinne, dass der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{p_n(x)-f(x)}{(x-x_0)^n}$ verschwindet. Wir wollen jetzt im Folgenden eine genauere Aussage treffen, wie weit den nun $p_n(x)$ und $f(x)$ wirklich auseinander liegen.

Definition. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und es sei $x_0 \in I$. Es sei p_n das n-te Taylorpolynom von f bei x_0. Wir nennen

$$R_n(x) \;:=\; R_{n,x_0}(f)(x) \;:=\; f(x) - p_n(x)$$

das *n-te Restglied von f bei x_0*.

[104] Wir können das n-te Taylorpolynom $p_n(x) := p_{n,x_0}(f)(x)$ natürlich auch wie folgt schreiben:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Satz 15.5. (Restgliedformel von Taylor) *Es sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *eine* C^{n+1}*-Funktion und es sei* $x_0 \in I$*. Dann gilt*

$$R_{n,x_0}(f)(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz mithilfe von Induktion nach n. Es sei zuerst $n = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} R_0(x) \;=\; f(x) - p_0(x) \;&=\; f(x) - f(x_0) \\ &=\; \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \qquad \text{nach Satz 14.3.} \end{aligned}$$

Wir haben damit also den Induktionsanfang vollzogen.

Nun nehmen wir an, die Aussage gilt für $n-1$. Wir müssen nun zeigen, dass sie auch für n gilt. Es ist

$$\begin{aligned} R_n(x) \;&=\; f(x) - p_n(x) \\ &=\; \underbrace{f(x) - p_{n-1}(x)}_{\substack{\text{hierauf wenden wir die} \\ \text{Induktionsannahme an}}} \;-\; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &=\; \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{\tfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=:u'(t)} \cdot \underbrace{f^{(n)}(t)}_{=v(t)}\,dt \;-\; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \;=\; (*) \end{aligned}$$

Wir wenden nun partielle Integration an, und wir erhalten

$$\begin{aligned} (*) \;&=\; \Big[\underbrace{-\tfrac{(x-t)^n}{n!}}_{=u(t)} \cdot \underbrace{f^{(n)}(x)}_{=v(t)}\Big]_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{-\tfrac{(x-t)^n}{n!}}_{u(t)} \cdot \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{=v'(t)}\,dt \;-\; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &=\; \int\limits_{x_0}^{x} \tfrac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir jetzt also bewiesen, dass $R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt$. □

Der folgende Satz ermöglicht es oft das Restglied nach oben explizit abzuschätzen.

Satz 15.6. (Restgliedformel von Lagrange) *Es sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *eine* C^{n+1}*-Funktion, es sei* $x_0 \in I$ *und es sei* $x \in I$ *beliebig. Dann existiert ein* ξ *zwischen* x_0 *und* x*, so dass*

$$R_{n,x_0}(f)(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}.$$

Anders ausgedrückt, es existiert ein ξ *zwischen* x_0 *und* x*, so dass*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}.$$

Beweis. Wir betrachten im Folgenden nur den Fall, dass $x_0 < x$. Der Fall, dass $x_0 > x$ wird ganz analog bewiesen. Wir müssen zeigen, dass es ein $\xi \in (x_0, x)$ gibt, so dass

$$f^{(n+1)}(\xi) \quad = \quad R_n(x)\frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Aus Satz 15.5 folgt, dass $R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$. Wir müssen also ein $\xi \in (x_0, x)$ finden, so dass

$$f^{(n+1)}(\xi) \quad = \quad \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \cdot \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Oder etwas vereinfacht, so dass

$$f^{(n+1)}(\xi) \quad = \quad \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \cdot \frac{n+1}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

> Wir wollen solch ein ξ mithilfe vom Zwischenwertsatz 7.3, angewandt auf die nach Voraussetzung stetige Funktion $f^{(n+1)}$ finden. Ganz analog zum Beweis vom Mittelwertsatz 13.17 der Integralrechnung schränken wir uns dabei ein auf ein Teilintervall $[a, b]$, so dass $f^{(n+1)}$ an den Endpunkten maximal und minimal wird.

Nach Voraussetzung ist die Funktion $f^{(n+1)}|_{[x_0,x]}$ stetig. Nach Satz 7.2 existieren also $a, b \in [x_0, x]$, so dass

$$f^{(n+1)}(a) \ \leq \ f^{(n+1)}(t) \ \leq \ f^{(n+1)}(b)$$

für alle $t \in [x_0, x]$. Damit der mittlere Term genauso ausschaut,wie der gewünschte Wert für $f^{(n+1)}(\xi)$, vollziehen wir jetzt folgende drei Umformungen:

(1) wir multiplizieren die Ungleichung mit der (auf $[x_0, x]$ positiven Funktion) $(x-t)^n$,
(2) wir integrieren von x_0 bis x,
(3) wir multiplizieren mit $\frac{n+1}{(x-t)^{n+1}}$.

Es folgt aus Lemma 13.6, dass die Ungleichungen erhalten bleiben. Wir erhalten also, dass

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(a)\,dt}_{=f^{n+1}(a)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}} \tfrac{n+1}{(x-x_0)^{n+1}} \leq \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \tfrac{n+1}{(x-x_0)^{n+1}} \leq \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(b)\,dt}_{=f^{n+1}(b)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}} \tfrac{n+1}{(x-x_0)^{n+1}}$$

Die linke und die rechte Seite vereinfachen sich also zu $f^{(n+1)}(a)$ und $f^{(n+1)}(b)$, und wir erhalten die Ungleichung

$$f^{(n+1)}(a) \ \leq \ \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \tfrac{n+1}{(x-x_0)^{n+1}} \ \leq \ f^{(n+1)}(b).$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 7.3), angewandt auf die Einschränkung der stetigen Funktion $f^{(n+1)}$ auf $[a, b]$, existiert nun also ein $\xi \in (a, b) \subset (x, x_0)$, so dass

$$f^{(n+1)}(\xi) \ = \ \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \frac{n+1}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

□

Wir erhalten umgehend folgendes Korollar.

Korollar 15.7. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Funktion und es sei $x_0 \in I$. Wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq C$ für alle ξ zwischen x_0 und x, dann gilt für alle $x \in I$, dass*

$$|f(x) - p_n(x)| \;=\; |R_n(x)| \;\leq\; \frac{C}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}.$$

Beispiel. Wir wollen jetzt Taylorpolynome verwenden, um die Werte der Sinusfunktion näherungsweise zu bestimmen. Zur Erinnerung, das fünfte Taylorpolynom von der Sinusfunktion am Punkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$p_5(x) \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Die sechste Ableitung von der Sinusfunktion ist die $-$ Sinusfunktion. Der Absolutbetrag der Sinusfunktion ist durch $C = 1$ beschränkt ist. Es folgt aus dem obigen Korollar, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(x) - p_5(x)| \;\leq\; \frac{1}{6!}|x|^6.$$

Für kleine x gibt also $p_5(x)$ schon einen hervorragenden Näherungswert für $\sin(x)$. Beispielsweise folgt, dass $|\sin(0{,}1) - p_5(0{,}1)| < \frac{1}{720 \cdot 10^6}$. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \sin(0{,}1) &= 0.0998334166...\\ p_5(0{,}1) &= 0{,}0998334167.... \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass Taylorpolynome eine Funktion sehr gut approximieren können, und je höher der Grad des Taylorpolynoms, desto besser ist die Approximation. Es stellt sich also die Frage, ob man dann nicht vielleicht den 'Grenzwert $n \to \infty$' bilden kann, d.h. ob man nicht gleich die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

betrachten sollte. Wir wollen dieser Idee im Folgenden nachgehen. Allerdings stellen sich dabei mehrere Fragen:

(1) Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$?
(2) Selbst wenn die Reihe konvergiert, entspricht sie der Funktion f oder nicht?

16. Grenzfunktionen

16.1. **Stetigkeit von Grenzfunktionen.** Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *punktweise konvergent*, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$$

die *Grenzfunktion der Folge* (f_n).

Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\begin{array}{rcl} f_n\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{array}$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{array}$$

Die Funktionen f_n im vorherigen Beispiel sind alle stetig und die Grenzfunktion war in dem Beispiel auch wiederum stetig. Es stellt sich die Frage, ob das immer der Fall ist. D.h. die Frage ist, ob die Grenzfunktion von einer punktweise konvergenten Folge von stetigen Funktionen wiederum stetig ist. Wir werden im nächsten Beispiel sehen, dass dies im Allgemeinen *nicht* der Fall ist.

Beispiel. Für $n \geq 1$ betrachten wir die Funktionen

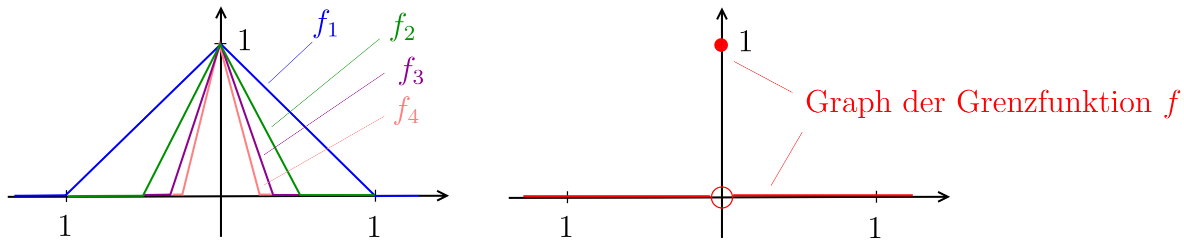
$$\begin{array}{rcl} f_n\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 - n|x|, & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{andernfalls,} \end{cases} \end{array}$$

welche in Abbildung 27 skizziert werden. Die Funktionen f_n sind offensichtlich stetig. Wir werden in Übungsblatt 14 sehen, dass die Funktionenfolge punktweise konvergiert, und dass die Grenzfunktion f hierbei wie folgt gegeben ist:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{array}$$

Insbesondere ist die Grenzfunktion *nicht stetig*.

Unser Ziel ist nun ein Kriterium für Funktionenfolgen zu finden, welches garantiert, dass die Grenzfunktion von stetigen Funktionen wiederum stetig ist. Wir führen dazu erst noch folgende Definition ein:



Funktionenfolge von stetigen Funktionen f_n, welche punktweise konvergiert

Die Grenzfunktion f ist hingegen nicht stetig

Abbildung 27.

Definition. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren dann [105]

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \,\big|\, x \in D\} \quad \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$$

als die *Supremumsnorm von f*.

Wir fassen einige grundlegende Eigenschaften von $\|-\|$ in folgendem Lemma zusammen. Das Lemma folgt leicht aus den Definitionen und wird in Übungsblatt 14 bewiesen.

Lemma 16.1. *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\begin{array}{llcll} (1) & \|f+g\| & \leq & \|f\|+\|g\| & (\textit{Dreiecksungleichung}) \\ (2) & \|\lambda f\| & = & |\lambda| \cdot \|f\| & \end{array}$$

zudem gilt für jedes $x \in D$, dass

$$\begin{array}{llcl} (3) & |f(x)| & \leq & \|f\|. \end{array}$$

Definition. Es sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$(f_n) \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f\colon D \to \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N}{\forall} \ \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Man kann sich beispielsweise leicht davon überzeugen, dass die Funktionenfolge (f_n) im obigen Beispiel nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

Lemma 16.2. *Jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge konvergiert auch punktweise.*

Beweis. Es sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Nach Lemma 16.1 (3) gilt für jedes $x \in D$, dass $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|$. Es folgt nun leicht aus den Definitionen, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. □

Der folgende Satz zeigt nun, dass sich gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen 'im Grenzwert' deutlich besser verhalten als beliebige Funktionenfolgen. Insbesondere sehen wir auch, dass die Funktionenfolge (f_n) im obigen Beispiel nicht gleichmäßig konvergiert.

[105] Für eine nach oben unbeschränkte Menge M schreiben wir hier $\sup(M) = \infty$.

Satz 16.3. *Es sei (f_n) eine Funktionenfolge stetiger Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f ebenfalls stetig.*

Beweis. Es sei also (f_n) eine Funktionenfolge stetiger Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass f stetig ist. Es sei also $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die Voraussetzungen besagen, dass wir Kontrolle über $|f(x) - f_n(x)|$ für alle $x \in D$ zugleich haben (hier benützen wir die gleichmäßige Konvergenz und Lemma 16.1 (3)), und dass wir für jedes n Kontrolle über $|f_n(x) - f_n(x_0)|$ erhalten (wegen der Stetigkeit der Funktionen f_n). Mithilfe folgender Abschätzung können wir dann diese Informationen auf unsere Problemstellung anwenden:

$$|f(x) - f(x_0)| \;\le\; |f(x) - f_n(x)| \,+\, |f_n(x) - f_n(x_0)| \,+\, |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Die Idee ist nun, n und $\delta > 0$ so geschickt zu wählen, dass alle drei Terme jeweils kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ sind.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) existiert ein n, so dass

$$\text{(A)} \qquad |f(y) - f_n(y)| \;<\; \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } y \in D.$$

Wegen der Stetigkeit von f_n existiert zudem ein $\delta > 0$, so dass

$$\text{(B)} \qquad |f_n(x) - f_n(x_0)| \;<\; \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

Dann gilt für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \;\le\; \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ wegen (A)}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ wegen (B)}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ wegen (A)}} \;<\; \varepsilon.$$

□

16.2. **Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.** Wir haben also gesehen, dass es wichtig ist, mit gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen zu arbeiten. Allerdings wollen wir eher ungern für eine gegebene Funktionenfolge 'per Hand' überprüfen, ob diese tatsächlich gleichmäßig konvergiert. Wir werden deshalb im Folgenden verschiedene Kriterien beweisen, welche garantieren, dass eine gegebene Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert.

Definition. Es sei (f_n) eine Folge von Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$. Wir definieren

$$(f_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n,m\ge N}{\forall} \; \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Satz 16.4. (*Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz*)

(1) *Jede gleichmäßig konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*
(2) *Jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$.*

Beweis.

(1) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, welche gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Mithilfe von Lemma 16.1 (1) und (2) können wir wort-wörtlich den Beweis von Satz 4.1 übernehmen, um zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(2) Es sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Funktion auf $D\subset\mathbb{R}$. Es folgt aus Lemma 16.1 (3), dass dann für jedes x die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von reellen Zahlen ist. Insbesondere existiert für jedes x der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir zeigen nun, dass (f_n) gleichmäßig gegen die Funktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ konvergiert.

Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Insbesondere gilt für alle $n\geq N$, dass

$$\begin{aligned} \|f-f_n\| &= \sup\left\{ \big|f(x)-f_n(x)\big| \;\Big|\; x\in D\right\} \\ &= \sup\left\{ \Big|\lim_{m\to\infty} \underbrace{f_m(x)-f_n(x)}_{\substack{\in(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}) \\ \text{nach Lemma 16.1(3)}}} \Big| \;\Big|\; x\in D\right\} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Es sei nun (f_n) eine Folge von Funktionen auf $D\subset\mathbb{R}$. Wir sagen, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von Funktionen konvergiert punktweise (bzw. gleichmäßig), wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ mit $n\in\mathbb{N}$ punktweise (bzw. gleichmäßig) konvergiert.

Wir erhalten nun folgende Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen.

Satz 16.5. (Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen) *Es sei $g_n\colon D\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen. Wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ von reellen Zahlen gibt, so dass*

$$\|g_n\| \;\leq\; c_n \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N},$$

dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ gleichmäßig.

Beweis. Wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^{n} g_k$. Nach Satz 16.4 genügt es zu zeigen, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Funktionen ist. Der Beweis dieser Aussage ist Wort für Wort der gleiche wie der Beweis vom Majoranten-Kriterium für Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (siehe Satz 5.7), man muss nur durchgehend 's_n' durch '$s_n(x)$ für alle $x\in D$' ersetzen. □

Wir können jetzt einen neuen Beweis von Satz 6.6 geben.

Satz 6.6. *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ist stetig.*

Beweis. Es sei $x_0\in\mathbb{R}$. Wir wählen ein $a>0$, so dass $x_0\in(-a,a)$. Es genügt zu zeigen, dass die Einschränkung von exp auf das Intervall $(-a,a)$ stetig ist. Nachdem alle Partialsummen $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ stetig sind, folgt nun aus Satz 16.3, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert gleichmäßig auf $(-a, a)$.

Wir setzen $g_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Wir wollen nun mithilfe von Satz 16.5 zeigen, dass die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ auf dem Intervall $(-a, a)$ gleichmäßig konvergiert. Wie im Beweis von Satz 5.17 ist hierbei die Idee, dass wir die Reihe mit einer geometrischen Reihe abschätzen.

Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $N \geq 2|a|$. Dann gilt für alle $n \geq N$ und $x \in (-a, a)$, dass

$$\begin{aligned} |g_n(x)| \;=\; |g_N(x)| \cdot \left|\tfrac{g_n(x)}{f_N(x)}\right| &\leq \left|\tfrac{x^N}{N!}\right| \left|\tfrac{x^n N!}{x^N n!}\right| \\ &\leq \tfrac{a^N}{N!} \left|\tfrac{x^{n-N}}{(N+1)\cdot\dots\cdot n}\right| \\ &= \tfrac{a^N}{N!} \cdot \underbrace{\tfrac{|x|}{N+1}}_{\leq \frac{a}{N} \leq \frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\tfrac{|x|}{n}}_{\leq \frac{a}{N} \leq \frac{1}{2}} \;<\; \tfrac{a^N}{N!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-N}. \end{aligned}$$

Wir haben also bewiesen, dass $\|g_n\| \leq \frac{a^N}{N!}(\frac{1}{2})^{n-N}$. Da die geometrische Reihe $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$ konvergiert, folgt nun aus dem Majoranten-Kriterium, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=N}^{\infty} g_n(x)$ gleichmäßig konvergiert. Also konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ gleichmäßig. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

□

16.3. **Integrale und Funktionenfolgen.** Es sei $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen, welche punktweise gegen eine integrierbare Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Es stellt sich die Frage, ob dann ganz allgemein gilt, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

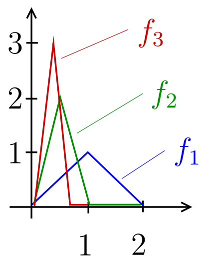
Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall. Betrachten wir beispielsweise die Funktionenfolge

$$\begin{aligned} f_n \colon [0, 2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} n^2 x, & \text{wenn } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 2n - n^2 x, & \text{wenn } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0, & \text{wenn } x \in [\frac{2}{n}, 2], \end{cases} \end{aligned}$$

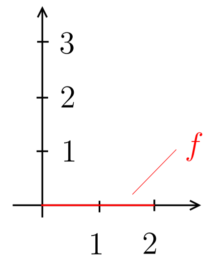
welche in Abbildung 28 skizziert wird. Jede dieser Funktionen ist offensichtlich stetig mit Integral $\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1$. Andererseits konvergiert diese Funktionenfolge punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0$. In diesem Fall gilt also, dass

$$\int_0^2 f(x)\,dx \;=\; 0 \;\neq\; 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx.$$

Der folgende Satz besagt nun, dass dieses Problem wiederum dadurch umgangen werden kann, dass man sich auf gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen einschränkt.



Folge von Funktionen f_n mit $\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1$ für alle n



Das Integral der Grenzfunktion ist 0

ABBILDUNG 28.

Satz 16.6. (*Konvergenz-Satz für Integrale*) *Es sei $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn alle Funktionen f_n integrierbar sind, dann ist auch f integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Im Beweis von Satz 16.6 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 16.7. *Es sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt für jede Zerlegung Z von $[a,b]$, dass*

$$|O(Z,g)| \;\leq\; \|g\| \cdot (b-a).$$

Zudem, wenn g integrierbar ist, dann gilt

$$\left| \int\limits_a^b g(x)\,dx\,dx \right| \;\leq\; \|g\| \cdot (b-a).$$

Beweis. Für alle $x \in [a,b]$ gilt, dass $g(x) \in \big[-\|g\|, \|g\|\big]$. Die erste Aussage folgt nun leicht aus den Definitionen (siehe auch Übungsblatt 13). Die zweite Aussage folgt direkt aus der ersten Aussage. □

Wir können jetzt Satz 16.6 beweisen.

Beweis von Satz 16.6.

Nach Satz 13.2 genügt es, eine Folge von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$ zu finden, so dass die dazugehörigen Unter- und Obersummen von f gegen $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ konvergieren. Die Idee ist nun für jedes k eine Zerlegung 'für f_k' zu nehmen, so dass für große k die Zerlegungen 'immer besser werden'.

Wir konstruieren nun eine Folge von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie folgt. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Nachdem f_k integrierbar folgt aus Satz 13.2, dass es eine Zerlegung Z_k von $[a,b]$ gibt, so dass

$$\left| O(Z_k) - \int_a^b f_k(x)\,dx \right| \;<\; \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \left| U(Z_k) - \int_a^b f_k(x)\,dx \right| \;<\; \frac{1}{k}.$$

Nach Satz 13.2 genügt es nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es ist

$$\lim_{k\to\infty} U(Z_k,f) \;=\; \lim_{k\to\infty} O(Z_k,f) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Wir werden jetzt zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} O(Z_k,f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$. Die Aussage über den Grenzwert der Untersummen wird dann ganz analog bewiesen.

Wir beginnen mit einer Abschätzung. Für beliebiges k ist

$$\begin{aligned}
&\left| O(Z_k,f) - \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \right| \\
\leq\;& \big|O\big(Z_k,f\big) - O(Z_k,f_k)\big| + \left| O(Z_k,f_k) - \int\limits_a^b f_k(x)\,dx \right| + \left| \int\limits_a^b f_k(x)\,dx - \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \right| \\
=\;& \underbrace{\Big|\; O(Z_k,f-f_k) \Big|}_{\substack{\leq \|f-f_k\|\cdot|b-a| \\ \text{nach Lemma 16.7}}} + \underbrace{\left| O(Z_k,f_k) - \int\limits_a^b f_k(x)\,dx \right|}_{<\frac{1}{k}} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left| \int\limits_a^b f_k(x) - f_n(x)\,dx \right|}_{\substack{\leq \|f_n-f_k\|\cdot|b-a| \\ \text{nach Lemma 16.7}}}.
\end{aligned}$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wollen jetzt zeigen, dass für genügend große k alle drei Summanden $< \frac{\varepsilon}{3}$ sind.

Nachdem die Folge $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ von Funktionen gleichmäßig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es ein K_1, so dass $\|f-f_k\| < \frac{\varepsilon}{6|b-a|}$ für alle $k \geq K_1$. Nach Satz 16.4 gibt es zudem ein $K_2 \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f_k\| < \frac{\varepsilon}{6|b-a|}$ für alle $n,k \geq K_2$. Für alle $k \geq \max\{K_1, \frac{3}{\varepsilon}, K_2\}$ gilt dann, dass

$$\begin{aligned}
&\left| O(Z_k,f) - \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \right| \\
=\;& \underbrace{\Big| O(Z_k,f-f_k) \Big|}_{\leq \frac{\varepsilon}{6},\,\text{da } k\geq K_1} + \underbrace{\left| O(Z_k,f_k) - \int\limits_a^b f_k(x)\,dx \right|}_{<\frac{\varepsilon}{3},\,\text{da } k\geq \frac{3}{\varepsilon}} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left| \int\limits_a^b f_k(x) - f_n(x)\,dx \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{6},\,\text{da } k\geq K_2} \\
\leq\;& \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} \;<\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} O(Z_k,f) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

$\square$

17. Potenzreihen

Im Folgenden sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von *komplexen Zahlen* und es sei $a \in \mathbb{C}$. Eine *Potenzreihe* ist ein formaler Ausdruck von der Form

$$f \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

wobei z eine Variable ist. Wir interessieren uns für die Menge der komplexen Zahlen, für welche die Potenzreihe konvergiert.

Beispiel.

(1) Betrachten wir die Reihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:
   (a) Wenn $|z| < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ nach dem Quotientenkriterium.
   (b) Wenn $|z| \geq 1$, dann ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, keine Nullfolge, das heißt die Reihe divergiert.

(2) Betrachten wir nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann können wir folgende Beobachtungen machen:
   (a) Wenn $|z| < 1$ dann konvergiert die Potenzreihe nach dem Quotientenkriterium.
   (b) Wenn $|z| > 1$ dann divergiert die Reihe, nachdem $\frac{z^n}{n}$ keine Nullfolge ist.
   (c) Für $z = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, welche nach Korollar 5.3 divergiert.
   (d) Für $z = -1$ konvergiert die Potenzreihe nachdem Leibniz-Kriterium.
   (e) Für $z = i$ hatten wir in Übungsblatt 9 gesehen, dass die Reihe konvergiert.

   Im allgemeinen ist es kniffelig zu bestimmen, für welche z's auf dem Einheitskreis die Reihe $f(z)$ konvergiert.[106]

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Wir schreiben

$$\begin{array}{lcll} \overline{D(a,r)} & := & \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-a| \leq r\} & \text{die geschlossene Scheibe von Radius } r \text{ um } a, \text{ und} \\ D(a,r) & := & \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-a| < r\} & \text{die offene Scheibe von Radius } r \text{ um } a. \end{array}$$

Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 17.1. *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

eine Potenzreihe, welche für ein $z_0 \neq a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für jedes $0 \leq r < |z_0 - a|$ konvergiert die Potenzreihe [107] *auf der geschlossenen Scheibe*

$$\overline{D(a,r)} \;=\; \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-a| \leq r\}$$

[106] Es sei z eine k-te Einheitswurzel. Dann konvergiert die Potenzreihe wenn k gerade ist und die Potenzreihe divergiert wenn k ungerade. Mir ist nicht klar, was passiert, wenn z keine Einheitswurzel ist.

[107] D.h. wir betrachten die Funktionenfolge $f_k(z) := \sum_{n=0}^{k} c_n(z-a)^n$.

gleichmäßig.[108]

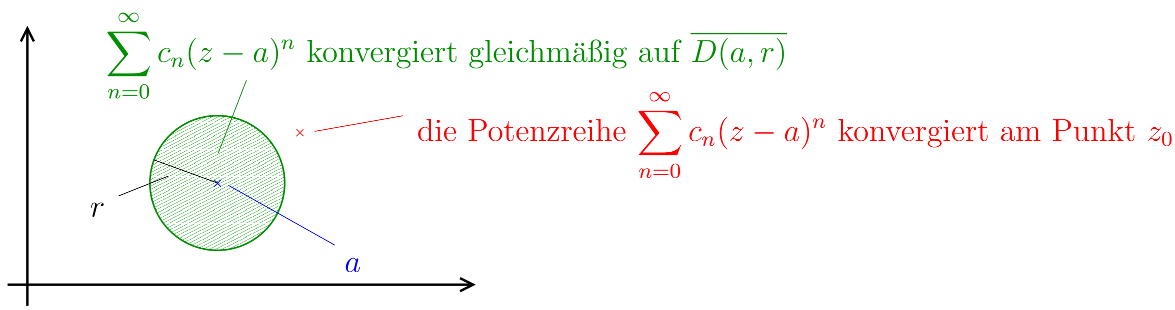


ABBILDUNG 29. Illustration von Satz 17.1.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir nur den Fall $a = 0$. Es sei also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe, welche für ein $z_0 \neq 0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Es sei $0 \leq r < |z_0|$. Wir müssen zeigen, dass die Reihe auf $\overline{D(0,r)} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| \leq r\}$ gleichmäßig konvergiert.

Nachdem Majoranten-Kriterium für Funktionen-Folgen, siehe Satz 16.5, genügt es zu zeigen, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $\theta \in [0,1)$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$|c_n z^n| \;\leq\; C \cdot \theta^n \qquad \text{alle } z \in D(0,r).$$

Für $z \in D(0,r)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $|c_n z^n| \;=\; |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$. Wir wollen jetzt also den ersten Faktor durch eine feste Zahl C abschätzen und den zweiten Term durch ein θ^n, wobei $\theta \in [0,1)$.

Nachdem die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ konvergiert, ist die Folge $(c_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere beschränkt. Es existiert also ein C, so dass

$$|c_n z_0^n| \leq C$$

für alle n. Setzen wir zudem $\theta := \left|\frac{r}{z_0}\right|$, dann gilt für alle $z \in D(0,r)$, dass

$$|c_n z^n| \;=\; |c_n z_0^n| \cdot \underbrace{\left|\frac{z}{z_0}\right|}_{\leq \theta = \frac{r}{|z_0|}}{}^{n} \;\leq\; C \cdot \theta^n.$$

□

[108]Für $D \subset \mathbb{C}$ und eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ definieren wir hierbei, ganz analog zu reellen Funktionen, die Norm von f als

$$\|f\| := \sup\{|f(z)| \,\big|\, z \in D\}.$$

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen überträgt sich dann auf offensichtlich Weise von reellen Funktionen auf komplexe Funktionen.

Definition. Es sei $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann nennen wir

$$R := \sup \left\{ |z-a| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ konvergiert} \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

den *Konvergenzradius der Potenzreihe* $f(z)$.

In folgendem Lemma bestimmen wir einige wichtige Konvergenzradien.

Lemma 17.2.

(1) *Der Konvergenzradius der Reihen* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ *ist eins.*

(2) *Der Konvergenzradius der Exponentialreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *ist* ∞.

Beweis.

(1) Beide Reihen konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Also ist der Konvergenzradius mindestens 1. Andererseits divergieren beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, also ist der Konvergenzradius höchstens 1.

(2) Der Beweis von Satz 5.17 zeigt, dass die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, also ist der Konvergenzradius ∞.

□

Lemma 17.3. *Es sei* R *der Konvergenzradius einer Potenzreihe* $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\begin{aligned} |z-a| < R \quad &\Rightarrow \quad f(z) \text{ konvergiert,} \\ |z-a| > R \quad &\Rightarrow \quad f(z) \text{ divergiert.} \end{aligned}$$

Wie wir am Beispiel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ gesehen hatten, können wir keine allgemeine Aussage über die Konvergenz einer Reihe für komplexe Zahlen z mit $|z-a| = R$ treffen.

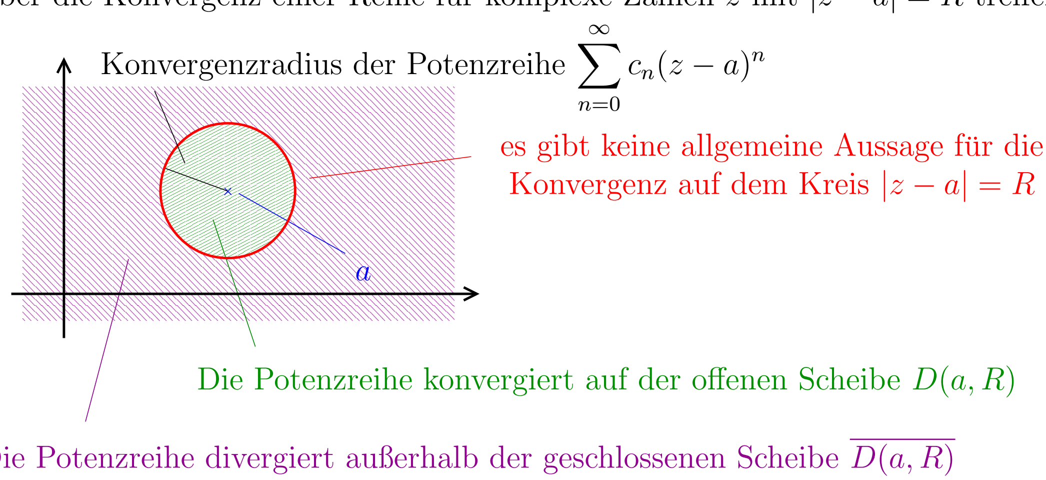


Abbildung 30. Illustration von Satz 17.3.

Beweis. Es sei also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < R$. Dann existiert per Definition vom Konvergenzradius ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < |z_0 - a|$, und so dass die Potenzreihe $f(z_0)$ konvergiert. Es folgt dann aus Satz 17.1, angewandt auf $r := |z-a|$, dass die Potenzreihe $f(z)$ ebenfalls konvergiert. Die zweite Aussage folgt aus der Definition von R. $\square$

Lemma 17.4. *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Dann ist die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-a| < R\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

stetig.

Beweis. Es sei $r \in (0,R)$ beliebig. Es folgt aus Satz 17.1, dass die Potenzreihe gleichmäßig auf $\overline{D(a,r)}$ konvergiert. Es folgt dann aus Satz 16.3, dass f stetig ist auf $\overline{D(a,r)}$. Anders ausgedrückt, f ist stetig auf allen Schreiben $\overline{D(a,r)}$ mit $r < R$. Die Vereinigung aller dieser Scheiben ist aber gerade $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < R\}$. Also ist die Funktion auch auf $D(a,R)$ stetig. $\square$

Im nächsten Kapitel wird folgendes Lemma eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 17.5. *Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe und es sei (d_n) eine Folge von reellen Zahlen, so dass für alle $s \in [0,1)$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} d_n s^n = 0$. Dann ist*

$$\textit{Konvergenzradius von} \sum_{n=0}^{\infty} d_n c_n (z-a)^n \quad \geq \quad \textit{Konvergenzradius von} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Beispielsweise, für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die Voraussetzung erfüllt für die Folge $d_n = n^k$. Es folgt also aus Lemma 17.2 und Lemma 17.5, angewandt auf $c_n = \frac{1}{n}$ und $d_n = n^2$ und zudem angewandt auf $c_n = n$ und $d_n = \frac{1}{n^2}$, dass

$$\text{Konvergenzradius von} \sum_{n=0}^{\infty} n z^n \quad = \quad \text{Konvergenzradius von} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \quad = \quad 1.$$

Wir erhalten also den gleichen Konvergenzradius. Aber auf der Kreislinie $|z-a| = R$ kann sich das Konvergenzverhalten unterscheiden. Beispielsweise konvergiert die rechte Potenzreihe für $z = -1$, aber die linke divergiert für $z = -1$.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir wieder den Spezialfall $a = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Es sei also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe und es sei (d_n) eine Folge von reellen Zahlen, so dass für alle $s \in [0,1)$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} d_n s^n = 0$. Es folgt aus der Definition des Konvergenzradius, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n c_n z^n$ für jedes z mit $|z| < |z_0|$.

Es sei also $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ konvergiert. Es sei zudem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$. Wir wählen ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w| < |z_0|$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n c_n z^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot d_n \left(\frac{z}{w}\right)^n \cdot w^n.$$

Nach Voraussetzung ist $\lim_{n\to\infty} \left|d_n(\frac{z}{w})^n\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} d_n \left|\frac{z}{w}\right|^n \;=\; 0$. Insbesondere existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|d_n(\frac{z}{w})^n\right| \le 1$ für alle $n \ge N$. Wie im Beweis von Satz 17.1 sehen wir zudem, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ absolut konvergiert. Es folgt nun also aus dem Majoranten-Kriterium und aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} c.w^n$, dass die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} d_n c_n z^n$, und damit auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n c_n z^n$, konvergiert. $\square$

17.1. **Die Hadamardsche Formel für den Konvergenzradius** $(*)$**.** In diesem kurzen Kapitel werden wir die Hadamardsche Formel formulieren, welche es erlaubt den Konvergenzradius einer Potenzreihe direkt von den Koeffizienten der Potenzreihe abzulesen. Dieses Kapitel ist *nicht* Teil der Vorlesung.

Für eine nach oben unbeschränkte Menge M schreiben wir jetzt $\sup(M) = \infty$. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen definieren wir [109]

$$\limsup a_n \;:=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup\{a_k \,|\, k \ge n\}}_{\text{monoton fallende Folge}} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{‘Limes superior’}$$

$$\liminf a_n \;:=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf\{a_k \,|\, k \ge n\}}_{\text{monoton steigende Folge}} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{‘Limes inferior’}.$$

Wenn (a_n) eine konvergente Folge ist, dann gilt

$$\liminf a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \limsup a_n.$$

Der folgende Satz erlaubt es nun, zumindest im Prinzip, den Konvergenzradius einer Potenzreihe direkt von den Koeffizienten der Potenzreihe ablesen:

Satz 17.6. (Hadamardsche Formel) *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Dann gilt*

$$\textit{Konvergenzradius der Potenzreihe} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \;=\; \left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$$

Hier verwenden wir die Konvention, dass $0^{-1} := \infty$ und $\infty^{-1} := 0$.

Dieser Satz wird beispielsweise auf Seite 143 von Walter: Analysis I bewiesen.

Beispiel.

[109] Wenn die Folge (a_n) nach oben unbeschränkt ist, dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $\sup\{a_k \,|\, k \ge n\} = \infty$, den Grenzwert der Folge $\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \,|\, k \ge n\}$ definieren wir dann natürlich als $+\infty$. Die analoge Aussage gilt natürlich auf für den Limes inferior.

(1) Für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ ist der Konvergenzradius gegeben durch

$$\left(\limsup \sqrt[n]{|2^n|}\right)^{-1} = \left(\limsup\ 2\right)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

(2) Wir betrachten nun die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} = (\frac{\sqrt{n}}{2})^n$. [110] Mit dieser Abschätzung folgt nun, dass der Konvergenzradius der Exponentialreihe gegeben ist durch

$$\left(\limsup \sqrt[n]{\tfrac{1}{n!}}\right)^{-1} \geq \left(\limsup \sqrt[n]{(\tfrac{2}{\sqrt{n}})^n}\right)^{-1} \geq \left(\limsup \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = 0^{-1} = \infty.$$

17.2. **Ableitungen und Stammfunktionen von Potenzreihen.** Im Folgenden betrachten wir Ableitungen und Stammfunktionen von Funktionen, welche durch Potenzreihen definiert werden. Nachdem wir den Begriff der Ableitung und der Stammfunktion von komplexen Funktionen noch nicht definiert haben, werden wir von jetzt an nur noch reelle Reihen betrachten.

Der folgende Satz besagt nun, dass man durch Potenzreihen definierte Funktionen 'naiv' ableiten und integrieren kann.

Satz 17.7. *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und es sei $a \in \mathbb{R}$. Es sei R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Dann gilt auf dem Intervall $(a-R, a+R)$, dass* [111]

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \qquad \text{`gliedweise Ableitung'} \tag{1}$$

sowie

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \qquad \text{`gliedweise Integration'}. \tag{2}$$

Insbesondere konvergieren die Reihen auf der rechten Seite für alle $x \in (a-R, a+R)$.

Es folgt, dass durch Potenzreihen definierte Funktionen notwendigerweise C^∞-Funktionen sind.

[110] Wenn $n = 2k$ gerade ist, dann gilt $n! = (2k)! \geq (k+1)(k+2)\cdot \dots \cdot 2k \geq k^k = (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$. Für ungerade n wird die Aussage fast genauso bewiesen.

[111] Etwas präziser kann die erste Aussage wie folgt formuliert werden:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} (a-R, a+R) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-R, a+R) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die zweite Aussage kann ganz analog formuliert werden.

Beispiel. Betrachten wir die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Durch gliedweises Ableiten erhalten wir

$$\frac{d}{dx}\exp(x) \;=\; \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \;=\; \exp(x).$$

Dies gibt uns also einen neuen Beweis für die uns schon bekannte Tatsache, dass die Ableitung der Exponentialfunktion wiederum die Exponentialfunktion ist. [112]

Beweis. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Es folgt aus Lemmas 17.3 und 17.5, dass die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

ebenfalls auf $(a-R, a+R)$ konvergieren.

Wir beweisen nun zuerst die zweite Aussage. Genauer gesagt, wir wollen nun zeigen, dass

$$\frac{d}{dx}\left(x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}\right) \;=\; \left(x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right).$$

Die Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ist stetig nach Lemma 17.4. Es folgt also aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\frac{d}{dx}\left(x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt\right) \;=\; \left(x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right).$$

Es genügt also folgende Behauptung zu zeigen.

Behauptung. Für alle $x \in (a-R, a+R)$ gilt:

$$\int_a^x f(t)\,dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

[112] Ganz analog kann man sehen, dass die gliedweise Ableitung von $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ die Potenzreihe $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ liefert.

Es sei also $x \in (a-R, a+R)$. Dann gilt

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt \;=\; \int\limits_a^x \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} c_n(t-a)^n\,dt \;=\; (*)$$

Nach Satz 17.1 konvergiert die Folge von Funktionen $\sum_{n=0}^{k} c_k nt-a)^n$ auf dem geschlossenen Intervall von a bis x gleichmäßig. Es folgt also aus Satz 16.6, dass wir 'den Grenzwert rausziehen können', d.h. es folgt, dass

$$\begin{aligned}(*) &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^x \sum_{n=0}^{k} c_n(t-a)^n\,dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{n=0}^{k} \tfrac{c_n}{n+1}(t-a)^{n+1}\right]_a^x \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \tfrac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.\end{aligned}$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Wir wenden uns nun dem Beweis der ersten Aussage zu. Wir müssen also zeigen, dass die Ableitung von f gegeben ist durch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$. Indem wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ gliedweise integrieren, erhalten wir aus der schon gezeigten Aussage (a), dass

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}\;dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Aber per Definition von einer Stammfunktion ist dies gerade die gewünschte Aussage, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}\;dx \;=\; \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

□

17.3. **Der abelsche Grenzwertsatz und seine Anwendungen.**

Satz 17.8. (Abelscher Grenzwertsatz) *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Es sei*

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

die dazugehörige Potenzreihe. Wenn die Potenzreihe f für ein $x_0 > a$ konvergiert, dann ist die Funktion $x \mapsto f(x)$ stetig auf $[a, x_0]$.

Beweis. Es sei $x_0 > a$, so dass die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ für $x = x_0$ konvergiert. Um die Notation etwas zu vereinfachen, nehmen wir an, dass $a = 0$ und $x_0 = 1$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen.

Wir müssen zeigen, dass die Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ stetig ist. Es folgt aus Lemma 17.4, dass die Funktion auf dem halb-offenem Intervall $[0,1)$

stetig ist. Es verbleibt also zu zeigen, dass $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ auch im Punkt $x = 1$ stetig ist.

Wir setzen

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} c_n \text{ und } s := f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Wir beweisen nun zuerst folgende Behauptung.

Behauptung. Für jedes $x \in [0,1)$ gilt

$$f(1) - f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s - s_n)x^n.$$

Wir setzen zudem $s_{-1} := 0$. Für $x \in [0,1)$ gilt dann, dass

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} c_n x^n \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \underbrace{(s_n - s_{n-1})}_{=c_n} x^n \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(s_k x^k + (1-x)\sum_{n=0}^{k-1} s_n x^n \right) = (*) \end{aligned}$$

Wir hatten vorausgesetzt, dass die Potenzreihe bei $x = 1$ konvergiert. Die Folge der Partialsummen (s_k) ist daher konvergent, insbesondere beschränkt. Zudem ist (x^k) eine Nullfolge, also ist auch $s_k x^k$ eine Nullfolge. Wir erhalten also, dass

$$(*) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned} f(1) - f(x) &= \underbrace{s(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{=1} - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s - s_n)x^n. \end{aligned}$$

Wir haben also die Behauptung bewiesen.

Wir wollen nun zeigen, dass die Funktion f in der Tat im Punkt $x = 1$ stetig ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(1) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x > 1 - \delta$.

Nachdem $\lim_{n\to\infty}(s-s_n)=0$ existiert ein $N\in\mathbb{N}$, so dass $|s-s_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n\geq N$. Dann folgt aus der obigen Behauptung, dass für alle $x\in[0,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|f(1)-f(x)\big| &= \Big|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_n)x^n\Big| = \Big|(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}(s-s_n)x^n+(1-x)\sum_{n=N}^{\infty}(s-s_n)x^n\Big| \\
&< (1-x)\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}|s-s_n|x^n}_{\leq C:=\sum\limits_{n=0}^{N-1}|s-s_n|}+(1-x)\underbrace{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2}x^n}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{1-x}} \\
&\leq (1-x)C+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Für $x\in(1-\frac{\varepsilon}{2C},1)$ gilt dann

$$|f(1)-f(x)| < (1-x)C+\tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Beispiel. Aus Satz 3.13 folgt, dass

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \text{für alle } x\in(-1,1).$$

Wir betrachten jetzt Stammfunktionen dieser Funktion. Aus $\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}$, aus Satz 17.7 und aus Lemma 14.2 folgt, dass es ein $C\in\mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad \text{für alle } x\in(-1,1).$$

Indem wir $x=0$ einsetzen, sehen wir, dass $C=0$. Also ist

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{für alle } x\in(-1,1).$$

Es folgt aus dem Leibnitz-Kriterium, dass die Reihe auf der rechten Seite für $x=1$ konvergiert. Aus der Stetigkeit der Logarithmusfunktion und aus Satz 17.8 folgt nun, dass die obige Gleichheit auf dem Intervall $(-1,1)$ sich auf $x=1$ fortsetzt. Wir sehen also, dass

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Wir können die rechte Seite noch etwas umformen, und wir erhalten, dass

$$-\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Wir haben jetzt also eine der Reihen, welche wir mit am längsten kennen, explizit bestimmt.

Beispiel. Aus Satz 3.13 folgt auch, dass

$$\frac{1}{1+x^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad\qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Wir betrachten jetzt Stammfunktionenen dieser Funktion. Aus $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$, aus Satz 17.7 und aus Lemma 14.2 folgt, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\arctan(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Indem wir wiederum $x = 0$ einsetzen, sehen wir, dass $C = 0$. Also ist

$$\arctan(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad\qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Es folgt aus dem Leibnitz-Kriterium, dass die Reihe auf der rechten Seite für $x = 1$ konvergiert. Aus der Stetigkeit der Arkustangensfunktion und aus Satz 17.8 folgt nun, dass diese Gleichheit auch für $x = 1$ gilt. Wir sehen also, dass

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \arctan(1) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Zur annäherungsweisen Berechnung von π ist diese Darstellung allerdings ungeeignet, weil die Reihe nur 'langsam' konvergiert. Beispielsweise, wenn Sie $\frac{\pi}{4}$ bis auf sechs Stellen berechnen wollen, dann müssen Sie die Summe $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ für $n = 500.000$ berechnen.

18. Die Taylor-Reihe und reell-analytische Funktionen (*)

Dieses letzte Kapitel ist leider auch nicht mehr offizieller Teil der Vorlesung.

Wir setzen jetzt, nach langer Unterbrechung, die Diskussion über Approximationen von Funktionen fort.

Definition. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und $x_0 \in (a,b)$, dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

die *Taylorreihe von f am Punkt x_0.*

Beispiel. Wenn $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ durch eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

gegeben ist, dann folgt aus Satz 17.7, mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Lemma 15.3, dass

$$f^{(n)}(x_0) \;=\; n! \cdot a_n.$$

Es folgt also, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

auch die Taylorreihe von f am Punkt x_0 ist. Insbesondere sind die Taylorreihen von $\exp(x), \sin(x)$ und $\cos(x)$ am Punkt $x_0 = 0$ dann gegeben durch

$$\exp(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ und } \cos(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und $x_0 \in (a,b)$. Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, dann sagen wir, dass f *lokal bei x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist.*

Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, die sich um jeden inneren Punkt x_0 von D lokal in eine Taylorreihe entwickeln läßt, heißt *reell-analytisch.*

Lemma 18.1. *Die Exponentialfunktion ist reell-analytisch.*

Beweis. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\exp(x) = \exp(x_0) \cdot \exp(x - x_0) = \exp(x_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

□

Eine ganz ähnliche Aussage trifft auch zu, wenn wir die Exponentialfunktion als Funktion wieder auf $\mathbb{C}$ betrachten. Es folgt dann auch, dass der Realteil und der Imaginärteil reell analytisch sind. Dies zeigt dann, dass auch die Sinus-Funktion und die Kosinus-Funktion reell analytisch sind.

In Fußnote 103 hatten wir implizit gezeigt, dass Polynome reell analytisch sind. Das nächste Lemma zeigt, dass die rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ebenfalls reell analytisch ist.

Lemma 18.2. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

ist reell analytisch.

Beweis. Es sei also $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Für $x \neq 1$ ist

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0-(x-x_0)} = \frac{1}{1-x_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{1-x_0}} = (*).$$

Für alle x mit $\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right| < 1$, das heißt für alle $x \in (x_0 - \frac{1}{|1-x_0|}, x_0 + \frac{1}{|1-x_0|})$ folgt dann aus Satz 3.13, dass

$$(*) = \frac{1}{1-x_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}\cdot(x-x_0)^n.$$

□

Mit einem ähnlichen Argument kann man sogar zeigen, dass jede rationale Funktion reell analytisch ist. Wir werden reell analytische Funktion wieder in Analysis III studieren. Wir werden dann unter anderem sehen, dass Produkte, Summen und Quotienten von reell-analytischen Funktionen auch reell-analytisch sind.

Es folgt aus Satz 17.7, dass eine reell-analytische Funktion notwendigerweise eine C^∞-Funktion ist. Allerdings ist nicht jede C^∞-Funktion reell-analytisch. Beispielsweise hatten wir in Lemma 14.15 gesehen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

eine C^∞-Funktion ist mit der Eigenschaft, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist die Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ die Nullreihe. Aber es gilt $f(x) > 0$ für alle $x > 0$, das heißt die Taylorreihe von f und die Funktion f stimmen in keiner δ-Umgebung von $x_0 = 0$ überein. Die Funktion f ist also nicht reell-analytisch.

Satz 18.3. *Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei reell analytische Funktionen, welche auf einem offenen Intervall übereinstimmen. Dann ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a,b)$.*

Beweis. Es sei $(c, d) \subset (a, b)$ ein Intervall auf dem f und g übereinstimmen. Wir setzen nun

$$B := \sup\{t \in (c, b) \mid f \text{ und } g \text{ stimmen auf } (c, t) \text{ überein}\}.$$

Behauptung.

$$B = b.$$

Nehmen wir an, dass $B < b$. Aus der Definition von B folgt, dass $f(x) = g(x)$ auf dem offenen Intervall (c, B). Es folgt dann, dass auch $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ für alle $x \in (c, B)$. Aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ (wie oben erwähnt sind reell-analytische Funktionen C^∞-Funktionen) folgt nun, dass $f^{(n)}(B) = g^{(n)}(B)$ für alle n. Insbesondere haben f und g die gleiche Taylorreihe um den Punkt B. Nachdem f und g reell-analytisch sind, stimmen die Funktionen f und g in einer δ-Umgebung mit ihren Taylorreihen überein. Es folgt also, dass

$$f(x) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in (B - \delta, B + \delta),$$

insbesondere ist

$$f(x) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in (b, B + \delta),$$

im Widerspruch zur Wahl von B.

Dies zeigt, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (c, b)$. Ganz analog zeigt man, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

$\square$