

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE - SOMMERSEMESTER 2013

STEFAN FRIEDL

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	3
1. Einleitung	4
1.1. Die Definition der Fundamentalgruppe	4
1.2. Induzierte Abbildungen	8
1.3. Kategorien und Funktoren	9
1.4. Zusammenfassung	11
2. Die Homologiegruppen eines topologischen Raumes	11
2.1. Singuläre Ketten	11
2.2. Definition der Homologiegruppen eines topologischen Raums	13
2.3. Illustrationen zur Definition von den Homologiegruppen	15
2.4. Erste Berechnungen von Homologiegruppen	17
2.5. Algebraische Kettenkomplexe	18
2.6. Die Funktoreigenschaft von Homologiegruppen	20
2.7. Direkte Produkte und direkte Summen	21
3. Homologie und Homotopien	22
3.1. Kettenhomotopien	22
3.2. Homologie und homotope Abbildungen	23
3.3. Die erste Homologiegruppe und die Fundamentalgruppe	28
4. Lange exakte Sequenzen und die Homologie von Quotientenräumen	35
4.1. Lange exakte Sequenzen	35
4.2. Die Homologiegruppen der Sphären	36
4.3. Kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen	39
4.4. Relative Homologiegruppen	42
4.5. Der Ausschneidungssatz	44
4.6. Der Beweis vom Ausschneidungssatz: Die Idee	46
4.7. Der Beweis vom Ausschneidungssatz: Die Ausführung	47
4.8. Explizite Erzeuger von Homologiegruppen	56
5. Der Abbildungsgrad	60
6. Die Mayer–Vietoris Sequenz und ihre Anwendungen	63
6.1. Die Mayer–Vietoris Sequenz	63
6.2. Die Homologiegruppen von $\mathbb{R}P^2$	65
6.3. Die Homologiegruppen vom Torus und der Kleinschen Flasche	66

6.4.	Die erste Homologiegruppe vom Komplement eines Knotens	69
6.5.	Die Hurewicz-Abbildung	71
7.	CW-Komplexe	72
7.1.	Definition von CW-Komplexen und Beispiele	72
7.2.	Die Homologiegruppen von CW-Komplexen	77
7.3.	Bestimmung der Randabbildungen im zellulären Kettenkomplex	83
7.4.	Der lokale Abbildungsgrad	86
7.5.	Zelluläre Abbildungen	90
7.6.	Simpliziale Komplexe	91
7.7.	Homologiegruppen von Mannigfaltigkeiten	93
8.	Die Eulercharakteristik von einem endlichen CW-Komplex	97
8.1.	Die Definition der Eulercharakteristik	97
8.2.	Eigenschaften der Eulercharakteristik	99
8.3.	Graphen	103
9.	Homologie mit Koeffizienten	104
9.1.	Kettenkomplexe über Ringen	104
9.2.	Das Tensorprodukt von abelschen Gruppen	104
9.3.	Das Tensorprodukt von Kettenkomplexen mit abelschen Gruppen	107
9.4.	Freie Auflösungen und die G -Torsion einer abelschen Gruppe	109
9.5.	Spaltende kurze exakte Sequenzen	118
9.6.	Das universelle Koeffiziententheorem	120
9.7.	Anwendung auf topologische Räume	125
10.	Die Homologiegruppen von Produkten	126
10.1.	Das Tensorprodukt von Kettenkomplexen	126
10.2.	Das Produkt von CW-Komplexen	127
10.3.	Der Satz von Eilenberg-Zilber	129
10.4.	Die Künneth-Formel für Kettenkomplexe	129
11.	Die Kohomologiegruppen eines topologischen Raums	133
11.1.	Duale Kokettenkomplexe	133
11.2.	Die singulären Kohomologiegruppen eines topologischen Raums	135
11.3.	Beispiel von Kohomologiegruppen	138
12.	Das Universelle Koeffizienten Theorem für Kohomologiegruppen	139
12.1.	Die Extgruppen	139
12.2.	Das universelle Koeffiziententheorem	142
12.3.	Die Kohomologiegruppen von Produkträumen	144
13.	Die de Rham-Kohomologie und die singuläre Kohomologie	145
13.1.	Alternierende Formen und das Dach-Produkt	145
13.2.	Die de Rham-Kohomologie einer Mannigfaltigkeit	147
13.3.	Der Zusammenhang zwischen den Kohomologie-Theorien	149
13.4.	Das Dachprodukt von Differentialformen	151
14.	Das cup-Produkt	152
14.1.	Die Definition des cup-Produkts	152

14.2.	Das cup-Produkt vom Torus	156
15.	Die Poincaré-Dualität und die Schnittform einer Mannigfaltigkeit	158
15.1.	Die Poincaré-Dualität	158
15.2.	Die Schnittform einer Mannigfaltigkeit	164
15.3.	Die Schnittform und das cup-Produkt	167
16.	Weiterführende Literatur	169

LITERATUR

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skript. Als begleitende und weiterführende Literatur bieten sich eventuell folgende Bücher an:

Croom: *Basic concepts of algebraic topology*,

Hatcher: *Algebraic topology*,

Lück: *Algebraische Topologie*,

Munkres: *Elements of algebraic topology*,

Stöcker und Zieschang, *Algebraische Topologie - Eine Einführung*.

Das Buch von Hatcher kann mithilfe des folgenden Links von der Webseite des Autoren heruntergeladen werden:

<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>

Die Schnittmenge dieses Skripts ist am größten mit dem Buch von Hatcher.

1. EINLEITUNG

In der algebraischen Topologie werden wir topologische Räume mithilfe von algebraischen Methoden studieren. Etwas genauer gesagt, wir werden topologischen Räumen algebraische Objekte (z.B. Gruppen, Vektorräume und Ringe) zuordnen. Dies erlaubt uns dann topologische Räume zu unterscheiden und Abbildungen zwischen topologischen Räumen zu studieren.

In der Topologievorlesung im Sommersemester 2012 hatten wir die Fundamentalgruppe eines (punktierten) topologischen Raums kennengelernt. Wir erinnern im Folgenden an die Definition und an einige der grundlegenden Eigenschaften der Fundamentalgruppe.

1.1. Die Definition der Fundamentalgruppe. Im Folgenden sei X durchgehend ein topologischer Raum. Ein *Weg* in X ist eine Abbildung ¹ $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. Wir nennen $\gamma(a)$ den *Anfangspunkt von γ* und wir nennen $\gamma(b)$ den *Endpunkt von γ* . Wir sagen auch γ ist ein *Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$* .

Es seien $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege, mit gleichem Anfangspunkt P und gleichem Endpunkt Q . Eine *Homotopie zwischen den Wegen f_0 und f_1* ist eine Abbildung

$$\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

so dass

$$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t) \text{ und } \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t) \text{ für alle } t \in [0, 1],$$

und so dass

$$\Gamma(0, s) = P \text{ und } \Gamma(1, s) = Q \text{ für alle } s \in [0, 1].$$

Wenn eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 existiert, dann sagen wir, dass γ_0 und γ_1 *weghomotop* sind, und wir schreiben $\gamma_0 \simeq \gamma_1$.

Eine Homotopie von zwei Wegen besteht also aus einer Familie von Wegen $\{\Gamma(-, s)\}_{s \in [0, 1]}$ von P nach Q , welche zwischen den Wegen γ_0 und γ_1 interpoliert. Dies wird auch in Abbildung 1 illustriert.

Beispiel. (1) Es seien $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege in \mathbb{R}^n mit gleichem Anfangs- und Endpunkten. Dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, s) &\mapsto \gamma_0(t)(1-s) + \gamma_1(t)s \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 .

(2) Es sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Wir betrachten die Wege

$$\begin{aligned} p: [0, 1] &\rightarrow X & \text{und} & & q: [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t)) & & & t &\mapsto (\cos(\pi t), -\sin(\pi t)) \end{aligned}$$

von $(0, 1)$ nach $(0, -1)$. Es scheint so, als wären p und q nicht homotop. Dies ist in der Tat der Fall, für den Beweis dieser Aussage werden wir allerdings noch mehrere Wochen benötigen.

¹Wenn wir nichts anderes sagen, dann meinen wir mit ‘Abbildung’ immer eine stetige Abbildung.

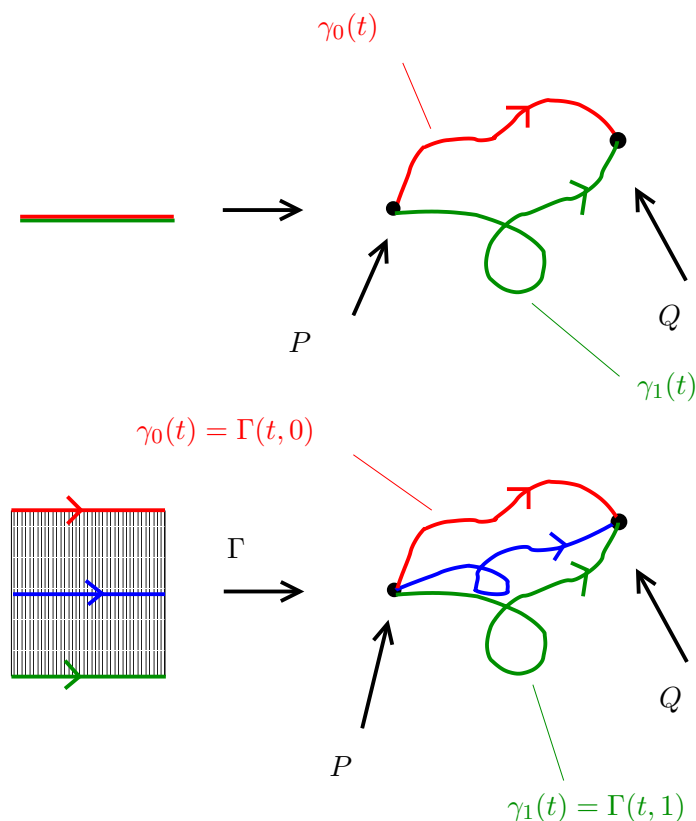


ABBILDUNG 1. Schematisches Bild einer Homotopie Γ zwischen γ_0 und γ_1 von P nach Q .

Wir haben in der Vorlesung Topologie gesehen, dass Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation ist. Für einen Weg $f: [0, 1] \rightarrow X$ bezeichnen wir nun mit $[f]$ die Äquivalenzklasse von f bezüglich der Äquivalenzrelation, welche durch Homotopie von Wegen definiert ist. Wir nennen dann $[f]$ auch die Homotopieklasse von f .

Es seien nun $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit $f(1) = g(0)$. Wir definieren dann das *Produkt von f und g* als den Weg $f * g$, welcher gegeben ist durch ²

$$[0, 1] \rightarrow X$$

$$t \mapsto \begin{cases} f(2t), & \text{wenn } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2t - 1), & \text{wenn } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Wir definieren dann das *Produkt der Äquivalenzklassen $[f]$ und $[g]$* als

$$[f] * [g] := [f * g].$$

²Anschaulich gesprochen ist also $f * g$ der Weg, bei dem wir zuerst entlang f und danach entlang g laufen. Damit dies weiterhin auf dem 'Zeitintervall' $[0, 1]$ passiert, müssen wir entlang f und g mit 'doppelter Geschwindigkeit' laufen.

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten f und g der Äquivalenzklassen ab.

Der folgende Satz besagt nun, dass das Produkt von Äquivalenzklassen viele Eigenschaften besitzt, welche wir von Gruppen her kennen.

Satz 1.1. *Es seien $f, g, h: [0, 1] \rightarrow X$ Wege. Dann gilt:*

(1) *Wenn $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$, dann gilt*³

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h].$$

(2) *Für $x \in X$ bezeichnen wir mit e_x den durch $e_x(t) := x$ definierten konstanten Weg. Dann gilt*

$$[e_{f(0)} * f] = [f] = [f * e_{f(1)}].$$

(3) *Wir bezeichnen mit \bar{f} den durch $\bar{f}(t) := f(1 - t)$ definierten Weg, dann gilt*

$$[f * \bar{f}] = [e_{f(0)}] \text{ und } [\bar{f} * f] = [e_{f(1)}].$$

In Satz 1.1 haben wir gesehen, dass das Produkt von Wegen viele Eigenschaften einer Gruppe besitzt. Allerdings bilden die Homotopieklassen von Wegen keine Gruppe, weil im Allgemeinen ihr Produkt nicht definiert ist. Wir beheben das Problem, in dem wir uns von nun an auf Schleifen konzentrieren.

Definition. Es sei $x_0 \in X$. Eine *Schleife* in (X, x_0) ist ein Weg $f: [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = f(1) = x_0$, d.h. x_0 ist sowohl der Anfangs- als auch der Endpunkt von f .

Satz 1.2. *Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Wir betrachten*

$$\pi_1(X, x_0) := \{\text{Homotopieklassen von Schleifen in } (X, x_0)\}$$

*zusammen mit der Produktabbildung $(f, g) \mapsto f * g$. Dann ist dies eine Gruppe.*

Das triviale Element ist nach Satz 1.1 (2) dabei gegeben durch die Homotopieklasse der konstanten Schleife $[e_{x_0}]$. Zudem ist das Inverse der Homotopieklasse einer Schleife $f: [0, 1] \rightarrow X$ in x_0 nach Satz 1.1 (3) gegeben durch die durch $\bar{f}(t) := f(1 - t)$ definierte Schleife.

Definition. Wir nennen $\pi_1(X, x_0)$ die *Fundamentalgruppe* von X bezüglich des Basispunktes x_0 . Für $f, g \in \pi_1(X, x_0)$ schreiben wir oft fg anstatt $f * g$.

Beispiel. (1) Wir betrachten $X = \mathbb{R}^n$. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig und es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Schleife in (\mathbb{R}^n, x_0) . Dann ist

$$\begin{aligned} [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, s) &\mapsto f(t) \cdot (1 - s) + x_0 \cdot s \end{aligned}$$

³Anders ausgedrückt, die Wege $f * (g * h)$ und $(f * g) * h$ sind homotop. Man beachte, dass diese Wege im Allgemeinen nicht gleich sind, nachdem beispielsweise $(f * (g * h))(\frac{1}{2}) = f(1)$ und $((f * g) * h)(\frac{1}{2}) = g(1)$.

eine Homotopie zwischen den Schleifen f und e_{x_0} . Es folgt also, dass $\pi_1(X, x_0) = 0$.

(2) Es gilt ⁵

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

Hierbei ist ein Erzeuger der zyklischen Gruppe $\pi_1(S^1, x_0)$ gegeben durch die Schleife

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi it}. \end{aligned}$$

(3) Für $n \geq 2$ gilt $\pi_1(S^n, x_0) = 0$ für alle $x_0 \in S^n$.

(4)

Es ist manchmal hilfreich, sich Schleifen in (X, x_0) als Abbildungen $f: S^1 \rightarrow X$ mit $f(1) = x_0$ zu betrachten. ⁶

Das folgende Lemma besagt nun, dass eine Schleife $f: S^1 \rightarrow X$ in (X, x_0) das triviale Element der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ repräsentiert, genau dann, wenn wir die Abbildung f auf die Scheibe D^2 fortsetzen können.

Lemma 1.3. *Eine Abbildung $f: S^1 \rightarrow X$ mit $f(1) = x_0$ repräsentiert das triviale Element in $\pi_1(X, x_0)$ genau dann, wenn es eine Abbildung $g: D^2 \rightarrow X$ mit $g|_{\partial D^2} = f$ gibt.*

Wir erinnern auch an folgenden Satz aus der Topologievorlesung.

Satz 1.4. *Es seien $x_0, x_1 \in X$, welche durch einen Weg $p: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 verbunden sind. Dann ist*

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [f] &\mapsto [p * f * \bar{p}] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere, wenn X ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist, dann gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

für alle $x_0, x_1 \in X$. ⁷

Wir hatten in der Topologievorlesung verschiedene Methoden kennengelernt um Fundamentalgruppen zu bestimmen:

⁴Wenn $\pi_1(X, x_0)$ die triviale Gruppe ist, dann schreiben wir normalerweise $\pi_1(X, x_0) = 0$. Diese Notation hat sich eingebürgert, obwohl sie nicht ganz logisch ist: wir verwenden die multiplikative Notation für die Gruppenoperation auf der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$, und es wäre daher logischer $\pi_1(X, x_0) = 1$ zu schreiben, wenn die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist.

⁵Wir fassen S^1 entweder als Einheitskreis in \mathbb{R}^2 oder in \mathbb{C} auf, je nachdem, welche Notation gerade einfacher ist.

⁶Genauer gesagt, eine Schleife $f: [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = f(1)$ definiert durch $e^{2\pi it} \mapsto f(t)$ eine Abbildung $g: S^1 \rightarrow X$ mit $f(1) = f(e^{2\pi i0}) = x_0$. Umgedreht definiert eine Abbildung $g: S^1 \rightarrow X$ mit $g(1) = x_0$ durch $t \mapsto g(2^{2\pi t})$ eine Schleife $f: [0, 1] \rightarrow X$. Wir werden im Folgenden zwischen diesen beiden Definitionen von Schleifen hin- und herwechseln.

⁷Wenn X ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist, dann besagt der Satz also, dass der Isomorphietyp der Fundamentalgruppe nicht von der Wahl des Basispunktes abhängt. Wir bezeichnen dann manchmal mit $\pi_1(X)$ den Isomorphietyp der Fundamentalgruppe.

- (1) Wenn X ein wegzusammenhängender und einfach zusammenhängender topologischer Raum ist auf dem eine Gruppe G diskret operiert, dann gilt $\pi_1(X/G) \cong G$. Beispielsweise operiert \mathbb{Z}^n durch Addition auf \mathbb{R}^n , und es folgt, dass

$$\pi_1(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n.$$

Wenn $n = 1$, dann sehen wir wiederum, dass $\pi_1(S^1) = \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Für $n = 2$ erhalten wir, dass die Fundamentalgruppe des Torus isomorph zu \mathbb{Z}^2 ist.

- (2) Wenn X die Vereinigung von zwei Teilmengen A und B ist, so dass $A \cap B$ zusammenhängend ist, dann besagt der Satz von Seifert-van Kampen, dass wir ⁸ $\pi_1(X)$ als amalgamiertes Produkt von den Fundamentalgruppen von A und B schreiben können.

Man könnte den Satz von Seifert-van Kampen auch als ‘divide et impera’-Satz bezeichnen: der Satz ermöglicht es das Verständnis von Fundamentalgruppen auf das Verständnis von Fundamentalgruppen von kleineren (und hoffentlich besser verstandenen) Teilmengen zu reduzieren.

- (3) Der Satz von Seifert-van Kampen hat es uns ermöglicht die Fundamentalgruppe auch von komplizierten topologischen Räumen zu bestimmen. Insbesondere konnten wir dadurch zeigen, dass der Kleeblattknoten nicht äquivalent zum trivialen Knoten ist. Zudem konnten wir auch zeigen, dass geschlossene Flächen mit ‘verschiedener Anzahl von Löchern’ nicht homöomorph sind.

1.2. Induzierte Abbildungen. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und es sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Es sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ eine Schleife im Punkt x_0 , dann ist $\gamma \circ f: [0, 1] \rightarrow Y$ eine Schleife im Punkt $f(x_0)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f_*: \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

ist wohl-definiert, d.h. $f_*([\gamma])$ ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Homotopieklasse von Schleifen. Die Abbildung f_* ist zudem ein Gruppenhomomorphismus. Wir nennen f_* die von f *induzierte Abbildung*. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass

$$\begin{aligned} (\text{id}_X)_* &= \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}, && \text{für alle punktierten Paare } (X, x_0), \\ (f \circ g)_* &= f_* \circ g_*, && \text{für alle Abbildungen } f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \\ &&& \text{und } g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0). \end{aligned}$$

Wir werden jetzt sehen, dass induzierte Abbildungen hilfreich sind, um Beziehungen zwischen topologischen Räumen herzustellen.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Teilraum. Wir sagen A ist ein *Retrakt von X* , wenn es eine Retraktion $r: X \rightarrow A$ gibt, d.h. eine Abbildung mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$.

Beispiel. (1) Jeder Punkt in \mathbb{R}^n ist ein Retrakt von \mathbb{R}^n .

⁸Unter gewissen technischen Voraussetzungen, welche wir hier unterschlagen

- (2) S^1 ist ein Retrakt von $D^2 \setminus \{0, 0\}$, in der Tat, die Abbildung

$$\begin{aligned} D^2 \setminus \{0, 0\} &\rightarrow S^1 \\ z &\mapsto \frac{z}{|z|} \end{aligned}$$

ist eine Retraktion. (Hierbei betrachten wir D^2 als Teilmenge von \mathbb{C} .)

- (3) Die Menge S^1 ist kein Retrakt von D^2 . In der Tat, nehmen wir an, es gäbe eine Retraktion $r: D^2 \rightarrow S^1$. Wir bezeichnen mit $i: S^1 \rightarrow D^2$ die Inklusionsabbildung. Wir betrachten dann S^1 und D^2 mit dem Basispunkt 1 und betrachten dann folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(D^2, 1) & \\ i_* \nearrow & & \searrow r_* \\ \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{(r \circ i)_*} & \pi_1(S^1, 1). \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert nachdem aus der Funktorialität der Fundamentalgruppen folgt, dass $r_* \circ i_* = (r \circ i)_*$. Nachdem r eine Retraktion ist, folgt, dass $r \circ i = \text{id}_{S^1}$, d.h. $(r \circ i)_* = (\text{id}_{S^1})_*$ ist die Identitätsabbildung auf $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Die untere Abbildung ist also ein Isomorphismus, aber die obere Abbildung faktorisiert sich durch die triviale Gruppe, d.h. die Verknüpfung von i_* und r_* kann kein Isomorphismus von \mathbb{Z} sein. Wir haben damit einen Widerspruch erhalten.

1.3. Kategorien und Funktoren. In diesem Kapitel führen wir Kategorien und Funktoren ein. Diese erlauben uns verschiedene Ergebnisse in einer uniformen Sprache auszudrücken.

Definition. Eine Kategorie \mathcal{C} besteht aus folgenden Daten:

- (1) Einer Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$ von mathematischen Objekten, welche die *Objekte der Kategorie* genannt werden,
- (2) zu jedem Paar (X, Y) von Objekten gibt es eine Menge $\text{Mor}(X, Y)$,
- (3) zu je drei Objekten X, Y und Z gibt es eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) &\rightarrow \text{Mor}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind:

- (K1) (Assoziativität): Es seien $f \in \text{Mor}(W, X)$, $g \in \text{Mor}(X, Y)$ und $h \in \text{Mor}(Y, Z)$, dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

- (K2) (Identität): Zu jedem Objekt X gibt es einen Morphismus $\text{id}_X \in \text{Mor}(X, X)$ mit der Eigenschaft, dass gilt

$$\begin{aligned} \text{id}_X \circ f &= f \quad \text{für alle } f \in \text{Mor}(Z, X), \text{ und} \\ f \circ \text{id}_X &= f \quad \text{für alle } f \in \text{Mor}(X, Y). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, Z)$ wird, wie die Notation schon suggeriert, die *Verknüpfungsabbildung* genannt.

Beispiel. (a) Wir nennen die Kategorie \mathcal{M} mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathcal{M}) &:= \text{alle Mengen,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \text{alle Abbildungen von } X \text{ nach } Y,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die *Kategorie aller Mengen*.

(b) Wir nennen die Kategorie \mathcal{G} mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathcal{G}) &:= \text{alle Gruppen,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \text{Hom}(X, Y) = \text{alle Gruppenhomomorphismen von } X \text{ nach } Y,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Gruppenhomomorphismen die *Kategorie der Gruppen*.

(c) Wir nennen die Kategorie \mathcal{A} mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathcal{A}) &:= \text{alle abelschen Gruppen,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \text{Hom}(X, Y) = \text{alle Gruppenhomomorphismen von } X \text{ nach } Y,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Gruppenhomomorphismen die *Kategorie der Gruppen*.

(d) Wir nennen die Kategorie \mathcal{T} mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathcal{T}) &:= \text{alle topologischen Räume,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \mathcal{C}(X, Y) := \text{alle stetigen Abbildungen von } X \text{ nach } Y,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die *Kategorie der topologischen Räume*.

(e) Ein *punktierter topologischer Raum* ist ein Paar (X, x_0) , wobei X ein topologischer Raum ist und $x_0 \in X$. Wir nennen die Kategorie \mathcal{P} mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathcal{P}) &:= \text{alle punktierten topologischen Räume,} \\ \text{Mor}((X, x_0), (Y, y_0)) &:= \text{alle stetigen Abbildungen } f \text{ von } X \text{ nach } Y \\ &\text{mit } f(x_0) = y_0\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die *Kategorie der punktierten topologischen Räume*.

Definition. Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Ein *Funktor*⁹ $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung

$$F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$$

und für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ gibt es zudem eine Abbildung

$$\text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}(F(X), F(Y)),$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind

$$(F1) \quad F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \text{für alle } X \in \text{Ob}(\mathcal{C}),$$

⁹Manchmal nennt man solch einen Funktor auch kovarianter Funktor um ihn von den kontravarianten Funktoren zu unterscheiden.

(F2) für $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$ und $\psi \in \text{Mor}(Y, Z)$, gilt

$$F(\psi \circ \phi) = F(\psi) \circ F(\phi).$$

In Kapitel 1.2 hatten wir implizit folgenden Satz bewiesen.

Satz 1.5. *Es sei \mathcal{P} die Kategorie der punktierten topologischen Räumen und \mathcal{G} die Kategorie der Gruppen. Dann ist*

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{P}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{G}) \\ (X, x_0) &\mapsto \pi_1(X, x_0) \end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((X, x_0), (Y, y_0)) &\rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0)) \\ f &\mapsto f_* \end{aligned}$$

ein Funktor.

1.4. Zusammenfassung. Die Fundamentalgruppe eines punktierten topologischen Raumes ermöglicht es uns in vielen Fällen zu zeigen, dass gewisse topologische Räume nicht homöomorph sind (beispielsweise können wir die 2-Sphäre vom Torus unterscheiden). Wir haben zudem viele Methoden kennengelernt, um die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes zu bestimmen. Ein besonders wichtiges Ergebnis ist dabei der Satz von Seifert-van Kampen, welcher es ermöglicht, die Bestimmung der Fundamentalgruppe auf die Bestimmung der Fundamentalgruppen von geeignet gewählten Untermengen zurückzuführen. Die Fundamentalgruppe definiert zudem einen Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume zur Kategorie der Gruppen. Wir konnten damit beispielsweise zeigen, dass S^1 kein Retrakt von D^2 ist.

Es gibt allerdings auch viele Fragestellungen, bei denen uns die Fundamentalgruppe nicht weiter hilft. Beispielsweise haben alle Sphären S^n mit $n \geq 2$ eine triviale Fundamentalgruppe. Wir benötigen daher weitere Invarianten von topologischen Räumen. In der Topologievorlesung hatten wir die höheren Homotopiegruppen eingeführt. Diese Gruppen sind zwar relativ leicht zu definieren, aber im Allgemeinen sind diese Gruppen selbst in einfachen Beispielen kaum zu berechnen. Beispielsweise sind viele der höheren Homotopiegruppen von den Sphären $S^n, n \geq 2$ unbekannt.

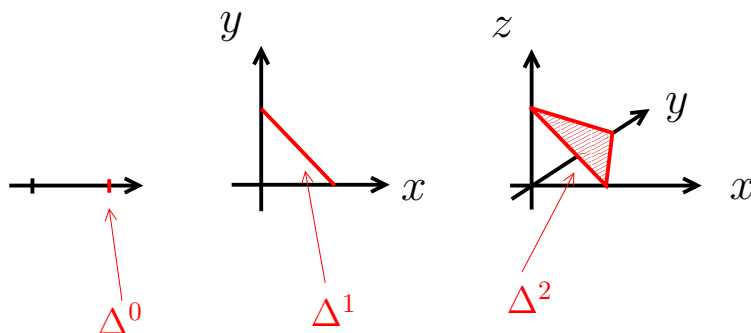
In dieser Vorlesung werden wir die Homologiegruppen eines topologischen Raumes einführen. Diese Gruppen sind relativ leicht zu definieren, aber es wird eine zeitlang dauern, bis wir diese für topologische Räume bestimmen können. Die Gruppen werden es uns dann aber unter anderem ermöglichen, die höher-dimensionalen Sphären zu unterscheiden.

2. DIE HOMOLOGIEGRUPPEN EINES TOPOLOGISCHEN RAUMES

2.1. Singuläre Ketten. Wir bezeichnen im Folgenden mit

$$\Delta^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1 \text{ und } x_i \geq 0 \text{ für alle } i = 0, \dots, n\}$$

den *Standard n -Simplex*. Für $n = 0$ ist dies gerade der Punkt $\{1\} \in \mathbb{R}$, für $n = 1$ ist dies die Strecke von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ und für $n = 2$ ist dies das von $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$



aufgespannte Dreieck.

Ein *singulärer n -Simplex* in einem topologischen Raum X ist eine Abbildung $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$. Wir betrachten dann ¹⁰

$C_n(X) :=$ freie abelsche Gruppe, welche von den singulären n -Simplizes in X aufgespannt wird.

Ein Element in $C_n(X)$ ist also eine formale Summe

$$a_1\sigma_1 + \cdots + a_k\sigma_k$$

wobei $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ und $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ singuläre n -Simplizes sind. ¹¹ Wir bezeichnen ein Element in $C_n(X)$, also eine Linearkombination $\sum_{i=1}^k a_i\sigma_i$, als *singuläre Kette in X* .

Wenn $n = 0$, dann ist ein singulärer n -Simplex eine Abbildung des Punktes Δ^0 nach X . Eine solche Abbildung ist eindeutig durch den Bildpunkt in X festgelegt. Wir werden deshalb oft singuläre 0-Simplizes einfach mit den dazugehörigen Bildpunkten bezeichnen.

¹⁰In der Definition der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ hatten wir alle Abbildungen $f: [0, 1] \rightarrow X$ mit der Zusatzbedingung $f(0) = f(1) = x_0$ betrachtet. Mithilfe dieser Zusatzbedingung konnten wir Schleifen problemlos verknüpfen. Jetzt betrachten wir alle Abbildungen von Δ^n nach X . Diese Abbildungen haben keine offensichtliche Verknüpfung. Wir schaffen uns daher eine Gruppenstruktur mit 'brachialer Gewalt', in dem wir einfach die von den Abbildungen erzeugte freie abelsche Gruppe betrachten.

¹¹Es sei M eine beliebige Menge. Die von M aufgespannte freie abelsche Gruppe ist streng genommen definiert als

$$\mathcal{A}(M) := \{f: M \rightarrow \mathbb{Z} \mid \text{es gibt nur endlich viele } m \in M \text{ mit } f(m) \neq 0\},$$

d.h. die Menge aller Funktionen, welche nur auf endlich vielen Elemente in M einen Wert ungleich null annimmt. Für $f, g \in \mathcal{A}(M)$ definieren wir dann

$$f + g: M \rightarrow \mathbb{Z} \\ m \mapsto f(m) + g(m).$$

Es ist offensichtlich, dass $f + g$ in $\mathcal{A}(M)$ liegt. Wir können daher $\mathcal{A}(M)$ als abelsche Gruppe auffassen. Für jedes $m \in M$ bezeichnen wir dann mit m auch die Abbildung

$$M \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jedes Element in $\mathcal{A}(M)$ kann dann eindeutig als Linearkombination von endlich vielen $m \in M$ geschrieben werden.

Es sei nun $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Für jedes n betrachten wir dann die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} f_*: C_n(X) &\rightarrow C_n(Y) \\ \sum_{i=1}^k a_i \cdot \sigma_i &\mapsto \sum_{i=1}^k a_i \cdot f \circ \sigma_i. \end{aligned}$$

Es ist nun leicht zu überprüfen, dass $X \mapsto C_n(X)$ und $f \mapsto f_*$ einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume zur Kategorie der abelschen Gruppe definiert.

Haben wir nun damit einen Fortschritt gemacht, sind wir dem Ziel, topologische Räume besser zu verstehen, näher gerückt? Nicht wirklich. Wenn X eine Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 1 ist, dann gibt es für jedes n überabzählbar viele Abbildungen $\Delta^n \rightarrow X$, d.h. die Gruppe $C_n(X)$ ist eine freie abelsche Gruppe mit überabzählbar vielen Erzeugern. Mit solch unübersichtlichen Gruppen wollen wir nicht arbeiten.

2.2. Definition der Homologiegruppen eines topologischen Raums. Es sei $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ ein singulärer n -Simplex. Der Rand $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(X)$ von σ ist definiert als

$$\partial \sigma := \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \left(\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \rightarrow & X \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) & \rightarrow & \sigma(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{n-1}) \end{array} \right).$$

Wir können das auch etwas formaler aufschreiben. Für $j \in \{0, \dots, n\}$ betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} i_j^n: \Delta^{n-1} &\rightarrow \Delta^n \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\partial_n \sigma = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \sigma \circ i_j^n.$$

Beispielsweise gilt für einen singulären 1-Simplex $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$, dass ¹²

$$(2.1) \quad \partial \sigma = (-1)^0 \cdot \sigma \circ i_0^1 + (-1)^1 \cdot \sigma \circ i_1^1 = \sigma(0, 1) - \sigma(1, 0).$$

Wir können die Abbildung $\sigma \mapsto \partial \sigma$ auch fortsetzen zu einer Abbildung

$$\begin{aligned} \partial_n: C_n(X) &\rightarrow C_{n-1}(X) \\ \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i=1}^k a_i \cdot \partial \sigma_i, \end{aligned}$$

welche wir als die n -te Randabbildung bezeichnen. Wir sagen, $c = \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i$ ist ein n -dimensionaler Zykel (oder kurz, n -Zykel), wenn $\partial c = 0$.

Diese Rand-Abbildungen haben die folgende fundamentale Eigenschaft:

Satz 2.1. Für alle n ist

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X)$$

die Nullabbildung.

¹²Hier verwenden wir wieder die Konvention, dass wir singuläre 0-Simplizes einfach mit den Bildpunkten bezeichnen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = 0$ für jeden singulären n -Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$. Es sei also $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ ein singulärer n -Simplex. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \partial_{n-1} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \sigma \circ i_j^n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \circ i_j^n) \circ i_k^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{k+j} \cdot \sigma \circ (i_j^n \circ i_k^{n-1}). \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass jeder Ausdruck $\sigma \circ (i_j^n \circ i_k^{n-1})$ genau zweimal, und mit entgegengesetzten Vorzeichen, auftaucht. Aus den Definitionen folgt leicht, dass ¹³

$$(2.2) \quad i_j^n \circ i_k^{n-1} = \begin{cases} i_k^{n-1} \circ i_{j-1}^n, & \text{wenn } j > k, \\ i_{k+1}^n \circ i_j^{n-1}, & \text{wenn } j \leq k. \end{cases}$$

Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned} &\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{k+j} \cdot \sigma \circ (i_j^n \circ i_k^{n-1}) \\ &= \sum_{0=k < j \leq n} (-1)^{k+j} \cdot \sigma \circ (i_j^n \circ i_k^{n-1}) + \sum_{0=j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \cdot \sigma \circ (i_j^n \circ i_k^{n-1}) \\ &= \sum_{0=k < j \leq n} (-1)^{k+j} \cdot \sigma \circ (i_j^n \circ i_k^{n-1}) + \sum_{0=j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \cdot \sigma \circ (i_{k+1}^n \circ i_j^{n-1}) \\ &= \sum_{0=k < j \leq n} (-1)^{k+j} \cdot \sigma \circ (i_j^n \circ i_k^{n-1}) + \sum_{0=j < l \leq n} (-1)^{l+j-1} \cdot \sigma \circ (i_l^n \circ i_j^{n-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt dabei aus den Definitionen, die dritte folgt aus (2.2), die vierte aus der Substitution $l = k + 1$, und die letzte, nachdem sich die ersten Summanden mit den zweiten Summanden wegheben. \square

Der Satz besagt also, dass wir für jedes n folgende Inklusion haben:

$$\text{Im}\{\partial_{n+1}: C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)\} \subset \text{Ker}\{C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)\}.$$

Wir definieren nun die n -te Homologiegruppe von X als die Quotientengruppe

$$H_n(X) := \text{Ker}\{C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)\} / \text{Im}\{\partial_{n+1}: C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)\}.$$

Die Homologiegruppe misst also, inwieweit n -dimensionale Zyklen der Rand von $(n+1)$ -dimensionalen singulären Ketten sind. Insbesondere erhalten wir folgendes Lemma sofort aus den Definitionen:

¹³Wenn $j > k$, dann sind die ‘Nullen’ bei $(i_j^n \circ i_k^{n-1})(t_0, \dots, t_{n-1})$ an den Stellen k und j . Andererseits, wenn $j \leq k$, dann sind die ‘Nullen’ bei $(i_j^n \circ i_k^{n-1})(t_0, \dots, t_{n-1})$ an den Stellen j und $k+1$.

Lemma 2.2. *Es gilt $H_n(X) = 0$ genau dann, wenn jeder n -dimensionale Zykel der Rand einer $(n + 1)$ -dimensionalen singulären Kette ist.*

Wir beschließen das Kapitel mit zwei Bezeichnungen:

- (1) Wenn c ein n -Zykel in X ist, dann nennen wir $[c] \in H_n(X)$ die *Homologieklass*e von c .
- (2) Wir sagen zwei Zyklen sind *homolog*, wenn sie die gleiche Homologieklass repräsentieren. Ein n -Zykel c heißt zudem *nullhomolog*, wenn $[c] = 0 \in H_n(X)$.

2.3. Illustrationen zur Definition von den Homologiegruppen. In Abbildung 2 skizzieren wir den Rand von einem singulären 1-Simplex. Ein singulärer 1-Simplex kann aufge-

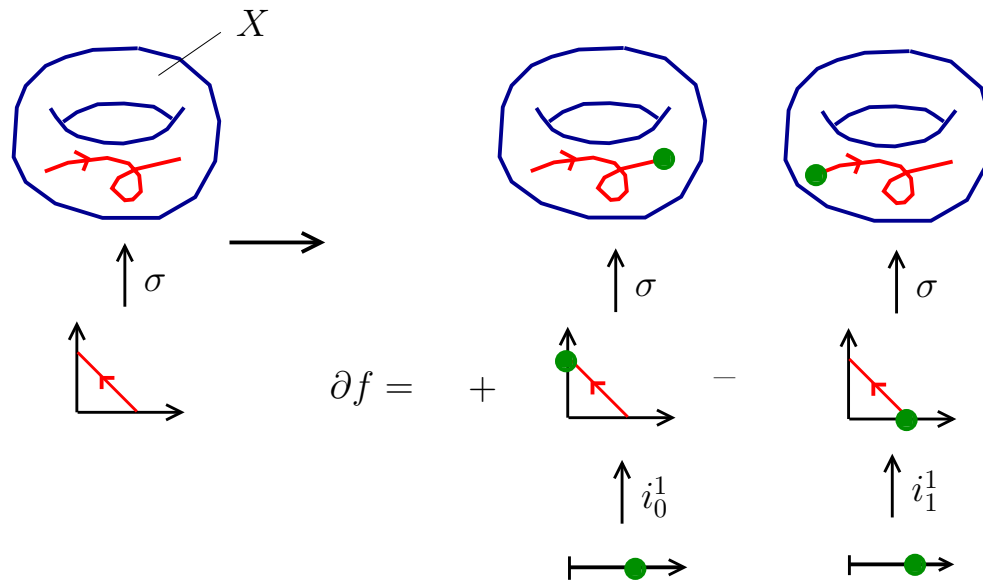


ABBILDUNG 2. Rand eines singulären 1-Simplex.

fasst werden als eine Abbildung σ von dem ‘Intervall’ Δ^1 nach X . Der Rand von σ ist dann der ‘Endpunkt’ $\sigma(0, 1)$ ‘minus’ dem ‘Anfangspunkt’ $\sigma(1, 0)$. Hierbei fassen wir Punkte in X wiederum als singuläre 0-Simplizes auf.

In Abbildung 3 skizzieren wir den Rand von einem singulären 2-Simplex. Wir sehen, dass wir den Rand $\partial\sigma$ von $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ wie folgt erhalten:

- (1) wir schränken σ auf die $n + 1$ ‘Seitenflächen’ von Δ^n ein,
- (2) wir identifizieren die ‘Seitenflächen auf geeignete Weise jeweils mit Δ^{n-1} , und
- (3) wir bilden dann die Summe über diese singulären $(n - 1)$ -Simplizes mit geeignet gewähltem Vorzeichen.

Wir wenden uns nun der Abbildung 4 vor. Wir sehen drei singuläre Ketten auf dem Torus, und es ist leicht zu sehen, dass alle drei singuläre Ketten Zykeln sind. Es stellt sich nun die Frage, welche von diesen Zykeln null-homolog sind. In Abbildung 5 sehen wir, dass

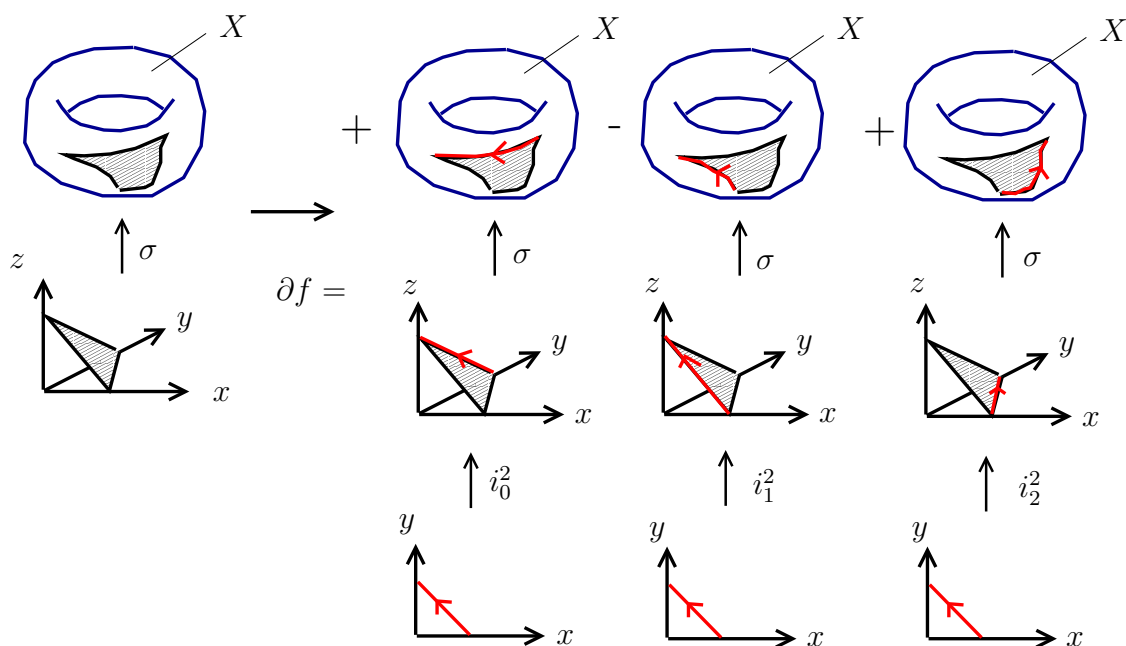


ABBILDUNG 3. Rand eines singulären 2-Simplex.

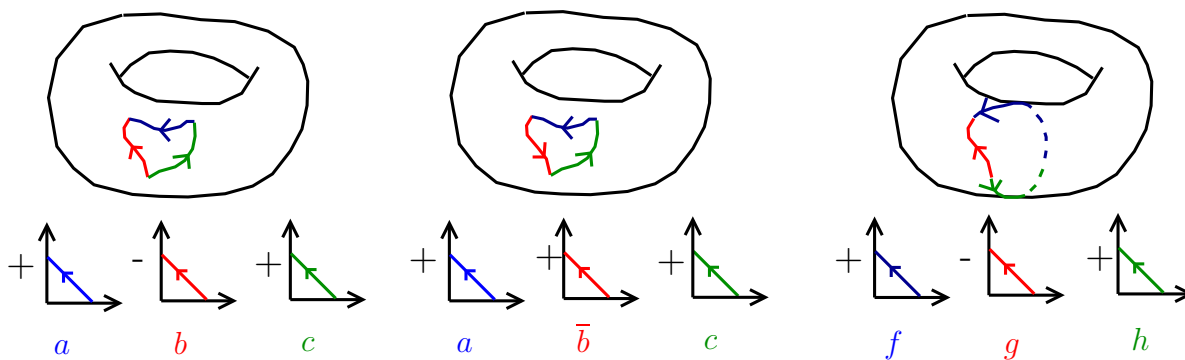


ABBILDUNG 4. Drei Beispiele von 1-dimensionalen Zykeln auf dem Torus.

der erste Zykel $a - b + c$ in Abbildung 4 der Rand von einem singulären 2-Simplex D ist. Man kann leicht sehen, dass der zweite Zykel, $a + \bar{b} + c$ in Abbildung 4 *nicht* der Rand von einem singulären 2-Simplex ist. Andererseits zeigen wir in Aufgabe 3 vom Übungsblatt 1, dass $b + \bar{b}$ ein nullhomologer Zykel ist, d.h. es gibt ein $E \in C_2(X)$, so dass $b + \bar{b} = \partial E$. Es folgt also, dass

$$a + \bar{b} + c = a + \partial E - b + c = a - b + c + \partial E = \partial D + \partial E = \partial(D + E),$$

d.h. $a + \bar{b} + c$ ist ebenfalls nullhomolog.

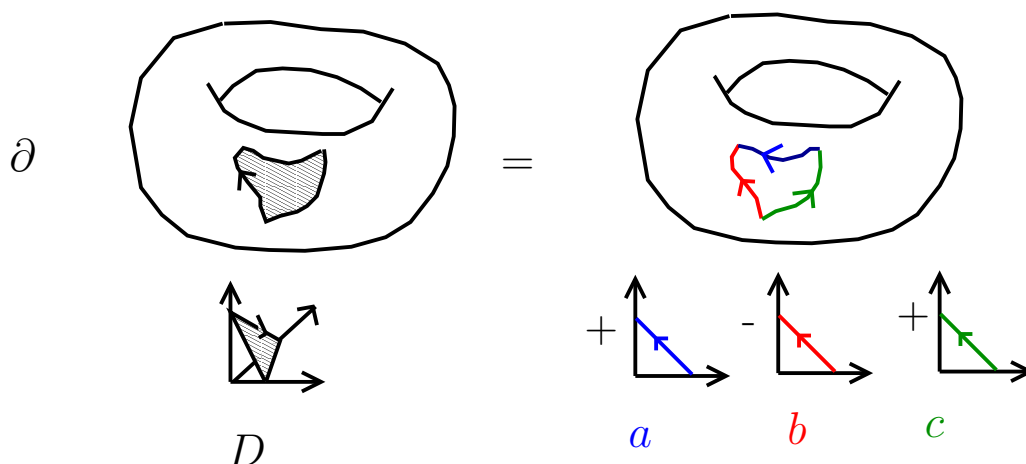


ABBILDUNG 5. Der erste Zykel in Abbildung 4 ist der Rand einer 2-dimensionalen singulären Kette.

Es ist nicht klar, ob der dritte Zykel in Abbildung 4 ebenfalls der Rand einer 2-dimensionalen singulären Kette ist. Wir werden später sehen, dass dies nicht der Fall ist. Der Beweis ist allerdings aufwendig, und wir müssen uns erst einige Techniken erarbeiten.

2.4. Erste Berechnungen von Homologiegruppen. Wir haben also die Homologiegruppen als Quotient von zwei freien abelschen Gruppen definiert, welche im Allgemeinen von unendlich vielen Element erzeugt werden. Wir werden sehen, dass erstaunlicherweise die Homologiegruppen oft endlich erzeugte abelsche Gruppen sind. Ein erstes Beispiel für dieses Phänomen ist folgendes Lemma.

Lemma 2.3. *Es sei X ein wegzusammenhängender nicht-leerer topologischer Raum und P ein Punkt in X . Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{Z} &\rightarrow H_0(X) \\ n &\mapsto n \cdot [P] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus, insbesondere gilt also $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Es sei X ein nicht-leerer topologischer Raum. Wir betrachten folgende sogenannte Augmentationsabbildung:

$$\begin{aligned} \varepsilon : C_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i=1}^k a_i. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zuerst zeigen, dass ε eine Abbildung $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert, d.h. wir müssen zeigen, dass $\varepsilon(\partial c) = 0$ für alle $c \in C_1(X)$. Es sei also $c = \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i \in C_1(X)$. Dann gilt nach (2.1), dass

$$\varepsilon(\partial c) = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k a_i \partial \sigma_i \right) = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k a_i \sigma_i(0, 1) - a_i \sigma_i(1, 0) \right) = \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^k a_i = 0.$$

Wir erhalten also, dass folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \varepsilon : H_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sum_{i=1}^k a_i \sigma_i] &\mapsto \sum_{i=1}^k a_i \end{aligned}$$

wohl-definiert ist.

Wir nehmen nun an, dass X wegzusammenhängend ist, und dass wir einen Punkt P in X gewählt haben. Es ist klar, dass $\varepsilon \circ \iota = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, insbesondere ist ε surjektiv. Um zu zeigen, dass ι ein Isomorphismus ist, genügt es nun zu zeigen, dass ε injektiv ist.

Es seien also Q_1, \dots, Q_k Punkte in X und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\varepsilon \left(\sum_{i=1}^k a_i Q_i \right) = \sum_{i=1}^k a_i = 0.$$

Wir wählen einen Punkt P in X . Nachdem X wegzusammenhängend ist können wir für jedes $i = 1, \dots, k$ einen Weg von P nach Q_i finden. Anders ausgedrückt, wir können für jedes $i = 1, \dots, k$ einen singulären 1-Simplex σ_i mit $\partial \sigma_i = Q_i - P$ finden. Dann gilt aber, dass

$$\partial \left(\sum_{i=1}^k a_i \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^k a_i \partial \sigma_i = \sum_{i=1}^k a_i (Q_i - P) = \sum_{i=1}^k a_i Q_i + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)}_{=0} \cdot P = \sum_{i=1}^k a_i Q_i,$$

d.h. $\sum_{i=1}^k a_i Q_i = 0 \in H_1(X)$. □

In den Übungen werden wir folgendes Lemma beweisen.

Lemma 2.4. *Es sei X ein topologischer Raum, welcher aus einem Punkt besteht. Dann gilt*

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z} \text{ und } H_n(X) = 0 \text{ für alle } n > 0.$$

Die Berechnung von $H_0(X)$ in Lemma 2.3 und die Berechnung der Homologie eines Punktes in Lemma 2.4 sind die einzigen Berechnungen von Homologiegruppen von wegzusammenhängenden topologischen Räumen, welche man ‘per Hand’ durchführen kann. Für alle weiteren Räume benötigen wir die Methoden, welche wir in den kommenden Kapiteln erarbeiten werden.

2.5. Algebraische Kettenkomplexe. Bevor wir mit der Diskussion von Homologiegruppen fortfahren ist es hilfreich, ein paar algebraische Definitionen einzuführen.

Ein (algebraischer) Kettenkomplex (C_*, ∂_*) ist eine Folge

$$\rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

von Abbildungen zwischen abelschen Gruppen, so dass für alle i gilt $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$. Wir definieren dann die n -te Homologiegruppe des Kettenkomplexes ganz analog zur Homologie eines topologischen Raumes:

$$H_n(C) := \text{Ker}\{\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\} / \text{Ker}\{\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n\}.$$

Wie zuvor bezeichnen wir Elemente im Kern von $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ als *Zykel*. Zudem sagen wir, dass ein Zykel $z \in C_n$ *null-homolog* ist, wenn $[z] = 0 \in H_n(C)$.

Eine *Kettenabbildung* $f: C_* \rightarrow D_*$ zwischen Kettenkomplexen¹⁴ besteht aus einer Abbildung $f_n: C_n \rightarrow D_n$ für jedes n , so dass für jedes n gilt:¹⁵

$$f_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_n.$$

Anders ausgedrückt, wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial} \\ & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\ \xrightarrow{\partial} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & D_n & \xrightarrow{\partial} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial} \end{array}$$

Wir können nun folgendes Lemma beweisen:

Lemma 2.5. *Es sei $f: C_* \rightarrow D_*$ eine Kettenabbildung zwischen Kettenkomplexen C_* und D_* . Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} f_*: H_n(C) &\rightarrow H_n(D) \\ [c] &\mapsto [f_n(c)] \end{aligned}$$

wohl-definiert.

Wir bezeichnen im Folgenden die Abbildung $f_*: H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ als die durch die Kettenabbildung f *induzierte Abbildung*.

Beweis. Es sei $c \in C_n$ ein Zykel. Dann gilt $\partial(f_n(c)) = f_{n-1}(\partial c) = f_n(0) = 0$, d.h. $f_n(c) \in D_n$ ist ebenfalls ein Zykel. Wenn nun $c, d \in C_n$ Zykel sind, welche das gleiche Element in $H_n(C)$ repräsentieren, dann gibt es ein $e \in C_{n+1}$ mit $\partial e = c - d$. Dann folgt aber wiederum aus der definierenden Eigenschaft einer Kettenabbildung, dass

$$f_n(c) - f_n(d) = f_n(c - d) = f_n(\partial e) = \partial f_{n+1}(e),$$

d.h. $f_n(c)$ und $f_n(d)$ repräsentieren das gleiche Element in $H_n(D)$. □

Wir können die obigen Ergebnisse auch etwas formaler aufschreiben. Wir betrachten jetzt die Kategorie \mathcal{K} der Kettenkomplexe, hierbei ist

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{K}) &:= \text{alle Kettenkomplexe,} \\ \text{Mor}(C_*, D_*) &:= \text{alle Kettenabbildungen von } C_* \text{ nach } D_*. \end{aligned}$$

Folgendes Lemma folgt nun leicht aus Lemma 2.5 und aus den Definitionen:

¹⁴Wir übertreiben normalerweise die Notation für die Randabbildungen in den Kettenkomplexen. D.h. anstatt zu sagen, ‘sei (C_*, ∂_*) ein Kettenkomplex’ sagen wir einfach, ‘sei C_* ein Kettenkomplex’.

¹⁵Genauer gesagt, gilt für alle $c \in C$, dass $f_{n-1}(\partial_n(c)) = \partial_n(f_n(c))$, wobei wir auf der linken Seite die Randabbildung $C_n \rightarrow C_{n-1}$ betrachten, und auf der rechten Seite betrachten wir die Randabbildung $D_n \rightarrow D_{n-1}$, welche wir ebenfalls mit ∂_n bezeichnen. In der Praxis ist es normalerweise offensichtlich, welche Randabbildung wir betrachten.

Lemma 2.6. *Für jedes n definiert*

$$\begin{aligned} C_* &\mapsto H_n(C) \\ (f: C_* \rightarrow D_*) &\mapsto (f_*: H_n(C) \rightarrow H_n(D)) \end{aligned}$$

einen Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe zur Kategorie der abelschen Gruppen.

2.6. Die Funktoreigenschaft von Homologiegruppen. Es sei nun $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir hatten schon gesehen, dass f für jedes n eine Abbildung

$$\begin{aligned} f_*: C_n(X) &\rightarrow C_n(Y) \\ \sum_{i=1}^k a_i \cdot \sigma_i &\mapsto \sum_{i=1}^k a_i \cdot f \circ \sigma_i. \end{aligned}$$

induziert. Für einen singulären n -Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ gilt dabei, dass

$$f_*(\partial\sigma) = f_* \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \sigma \circ i_j^n \right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot f \circ (\sigma \circ i_j^n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (f \circ \sigma) \circ i_j^n = \partial(f_*\sigma).$$

Diese Aussage gilt, wegen der Linearität der Rand-Abbildungen auch für jedes $c \in C_n(X)$, d.h. es gilt

$$(2.3) \quad f_*(\partial c) = \partial(f_*c).$$

Wir haben also bewiesen, dass $f_*: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ eine Kettenabbildung ist. Anders ausgedrückt, wir haben folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 2.7. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \text{topologischer Raum } X &\mapsto C_*(X) \\ (f: X \rightarrow Y) &\mapsto (f_*: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)) \end{aligned}$$

sind ein Funktor von der Kategorie \mathcal{T} der topologischen Räume zur Kategorie \mathcal{K} der Kettenkomplexe.

Wir erhalten daher aus Lemma 2.5 sofort folgendes Lemma.

Lemma 2.8. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} f_*: H_n(X) &\rightarrow H_n(Y) \\ [\sum_{i=1}^k a_i \cdot \sigma_i] &\mapsto [\sum_{i=1}^k a_i \cdot (f \circ \sigma_i)] \end{aligned}$$

ist wohl-definiert.

Kombinieren wir nun Lemmas 2.7 und 2.6 erhalten wir folgendes Lemma.

Lemma 2.9. *Für jedes n sind die Abbildungen*

$$(f: X \rightarrow Y) \mapsto \left(\begin{array}{l} X \mapsto H_n(X) \\ f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \\ [\sum_{i=1}^k a_i \cdot \sigma_i] \mapsto [\sum_{i=1}^k a_i \cdot (f \circ \sigma_i)] \end{array} \right).$$

wohl-definiert, und sie definieren einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume zur Kategorie der abelschen Gruppe.

2.7. Direkte Produkte und direkte Summen. Es sei nun $G_i, i \in I$ eine Familie von Gruppen. Wir definieren dann das *direkte Produkt*

$$\prod_{i \in I} G_i := \{ \text{alle Zuordnungen } i \mapsto g_i \text{ wobei } g_i \in G_i \}.$$

Das direkte Produkt ist wiederum eine Gruppe bezüglich der Gruppenstruktur

$$(a_i)_{i \in I} (b_i)_{i \in I} \mapsto (a_i b_i)_{i \in I}.$$

Wir betrachten zudem auch die *direkte Summe*

$$\bigoplus_{i \in I} G_i := \{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \text{es gibt nur endlich viele } i \in I \text{ mit } g_i \neq e \}.$$

Man beachte, dass die direkte Summe eine Untergruppe des direkten Produkts der $G_i, i \in I$ ist.¹⁶ Wir schreiben ein Element in der direkten Summe der G_i oft als formale Summe

$$g_{i_1} + \cdots + g_{i_l}$$

wobei $g_{i_j} \in G_{i_j}$ mit $i_1, \dots, i_l \in I$.

Beispiel. Es ist

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} &= \text{alle reellwertigen Folgen } i \mapsto a_i, \text{ und} \\ \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} &= \text{alle reellwertigen Folgen } i \mapsto a_i \text{ bei denen nur endlich viele} \\ &\quad \text{Folgliedern ungleich null sind.} \end{aligned}$$

Im Allgemeinen ist das direkte Produkt ‘deutlich größer’ als die direkte Summe. Beispielsweise ist $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ überabzählbar während $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ abzählbar ist.¹⁷

Wir wenden uns nun wieder den Kettenkomplexen zu. Es seien C_* und D_* Kettenkomplexe, dann bezeichnen wir mit $C_* \oplus D_*$ folgenden Kettenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & C_n \oplus D_n & \rightarrow & C_{n-1} \oplus D_{n-1} & \rightarrow & C_{n-2} \oplus D_{n-2} & \rightarrow \dots \\ & c_n + d_n & \mapsto & \partial(c_n) + \partial(d_n) & & & \end{array}$$

Ganz analog kann man nun auch die direkte Summe von einer Familie von Kettenkomplexen definieren. Folgendes Lemma wird in den Übungen bewiesen:

Lemma 2.10. *Es sei $C_a, a \in A$ eine Familie von Kettenkomplexen. Dann induzieren die Inklusionen $C_a \rightarrow \bigoplus_{a \in A} C_a$ einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{a \in A} H_n(C_a) \xrightarrow{\cong} H_n \left(\bigoplus_{a \in A} C_a \right).$$

Wir können jetzt zum Abschluß folgendes Lemma formulieren und beweisen:

¹⁶Ganz analog kann man auch das direkte Produkt bzw. die direkte Summe von Ringen, Algebren, Vektorräumen usw. definieren.

¹⁷Warum?

Lemma 2.11. *Es sei X ein topologischer Raum mit Wegzusammenhangskomponenten $X_a, a \in A$. Wir bezeichnen für jedes $a \in A$ mit $i_a : X_a \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Dann ist die Abbildung*

$$\bigoplus_{a \in A} i_a : \bigoplus_{a \in A} C_*(X_a) \rightarrow C_*(X)$$

ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Insbesondere sind für jedes n die Abbildungen

$$\bigoplus_{a \in A} i_{a*} : \bigoplus_{a \in A} H_n(X_a) \rightarrow H_n(X)$$

Isomorphismen.

Das Lemma besagt also insbesondere, dass die Homologiegruppen eines topologischen Raums X die direkte Summe der Homologiegruppen der Wegzusammenhangskomponenten von X ist. Anders ausgedrückt, das zeigt, dass es in den meisten Fällen genügt die Homologiegruppen von wegzusammenhängenden topologischen Räumen zu studieren.

Beweis. Nachdem der Standardsimplex Δ^n zusammenhängend ist, liegt das Bild einer Abbildung $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ in einer Wegzusammenhangskomponente X_a . Es folgt daraus, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \bigoplus_{a \in A} i_a : \bigoplus_{a \in A} C_n(X_a) &\rightarrow C_n(X) \\ (\sum_{i=1}^k c_i(\sigma : \Delta^n \rightarrow X_{a_i})) &\mapsto (\sum_{i=1}^k c_i(\sigma : \Delta^n \rightarrow X_{a_i})) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von freien abelschen Gruppen ist. Aus den Definitionen folgt zudem sofort, dass dies eine Kettenabbildung ist. Die zweite Aussage folgt nun aus Lemma 2.10. \square

3. HOMOLOGIE UND HOMOTOPIEN

3.1. Kettenhomotopien. Wir führen in diesem Kapitel ein Kriterium dafür ein, dass zwei Kettenabbildungen die gleichen Abbildungen auf den Homologiegruppen definieren.

Es seien $f, g : C_* \rightarrow D_*$ Kettenabbildungen zwischen Kettenkomplexen C_* und D_* . Eine *Kettenhomotopie* P besteht aus Abbildungen $P_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$, so dass für jedes n gilt:

$$\partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n.$$

Wenn es eine Kettenhomotopie zwischen Kettenabbildungen f und g gibt, dann nennen wir f und g *kettenhomotop* und wir schreiben $f \simeq g$. Es ist manchmal hilfreich, die Abbildungen in einem Diagramm zusammenzufassen:

$$\begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{\partial} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \longrightarrow \\ & & \downarrow f_*, g_* & \swarrow P_n & \downarrow f_*, g_* & \swarrow P_{n-1} & \downarrow f_*, g_* & & \\ & \xrightarrow{\partial} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & D_n & \xrightarrow{\partial} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \longrightarrow \end{array}$$

Wir können nun folgendes Lemma formulieren.

Lemma 3.1. *Es seien $f, g: C_* \rightarrow D_*$ kettenhomotope Kettenabbildungen zwischen Kettenkomplexen. Dann gilt für alle n , dass*

$$f_* = g_*: H_n(C) \rightarrow H_n(D).$$

Beweis. Es sei also $P = (P_n)$ eine Kettenhomotopie zwischen f und g . Dann gilt für einen Zykel $z \in C_n$, dass

$$f(z) - g(z) = (f - g)(z) = (\partial P + P\partial)(z) = (\partial P)(z) + \underbrace{P\partial z}_{=0} = \partial Pz,$$

d.h. $f(z)$ und $g(z)$ sind homolog. □

Es seien dazu C_* und D_* Kettenkomplexe.

- (1) Eine Kettenabbildung $f: C_* \rightarrow D_*$ ist eine *Homotopieäquivalenz* zwischen C_* und D_* , wenn sie ein Homotopieinverses besitzt, d.h. eine Kettenabbildung $g: D_* \rightarrow C_*$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_C$ und $f \circ g \simeq \text{id}_D$.
- (2) Wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen C_* und D_* gibt, dann sagen wir, dass die Kettenkomplexe C_* und D_* *homotopieäquivalent* sind und wir schreiben $C_* \simeq D_*$.

Für später halten wir nun folgendes Korollar zu Lemma 3.1 fest:

Korollar 3.2. *Es sei $f: C_* \rightarrow D_*$ eine Homotopieäquivalenz zwischen Kettenkomplexen, dann sind die induzierten Abbildungen $f_*: H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ Isomorphismen.*

3.2. Homologie und homotope Abbildungen. Es seien $f, g: X \rightarrow Y$ zwei Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Zur Erinnerung, eine *Homotopie* zwischen den Abbildungen f und g ist eine Abbildung

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

so dass

$$F(x, 0) = f(x) \text{ und } F(x, 1) = g(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Wenn eine Homotopie zwischen f und g existiert, dann sagen wir, dass f und g *homotop* sind und wir schreiben $f \simeq g$. Eine Homotopie ‘interpoliert’ also zwischen den Abbildungen f und g .

Satz 3.3. *Es seien $f, g: X \rightarrow Y$ zwei Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Wenn f und g homotop sind, dann sind f_* und g_* kettenhomotope Abbildungen $C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$. Insbesondere gilt für jedes n , dass*

$$f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y).$$

Beweis. Es sei also $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$. Unsere Aufgabe ist es nun eine Kettenhomotopie zwischen f_* und g_* zu finden.

Es sei also $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ gegeben. Wir wollen also, mithilfe der Homotopie $X \times [0, 1] \rightarrow Y$ dem singulären n -Simplex σ eine singuläre $(n + 1)$ -Kette in Y zuzuordnen. Betrachten wir

dazu Abbildung 6. Wir sehen insbesondere, dass $F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})$ eine Abbildung $\Delta^n \times [0, 1] \rightarrow Y$ definiert. Dies ist ein guter Anfang, nachdem $\Delta^n \times [0, 1]$ etwas $(n+1)$ -dimensionales ist. Allerdings ist dies kein $(n+1)$ -Simplex. Die Idee ist nun, $\Delta^n \times [0, 1]$ als Vereinigung von $(n+1)$ -Simplizes zu betrachten.

In Abbildung 6 sehen wir beispielsweise, dass wir $\Delta^1 \times [0, 1]$ als Vereinigung der Dreiecke mit den Ecken v_0, w_0, w_1 bzw. v_0, v_1, w_1 auffassen können.

Um diese Beobachtung zu verallgemeinern brauchen wir noch etwas mehr Notation. Für $i = 0, \dots, n$ schreiben wir im Folgenden

$$\begin{aligned} v_i &:= (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \times 0 \in \mathbb{R}^{n+1} \times 0, \\ w_i &:= (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \times 1 \in \mathbb{R}^{n+1} \times 1. \end{aligned}$$

Die Punkte v_0, \dots, v_n spannen also den Simplex $\Delta^n \times 0$ auf, die Punkte v_0, \dots, v_n spannen den Simplex $\Delta^n \times 1$ auf. Zudem spannen für jedes i die Punkte $v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n$ einen $(n+1)$ -Simplex auf, und die Vereinigung dieser $(n+1)$ -Simplizes ist gerade $\Delta^n \times [0, 1]$.

Wir bezeichnen nun mit e_i wie üblich die Standardbasis des euklidischen Raums. Für $a_1, \dots, a_{k+1} \in \Delta^n \times [0, 1]$ betrachten wir dann die Abbildung

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, a_{k+1}]: \Delta^k &\rightarrow \Delta^n \times [0, 1] \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) &\mapsto \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j a_j. \end{aligned}$$

Die Abbildung $[a_1, \dots, a_{k+1}]$ schickt also den Standard k -Simplex Δ^k auf den von $\{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ aufgespannten Simplex' in $\Delta^n \times [0, 1]$. Für einen singulären n -Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ definieren wir nun

$$P_n \sigma := \sum_{j=0}^n (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n]$$

und wir bezeichnen zudem mit $P_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ die dadurch festgelegte Abbildung.

Nach Lemma 3.1 genügt es nun folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung.

$$\partial P + P \partial = f_* - g_*.$$

Für einen singulären n -Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ gilt

$$\begin{aligned} \partial P_n \sigma &= \partial \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sum_{j=0}^n (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \circ i_k^{n+1}. \end{aligned}$$

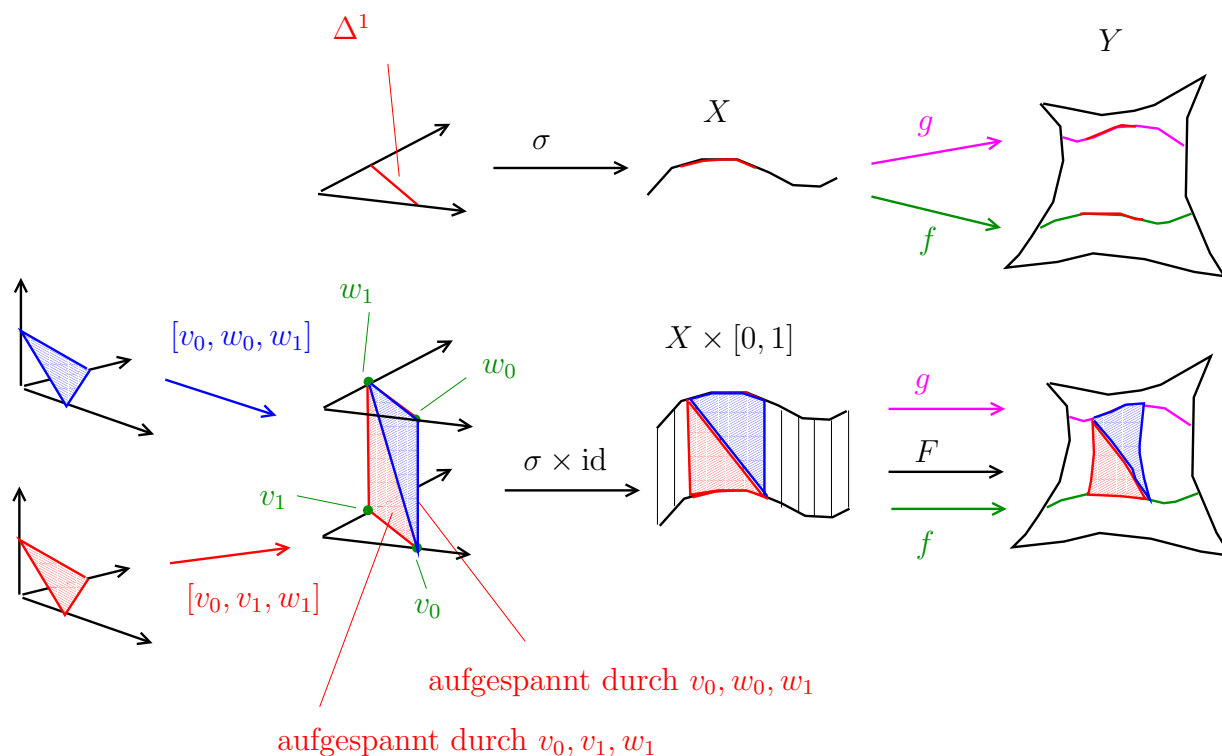


ABBILDUNG 6. Aufteilung von $\Delta^1 \times [0, 1]$.

Ein bisschen überlegen zeigt nun, dass ¹⁸

$$[v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \circ i_k^{n+1} = \begin{cases} [v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n], & \text{wenn } k \leq j, \\ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \widehat{w_{k-1}}, \dots, w_n], & \text{wenn } k > j. \end{cases}$$

Es folgt also, dass

$$\begin{aligned} \partial P_n \sigma &= \sum_{0 \leq k \leq j \leq n} (-1)^k (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \\ &+ \sum_{n+1 \geq k > j \geq 0} (-1)^k (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \widehat{w_{k-1}}, \dots, w_n]. \end{aligned}$$

¹⁸Der erste Fall, $k \leq j$ ist etwas einfacher: man muss sich überlegen, wohin die h -te Ecke e_h vom Standard n -Simplex geschickt wird. Wenn $h < h$, dann schickt i_k^{n+1} die h -te Ecke wiederum auf die h -te Ecke, und $[v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n]$ schickt diese Ecke auf v_h . Wenn $h \geq k$, dann schickt i_k^{n+1} die h -te Ecke wiederum auf die $(h+1)$ -te Ecke, und $[v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n]$ schickt diese Ecke dann auf v_{h+1} . Wenn $k \leq j$ entspricht dies also gerade der Abbildung $[v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n]$. Der zweite Fall, $k > j$, wird ganz analog bewiesen.

Wir brechen jetzt die Summen auf in $k = j$ und $k < j$, sowie in $k = j + 1$ und $k > j + 1$. Wir sehen dann, dass

$$\begin{aligned} \partial P_n \sigma &= \sum_{k=0}^n (-1)^{2k} F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_{k-1}, w_k, \dots, w_n] \\ &+ \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{2k+1} F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_{k-1}, w_k, \dots, w_n] \\ &+ \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^k (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \\ &+ \sum_{n+1 \geq k > j+1 \geq 1} (-1)^k (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \widehat{w_{k-1}}, \dots, w_n]. \end{aligned}$$

Hierbei verwenden wir die gängige Notation, dass \widehat{v}_k und $\widehat{w_{k-1}}$ bedeutet, dass der jeweilige Eintrag ausgelassen wird.

Betrachten wir nun die ersten beiden Summen. Die Summanden heben sich weg, bis auf die Summanden für $k = 0$ und $k = n + 1$. Wir erhalten also, dass

$$\begin{aligned} \partial P_n \sigma &= F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [w_0, \dots, w_n] \\ &- F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_n] \\ (3.1) \quad &+ \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} (-1)^k (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \\ &+ \sum_{n+1 \geq k > j+1 \geq 1} (-1)^k (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \widehat{w_{k-1}}, \dots, w_n]. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist gerade $g \circ \sigma = g_*(\sigma)$ und der zweite ist $-f \circ \sigma = -f_*(\sigma)$. Es verbleibt zu zeigen, dass die restlichen Summanden gerade $-P\partial(\sigma)$ ergeben.

Dies zeigt man durch explizites ausrechnen. Wir berechnen zuerst, dass

$$\begin{aligned} P_{n-1} \partial(\sigma) &= P \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \sigma \circ i_s^n \right) \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \sum_{s=0}^n (-1)^s F \circ (\sigma \circ i_s^n \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_r, w_r, \dots, w_{n-1}]. \end{aligned}$$

Es folgt leicht aus den Definitionen, dass

$$i_s^n \circ [v_0, \dots, v_r, w_r, \dots, w_{n-1}] = \begin{cases} [v_0, \dots, \widehat{v}_s, \dots, v_{r+1}, w_{r+1}, \dots, w_n], & \text{wenn } s \leq r, \\ [v_0, \dots, v_r, w_r, \dots, \widehat{w_{s-1}}, \dots, w_n], & \text{wenn } s > r. \end{cases}$$

Wir erhalten also, dass

$$\begin{aligned} (3.2) \quad P_{n-1} \partial(\sigma) &= \sum_{0 \leq s \leq r \leq n-1} (-1)^r (-1)^s F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, \widehat{v}_s, \dots, v_{r+1}, w_{r+1}, \dots, w_n] \\ &+ \sum_{n \geq s > r \geq 0} (-1)^r (-1)^s F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, \dots, v_r, w_r, \dots, \widehat{w_{s-1}}, \dots, w_n]. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt im ersten Term von (3.2) die Substitutionen $s = k$, $r = j - 1$ durchführen und im zweiten Term von (3.2) die Substitutionen $s = k - 1$, $r = j - 1$ durchführen, dann

sehen wir sofort, dass diese Terme gerade das negative der entsprechenden Terme in (3.1) sind.

Wir haben damit die Behauptung, dass $\partial P = f_* - g_* - P\partial$ bewiesen. \square

Es seien X und Y topologische Räume.

- (1) Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist eine *Homotopieäquivalenz zwischen X und Y* , wenn sie ein Homotopieinverses besitzt, d.h. eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$.
- (2) Wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen X und Y gibt, dann sagen wir, dass die Räume X und Y *homotopieäquivalent* sind und wir schreiben $X \simeq Y$.

Wir erhalten jetzt folgendes Korollar zu Satz 3.3.

Korollar 3.4. *Es seien X und Y topologische Räume.*

- (1) *Wenn $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, dann ist die induzierte Abbildung $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ ein Isomorphismus.*
- (2) *Wenn X und Y homotopieäquivalent sind, dann gilt $H_n(X) \cong H_n(Y)$.*

Wir sagen ein topologischer Raum X ist *zusammenziehbar*, wenn X homotopieäquivalent ist zu $Y = \{*\}$, d.h. zum Raum, welcher aus genauer einem Punkt besteht. In der Topologievorlesung hatten wir beispielsweise gesehen, dass \mathbb{R}^n und D^n zusammenziehbar sind. Es folgt nun aus Lemma 2.4 und aus Korollar 3.4, dass

$$(3.3) \quad H_i(D^n) \cong H_i(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = 0, \\ 0, & \text{wenn } i > 0. \end{cases}$$

Bemerkung. Wie in der Topologievorlesung bezeichnen wir mit $[f]$ die Homotopieäquivalenzklasse einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$, und wir bezeichnen $[X, Y]$ die Menge der Äquivalenzklassen von Abbildungen von X nach Y . Wir hatten zudem in der Topologievorlesung, dass

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{H}) &:= \text{alle topologischen Räume,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= [X, Y] \end{aligned}$$

mit der Verknüpfung

$$\begin{aligned} \text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) &\rightarrow \text{Mor}(X, Z) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f \circ g] \end{aligned}$$

eine Kategorie \mathcal{H} bildet. In diesem Fall sind die Morphismen also nicht mehr Abbildungen, sondern nur noch Äquivalenzklassen von Abbildungen. Satz 3.3 besagt also, dass für jedes n die Abbildungen $X \mapsto H_n(X)$ und $[f] \mapsto f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ einen Funktor von der Kategorie \mathcal{H} zur Kategorie \mathcal{A} der abelschen Räume definiert. Wir erhalten also insbesondere folgendes kommutative Diagramm von Kategorien:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{X \mapsto X} & \mathcal{H} \\ & \searrow X \mapsto H_n(X) & \swarrow X \mapsto H_n(X) \\ & & \mathcal{A}. \end{array}$$

3.3. Die erste Homologiegruppe und die Fundamentalgruppe. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Wir betrachten folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Schleifen in } (X, x_0) &\rightarrow C_1(X) \\ (\gamma: [0, 1] \rightarrow X) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \Delta^1 & \rightarrow & X \\ (1-t, t) & \mapsto & \gamma(t) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Wir können dazu folgenden Satz beweisen.

Satz 3.5. (1) Für jede Schleife γ ist $\Phi(\gamma)$ ein Zykel.
 (2) Die Abbildung γ induziert eine wohl-definierte Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_{(X, x_0)}: \pi_1(X, x_0) &\rightarrow H_1(X) \\ [\gamma] &\mapsto [\Phi(\gamma)]. \end{aligned}$$

(3) Die Abbildung $\Phi_{(X, x_0)}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen werden in Übungsblatt 2 bewiesen. Der Beweis der dritten Aussage ist auch nicht schwierig, das Argument wird in Abbildung 7 skizziert. \square

Es stellt sich nun die Frage ob die Abbildung $\Phi_{(X, x_0)}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ surjektiv und/oder injektiv ist. Die Abbildung Φ ist im Allgemeinen nicht surjektiv, denn $\pi_1(X, x_0)$ hängt nur von der Wegzusammenhangskomponente von x_0 aber, während $H_1(X)$ alle Wegzusammenhangskomponenten von X sieht. Dies ist allerdings auch schon das einzige Hindernis, dass Φ surjektiv ist.

Genauer gesagt, es gilt folgendes Lemma:

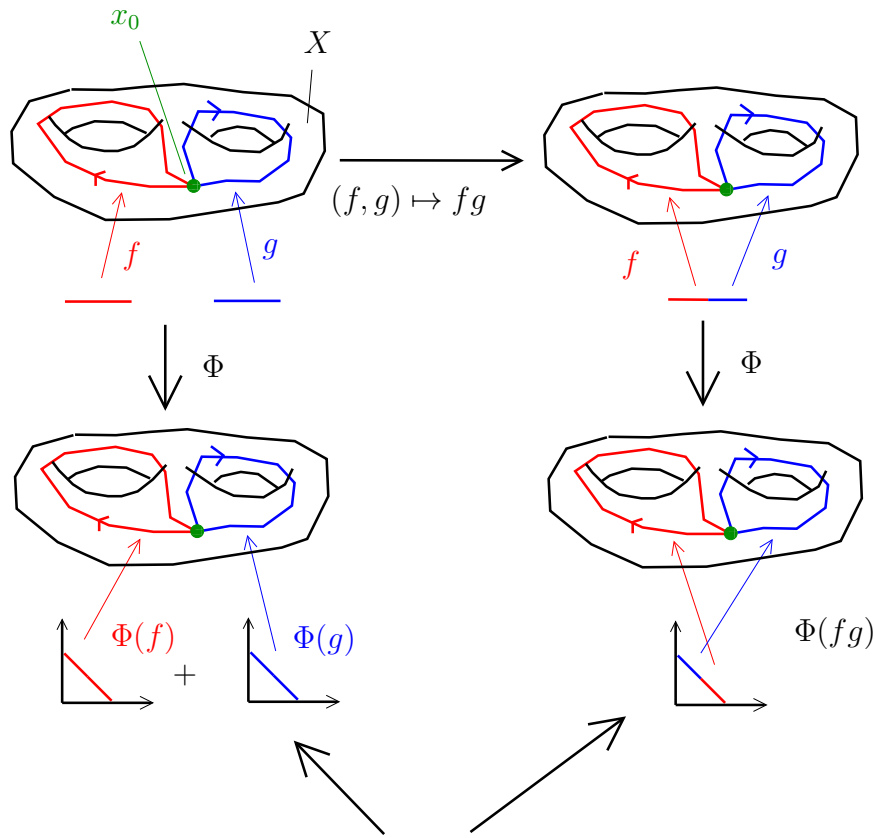
Lemma 3.6. Es sei X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0 \in X$, dann ist

$$\Phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

surjektiv.

Beweis. Es sei $c = \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i$ ein Zykel in $C_1(X)$. In dem wir die möglicherweise die Orientierung der σ_i umdrehen können wir nach Übungsblatt 1 o.B.d.A. annehmen, dass alle Koeffizienten a_i größer als null sind. Zudem, indem wir nicht darauf bestehen, dass die σ_i disjunkt sind, können wir annehmen, dass $a_1 = \dots = a_k = 1$. Für jedes i wählen wir jetzt einen Pfad p_i vom Basispunkt x_0 zum Anfangspunkt $\sigma_i(1, 0)$ von σ_i . Wir bezeichnen dann mit \bar{p}_i den Pfad mit umgekehrter Orientierung, und wir fassen p_i und \bar{p}_i wie üblich auch als singuläre 1-Simplizes in X auf. Nach Aufgabe 4 vom Übungsblatt 1 ist $p_i + \bar{p}_i$ ein nullhomologer Zykel für jedes i .

Nachdem $\partial c = 0$ tauchen die Endpunkte der σ_i genauso oft als Anfangspunkte der σ_i auf. D.h. es gibt eine Permutation $s \in S_k$, so dass für jedes i der Endpunkt $\sigma_i(0, 1)$ gerade



homolog nach Aufgabe 1 von Übungsblatt 2

ABBILDUNG 7. Skizze für den Beweis, dass $\Phi(fg) = \Phi(f) + \Phi(g)$.

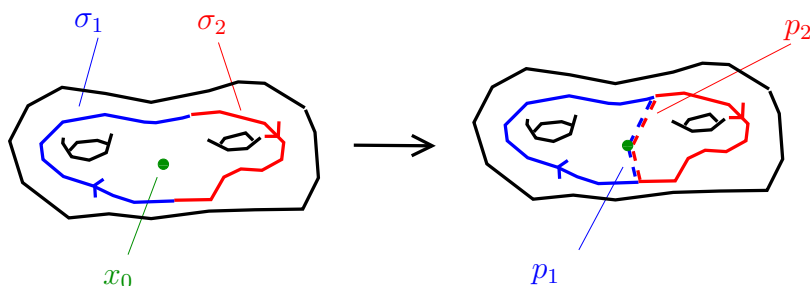
der Anfangspunkt $\sigma_{s(i)}(1, 0)$ von $\sigma_{s(i)}$ ist. Dann gilt in $H_1(X)$, dass

$$c = \sum_{i=1}^k \sigma_i = \sum_{i=1}^k \sigma_i + \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=1}^k \bar{p}_i = \sum_{i=1}^k \underbrace{p_i + \sigma_i + \bar{p}_{s(i)}}_{\text{Bild einer Schleife in } X, x_0} .$$

Wir sehen also, dass $[c] \in \Phi(\pi_1(X, x_0))$. □

Es ist leicht zu sehen, dass Φ im Allgemeinen nicht injektiv ist, denn $\pi_1(X, x_0)$ ist in vielen Fällen eine nichtabelsche Gruppe, aber eine nicht-abelsche Gruppe kann keine Untergruppe einer abelschen Gruppe sein.

Wir erinnern nun an eine Definition aus der Topologievorlesung. Es sei π eine Gruppe. Für $x, y \in \pi$ bezeichnen wir mit $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ den *Kommutator von x und y*. Wir



$\sigma_1 + \sigma_2$ ist das Bild unter Φ
vom Produkt der blauen
und der roten Schleife

ABBILDUNG 8. Skizze für den Beweis, dass Φ surjektiv ist.

nennen

$$[\pi, \pi] := \left\langle \prod_{i=1}^k [x_i, y_i] \mid x_1, y_1, \dots, x_k, y_k \in \pi \right\rangle$$

die Kommutatoruntergruppe von π .¹⁹ Die Gruppe $\pi/[\pi, \pi]$ ist abelsch, denn für alle $g, h \in \pi$ gilt

$$gh[\pi, \pi] = hg \cdot g^{-1}h^{-1}gh[\pi, \pi] = hg \cdot \underbrace{[g^{-1}, h^{-1}]}_{\in [\pi, \pi]}[\pi, \pi] = hg[\pi, \pi].$$

Wir nennen $\pi_{ab} := \pi/[\pi, \pi]$ die *Abelianisierung* von π .

In der Topologievorlesung hatten wir gesehen, dass die Abelianisierung ‘der größte abelsche Quotient’ von π ist. Genauer gesagt, wir haben gesehen, dass wenn $\alpha: G \rightarrow H$ ein

¹⁹Die Kommutatoruntergruppe ist in der Tat eine Untergruppe: offensichtlich ist $[\pi, \pi]$ multiplikativ geschlossen und für $\prod_{i=1}^k [x_i, y_i]$ ist das Inverse

$$\left(\prod_{i=1}^k [x_i, y_i] \right)^{-1} = \prod_{i=k}^1 [x_i, y_i]^{-1} = \prod_{i=k}^1 [y_i, x_i].$$

Die Kommutatoruntergruppe ist zudem eine normale Untergruppe von π . Dies sieht man leicht aus

$$a \left(\prod_{i=1}^k [x_i, y_i] \right) a^{-1} = \prod_{i=1}^k a [x_i, y_i] a^{-1}$$

und aus

$$a[x, y]a^{-1} = axyx^{-1}y^{-1}a^{-1} = axa^{-1}aya^{-1}ax^{-1}a^{-1}ay^{-1}a^{-1} = [axa^{-1}, aya^{-1}].$$

Homomorphismus zu einer abelschen Gruppe ist, dann existiert genau ein Homomorphismus $\beta: G/[G, G] \rightarrow H$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/[G, G] \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & H. \end{array}$$

Wenn $F = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ eine freie Gruppe in m Erzeugern ist, dann sieht man nun leicht, dass $F_{ab} = F/[F, F] \cong \mathbb{Z}^m$.

Es folgt also, dass $\Phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ eine Abbildung $\Phi: \pi_1(X, x_0)_{ab} \rightarrow H_1(X)$ induziert. Wir erhalten jetzt folgenden Satz.

Satz 3.7. *Es sei X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0 \in X$, dann ist*

$$\Phi: \pi_1(X, x_0)_{ab} \rightarrow H_1(X)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es folgt aus Lemma 3.6, dass die Abbildung $\Phi: \pi_1(X, x_0)_{ab} \rightarrow H_1(X)$ surjektiv ist. Die Tatsache, die Abbildung $\Phi: \pi_1(X, x_0)_{ab} \rightarrow H_1(X)$ injektiv ist, wird in Hatcher: Algebraic Topology auf Seite 167 bewiesen.

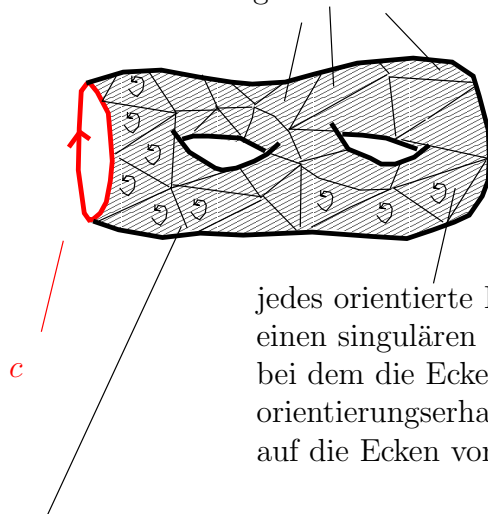
Wir wollen den Beweis nur in einem Spezialfall skizzieren. Den allgemeinen Beweis in Hatcher kann man als Verallgemeinerung von folgendem Argument auffassen.²⁰

Nehmen wir an, dass wir eine eingebettete Kurve $c \subset X$ haben, welche eine orientierbare Fläche von Geschlecht g berandet. Wir werden jetzt zuerst argumentieren, dass c nullhomolog ist, und danach werden wir uns davon überzeugen, dass c in der Kommutatoruntergruppe von $\pi = \pi_1(X)$ liegt.

Wir wollen also zuerst zeigen, dass $c = 0 \in H_1(X)$. Wir teilen dazu die Fläche in ‘Dreiecke’ D_i auf, wobei wir die Dreiecke so wählen, so dass sich zwei verschiedene Dreiecke entweder gar nicht, in einem Eckpunkt oder in einer Kante überlappen. Die Orientierung der Fläche gibt uns dann für jedes Dreieck eine Orientierung, d.h. eine ‘Durchlaufrichtung’ für die Eckpunkte. Für jedes Dreieck D_i wählen wir jetzt eine Abbildung $\sigma_i: \Delta^2 \rightarrow D_i$, so dass die Durchlaufrichtung der Ecken erhalten bleibt. (Hierbei verwenden wir für Δ^2 die Durchlaufrichtung $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$). Wir bezeichnen nun mit k_i die Kanten der Dreiecke im Inneren der Fläche und wir bezeichnen mit l_i die Kanten der Dreiecke am Rand. Für die Kanten k_i wählen wir eine beliebige Orientierung und wir bezeichnen dann mit \bar{k}_i die Kanten mit entgegengesetzter Orientierung. Für die Kanten l_i wählen wir die Orientierung, welche durch die Orientierung der Fläche gegeben ist. Die Kanten im Inneren tauchen genau zweimal als Rand eines 2-Simplizes auf, jedoch mit entgegengesetzter Orientierung. Es folgt

²⁰Was nun folgt ist natürlich nur eine Aneinanderreihung von suggestiven Argumenten, aber keineswegs ein Beweis.

Fläche F zerlegt in orientierte Dreiecke D_i



jedes orientierte Dreieck D_i definiert einen singulären 2-Simplex $\sigma_i : \Delta^2 \rightarrow D_i$ bei dem die Ecken von Δ^2 orientierungserhaltend auf die Ecken von D_i geschickt werden

Beim Rand $\partial(\sum_i \sigma_i)$ tauchen die inneren Kanten zweimal mit entgegengesetzter Orientierung auf.

ABBILDUNG 9. Skizze für den Beweis, dass $c = 0 \in H_1(X)$, wenn c der Rand einer orientierbaren Fläche ist.

nun, dass

$$\partial \left(\sum_i D_i \right) = \sum_i \partial D_i = \sum_j (k_j + \bar{k}_j) + \sum_j l_j.$$

Es folgt aus Übungsblatt 1 Aufgabe 4, dass $k_j + \bar{k}_j = \partial E_j$ für ein $E_j \in C_2(X)$. Zudem folgt aus Übungsblatt 2 Aufgabe 1, dass $\sum_j l_j = c + \partial F$ für ein $F \in C_2(X)$. Wir sehen also, dass

$$\partial \left(\sum_i D_i - \sum_j E_j - \partial F \right) = c.$$

Wir haben also gezeigt, dass $c = 0 \in H_1(X)$.

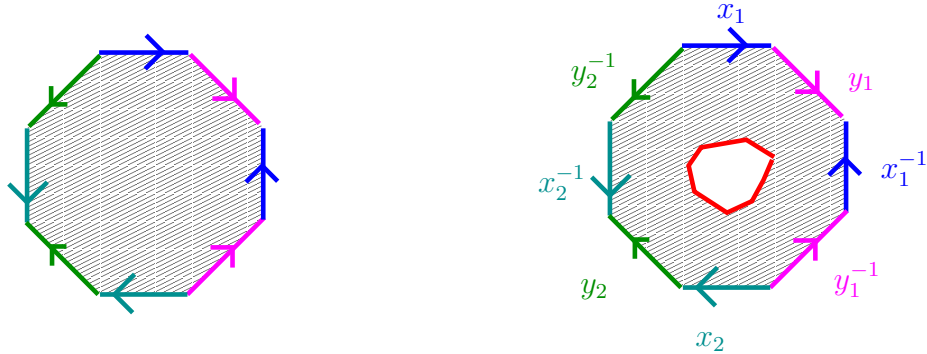
Wir wollen nun zeigen, dass c auch das triviale Element in π_{ab} ist. Wir fassen dazu die Fläche als $4g$ -gon auf. Die Kurve c ist dann homotop zu

$$x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \cdots x_g y_g x_g^{-1} y_g^{-1},$$

d.h. c ist ein Kommutator. □

Wir können also jetzt die Berechnungen von Homologiegruppen aus der Topologievorlesung verwenden um die ersten Homologiegruppen von verschiedenen topologischen Räumen zu bestimmen.

Korollar 3.8. (1) *Es ist $H_1(S^n) = 0$ für $n \geq 1$.*



Fläche aufgefasst als Oktagon mit je zwei Seiten identifiziert

Wenn wir eine Scheibe entfernen, dann ist die Randkurve c homotop zu $x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1}$

ABBILDUNG 10. Skizze für den Beweis, dass die Randkurve ein Produkt von Kommutatoren ist.

- (2) Wenn Σ eine geschlossene Fläche von Geschlecht g ist, dann gilt $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Insbesondere gilt für den Torus T , dass $H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$.
- (3) Wenn K ein Knoten ist, dann gilt $H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen leicht aus Satz 3.7 und aus den Berechnungen in der Topologievorlesung.

Wir skizzieren nun noch den Beweis der dritten Aussage. Es sei also $K \subset S^3$ ein Knoten. Wir hatten in der Topologievorlesung gesehen, dass

$$\pi := \pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x_1, \dots, x_k \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

wobei jedes r_i von der Form

$$r_i = x_i^{-1} x_{s(i)}^{\varepsilon_i} x_{i+1} x_{s(i)}^{-\varepsilon_i}$$

mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ ist. (Hierbei betrachten wir die Indizes modulo k .) Die Element $x_i^{-1} x_{s(i)}^{\varepsilon_i} x_{i+1} x_{s(i)}^{-\varepsilon_i}$, $i = 1, \dots, k$ sind also trivial in π . Betrachten wir das Bild davon in der Abelianisierung, dann sehen wir, dass

$$x_i^{-1} x_{s(i)}^{\varepsilon_i} x_{i+1} x_{s(i)}^{-\varepsilon_i} = x_i^{-1} x_{i+1} \cdot x_{s(i)}^{\varepsilon_i} x_{s(i)}^{-\varepsilon_i} = x_i^{-1} x_{i+1} \in \pi_{ab}.$$

Für jedes i gilt also, dass $x_i = x_{i+1} \in \pi_{ab}$. Wir sehen also, dass π_{ab} von x_1 erzeugt wird. Wir müssen nun noch zeigen, dass π_{ab} eine unendliche zyklische Gruppe ist. Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(S^3 \setminus K) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x_i &\mapsto 1, \end{aligned}$$

welche offensichtlich wohl-definiert ist. Diese Abbildung faktorisiert sich durch π_{ab} , d.h. es gibt einen Homomorphismus von π_{ab} auf \mathbb{Z} . Wir hatten schon gesehen, dass π_{ab} zyklisch ist, es folgt nun also, dass $\pi_{ab} \cong \mathbb{Z}$. \square

Wir werden im weiteren Verlauf der Vorlesung nur wenig Gebrauch von Satz 3.7 machen, insbesondere werden wir die Homologiegruppen der Räume in Korollar 3.8 auch mit anderen Methoden bestimmen.

Wir beschließen das Kapitel noch mit etwas Kategorientheorie. Wir haben jetzt gesehen, dass wir einem punktierten topologischen (X, x_0) die Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $H_1(X)$ zuordnen, und es gibt eine dazugehörige Abbildung $\Phi_X : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. Wenn wir die Fundamentalgruppe und die erste Homologiegruppe als Funktoren betrachten, dann können wir den Zusammenhang auch etwas formaler aufschreiben. Dafür benötigen wir den Begriff der natürlichen Transformation zwischen zwei Funktoren.

Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und es seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation zwischen F und G* ordnet jedem $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\Phi_X : F(X) \rightarrow G(X)$ zu, so dass für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F_*(f)} & F(Y) \\ \downarrow \Phi_X & & \downarrow \Phi_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G_*(f)} & G(Y). \end{array}$$

Mit dieser Definition können wir nun folgenden Satz formulieren.

Satz 3.9. *Die Abbildungen*

$$\Phi_{(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

*definieren eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren*²¹

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{G} \\ (X, x_0) & \mapsto & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{G} \\ (X, x_0) & \mapsto & H_1(X). \end{array}$$

Der Beweis des Satzes folgt leicht aus den Definitionen. Wir überlassen das als freiwillige Übungsaufgabe.

²¹Zur Erinnerung, \mathcal{P} ist die Kategorie der punktierten topologischer Räume und \mathcal{G} ist die Kategorie der Gruppen.

4. LANGE EXAKTE SEQUENZEN UND DIE HOMOLOGIE VON QUOTIENTENRÄUMEN

4.1. **Lange exakte Sequenzen.** In diesem Kapitel werden wir einen Satz formulieren, welcher es uns erlaubt die Homologiegruppen von Sphären zu bestimmen. Um den Satz zu formulieren benötigen wir allerdings noch ein paar Definitionen.

- (1) Eine Folge (oder Sequenz) von Abbildungen

$$\dots A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-2} \rightarrow \dots$$

heißt *exakt*, wenn für jedes n gilt:

$$\text{Ker}(f_n) = \text{Im}(f_{n+1}).$$

Beispielsweise ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ exakt genau dann, wenn f injektiv ist. Zudem ist $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ exakt genau dann, wenn f surjektiv ist. Insbesondere, wenn $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ exakt ist, dann ist f ein Isomorphismus.

- (2) Es sei nun X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Wir sagen, A ist ein *Deformationsretrakt*, wenn es eine Abbildung

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow X$$

gibt, so dass ²²

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= x \text{ für alle } x \in X, \\ F(a, t) &= a \text{ für alle } a \in A, \text{ und} \\ F(x, 1) &\in A \text{ für alle } x \in X. \end{aligned}$$

Beispielsweise ist 0 ein Deformationsretrakt von D^n und auch von \mathbb{R}^n . Zudem kann man leicht sehen, dass S^{n-1} ein Deformationsretrakt von

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|(x_1, \dots, x_n)\| \in (0, 1]\}$$

ist.

- (3) Es sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Im Beweis von Lemma 2.3 hatten wir gesehen, dass die Augmentationsabbildung

$$\begin{aligned} \varepsilon: H_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sum_{i=1}^k a_i \sigma_i] &\mapsto \sum_{i=1}^k a_i \end{aligned}$$

eine wohl-definierte surjektive Abbildung ist. Wir definieren nun

$$\tilde{H}_n(X) := \begin{cases} H_n(X), & \text{wenn } n > 0, \text{ und} \\ \text{Ker}\{\varepsilon: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}\}, & \text{wenn } n = 0. \end{cases}$$

Wir bezeichnen im Folgenden $\tilde{H}_n(X)$ als die *reduzierte Homologie von X* . Es folgt beispielsweise aus (3.3), dass $\tilde{H}_n(D^k) = \tilde{H}_n(\mathbb{R}^k) = 0$ für alle n . In den Übungen

²² Zur Erinnerung, A ist ein Retrakt von X , wenn es eine Abbildung $r: X \rightarrow A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$ gibt. Ein Deformationsretrakt ist offensichtlich ein Retrakt, aber nicht umgedreht. Beispielsweise ist $1 \in S^1$ ein Retrakt von S^1 aber kein Deformationsretrakt. Warum?

werden wir zeigen, dass jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung $f_*: \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y)$ induziert, so dass

$$\begin{aligned} X &\mapsto \tilde{H}_0(X) \\ (f: X \rightarrow Y) &\mapsto (f_*: \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y)) \end{aligned}$$

einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume zur Kategorie der abelschen Gruppe definiert.

Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 4.1. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge mit folgender Eigenschaft:*

(*) *Es gibt eine offene Umgebung U von A in X , so dass A ein Deformationsretrakt von U ist.*²³

Wir bezeichnen mit $i: A \rightarrow X$ die Inklusion und mit $p: X \rightarrow X/A$ die Projektionsabbildung. Dann gibt es für jedes n eine Abbildung $\partial: \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A)$, so dass die Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \tilde{H}_{n+1}(X/A) & \xrightarrow{\partial} \\ \rightarrow & \tilde{H}_n(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} \\ \rightarrow & \tilde{H}_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & \dots & & & \end{array}$$

eine exakte Sequenz ergeben.

Der Beweis von Satz 4.1 wird uns längere Zeit beschäftigt halten. Wir wollen daher zuerst im nächsten Kapitel anhand von Beispielen sehen, dass dieser Satz den Aufwand verdient.

4.2. Die Homologiegruppen der Sphären. In der Topologievorlesung hatten wir die höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X)$ eines topologischen Raums eingeführt. Wir konnten diese jedoch nur in sehr wenigen trivialen Fällen bestimmen. Selbst die höheren Homotopiegruppen von Sphären sind im Allgemeinen weiterhin unbekannt.

Mithilfe von Satz 4.1 können wir jetzt jedoch die Homologiegruppen von Sphären bestimmen. Die Homologiegruppen sind also zwar von der Definition her vielleicht weniger natürlich als die höheren Homotopiegruppen, aber sie sind deutlich leichter zu bestimmen.

Satz 4.2. *Für jedes n gilt*

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } k = n, \text{ und} \\ 0, & \text{wenn } k \neq n. \end{cases}$$

Anders ausgedrückt, für $n > 0$ gilt

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n, \text{ und} \\ 0, & \text{wenn } k \neq 0, n. \end{cases}$$

²³Die Bedingung (*) ist in den meisten Fällen, welche im ‘echten Leben’ auftauchen erfüllt.

Zudem gilt

$$H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & \text{wenn } k = 0, \text{ und} \\ 0, & \text{wenn } k \neq 0. \end{cases}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n . Wenn $n = 0$, dann besteht $S^n = S^0$ aus zwei Punkten, und der Satz folgt aus Lemmas 2.4 und 2.11.

Nehmen wir nun an, dass die Aussage des Satzes für $n - 1$ gilt. Wir wollen dann die reduzierte Homologie von S^n bestimmen. Aus der Topologie-Vorlesung wissen wir, dass S^n homöomorph zu D^n/S^{n-1} . Wir haben schon gesehen, dass S^{n-1} ein Deformationsretrakt von

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|(x_1, \dots, x_n)\| \in (0, 1]\}$$

ist. Wir können daher Satz 4.1 auf $X = D^n$ und $A = S^{n-1}$ anwenden. Wir erhalten also die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{H}_{k+1}(D^n) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_{k+1}(D^n/S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \\ \rightarrow & \tilde{H}_k(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_k(D^n) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_k(D^n/S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} \\ \rightarrow & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & \dots & & & \end{array}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung, aus dem Homöomorphismus $S^n \cong D^n/S^{n-1}$ und aus der Tatsache, dass $\tilde{H}_i(D^n) = 0$ für alle i , erhalten wir nun folgende exakte Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & 0 & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_{k+1}(S^n) & \xrightarrow{\partial} & \\ \rightarrow & \tilde{H}_k(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_k(S^n) & \xrightarrow{\partial} \\ \rightarrow & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & \dots & & & \end{array}$$

Insbesondere erhalten wir also für jedes k eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{k+1}(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_k(S^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Diese Abbildungen sind also Isomorphismen, und wir sehen, dass

$$\tilde{H}_k(S^n) = \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } k = n, \text{ und} \\ 0, & \text{wenn } k \neq n. \end{cases}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Induktionsvoraussetzung. □

In der Topologievorlesung hatten wir mithilfe von elementaren Argumenten gezeigt, dass \mathbb{R} nicht homöomorph zu \mathbb{R}^2 ist. Wir hatten zudem mithilfe der Fundamentalgruppe bewiesen, dass \mathbb{R}^2 nicht homöomorph zu \mathbb{R}^n für $n \geq 3$ ist. Wir können nun folgende Verallgemeinerung zeigen.

Satz 4.3. *Es gilt*

$$\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^l \Leftrightarrow k = l.$$

Beweis. Es sei $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ ein Homöomorphismus. Wir wählen einen Punkt $P \in \mathbb{R}^k$ und wir setzen $Q := \varphi(P)$. Dann sind auch $\mathbb{R}^k \setminus \{P\}$ und $\mathbb{R}^l \setminus \{Q\}$ homöomorph. Andererseits ist $\mathbb{R}^k \setminus \{P\}$ homotopieäquivalent zu S^{k-1} und $\mathbb{R}^l \setminus \{Q\}$ ist homotopieäquivalent zu S^{l-1} . Aus Satz 4.2 und aus Korollar 3.4 folgt dann für alle i , dass

$$\tilde{H}_i(S^{k-1}) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{R}^k \setminus \{P\}) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{R}^l \setminus \{Q\}) \cong \tilde{H}_i(S^{l-1}).$$

Aus Satz 4.2 folgt nun, dass $k = l$. □

Wir hatten die Fundamentalgruppe also benützt um zu zeigen, dass S^1 kein Retrakt von D^2 ist. Genau das gleiche Argument, zusammen mit Satz 4.2, liefert uns nun folgenden Satz.

Satz 4.4. *Die Teilmenge S^{n-1} ist kein Retrakt von D^n .* ²⁴

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe eine Retraktion $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$. Wir bezeichnen mit $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ die Inklusionsabbildung. Wir betrachten dann folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{H}_{n-1}(D^n) & \\ i_* \nearrow & & \searrow r_* \\ \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{(r \circ i)_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}). \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert nachdem aus der Funktorialität der Homologiegruppen folgt, dass $r_* \circ i_* = (r \circ i)_*$. Nachdem r eine Retraktion ist, folgt, dass $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$, d.h. $(r \circ i)_* = (\text{id}_{S^{n-1}})_*$ ist die Identitätsabbildung auf $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Die untere Abbildung ist also ein Isomorphismus, aber die obere Abbildung faktorisiert sich durch die triviale Gruppe, d.h. die Verknüpfung von i_* und r_* kann kein Isomorphismus von \mathbb{Z} sein. Wir haben damit einen Widerspruch erhalten. □

Korollar 4.5. *Jede Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. für jede Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ gibt es einen Punkt $x \in D^n$, so dass $f(x) = x$.* ²⁵

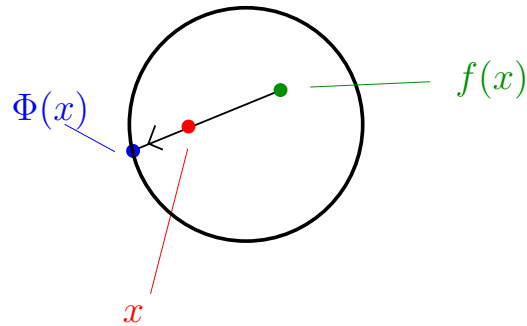
Beweis. Nehmen wir an, es gibt eine Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ ohne einen Fixpunkt. Nachdem f keinen Fixpunkt besitzt, gibt es für jedes x genau einen Strahl der von $f(x)$ ausgeht und durch x verläuft. Wir betrachten dann folgende Abbildung:

$$\begin{array}{ll} \Phi: D^n & \rightarrow D^n \\ x & \mapsto \text{der Schnittpunkt von } S^n \text{ mit dem eindeutig bestimmten} \\ & \text{Strahl von } f(x) \text{ nach } x. \end{array}$$

Man kann nun zeigen, dass Φ stetig ist. Es ist offensichtlich, dass $\Phi(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$, und dass $\Phi(x) \in S^{n-1}$ für alle $x \in S^{n-1}$. Die Abbildung Φ ist also eine Retraktion von D^n auf S^{n-1} . Dies ist aber nach Satz 4.4 nicht möglich. Wir haben also einen Widerspruch erhalten. □

²⁴Welchem Satz aus der Analysis I entspricht der Fall $n = 1$?

²⁵Wie kann man die Aussage im Fall $n = 1$ mit den Methoden aus der Analysis I beweisen?



4.3. Kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen. Nach den Anwendungen von Satz 4.1 im letzten Kapitel wenden wir uns nun dem Beweis von Satz 4.1 zu. In diesem Kapitel werden wir dazu erst einmal unsere algebraischen Methoden weiterentwickeln, welche uns dann später die Sequenz von Satz 4.1 liefern werden.

Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

welche aus maximal drei nicht-trivialen Gruppen besteht. Eine *kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen*

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{p} C_* \rightarrow 0$$

besteht aus Kettenabbildungen $i: A_* \rightarrow B_*$ und $p: B_* \rightarrow C_*$, so dass für jedes n die Abbildungen

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{i} B_n \xrightarrow{p} C_n \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz bilden. Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 4.6. *Es sei*

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{p} C_* \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann existiert für jedes n eine Abbildung

$$\partial_n: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A),$$

so dass

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{p_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \xrightarrow{p_*} \cdots$$

eine exakte Sequenz bildet.

Beweis. Es ist hilfreich, einen ‘Ausschnitt’ von der exakten Sequenz von Kettenkomplexen zu betrachten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{i} & B_{n+1} & \xrightarrow{p} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \\
0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{p} & C_n & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \\
0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{i} & B_{n-1} & \xrightarrow{p} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial_{n-1} & & \\
0 & \longrightarrow & A_{n-2} & \xrightarrow{i} & B_{n-2} & \xrightarrow{p} & C_{n-2} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Wir wollen zuerst eine Abbildung

$$\partial_n: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

definieren. Es sei also $[c] \in H_n(C)$. Dann ist $c = p(b)$ für ein $b \in B_n$. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt, dass

$$p(\partial b) = \partial p(b) = \partial c = 0.$$

Nachdem die zweite horizontale Reihe im obigen Diagramm exakt ist, folgt also, dass $p(\partial b) = i(a)$ für ein eindeutig bestimmtes $a \in A_{n-1}$. Wir setzen jetzt

$$\partial([c]) := [a].$$

Behauptung. Das Element a ist in der Tat ein Zykel und diese Definition hängt nicht von den Wahlen von c und b ab.

Die Beweise für diese und die weiteren Behauptung sind nicht besonders schwierig und erfolgen durch ‘Diagrammjagd’. (oder auch ‘diagram chasing’). Zuerst, es gilt

$$i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(\partial b) = 0,$$

nachdem i injektiv ist, folgt auch, dass $\partial a = 0$. Wir zeigen nun, dass die Homologieklassse $[a]$ nur von der Homologieklassse $[c]$ abhängt.

- (1) Wenn wir einen anderen Repräsentanten für $[c]$ wählen würden, dann wäre dieser von der Form $c + \partial c'$ für ein $c' \in C_{n+1}$. Dann gibt es ein $b' \in B_{n+1}$ mit $p(b') = c'$ und aus der Kommutativität des Diagramms folgt, dass $p(b + \partial b') = p(b) + p(\partial b') = c + \partial b(p') = c + \partial c'$. Nachdem $\partial(p + \partial b') = \partial b$ sind wir beim gleichen Element in B_{n-1} gelandet wie oben.
- (2) Wenn wir ein anderes Element in B_n gewählt hätten, dann wäre dieses von der Form $b + i(a')$. Dann gilt aber $\partial(b + i(a')) = \partial b + \partial(i(a')) = \partial b + i(\partial a') = i(a + \partial a')$. Nachdem $[a] = [a + \partial a']$ ändert sich die Homologieklassse nicht.

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Behauptung. Die Abbildung

$$\partial_n: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

ist ein Homomorphismus.

Es seien also $[c_1]$ und $[c_2]$ gegeben. Für $j = 1, 2$ wählen wir dann b_j wie in der Definition von ∂_n , und wir bezeichnen mit a_j das eindeutig bestimmte Element mit $i(a_j) = \partial b_j$. Dann gilt auch $p(b_1 + b_2) = c_1 + c_2$ und $i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial b_1 + \partial b_2 = \partial(b_1 + b_2)$. Also folgt, dass $\partial[c_1 + c_2] = [a_1 + a_2] = [a_1] + [a_2] = \partial[c_1] + \partial[c_2]$. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Behauptung. Die Abbildungen

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i} H_n(B) \xrightarrow{p} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i} H_{n-1}(B) \xrightarrow{p} \dots$$

bilden eine exakte Sequenz.

Wir untersuchen die Exaktheit an den drei Gruppen $H_{n-1}(A)$, $H_n(B)$ und $H_n(C)$.

(A) Es sei zuerst $[c] \in H_n(C)$. Wir wollen zeigen, dass $i(\partial[c]) = 0$. Wir wählen b mit $p(b) = c$ und bezeichnen mit $a \in A_{n-1}$ das Element mit $i(a) = \partial b$. Dann ist $i(\partial[c]) = i([a]) = [\partial b] = 0 \in H_{n-1}(B)$.

Sei nun $[a] \in \text{Ker}(i_*)$. Dann ist $i(a) = \partial b$ für ein $b \in B_n$. Es folgt dann sofort aus den Definitionen, dass $\partial[p(b)] = [a]$.

(B) Aus $p \circ i = 0$ folgt auch $p_* \circ i_* = 0$, d.h. $\text{Im}(i_*) \subset \text{Ker}(p_*)$.

Sei umgekehrt $b \in \text{Ker}(p_*)$. Dann ist $p(b) = \partial c'$ für ein $c' \in C_{n+1}$. Nachdem p surjektiv ist, gibt es ein $b' \in B_{n+1}$ mit $p(b') = c'$. Aus der Kommutativität folgt, dass $p(\partial b') = \partial p(b') = \partial c' = p(b)$. Es folgt also, dass $p(b - \partial b') = 0$, d.h. $b - \partial b' = i(a)$ für ein $a \in A_n$. Dann folgt aber, dass $[b] = [b - \partial b'] = [i(a)] \in \text{Im}(i_*)$.

(C) Es sei $[b] \in H_n(B)$. Wir müssen zeigen, dass $\partial p_*([b]) = 0$. In der Bestimmung von $\partial p_*([b])$ wählen wir $b \in B$. Nachdem $\partial b = 0$ folgt sofort, dass $\partial p_*([b]) = 0$.

Zum Abschluss sei $[c] \in \text{Ker}(\partial: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A))$. Wir wählen $b \in B_n$ mit $p(b) = c$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $a \in A_{n-1}$ mit $i(a) = \partial b$. Nachdem $[a] = \partial[c] = 0 \in H_{n-1}(A)$ gibt es ein $a' \in A_n$ mit $\partial a' = a$. Dann folgt, dass $\partial(b - i(a')) = \partial b - \partial i(a') = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0$, d.h. $b - i(a')$ ist ein Zykel. Andererseits gilt $p(b - i(a')) = p(b) - (p \circ i)(a') = p(b)$. Wir sehen also, dass $p_*([b - i(a')]) = [c]$.

Wir haben damit die Behauptung und damit auch den Satz bewiesen. □

Wir bezeichnen im Folgenden

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i} H_n(B) \xrightarrow{p} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

als die zu

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{p} C_* \rightarrow 0$$

zugehörige lange exakte Sequenz.

Den Beweis vom folgenden Lemma überlassen wir als freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 4.7. *Es sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_* & \xrightarrow{i} & B_* & \xrightarrow{p} & C_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_* & \xrightarrow{i} & B'_* & \xrightarrow{p} & C'_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen, wobei die horizontalen Sequenzen exakt sind. Es seien $\partial_n: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ und $\partial_n: H_n(C') \rightarrow H_{n-1}(A')$ die Abbildungen aus dem Beweis von Satz 4.6. Dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B) & \xrightarrow{p_*} & H_n(C) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow a_* & & \downarrow b_* & & \downarrow c_* & & \downarrow a_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(A') & \xrightarrow{i_*} & H_n(B') & \xrightarrow{p_*} & H_n(C') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Im Hinblick auf das Lemma sagt man oft, dass die lange exakte Sequenz von 4.6 *natürlich* ist. Die lange exakte Sequenz ist nicht ‘irgendeine’ lange Sequenz, sondern sie verhält sich gut unter Abbildungen zwischen kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen.

4.4. Relative Homologiegruppen. In diesem Kapitel werden wir die relativen Homologiegruppen einführen, welche eine wichtige Rolle im Beweis von Satz 4.1 und auch im weiteren Verlauf der Vorlesung spielen werden.

Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir können dann $C_n(A)$ als Untergruppe von $C_n(X)$ betrachten und wir definieren

$$C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A).$$

Wir betrachten nun die Randabbildung

$$\begin{array}{ccc} \partial_n: C_n(X, A) & \rightarrow & C_{n-1}(X, A) \\ [c] & \mapsto & [\partial_n c]. \end{array}$$

Diese Abbildung ist wohl-definiert, nachdem für alle $c \in C_n(A) \subset C_n(X)$ der Rand ∂c in $C_{n-1}(A) \subset C_{n-1}(X)$ liegt. Nachdem $\partial_{n-1} \circ \partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X)$ die Nullabbildung ist folgt auch, dass $\partial_{n-1} \circ \partial_n: C_n(X, A) \rightarrow C_{n-2}(X, A)$ die Nullabbildung ist. Wir sehen also, dass

$$\dots C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

ein Kettenkomplex ist. Wir definieren nun die *relative Homologie von (X, A)* wie folgt:

$$H_n(X, A) := H_n(C_*(X, A)).$$

Wir betrachten nun zwei Spezialfälle:

- (1) Wenn $A = \emptyset$, dann ist $C_n(A) = 0$ und $C_n(X, A) = C_n(X)$, d.h. $H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$. Wir werden im Folgenden ohne Kommentar zwischen diesen beiden Gruppen hin- und herwechseln.

(2) Wenn $A = \{a\}$ nur aus einem Punkt a besteht, dann werden wir in den Übungen zeigen, dass es dann für jedes n einen Isomorphismus

$$(4.1) \quad \tilde{H}_n X \cong H_n(X, \{a\})$$

gibt.

Es sei nun $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren, d.h. eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subset B$, dann induziert f Abbildungen

$$\begin{aligned} f_*: H_n(X, A) &\rightarrow H_n(Y, B) \\ [\sum_{i=1}^k a_i \sigma_i] &\rightarrow [\sum_{i=1}^k a_i (\sigma_i \circ f)]. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Abbildung wohl-definiert ist.^{26 27}

Wir bezeichnen nun mit $i: C_n(A) \rightarrow C_n(X)$ die Inklusionsabbildung, und wir bezeichnen mit $p: C_n(X) \rightarrow C_n(X, A)$ die Projektionsabbildung. Es folgt dann sofort aus den Definitionen, dass

$$0 \rightarrow C_*(A) \xrightarrow{i} C_*(X) \xrightarrow{p} C_*(X, A) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen bildet.²⁸

Aus dem Beweis von Satz 4.6 erhalten wir daher folgenden Satz.

Satz 4.8. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Für jedes n betrachten wir die Abbildung*

$$\begin{aligned} \partial_n: H_n(X, A) &\rightarrow H_{n-1}(A) \\ \sum_{i=1}^k a_i [\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X] &\mapsto \sum_{i=1}^k a_i [\partial \sigma_i]. \end{aligned}$$

Dann bilden die Abbildungen

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

eine exakte Sequenz.

²⁶Ein *topologisches Paar* ist ein Paar (X, A) , wobei X ein topologischer Raum ist und $A \subset X$. Wir nennen die Kategorie \mathcal{R} mit

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{P}) &:= \text{alle topologischen Paare } (X, A), \\ \text{Mor}((X, x_0), (Y, y_0)) &:= \text{alle stetigen Abbildungen } (X, A) \rightarrow (Y, B) \end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die *Kategorie der topologischen Paare*. Dann definieren für jedes n die Abbildungen $(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ und $(f: (X, A) \rightarrow (Y, B)) \mapsto (f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B))$ einen Funktor von der Kategorie der topologischen Paare zur Kategorie der Gruppen.

²⁷ Wir sagen, dass zwei Abbildungen $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop sind, wenn es eine stetige Abbildung

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

gibt, so dass

$$F(x, 0) = f(x) \text{ und } F(x, 1) = g(x) \text{ für alle } x \in X, \text{ und } f(a) \in B \text{ für alle } a \in A \text{ und } t \in [0, 1].$$

In Übungsblatt 3 werden wir sehen, dass homotope Abbildungen die gleichen Abbildungen $f_*, g_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ induzieren.

²⁸Man muss sich dabei kurz überlegen, warum die Projektionsabbildungen eine Kettenabbildung $C_*(X) \rightarrow C_*(X, A)$ definieren.

Die Aussage von diesem Satz ähnelt nun schon der Aussage von Satz 4.1. Wir müssen nun also ‘nur’ noch den Zusammenhang zwischen den Gruppen $H_n(X, A)$ und $H_n(X/A)$ heraus arbeiten. Diese beiden Gruppen werden nicht nur ähnlich bezeichnet sondern auch ähnlich definiert, in beiden Fällen ‘ignoriert man was in A liegt’. Um diese Idee präzise zu machen, müssen wir allerdings im nächsten Kapitel noch einiges arbeiten.

Bemerkung. (1) Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine *nichtleere* Teilmenge. Dann gibt es auch eine lange exakte Sequenz²⁹

$$(4.2) \quad \dots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

(2) Die Aussage von Satz 4.8 kann man noch etwas verallgemeinern. Es sei dazu X ein topologischer Raum und es seien $A \subset B \subset X$ Teilmengen. Für jedes n betrachten wir dann die Abbildung

$$\begin{aligned} \partial_n: H_n(X, B) &\rightarrow H_{n-1}(B, A) \\ \sum_{i=1}^k a_i [\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X] &\mapsto \sum_{i=1}^k a_i [\partial \sigma_i]. \end{aligned}$$

In Übungsblatt 3 werden wir dann zeigen, dass

$$\dots \rightarrow H_n(B, A) \xrightarrow{i_*} H_n(X, A) \xrightarrow{p_*} H_n(X, B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(B, A) \rightarrow \dots$$

eine exakte Sequenz bildet. Diese exakte Sequenz wird die *exakte Sequenz des Tripels* (X, B, A) genannt.

4.5. Der Ausschneidungssatz. Um einen Zusammenhang zwischen den Gruppen $H_n(X, A)$ und $H_n(X/A)$ herzustellen benötigen wir den sogenannten Ausschneidungssatz.

Satz 4.9. (Ausschneidungssatz) *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Z \subset A \subset X$ Teilmengen, wobei der Abschluss von Z im Inneren von A enthalten ist. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ für jedes n einen Isomorphismus*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A).$$

Der Satz besagt also insbesondere, dass wenn wir bei (X, A) im Inneren von A eine geschlossene Teilmenge Z ausschneiden, dann ändert dies nichts an der relativen Homologie.

Bevor wir uns dem Beweis vom Ausschneidungssatz zu wenden, zeigen wir zuerst, dass wir nun folgenden Satz beweisen können.

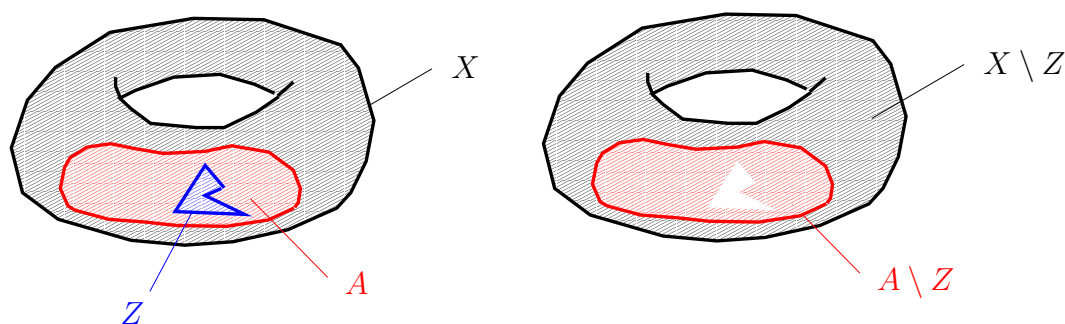
²⁹Dies zeigt man wie folgt: für einen topologischen Raum X bezeichnen wir mit $\tilde{C}_*(X)$ folgenden Kettenkomplex:

$$\rightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

die Homologie davon ist dann gerade die reduzierte Homologie von X . Für $A \subset X$ nichtleer ist dann

$$0 \rightarrow \tilde{C}_*(A) \rightarrow \tilde{C}_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und erhalten aus Satz 4.6 die gewünschte lange exakte Sequenz.



$$H_n(X, A) \cong H_n(X \setminus Z, A \setminus Z)$$

ABBILDUNG 11. Skizze zum Ausschneidungssatz.

Satz 4.10. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge mit folgender Eigenschaft:*

- (*) *Es gibt eine offene Umgebung U von A in X , so dass A ein Deformationsretrakt von U ist.*

Dann induziert die Projektionsabbildung $p: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ einen Isomorphismus

$$H_n(X, A) \cong H_n(X/A, A/A).$$

Dieser Satz, zusammen mit der langen exakten Sequenz in (4.2) und der Beobachtung in (4.1), dass $H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$, ergibt uns nun einen Beweis für Satz 4.1.

Beweis. Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm

$$(4.3) \quad \begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, U) & \longleftarrow & H_n(X \setminus A, U \setminus A) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, U/A) & \longleftarrow & H_n(X/A \setminus A/A, U/A \setminus A/A), \end{array}$$

hierbei sind die horizontalen Abbildungen, welche von Inklusionen von Paaren induziert sind. Links ist also die Abbildung, welche uns interessiert. Wir haben dann von links kommend zuerst ‘ A auf U vergrößert’ und dann ‘ A ausgeschnitten’. Die rechte vertikale Abbildung ist ein Isomorphismus weil

$$X \setminus A = X/A \setminus A/A \text{ und } U \setminus A = U/A \setminus A/A,$$

d.h. p ist die ein Homöomorphismus im Komplement von A .

Wir wollen nun zeigen, dass auch die linke vertikale Abbildung ein Isomorphismus ist. Dies folgt nun aus der Kommutativität von (4.3) und aus der folgenden Behauptung:

Behauptung. Alle horizontalen Abbildungen sind Isomorphismen.

Es folgt aus dem Ausschneidungssatz, dass die beiden horizontalen Abbildungen auf der rechten Seite Isomorphismen sind. Um zu zeigen, dass die horizontale Abbildung links oben ein Isomorphismus ist betrachten wir folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(U) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, U) & \longrightarrow & H_{n-1}(U) & \longrightarrow & H_{n-1}(X), \end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen durch die Inklusionen induziert sind, und die horizontalen Sequenzen die langen exakten Sequenzen der Paare (X, A) und (X, U) sind. Die zweite und die fünfte vertikale Abbildung sind offensichtlich Isomorphismen. Die erste und die vierte Abbildung sind Isomorphismen, weil A ein Deformationsretrakt von U ist.³⁰ Es folgt jetzt aus dem Fünfer-Lemma³¹, dass auch die mittlere vertikale Abbildung ein Isomorphismus ist.

Ganz genauso zeigt man nun auch, dass die horizontale Abbildung links unten ein Isomorphismus³² ist. Wir haben damit die Behauptung bewiesen. \square

4.6. Der Beweis vom Ausschneidungssatz: Die Idee. Wir sind immer noch nicht mit dem Beweis von Satz 4.1 fertig, wir müssen noch den Ausschneidungssatz beweisen. In diesem Kapitel wollen wir kurz die Idee für den Beweis vom Ausschneidungssatz erarbeiten. Wir werden den Beweis dann im darauf folgenden Kapitel ausarbeiten.

Es sei also X ein topologischer Raum und es seien $Z \subset A \subset X$ Teilmengen, wobei der Abschluss von Z im Inneren von A enthalten ist. Wir wollen dann zeigen, dass die Inklusion $(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A)$$

induziert. Versuchen wir mal zu beweisen, dass die Abbildung $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A)$ surjektiv ist. Wir nehmen also ein Element in $H_n(X, A)$ und wählen einen Repräsentanten $\sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$ wobei $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$, $i = 1, \dots, r$ singuläre n -Simplizes in X sind.

Eine erste einfache Beobachtung ist, dass wenn die singulären n -Simplizes $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ in $X \setminus Z$ liegen sollten, dann liegt natürlich $\sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$ im Bild von $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A)$.

³⁰In den Übungen werden wir folgende leichte Aussage beweisen: Es sei $B \subset Y$ ein Deformationsretrakt, dann induziert die Inklusion $i: B \rightarrow Y$ für jedes n einen Isomorphismus $i_*: H_n(B) \rightarrow H_n(Y)$

³¹Es sei

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, wobei die horizontalen Sequenzen exakt sind. Das ‘Fünfer-Lemma’ besagt, dass wenn a injektiv ist, wenn b und d Isomorphismen sind, und wenn e surjektiv ist, dann ist c ein Isomorphismus. Dieses Lemma wird in Übungsblatt 3 bewiesen.

³²Hierbei verwenden wir implizit, dass A/A ein Deformationsretrakt von U/A ist. Warum ist dies der Fall?

Eine zweite, etwas genauere Beobachtung ist, dass die singulären n -Simplizes, welche ganz in A liegen, keine Rolle in $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ spielen. Fassen wir diese beiden Beobachtungen zusammen, dann erhalten wir folgendes Lemma:

Lemma 4.11. *Es sei ein Zykel $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$ in X gegeben, so dass jedes σ_i ganz in A oder ganz in $X \setminus Z$ liegt. Dann liegt $[c]$ im Bild von $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A)$.*

Nicht jeder Zykel in $C_n(X)$ ist von der Form wie in dem Lemma gefordert, aber, wenn wir jeden singulären Simplex in einer singulären Kette $\sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$ geschickt unterteilen, dann man erreichen, dass jeder singuläre Simplex ganz in A oder ganz in $X \setminus Z$ liegt.

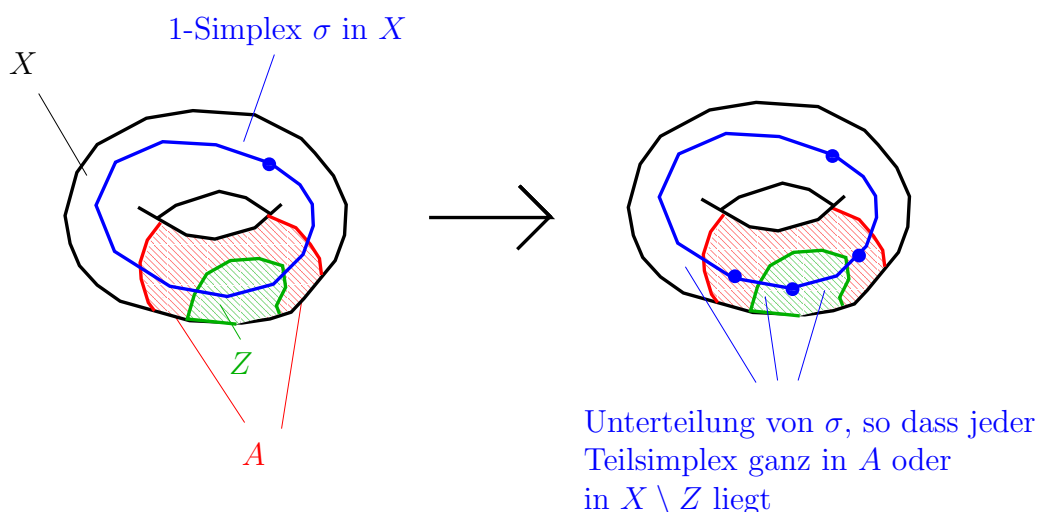


ABBILDUNG 12. Idee vom Beweis vom Ausschneidungssatz.

4.7. Der Beweis vom Ausschneidungssatz: Die Ausführung. In diesem Kapitel werden wir nun die vage Idee vom letzten Kapitel in einen sauberen Beweis vom Ausschneidungssatz umarbeiten.

Es sei also wiederum X ein topologischer Raum. Eine *Überdeckung* von X ist eine Familie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen von X , so dass

$$X = \bigcup_{i \in I} \text{int}(U_i).$$

Wir betrachten nun folgende Untergruppe von $C_n(X)$:

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) := \left\{ \sum_{j=1}^k a_j \sigma_j \mid \text{für jedes } j \text{ gibt es ein } U_i \in \mathcal{U}, \text{ so dass } \text{Im}(\sigma_j: \Delta^n \rightarrow X) \text{ in } U_i \text{ liegt} \right\}.$$

Es ist nun einfach zu sehen, dass die Einschränkung der Randabbildung $\partial_n: C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X)$ auf $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ eine Abbildung $\partial_n: C_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ definiert. Nachdem diese Abbildung die Einschränkung der üblichen Randabbildung ist, folgt insbesondere, dass die Verknüpfung $\partial_n \circ \partial_{n+1}: C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ die Nullabbildung ist. Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} H_n^{\mathcal{U}}(X) &:= H_n((C_*^{\mathcal{U}}(X), \partial_*)) \\ &= \text{Ker}\{\partial_n: C_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)\} / \text{Im}\{\partial_{n+1}: C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} C_n^{\mathcal{U}}(X)\}. \end{aligned}$$

Die Homologiegruppen $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ sind also definiert durch singuläre Ketten, welche ‘klein’ sind, in dem Sinne, dass das Bild von jedem singulären Simplex in einem U_i liegt.

Der folgende Satz besagt nun, dass wir die Homologie eines topologischen Raums auch durch solche ‘kleine’ singuläre Ketten bestimmen können. Dies ist die Grundlage für die ‘divide et impera’ Verfahren, welche die Berechnung von Homologiegruppen möglich machen.

Satz 4.12. *Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X . Dann ist die Inklusionsabbildung*

$$C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$$

eine Kettenhomotopieäquivalenz, insbesondere induziert diese Abbildung für jedes n einen Isomorphismus

$$H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X).$$

Die Idee vom Beweis von Satz 4.12 ist wie im schon vorherigen Kapitel beschrieben: Wir wollen jeden singulären Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ systematisch so in kleinere Simplizes $\Delta_1^n, \dots, \Delta_N^n$ zerlegen, dass das Bild von jedem singulären Simplex Δ_j in einem $U_i \in \mathcal{U}$ liegt (siehe Abbildung 13 für den Fall $n = 2$.)

Um diese Idee auszuführen müssen wir allerdings noch einige Begriffe einführen.

- (1) Wir bezeichnen mit $B_n := (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}) \in \Delta^n$ den Schwerpunkt, oder das Baryzentrum vom Standard n -Simplex Δ^n .
- (2) Für einen singulären (l) -Simplex $\mu: \Delta^l \rightarrow \Delta^k$ betrachten wir den singulären $(l+1)$ -Simplex $K(\mu)$, welcher wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} K(\mu): \quad \Delta^{l+1} &\rightarrow \Delta^k \\ (t_0, \dots, t_{l+1}) &\mapsto \mu(t_0, \dots, t_l) \cdot (1 - t_{l+1}) + B_k \cdot t_{l+1}. \end{aligned}$$

Der k -Simplex $K(\mu)$ entspricht also dem ‘Kegel’, welcher von dem singulären l -Simplex μ und dem Punkt B_k gebildet wird. Wir setzen dann K linear fort als Abbildung $C_l(\Delta^k) \rightarrow C_{l+1}(\Delta^k)$. Wir bezeichnen dies Fortsetzung ebenfalls mit K und nennen K die *Kegelabbildung*.

- (3) Wir definieren nun induktiv eine Abbildung $u_n: C_n(\Delta^k) \rightarrow C_n(\Delta^k)$ wie folgt:
 - (a) $u_0: C_0(\Delta^k) \rightarrow C_0(\Delta^k)$ ist die Identität.

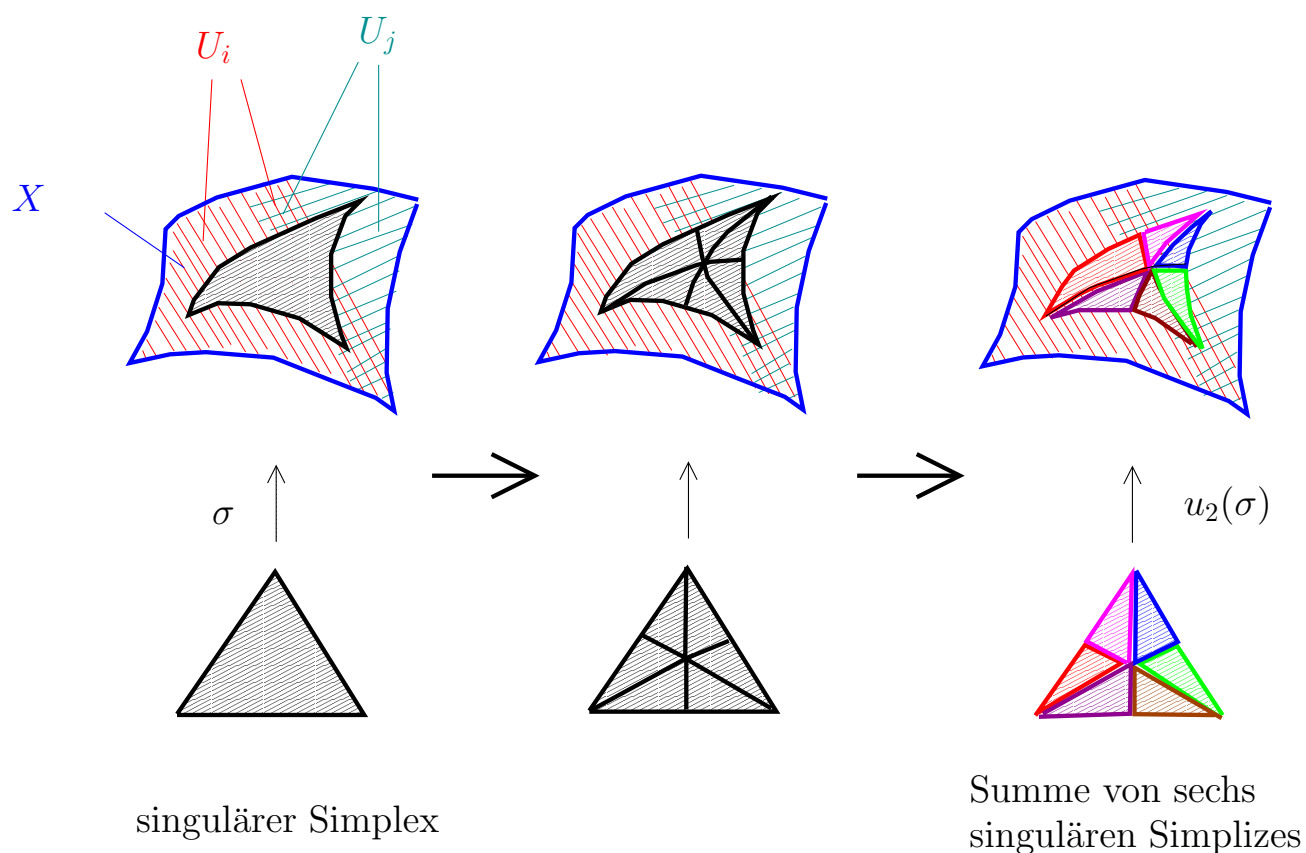


ABBILDUNG 13. Baryzentrische Zerlegung eines singulären Simplex.

(b) Wenn $u_{n-1} : C_{n-1}(\Delta^k) \rightarrow C_{n-1}(\Delta^k)$ schon gegeben ist, dann definieren wir $u_n : C_n(\Delta^k) \rightarrow C_n(\Delta^k)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 C_n(\Delta^k) &\rightarrow C_n(\Delta^k) \\
 \sum_{l=1}^r a_l \sigma_l &\mapsto (-1)^n \sum_{l=1}^r \cdot K \left(\underbrace{\partial c}_{\in C_{n-1}(\Delta^k)} \right).
 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen dann u_n als *Unterteilungsabbildung*.

- (4) Wir wollen nun die Unterteilungsabbildung auch für singuläre n -Simplexes in einem beliebigen topologische Raum definieren. Wir machen dazu zuerst die Beobachtung, dass ein singulärer n -Simplex $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ auch gegeben ist durch $\sigma \circ \text{id}_{\Delta^n} : \Delta^n \xrightarrow{\text{id}}$

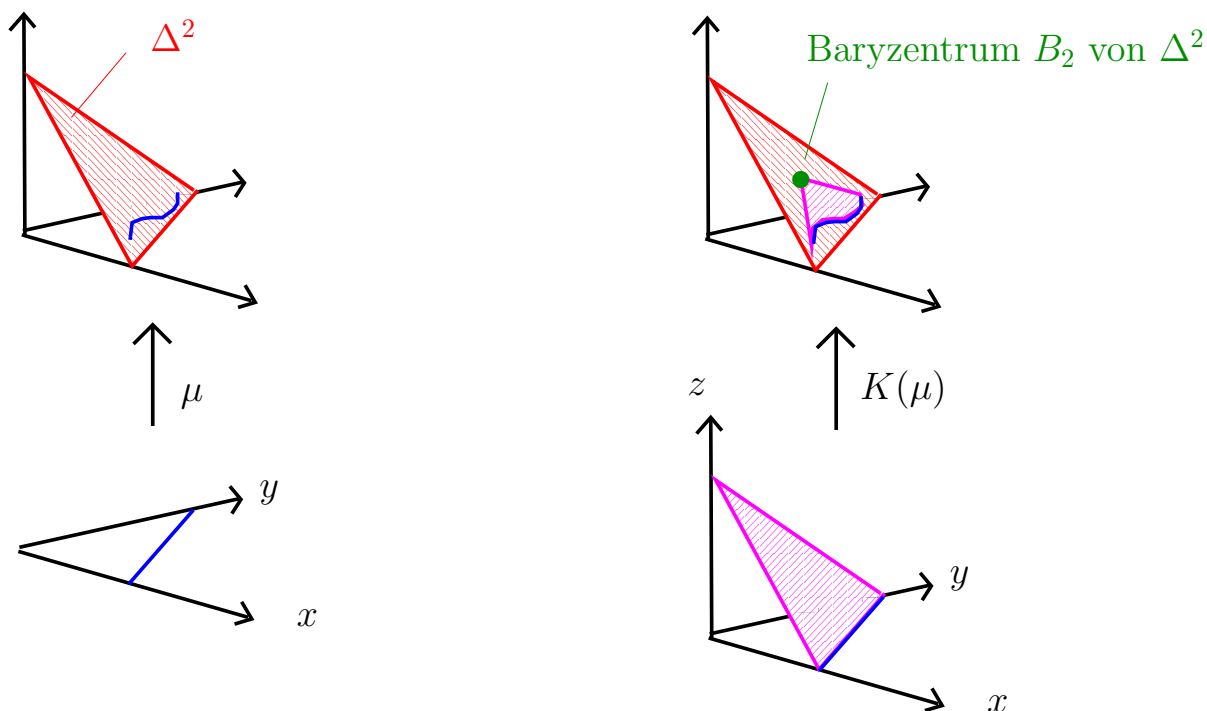


ABBILDUNG 14. Illustration der Kegelabbildung.

$\Delta^n \rightarrow X$. Anders ausgedrückt, $\sigma = \sigma_*(\text{id}_{\Delta^n})$. Wir betrachten daher nun

$$\begin{aligned} u_n: C_n(X) &\rightarrow C_n(X) \\ \sum_{l=1}^r a_l \cdot (\sigma_l: \Delta^n \rightarrow X) &\mapsto \underbrace{\sum_{l=1}^r a_l \cdot (\sigma_l)_*(\underbrace{u_n(\text{id}_{\Delta^n})}_{\in C_n(\Delta^n)})}_{\in C_n(X)}. \end{aligned}$$

Die Abbildung u_2 wird in Abbildung 15 für den Fall $n = 1$ und in Abbildung 13 für den Fall $n = 2$ illustriert, allerdings ohne auf die Orientierungen und Vorzeichen einzugehen.

Etwas vereinfacht sind die Unterteilungsabbildungen also wie folgt gegeben:

- (1) Die singulären 0-Simplizes bleiben unverändert.
- (2) Die singulären 1-Simplizes werden halbiert in zwei 1-Simplizes mit ‘entgegengesetzter Orientierung’ und entgegengesetztem Vorzeichen.
- (3) Der Rand des Standard 2-Simplizes Δ^2 besteht aus drei 1-Simplizes, diese werden in jeweils zwei 1-Simplizes unterteilt, und wir setzen diese Unterteilung vom Rand von Δ^2 durch ‘Kegelbildung’ auf eine Unterteilung von Δ^2 in sechs 2-Simplizes fort.

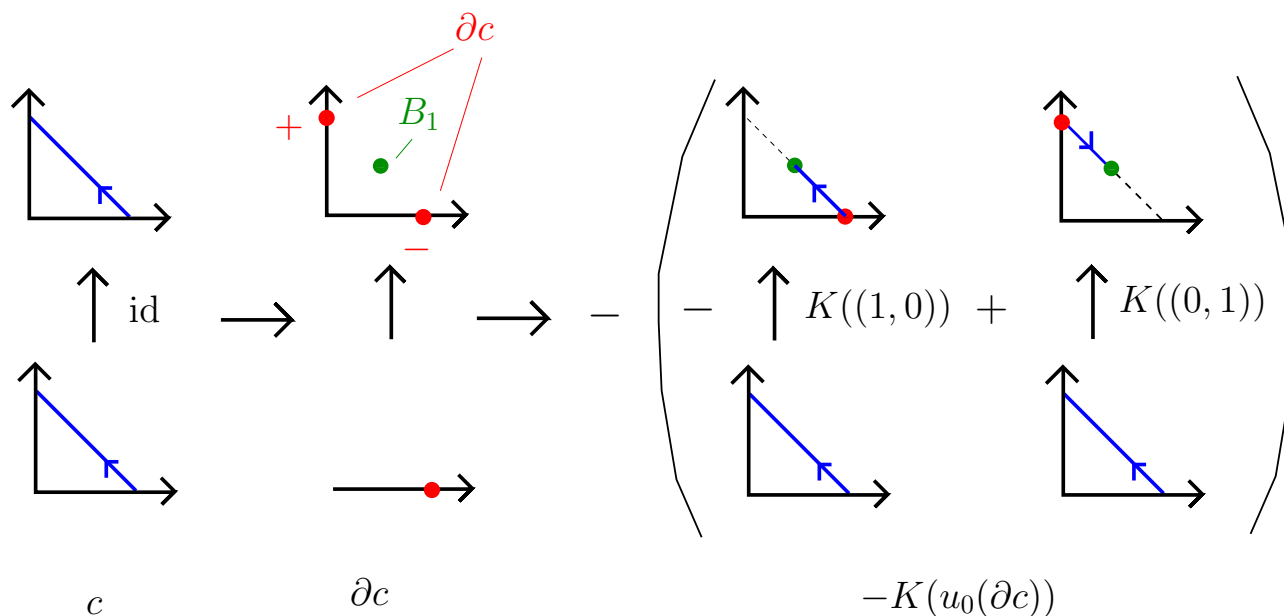


ABBILDUNG 15. Illustration der Unterteilungsabbildung.

- (4) Induktiv gibt uns eine Zerlegung des Randes vom Standard n -Simplex Δ^n in kleinere $(n - 1)$ -Simplizes durch Kegelbildung auch eine Unterteilung von Δ^n in kleinere n -Simplizes.

Wir erhalten jetzt folgendes Lemma.

Lemma 4.13. *Es sei X ein topologischer Raum, dann bilden die Abbildungen*

$$u_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$$

eine Kettenabbildung, welche kettenhomotop zur Identität ist.

Beweis. Die Tatsache, dass die Abbildungen $u_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ eine Kettenabbildung bilden zeigt man durch nachrechnen. Nachdem dies wenig erhellend ist, verweisen wir auf den Beweis von Lemma 31.1 in Munkres: Elements of Algebraic Topology. Die Aussage folgt aus der geschickten induktiven Definition der Unterteilungsabbildungen und wird auch in Abbildung (13) illustriert.

Wir wollen nun noch zeigen, dass die Kettenabbildung $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kettenhomotop zur Identität ist. Wir müssen also Abbildungen $P_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ finden, so dass für jedes n gilt:

$$\partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = u_n - \text{id}.$$

Wir betrachten dazu wiederum zuerst den Fall $X = \Delta^k$. Wir verwenden dabei die Konvention, dass $C_{-1}(X) = 0$, und dass $P_{-1} : C_{-1}(\Delta^k) \rightarrow C_0(\Delta^k)$ die Nullabbildung ist. Nehmen wir an, wir hätten schon Abbildungen P_{-1}, \dots, P_{n-1} mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. Es sei nun $\sigma : \Delta^n \rightarrow \Delta^k$ ein singulärer n -Simplex. Wir wollen nun einen singuläre

$(n+1)$ -Kette E_σ mit $\partial E_\sigma = (u_n - \text{id} - P_{n-1} \circ \partial)(\sigma)$ finden, um dann später P_n durch $\sigma \mapsto P_n(\sigma) := E_\sigma$ zu definieren.

(1) Wenn $n = 0$, dann folgt aus $u_0 = \text{id}$, dass

$$(P_{n-1}\partial_n - u_n - \text{id})(\sigma) = (u_0 - \text{id})(\sigma) = 0 \in C_0(\Delta^k)$$

und wir setzen $E_\sigma := 0 \in C_1(\Delta^k)$.

(2) Wenn $n > 0$, dann ist $(P_{n-1}\partial_n - u_n - \text{id})(\sigma) \in C_n(\Delta^k)$ ein Zykel. In der Tat, denn

$$\begin{aligned} \partial(P_{n-1}\partial_n - u_n - \text{id})(\sigma) &= \partial P_{n-1}\partial\sigma - u_{n-1}\partial\sigma - \partial\sigma = \\ &= \underbrace{(\partial P_{n-1} - u_{n-1} - \sigma)}_{=P_{n-2}\partial}(\partial\sigma) = P_{n-2}\partial\partial\sigma = 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die Unterteilungsabbildungen Kettenabbildungen sind. Aus $H_n(\Delta^k) = 0$ folgt dann, dass es ein $E_\sigma \in C_{n+1}(\Delta^k)$ mit $\partial(E_\sigma) = (P_{n-1}\partial_n - u_{n-1} - \text{id})(\sigma)$ gibt.

Wir bezeichnen jetzt mit $P_n: C_n(\Delta^k) \rightarrow C_{n+1}(\Delta^k)$ die Abbildung, welche jedem singulären n -Simplex σ das Element $E_\sigma \in C_{n+1}(\Delta^k)$ zuordnet. Es folgt dann aus der Wahl der E_σ , dass

$$\partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = u_n - \text{id}$$

als Abbildungen $C_n(\Delta^k) \rightarrow C_n(\Delta^k)$.

Wir verwenden nun den gleichen Trick wie zuvor, um aus diesen Kettenhomotopien $P_n: C_n(\Delta^k) \rightarrow C_{n+1}(\Delta^k)$ auch Kettenhomotopien $P_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ zu konstruieren. Genauer gesagt, wir betrachten nun

$$\begin{aligned} P_n: C_n(X) &\rightarrow C_{n+1}(X) \\ \sum_{l=1}^r a_l \cdot (\sigma_l: \Delta^n \rightarrow X) &\mapsto \sum_{l=1}^r a_l \cdot (\sigma_l)_*(P_n(\text{id}_{\Delta^n})). \end{aligned}$$

Man sieht nun leicht, dass diese Abbildungen eine Kettenhomotopie von den Unterteilungsabbildungen zur Identität definiert. \square

Wir bezeichnen nun mit u_n^m die m -fache Verknüpfung von $u_n: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$. In Übungsblatt 4 werden wir sehen, dass die Kettenabbildungen (u_n^m) für $m \geq 1$ ebenfalls kettenhomotop zur Identität sind. ³³

Wenn $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ ein singulärer n -Simplex ist, dann sind die Bilder der singulären n -Simplexes, welche in $u_n(\sigma)$ auftauchen offensichtlich ‘kleiner’, und durch mehrfaches anwenden von der Unterteilungsabbildung kann man diese Bilder ‘beliebig klein’ machen. Eine präzise Aussage davon, was ‘beliebig klein’ heißen soll, ist hierbei in folgendem Lemma gegeben:

³³In Übungsblatt 4 zeigen wir folgende Aussage: Wenn $f, g: C_* \rightarrow D_*$ kettenhomotope Abbildungen und $x, y: D_* \rightarrow X_*$ kettenhomotope Abbildungen sind, dann sind auch $x \circ f$ und $y \circ g$ kettenhomotope Abbildungen sind. Wir wenden diese Aussage nun induktiv auf den Spezialfall $f = u_n$, $x = u_n^k$ sowie $g = \text{id}$, $y = \text{id}$ an.

Lemma 4.14. *Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X . Zu jedem singulären n -Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ gibt es ein m , so dass für*

$$u_n^m(\sigma) = \sum_{j=1}^N a_j \sigma_j,$$

gilt, dass das Bild von jedem σ_j im Inneren einer der Mengen U_i liegt, d.h. so dass $u_n^m(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Beweis. Das Lemma wird explizit als Theorem 31.3 von Munkres: Elements in Algebraic Topology bewiesen oder auch implizit in Hatcher: Algebraic Topology Seite 119-123 gezeigt. Wir wollen nur kurz die zwei Hauptschritte im Beweis von Lemma 4.14 skizzieren:

- (1) Für eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $d(A)$ den *Durchmesser von A* , d.h. die kleinste ³⁴ reelle Zahl d , so dass es ein $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass A im d -Ball um x enthalten ist. Der Durchmesser ist also der kleinste Radius einer Kugel, in welche A reinpasst. Man kann nun leicht zeigen, dass wenn wir den Standardsimplex Δ^n baryzentrisch m -fach unterteilen, dann gilt für jeden Teilsimplex Δ_i^n , dass

$$d(\Delta_i^n) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^m \cdot d(\Delta^n).$$

Der Durchmesser der Teilsimplizes schrumpft also gegen Null.

- (2) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $\{V_i\}_{i \in V}$ eine Überdeckung von K . In Übungsblatt 4 werden wir sehen, dass es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass es für jedes $x \in K$ ein $i \in I$ gibt, so dass $B_\lambda(x) \subset V_i$.

Es genügt offensichtlich die Aussage von Lemma 4.14 für einen singulären n -Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ zu beweisen. Wir wenden dazu (2) auf $K = \Delta^n$ und $V_i := \sigma^{-1}(U_i), i \in I$ an und erhalten ein $\lambda > 0$. Aus (1) folgt nun, dass es ein m gibt, so dass der Durchmesser eines Simplizes in der m -baryzentrischen Unterteilung von Δ^n einen Durchmesser $< \lambda$ besitzt. Dieses m hat dann die gewünschte Eigenschaft. \square

Wir können nun Satz 4.12 beweisen.

Beweis von Satz 4.12. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X . Wir zeigen nun nur die etwas einfachere Aussage, dass die Inklusionsabbildung $C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$ für jedes n einen Isomorphismus

$$i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$$

induziert. ³⁵

³⁴Warum gibt es eine *kleinste* solche Zahl?

³⁵Der Beweis der Aussage, dass die Inklusionsabbildung

$$i: C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$$

Wir zeigen zuerst, dass $i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$ surjektiv ist. Es sei dazu $a \in H_n(X)$ gegeben. Wir wählen einen Zykel $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i \in C_n(X)$, welcher $a \in H_n(X)$ repräsentiert. Es folgt aus Lemma 4.14, angewandt auf die singulären n -Simplizes $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $u_n^m(c) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Es folgt aus Lemma 4.13, dass es eine Kettenhomotopie $P_k: C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(X)$, $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\partial P_k + P_{k-1} \partial_k = u_k^m - \text{id}.$$

Wir erhalten also, dass

$$u_n^m(c) = c + P_{n-1} \partial_n(c) + \partial P_n(c) = c + \partial P_n(c),$$

d.h. $i_*([u_n^m(c)]) = [u_n^m(c)] = [c] = a$. Wir haben also gezeigt, dass $i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$ surjektiv ist.

Ganz ähnlich zeigt man nun auch, dass $i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$ injektiv ist. In der Tat, es sei $[c] \in H_n^{\mathcal{U}}(X)$ ein Element, so dass $[c] = 0 \in H_n(X)$. Dann gibt es ein $e \in C_{n+1}(X)$ mit $\partial e = c$. Aus Lemma 4.14 folgt dann wiederum, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $u_{n+1}^m(e) \in C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Wir wählen dann wieder eine Kettenhomotopie P_k zwischen den u_k^m und id . Dann gilt, dass

$$c = \partial e = \partial(u_{n+1}^m(e) - \partial P_{n+1}(e) - P_n \partial e) = u_n^m \partial e - \partial P_n \partial e.$$

(Hier haben wir verwendet, dass die Unterteilungsabbildungen Kettenabbildungen sind.) Hierbei ist

$$(\partial P_n)(\partial e) = (P_{n-1} \partial - \text{id} - u_{n-1}^m)(\partial e) = -\partial e - u_n^m \partial e = \partial(-e - u_{n+1}^m e).$$

Wir sehen also, dass c in der Tat der Rand eines $(n+1)$ -Simplizes in $C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ ist, d.h. $[c] = 0 \in H_n^{\mathcal{U}}(X)$. Wir haben also bewiesen, dass $i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$ injektiv ist. \square

Mithilfe von Satz 4.12 können wir nun den Ausschneidungssatz beweisen.

Beweis vom Ausschneidungssatz. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Z \subset A \subset X$ Teilmengen, wobei der Abschluss von Z im Inneren von A enthalten ist. Wir setzen $B := X \setminus Z$. Es ist also $A \cap B = A \setminus Z$. Dann ist $\mathcal{U} := \{A, B\}$ eine Überdeckung von X , d.h. X ist die Vereinigung von $\text{int}(A)$ und $\text{int}(B)$.

Wir betrachten nun folgendes kommutative Diagramm von Kettenabbildungen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \longrightarrow & C_n^{\{A,B\}}(X) & \longrightarrow & C_n^{\{A,B\}}(X)/C_n(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \longrightarrow & C_n(X) & \longrightarrow & C_n(X, A) \longrightarrow 0. \end{array}$$

eine Kettenhomotopieäquivalenz ist wird in Übungsblatt 4 teilweise ausgeführt. Mithilfe der Unterteilungsabbildungen u_n^m , angewandt auf singuläre n -Simplizes anwendet, konstruiert man induktiv für $n = 0, 1, \dots$ geeignete Abbildungen $f_n: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Hier kann das m von Simplex zu Simplex variieren. Das schwierige dabei ist, die Abbildungen induktiv so zu wählen, dass man eine Kettenabbildung erhält.

Die horizontalen Sequenzen sind zudem kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen. Wir machen zuerst die Beobachtung, dass die Inklusionsabbildungen

$$C_n(B, A \cap B) \rightarrow C_n^{\{A, B\}}(X)/C_n(A)$$

Kettenabbildungen sind und zudem offensichtlich³⁶ Isomorphismen sind. Wir können also im obigen Diagramm den Kettenkomplex $C_n^{\{A, B\}}(X)/C_n(A)$ durch $C_n(B, A \cap B)$ ersetzen.

Wir betrachten nun die langen exakten Sequenz von Homologiegruppen, welche wir den obigen kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen zuordnen können. Aus Lemma 4.7 erhalten wir dann folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n^{\{A, B\}}(X) & \longrightarrow & H_n(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Aus Satz 4.12 folgt, dass die zweite und fünfte vertikale Abbildung ein Isomorphismus ist. Nachdem die erste und vierte Abbildung offensichtlich ein Isomorphismus ist, folgt nun aus dem Fünfer-Lemma, dass die mittlere Abbildung ebenfalls ein Isomorphismus ist. \square

Zum Abschluß formulieren wir noch eine Variation vom Ausschneidungssatz.

Satz 4.15. *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Z \subset A \subset X$ Teilmengen. Wir nehmen an, dass es eine Teilmenge $U \subset Z$ gibt, so dass der Abschluss von U im Inneren von A enthalten ist, und so dass folgende Aussagen gelten:*

- (1) $X \setminus Z$ ist ein Deformationsretrakt von $X \setminus U$
- (2) $A \setminus Z$ ist ein Deformationsretrakt von $A \setminus U$.

Dann induziert die Inklusion $(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ für jedes n einen Isomorphismus

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A).$$

Beweis. Es folgt aus Satz 4.9, dass die Inklusion $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ für jedes n einen Isomorphismus

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$$

induziert. Es genügt nun also zu zeigen, dass die Inklusion $(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X \setminus U, A \setminus U)$ auch für jedes n einen Isomorphismus

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X \setminus U, A \setminus U)$$

induziert.

³⁶Warum?

Wir betrachten dazu folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_n(A \setminus Z) & \longrightarrow & H_n(X \setminus Z) & \longrightarrow & H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) & \longrightarrow & H_{n-1}(A \setminus Z) & \longrightarrow & H_{n-1}(X \setminus Z) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_n(A \setminus Z) & \longrightarrow & H_n(X \setminus U) & \longrightarrow & H_n(X \setminus U, A \setminus Z) & \longrightarrow & H_{n-1}(A \setminus Z) & \longrightarrow & H_{n-1}(X \setminus U) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_n(A \setminus U) & \longrightarrow & H_n(X \setminus U) & \longrightarrow & H_n(X \setminus U, A \setminus U) & \longrightarrow & H_{n-1}(A \setminus U) & \longrightarrow & H_{n-1}(X \setminus U)
\end{array}$$

Hierbei sind die horizontalen Sequenzen die langen exakten Sequenzen von den jeweiligen Paaren von topologischen Räumen und die vertikalen Abbildungen werden jeweils durch die Inklusionen induziert. Im oberen Falle sind die erste und die vierte vertikalen Abbildungen die Identität und die zweite und fünfte vertikale Abbildung ist ein Isomorphismus, weil $X \setminus Z$ ein Deformationsretrakt von $X \setminus U$ ist. Es folgt jetzt aus dem Fünfer-Lemma, dass die obere dritte vertikale Abbildung auch ein Isomorphismus ist.

Unter Verwendung der Voraussetzung, dass $A \setminus Z$ ein Deformationsretrakt von $A \setminus U$ ist zeigt man nun auch ganz analog, dass die untere dritte vertikale Abbildung ein Isomorphismus ist. \square

Die Voraussetzungen klingen dabei umständlich, aber in ‘der Praxis’ sind diese in den meisten ‘vernünftigen’ Fällen erfüllt. Ein typisches Beispiel ist dabei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
X &= S^n, \\
A &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}, \\
Z &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < 0\}, \\
U &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < -\frac{1}{2}\}.
\end{aligned}$$

Dann kann man leicht überprüfen, dass U die gewünschte Eigenschaft besitzt, und es folgt dann, dass

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A)$$

ein Isomorphismus ist.

4.8. Explizite Erzeuger von Homologiegruppen. Wir haben nun also den Ausschneidungssatz bewiesen, damit auch Satz 4.1, und daher insbesondere auch den Beweis geliefert, dass

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } k = n, \text{ und} \\ 0, & \text{wenn } k \neq n. \end{cases}$$

Wir haben also die Homologiegruppen der Sphären bestimmt. In diesem Kapitel wollen wir nun eine explizite singuläre Kette bestimmen, welche ein Erzeuger von $\tilde{H}_n(S^n)$ ist.

Wir beweisen dazu als erstes ein Hilfs-Lemma. In dem Lemma bezeichnen wir mit $\partial\Delta^n$ die Vereinigung aller Seitensimplizes von Δ^n , d.h.

$$\partial\Delta^n := \bigcup_{i=0}^n \{(t_0, \dots, t_n) \in \Lambda^n \mid t_i = 0\},$$

Wir können nun also folgendes Lemma formulieren.

Lemma 4.16. *Die Identitätsabbildung $\text{id}: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ repräsentiert einen Erzeuger³⁷ von $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.*

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach n . Die Aussage ist offensichtlich richtig für $n = 0$ (siehe die Bemerkung nach Lemma 2.3). Nehmen wir nun an, wir haben die Aussage schon für $n - 1$ bewiesen.

Wir wollen nun also einen Zusammenhang zwischen den Gruppen

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \text{ und } H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

herstellen. Wir betrachten dazu

$$\Lambda := \bigcup_{i=1}^n \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n \mid t_i = 0\},$$

d.h. Λ ist die Vereinigung von allen Seitensimplizes von Δ^n bis auf den ‘untersten’ Seitenkomplex. Wir fassen zudem im Folgenden auch \mathbb{R}^n als Teilmenge von \mathbb{R}^{n+1} auf und damit auch Δ^{n-1} als Teilmenge von Δ^n .

Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Wir betrachten die Abbildungen

$$(4.4) \quad H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{i_*} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}).$$

Hierbei ist die linke Abbildung die Randabbildung in der langen exakten Sequenz des Tripels³⁸ $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ und die rechte Abbildung ist durch die Inklusion induziert. Dann gilt:

- (1) Beide Abbildungen sind Isomorphismen.
- (2) Es ist $\partial([\text{id}_{\Delta^n}]) = i_*([\text{id}_{\Delta^{n-1}}])$.

Wir betrachten zuerst die linke Abbildung. Es folgt aus der exakten Sequenz des Tripels $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$, siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 3, dass folgende Sequenz exakt ist:

$$H_n(\Delta^n, \Lambda) \xrightarrow{p} H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \xrightarrow{i_*} H_n(\Delta^n, \Lambda),$$

hierbei folgt leicht aus der Definition der Randabbildung, dass $\partial([\text{id}_{\Delta^n}]) = [\text{id}_{\Delta^{n-1}}]$. In der exakten Sequenz sind die relativen Homologiegruppen von (Δ^n, Λ) trivial, nachdem Λ ein

³⁷Es ist offensichtlich, dass id ein Zykel in $C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ ist. Zudem ist $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$. In der Tat, betrachten wir beispielsweise die lange exakte Sequenz des Paares $\Delta^n, \partial\Delta^n$:

$$\tilde{H}_n(\Delta^n) \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_n(\partial\Delta^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\Delta^n) \rightarrow$$

Dann ist $\tilde{H}_n(\Delta^n) = 0$ weil Δ^n homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, und es ist $\tilde{H}_n(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$, weil $\partial\Delta^n$ homöomorph zu S^n ist.

³⁸Siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 3 für die Definition der langen exakten Sequenz eines Triples $Z \subset A \subset X$.

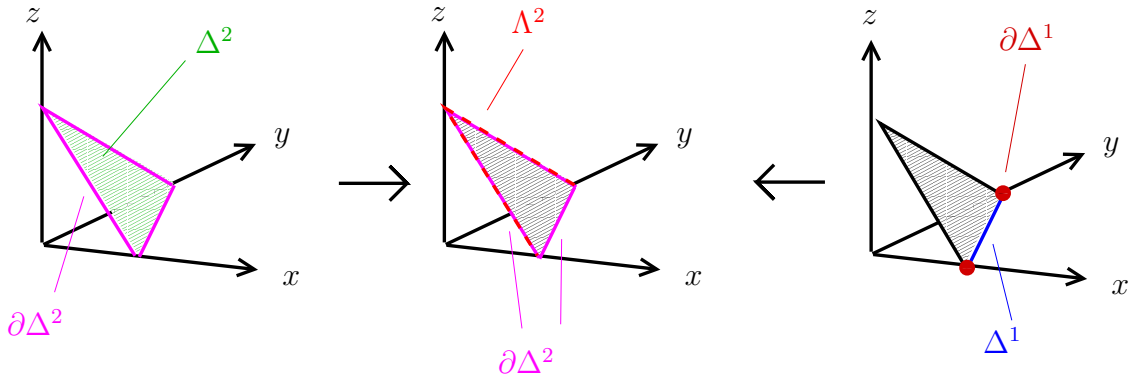


ABBILDUNG 16. Die Inklusionsabbildungen $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow (\partial\Delta^n, \Lambda) \leftarrow (\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$.

Deformationsretrakt von Δ^n ist. Wir sehen also, dass $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ ein Isomorphismus ist.

Wir wenden uns nun der rechten Abbildung zu. Wir betrachten dazu

$$\tilde{\Lambda} := \bigcup_{i=1}^k \{(t_0, \dots, t_n) \in \Lambda \mid t_i = 0 \text{ und } t_0 > 0\},$$

die Menge $\tilde{\Lambda}^k$ ist also das ‘Innere’ von Λ . Es folgt nun aus Satz 4.15, angewandt auf $X = \partial\Delta^n$, $A = \Lambda$ und $Z = \tilde{\Lambda}$,³⁹ dass

$$H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) = H_{n-1}(\partial\Delta^n \setminus \tilde{\Lambda}, \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}^n) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$$

ein Isomorphismus ist. Zudem gilt offensichtlich, dass $i_*([\text{id}_{\Delta^{n-1}}]) = [\text{id}_{\Delta^{n-1}}]$.

Wir haben also bewiesen, dass beide Abbildungen in (4.4) Isomorphismen sind, und dass

$$\partial([\text{id}_{\Delta^n}]) = [\text{id}_{\Delta^{n-1}}] = i_*([\text{id}_{\Delta^{n-1}}]).$$

□

Indem wir den Standardhomöomorphismus von $\Delta^1/\partial\Delta^1 \cong S^1$ betrachten, erhalten wir insbesondere aus Satz 4.10 und aus Lemma 4.16 folgendes Korollar:

Korollar 4.17. *Der singuläre 1-Zykel*

$$\begin{aligned} \sigma: \Delta^1 &\rightarrow S^1 \\ (t, 1-t) &\mapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

ist ein Erzeuger von $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

³⁹Die Menge U ist dabei gegeben durch den Punkt $(0, \dots, 0, 1)$. Man kann leicht zeigen, dass U die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Wir nennen im Folgenden den Erzeuger aus Korollar 4.17 den *Standarderzeuger* von $H_1(S^1; \mathbb{Z})$. Etwas allgemeiner, wenn I ein Intervall ist, dann ist die Inklusion $S^1 \times \{x\} \rightarrow S^1 \times I$ eine Homotopieäquivalenz und wir bezeichnen dann

$$\begin{aligned} \sigma: \Delta^1 &\rightarrow S^1 \times I \\ (t, 1-t) &\mapsto (e^{2\pi it}, x) \end{aligned}$$

als einen *Standarderzeuger* von $H_1(S^1 \times I; \mathbb{Z})$.

Wir wollen nun noch einen expliziten Erzeuger von $H_n(S^n)$ für $n \geq 1$ finden. Wir betrachten dazu S^n als Vereinigung

$$S^n = \underbrace{\Delta^n \times 1}_{=: \Delta_1} \cup \underbrace{\Delta^n \times 2}_{=: \Delta_2},$$

wobei wir auf der rechten Seite für jedes $x \in \partial\Delta^n$ jeweils den Punkt $x \times 1$ mit $x \times 2$ identifizieren.⁴⁰ Wir bezeichnen nun mit Δ_i auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \Delta^n &\rightarrow \Delta_i = \Delta^n \times i \\ x &\mapsto x \times i. \end{aligned}$$

Wir können nun folgendes Lemma formulieren.

Lemma 4.18. *Die singuläre n -Kette $\Delta_1 - \Delta_2$ ist ein Erzeuger von $H_n(\Delta_1 \cup \Delta_2)$.*

Beweis. Wir stellen zuerst fest, dass aus dem Verkleben der Simplexe Δ_1 und Δ_2 folgt, dass die Kette $\Delta_1 - \Delta_2$ in der Tat ein Zykel ist, d.h. ein Element in $H_n(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ repräsentiert.

Wir haben in Lemma 4.16 gezeigt, dass die Identitätsabbildung $\Delta_1: \Delta^n \rightarrow \Delta_1$ einen Erzeuger von $H_n(\Delta_1, \partial\Delta_1)$ repräsentiert. Wir müssen also die Gruppen

$$H_n(\Delta_1 \cup \Delta_2) \text{ und } H_n(\Delta_1, \partial\Delta_1)$$

in Verbindung bringen.

Wir betrachten dazu die durch die Inklusionen induzierten Abbildungen

$$(4.5) \quad H_n(\Delta_1 \cup \Delta_2) \xrightarrow{i_*} H_n(\Delta_1 \cup \Delta_2, \Delta_2) \xleftarrow{i_*} H_n(\Delta_1, \partial\Delta_1).$$

Es folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares $(\Delta_1 \cup \Delta_2, \Delta_2)$ und aus $\tilde{H}_k(\Delta_i) = 0$, dass die erste Abbildung ein Isomorphismus ist. Die zweite Abbildung ist ebenfalls ein Isomorphismus, denn es folgt aus dem Ausschneidungssatz in der Formulierung von Satz 4.15, dass mit $\tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 \setminus \partial\Delta_2$ die Abbildung

$$H_n(\Delta_1 \cup \Delta_2, \Delta_2) = H_n(\Delta_1 \cup \Delta_2 \setminus \tilde{\Delta}_2, \Delta_2 \setminus \tilde{\Delta}_2) \xleftarrow{i_*} H_n(\Delta_1, \partial\Delta_1)$$

ein Isomorphismus ist.

⁴⁰Der n -Simplex Δ^n ist natürlich homöomorph zur n -dimensionalen Scheibe D^n . Die n -Sphäre erhält man dadurch, dass man die untere Hemisphäre mit der oberen Hemisphäre verklebt entlang des Randes, oder eben, in dem man zwei Simplexe entlang dem Rand verklebt.

Die durch die Inklusionen induzierten Abbildungen in (4.5) sind also Isomorphismen. Andererseits folgt leicht aus den Definitionen, dass

$$i_* \left(\underbrace{[\Delta_1 - \Delta_2]}_{\in C_n(\Delta_1 \cup \Delta_2)} \right) = [\Delta_1] = i_* \left(\underbrace{[\Delta_1 - \Delta_2]}_{\in C_n(\Delta_1)} \right).$$

Nachdem das Element auf der rechten Seite nach Lemma 4.16 ein Erzeuger von $H_n(\Delta_1, \partial\Delta_1)$ ist, ist auch das Element auf der linken Seite ein Erzeuger von $H_n(\Delta_1 \cup \Delta_2)$. \square

5. DER ABBILDUNGSGRAD

Wir wissen nun, dass für $n > 0$ die Homologiegruppe $H_n(S^n)$ isomorph zu \mathbb{Z} ist. Wenn $f: S^n \rightarrow S^n$ eine Abbildung ist, dann ist die induzierte Abbildung $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ notwendigerweise die Multiplikation mit einem eindeutig bestimmten $d \in \mathbb{Z}$, welches wir den *Abbildungsgrad* $\deg(f)$ von f (oder kurz, *Grad* von f) nennen.

In den Übungsblatt 5 werden wir sehen, dass beispielsweise der Abbildungsgrad der Abbildung

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow S^1 \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

gerade n beträgt.

Wir fassen einige Eigenschaften vom Abbildungsgrad in folgendem Lemma zusammen:

Lemma 5.1. *Es seien $f, g: S^n \rightarrow S^n$ Abbildungen. Dann gilt:*

- (1) $\deg(\text{id}_{S^n}) = 1$,
- (2) wenn f nicht surjektiv ist, dann gilt $\deg(f) = 0$,
- (3) wenn f homotop zu g ist, dann folgt $\deg(f) = \deg(g)$,
- (4) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$,
- (5) wenn f die Spiegelung in einer Hyperebene ist, dann gilt $\deg(f) = -1$,
- (6) wenn f die Spiegelung im Ursprung ist, d.h. wenn $f(x) = -f(x)$ für alle $x \in S^n$, dann gilt $\deg(f) = (-1)^{n+1}$,

Beweis. (1) Nachdem $(\text{id}_{S^n})_* = \text{id}_{H_n(S^n(X))}$ erhalten wir, dass $\deg(\text{id}_{S^n}) = 1$.

(2) Wenn $f: S^n \rightarrow S^n$ den Punkt $P \in S^n$ verpasst, dann betrachten wir

$$S^n \xrightarrow{f} S^n \setminus \{P\} \xrightarrow{i} S^n$$

wobei die letzte Abbildung die Inklusion ist. Die Abbildung $H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ faktorisiert dann durch $H_n(S^n \setminus \{P\})$, aber diese Gruppe ist die triviale Gruppe, nachdem $S^n \setminus \{P\} \cong D^n$ zusammenziehbar ist.

(3) Wenn f homotop zu g ist, dann folgt aus Satz 3.3, dass $\deg(f) = \deg(g)$.

(4) Es gilt $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, und daraus folgt sofort⁴¹, dass $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

⁴¹Warum?

(5) Wir können einen Homöomorphismus

$$S^n \xrightarrow{\cong} \Sigma^n := \underbrace{\Delta^n \times 1}_{=:\Delta_1} \cup \underbrace{\Delta^n \times 2}_{=:\Delta_2}$$

wählen, so dass die Spiegelung f gerade der Vertauschung h der beiden Kopien von Δ^n entspricht. In Lemma 4.18 hatten wir gesehen, dass $x := [\Delta_1 - \Delta_2]$ ein Erzeuger von $H_n(\Sigma^n)$ ist. Es gilt nun aber, dass

$$h_*(x) = h_*([\Delta_1 - \Delta_2]) = [h(\Delta_1) - h(\Delta_2)] = [\Delta_2 - \Delta_1] = -x.$$

Die Abbildung h_* , und damit auch f_* ist also gerade die Multiplikation mit -1 .

(6) Die Spiegelung im Ursprung ist die Verknüpfung von den Spiegelungen in den $(n+1)$ -Hyperebenen $H_i := \{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i = 0\}$, $i = 1, \dots, n+1$. Die gewünschte Aussage folgt also aus (4) und (5). □

Lemma 5.2. *Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine Abbildung, welche keinen Fixpunkt besitzt, dann gilt $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.*

Beweis. Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine Abbildung, welche keinen Fixpunkt besitzt, d.h. für alle $x \in S^n$ gilt $f(x) \neq x$. Dann gilt⁴² auch $(1-t)f(x) \neq tx$ für alle $t \in [0, 1]$ und alle $x \in S^n$. Wir können daher die Abbildung

$$F: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n \\ (x, t) \mapsto \frac{(1-t)f(x)-tx}{\|(1-t)f(x)-tx\|}$$

eingeführen. Diese Abbildung ist eine Homotopie zwischen den Abbildungen $x \mapsto f(x)$ und $x \mapsto -x$. Es folgt also aus Lemma 5.1 (3) und (6), dass $\deg(g) = \deg(-\text{id}) = (-1)^{n+1}$. □

Wir erinnern nun an mehrere Definitionen aus der Analysis II und III. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt P , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow M \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

gibt, so dass $\gamma(0) = P$ und $\gamma'(0) = v$. Die Menge aller Tangentialvektoren am Punkt P wird mit $T_P M$ bezeichnet. Wir nennen $T_P M$ den *Tangentialraum* am Punkt P . Ein *Vektorfeld* auf M ist eine Abbildung $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $v(P) \in T_P M$ für alle $P \in M$. Wir sagen v ist stetig, wenn die Koordinatenfunktionen von v stetig sind.

Beispielsweise hatten wir gesehen, dass der Tangentialraum einer Sphäre wie folgt gegeben ist:

$$T_P S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P \cdot v = 0\}.$$

⁴²Warum?

Wir betrachten nun folgendes stetiges Vektorfeld auf den ungerad-dimensionalen Sphären S^{2k-1} :

$$\begin{aligned} v: S^{2k-1} &\rightarrow \mathbb{R}^{2k} \\ (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) &\mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k+1}). \end{aligned}$$

Es gilt für alle $P \in S^{2k-1}$, dass $P \cdot v(P)$, d.h. $v(P)$ liegt in der Tat im Tangentialraum $T_P S^{2k-1}$. Dieses Vektorfeld hat zudem die Eigenschaft, dass es überall nicht null ist. Im Fall der 1-Sphäre S^1 ist dies gerade das Vektorfeld, welches immer Länge 1 besitzt und ‘gegen den Uhrzeigersinn zeigt’.

Man kann sich nun fragen, ob es auch auf gerad-dimensionalen Sphären stetige Vektorfelder gibt, welche überall nicht null sind. Der folgende Satz besagt nun, dass dies nicht möglich ist.

Satz 5.3. *Jedes stetige Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit S^{2k} besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Es sei v ein stetiges Vektorfeld auf einer Sphäre S^n , welches überall nicht null ist. Wir müssen zeigen, dass n geradzahlig ist. Wir betrachten dann das Vektorfeld

$$x \mapsto w(x) := \frac{1}{\|v(x)\|} v(x),$$

welches die Eigenschaft hat, dass zudem $\|w(x)\| = 1$ für alle $x \in S^n$. Wir betrachten zudem folgende Abbildung

$$\begin{aligned} F: S^n \times [0, 1] &\mapsto S^n \\ (x, t) &\mapsto \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x). \end{aligned}$$

Diese Abbildung nimmt in der Tat Werte in S^n an, denn aus $w(x) \cdot x = 0$ und $\|x\| = \|w(x)\| = 1$ folgt, dass

$$(\cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)) \cdot (\cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)) = \cos(\pi t)^2 \|x\|^2 + \sin(\pi t)^2 \|w(x)\|^2 = 1.$$

Die Abbildung F ist also eine Homotopie zwischen id und $-\text{id}$. Es folgt nun aus Lemma 5.1 (1), (3) und (6), dass

$$1 = \deg(\text{id}) = \deg(-\text{id}) = (-1)^{n+1},$$

d.h. n ist ungerade. □

Wenn $n = 2$, dann kann man die Aussage des Satzes gut veranschaulichen. Beispielsweise besagt der Satz, dass es auf der Erde immer einen Ort gibt, an dem kein Wind weht⁴³. Zudem besagt der Satz, dass jeder stetig gekämmte Igel (welcher sich zu einer Kugel zusammengerollt hat) hat mindestens einen Glatzpunkt besitzt. Der Satz 5.3 heißt deswegen manchmal auch der ‘Satz vom Igel’.

⁴³Hierbei gehen wir natürlich davon aus, dass das Vektorfeld, welches durch die Windrichtung definiert ist, in der Tat stetig ist.

6. DIE MAYER–VIETORIS SEQUENZ UND IHRE ANWENDUNGEN

In diesem Kapitel werden wir die Mayer–Vietoris Sequenz einführen. Diese spielt für die Homologiegruppen die Rolle des Satzes von Seifert–van Kampen für Fundamentalgruppen. Mithilfe der exakten Sequenz von Mayer–Vietoris kann man die Homologiegruppen von den meisten topologischen Räumen bestimmen.

6.1. Die Mayer–Vietoris Sequenz. Im folgenden Satz bezeichnen wir für eine Inklusion $C \subset D$ von topologischen Räumen die Inklusionsabbildung $C \rightarrow D$ immer mit i_C .

Satz 6.1. (Mayer–Vietoris) *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $A, B \subset X$ Teilmengen, so dass $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Dann gibt es zu jedem n einen Homomorphismus $\partial_n: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$, so dass*

$$\rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{i_{A \cap B} \oplus -i_{A \cap B}} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{i_A + i_B} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

eine lange exakte Sequenz bildet.

Die lange exakte Sequenz in Satz 6.1 wird üblicherweise die Mayer–Vietoris Sequenz genannt.

Beweis. Die Aussage die wir beweisen müssen ist ganz analog zur Aussage von Satz 4.6. Wir müssen also versuchen, diesen Satz geschickt anzuwenden. Zur Erinnerung, wir schreiben

$$C_n^{\{A,B\}}(X) := \{a + b \mid a \in C_n(A) \text{ und } b \in C_n(B)\}.$$

Die Inklusionen geben uns dann folgende Sequenz von Kettenabbildungen:

$$(6.1) \quad 0 \rightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{i_{A \cap B} \oplus -i_{A \cap B}} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{i_A + i_B} C_*^{\{A,B\}}(X) \rightarrow 0.$$

Behauptung. Die Sequenz (6.1) von Kettenabbildungen ist exakt.

Es ist offensichtlich, dass die Abbildung $i_{A \cap B} \oplus -i_{A \cap B}$ injektiv ist, und dass die Abbildung $i_A + i_B$ surjektiv ist. Zudem ist die Verknüpfung dieser beiden Abbildung die Nullabbildung, d.h. $\text{Im}(i_{A \cap B} \oplus -i_{A \cap B}) \subset \text{Ker}(i_A + i_B)$. Es verbleibt zu zeigen, dass $\text{Ker}(i_A + i_B) \subset \text{Im}(i_{A \cap B} \oplus -i_{A \cap B})$. Es seien also

$$\sum_{i=1}^k a_i (f_i: \Delta^n \rightarrow A) \in C_n(A) \text{ und } \sum_{i=1}^l b_i (g_i: \Delta^n \rightarrow B) \in C_n(B)$$

singuläre Ketten, so dass das Bild unter $i_A + i_B$ verschwindet. Wir können dabei ausgehen, dass die singulären n -Simplizes f_1, \dots, f_k paarweise verschieden sind, und dass die singulären n -Simplizes g_1, \dots, g_l paarweise verschieden sind, und dass alle a_i und b_i von null verschieden sind. Nachdem

$$\sum_{i=1}^k a_i (f_i: \Delta^n \rightarrow A) + \sum_{i=1}^l b_i (g_i: \Delta^n \rightarrow B) = 0,$$

muss sich jeder Term in der linken Summe mit einem Term in der rechten Summe wegheben. Dies ist nur möglich, wenn (möglicherweise nach einer Umordnung der b_i), für $i = 1, \dots, k$

gilt: $a_i = -b_i$ und $f_i = g_i$, sowie $k = l$. Dann liegt das Bild von den f_i unter anderem in $A \cap B$, und es gilt

$$(i_{A \cap B} \oplus -i_{A \cap B}) \left(\sum_{i=1}^k a_i (f_i: \Delta^n \rightarrow A) \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^k a_i (f_i: \Delta^n \rightarrow A)}_{\in C_n(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^l b_i (g_i: \Delta^n \rightarrow B)}_{\in C_n(B)}.$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Aus Satz 4.6 erhalten wir nun für jedes n einen Homomorphismus

$$p_n: H_n^{\{A,B\}}(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B),$$

so dass

$$\rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{i_{A \cap B} \oplus -i_{A \cap B}} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{i_A + i_B} H_n^{\{A,B\}}(X) \xrightarrow{p_n} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

eine exakte Sequenz bildet. In Satz 4.12 hatten wir zudem gesehen, dass die Inklusion

$$C_*^{\{A,B\}}(X) \rightarrow C_*(X)$$

einen Isomorphismus

$$\Phi_n: H_n^{\{A,B\}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$$

induziert. Für jedes n schreiben wir nun $\partial_n := p_n \circ \Phi_n^{-1}$ und wir erhalten die gewünschte lange exakte Sequenz. \square

Wenn man den Beweis von Satz 6.1 genau studiert, dann kann man auch explizit sehen, wie der Randoperator $\partial_n: H_n(X) \rightarrow H_n(A \cap B)$ definiert ist. Wir fassen dies in einem Lemma zusammen, den Beweis davon überlassen wir als freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 6.2. *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $A, B \subset X$ Teilmengen, so dass $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Es sei $x \in H_n(A \cap B)$. Dann gibt es $a \in C_n(A)$ und $b \in C_n(B)$, so dass $a + b$ ein Zykel ist mit $x = [a + b]$. Dann ist $\partial x = \partial a = -\partial b$.*

Wir können ganz ähnlich auch einen analogen Satz für die reduzierte Homologie beweisen und erhalten folgenden Satz. Wir verweisen auf Seite 150 von Hatcher für Details.

Satz 6.3. (Mayer–Vietoris) *Es sei X ein topologischer Raum und es seien $A, B \subset X$ Teilmengen, so dass $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Dann gibt es zu jedem n einen Homomorphismus $\tilde{\partial}_n: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A \cap B)$, so dass*

$$\rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{i_{A \cap B} \oplus -i_{A \cap B}} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{i_A + i_B} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

eine lange exakte Sequenz bildet.

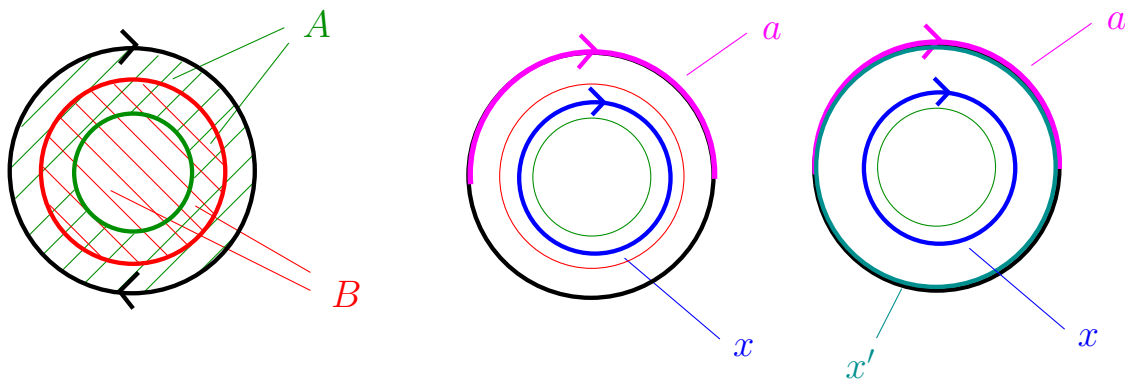
6.2. Die Homologiegruppen von $\mathbb{R}P^2$. Wir wollen zuerst die Homologiegruppen des 2-dimensionalen projektiven Raums $\mathbb{R}P^2$ bestimmen. Zur Erinnerung, der n -dimensionale projektive Raum ist definiert als der Quotientenraum $S^n/\{\pm 1\}$, d.h. wir identifizieren $x \in S^n$ mit $-x$. In der Topologievorlesung hatten wir gesehen, dass $\mathbb{R}P^n$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2$ ist. Wir wollen jetzt die Homologiegruppen im Fall $n = 2$ bestimmen. Wir verwenden dabei die Beschreibung von $\mathbb{R}P^2$ als ⁴⁴

$$D^2/\sim \text{ wobei } x \sim y \text{ wenn } x, y \in S^1 \text{ und } x = -y.$$

Wir bezeichnen im Folgenden mit p die Projektion $D^2 \rightarrow D^2/\sim$. Wir betrachten dann die offenen Teilmengen

$$A := p(\{v \in D^2 \mid \|v\| > 1/4\}) \text{ und } B := p(\{v \in D^2 \mid \|v\| < 3/4\}).$$

Offensichtlich ist dann $A \cup B = \mathbb{R}P^2$. Hierbei ist $\tilde{H}_0(A) = \tilde{H}_0(A \cap B) = \tilde{H}_0(B) = \tilde{H}_0(A \cup$



$B) = 0$, nachdem alle Räume wegzusammenhängend sind. Zudem gilt $\tilde{H}_*(B) = 0$, nachdem B eine Scheibe ist. Die lange exakte Sequenz auf Satz 6.3 ist also in unserem Fall von folgender Form:

$$\tilde{H}_2(A \cap B) \xrightarrow{i} \tilde{H}_2(A) \xrightarrow{i} \tilde{H}_2(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_1(A \cap B) \xrightarrow{i} \tilde{H}_1(A) \xrightarrow{i} \tilde{H}_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow 0.$$

Um die Abbildungen zu verstehen betrachten wir nun noch folgende zwei singuläre 1-Simplizes:

$$x: \begin{matrix} \Delta^1 & \rightarrow & D^2/\sim \\ (t, 1-t) & \mapsto & \frac{1}{2}e^{2\pi t} \end{matrix} \text{ und } a: \begin{matrix} \Delta^1 & \rightarrow & D^2/\sim \\ (t, 1-t) & \mapsto & e^{\pi t}. \end{matrix}$$

Der Simplex x durchläuft also einen vollen Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ während der Simplex a nur den oberen Halbkreis von Radius 1 durchläuft. Die Schnittmenge $A \cap B$ ist homotopieäquivalent zu S^1 und es folgt nun aus Korollar 4.17, dass $[x]$ ein Erzeuger von

⁴⁴Die Abbildung $D^2 \rightarrow S^2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ induziert einen Homöomorphismus $D^2/\sim \rightarrow S^2/\sim$.

$H_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$ ist. Man kann zudem leicht zeigen, dass A homotopieäquivalent zum ‘oberen Kreisbogen’ ist ⁴⁵, und dass daher $[a]$ ein Erzeuger von $H_1(A) \cong \mathbb{Z}$ ist. Die obere lange exakte Sequenz ist also von folgender Form:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathbb{Z} \cdot [x] \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \cdot [a] \rightarrow \tilde{H}_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow 0.$$

Es verbleibt $i_*([x]) \in H_1(A) = \mathbb{Z} \cdot [a]$ zu bestimmen. Der 1-Zykel x ist homolog zum 1-Zykel x' , aber dieser ‘durchläuft’ zweimal a , d.h. $[x] = [x'] = 2[a]$. Wir erhalten nun also folgende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{H}_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow 0.$$

Es folgt, dass $\tilde{H}_2(\mathbb{R}P^2) = \text{Ker}\{\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}\} = 0$ und $\tilde{H}_1(\mathbb{R}P^2) = \text{Coker}\{\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}/2$.

6.3. Die Homologiegruppen vom Torus und der Kleinschen Flasche. Versuchen wir nun die Homologiegruppen des 2-dimensionalen Torus T auszurechnen. Wir identifizieren dabei T mit $S^1 \times \mathbb{R}/6\mathbb{Z}$. Wir schreiben jetzt $A := S^1 \times ([0, 2) \cup (4, 6]) \subset S^1 \times \mathbb{R}/6\mathbb{Z}$ und $B := S^1 \times (1, 5)$. Dann überdeckt das Innere von A und B natürlich den ganzen Torus. Zudem schreiben wir $C_1 := S^1 \times (1, 2)$ und $C_2 := S^1 \times (4, 5)$. Es gilt also $A \cap B = C_1 \cup C_2$.

Wir erhalten dann die folgende Mayer–Vietoris Sequenz ⁴⁶

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \dots & \rightarrow & H_2(T) & \xrightarrow{\partial} \\ & & & & & & \\ \rightarrow & \begin{array}{c} H_1(C_1) \\ H_1(C_2) \end{array} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_{C_1} & i_{C_2} \\ -i_{C_1} & -i_{C_2} \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} H_1(A) \\ H_1(B) \end{array} & \xrightarrow{i_A+i_B} & H_1(T) & \xrightarrow{\partial} \\ & & & & & & \\ \rightarrow & \begin{array}{c} H_0(C_1) \\ H_1(C_2) \end{array} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_{C_1} & i_{C_2} \\ -i_{C_1} & -i_{C_2} \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} H_0(A) \\ H_1(B) \end{array} & \xrightarrow{i_A+i_B} & H_0(T) & \rightarrow 0. \end{array}$$

Für jedes Intervall I und jeden Punkt $x \in I$ definiert nun $(t, 1-t) \rightarrow (e^{2\pi it}, x)$ einen Erzeuger von $H_1(S^1 \times I)$. Wir verwenden jetzt diesen Erzeuger um die Gruppen $H_1(A)$, $H_1(B)$, $H_1(C_1)$ und $H_1(C_2)$ diese jeweils mit \mathbb{Z} zu identifizieren. Für einen zusammenhängenden Raum definiert ein Punkt einen Erzeuger der nullten Homologiegruppe. Wir können also die nullten-Homologiegruppen von A , B , C_1 und C_2 jeweils mit \mathbb{Z} identifizieren. Wir erhalten

⁴⁵Man kann zudem zeigen, dass A homöomorph zum Möbiusband $M = [0, 1] \times [-1, 1]/(0, y) \sim (1, -y)$ ist, wobei der obere Kreisbogen gerade dem ‘Mittelkreis’ $[0, 1] \times 0 \in M$ entspricht.

⁴⁶Wir schreiben dabei

$$\begin{array}{c} H_i(C_1) \\ H_i(C_2) \end{array} \text{ anstatt von } H_i(C_1) \oplus H_i(C_2) \text{ und } \begin{array}{c} H_i(A) \\ H_i(B) \end{array} \text{ anstatt von } H_i(A) \oplus H_i(B).$$

Der Grund ist, dass wir uns die direkten Summen als Spaltenvektoren vorstellen wollen, welche sich für die Matrix-Schreibweise von Abbildungen anbieten.

also dann die folgende Mayer–Vietoris Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & \rightarrow & H_2(T) & \xrightarrow{\partial} \\
 \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_{C_1} & i_{C_2} \\ -i_{C_1} & -i_{C_2} \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_A+i_B} & H_1(T) & \xrightarrow{\partial} \\
 & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & & \\
 \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_{C_1} & i_{C_2} \\ -i_{C_1} & -i_{C_2} \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_A+i_B} & \mathbb{Z} & \rightarrow 0.
 \end{array}$$

Um $H_2(T)$ und $H_1(T)$ zu bestimmen müssen nun also auch noch die Abbildungen verstehen. Es folgt aus der Wahl der Identifikationen mit von den nullten und ersten Homologiegruppen \mathbb{Z} sofort, dass die Inklusionsabbildungen alle die Identität darstellen. D.h. wir erhalten folgende lange exakte Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & \rightarrow & H_2(T) & \xrightarrow{\partial} \\
 \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{(11)} & H_1(T) & \xrightarrow{\partial} \\
 & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & & \\
 \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{(11)} & \mathbb{Z} & \rightarrow 0.
 \end{array}$$

Es ist nun

$$H_2(T) \cong \text{Ker} \left(\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{array} \right) = \mathbb{Z} \cdot (1, -1) \cong \mathbb{Z}.$$

Wir erhalten dann folgende kurze exakte Sequenz ⁴⁷

$$0 \rightarrow \text{Coker} \left(\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{array} \right) \rightarrow H_1(T) \rightarrow \text{Ker} \left(\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{array} \right) \rightarrow 0.$$

⁴⁷Ganz allgemein gilt: wenn

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

eine exakte Sequenz ist, dann sind auch

$$0 \rightarrow \text{Coker}(C_{n+1} \rightarrow C_n) \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \dots \text{ sowie } \cdots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow \text{Ker}(C_n \rightarrow C_{n-1}) \rightarrow 0$$

exakte Sequenzen. Diese Aussage folgt leicht aus den Definitionen.

Hierbei ist sowohl die linke als auch die rechte Gruppe isomorph zu \mathbb{Z} . Wir erhalten also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_1(T) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Es folgt⁴⁸, dass $H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$. Wir können das Ergebnis nun in folgendem Lemma zusammenfassen.

Lemma 6.4. *Es sei T der 2-dimensionale Torus, dann gilt*

$$H_0(T) \cong \mathbb{Z}, H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2 \text{ und } H_2(T) \cong \mathbb{Z}.$$

Wir wollen jetzt auch noch zwei Elemente von $H_1(T)$ finden, welche Erzeuger der freien abelschen Gruppe $H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$ sind. Es sei nun zum einen c der Standarderzeuger von $H_1(B)$ und es seien a und b die in Abbildung 17 angedeuteten singulären 1-Simplizes in

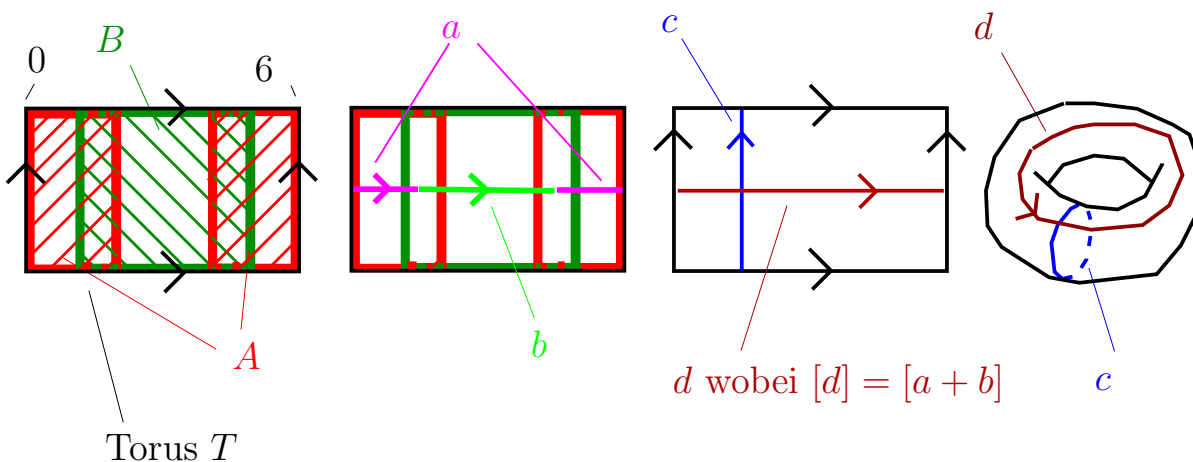
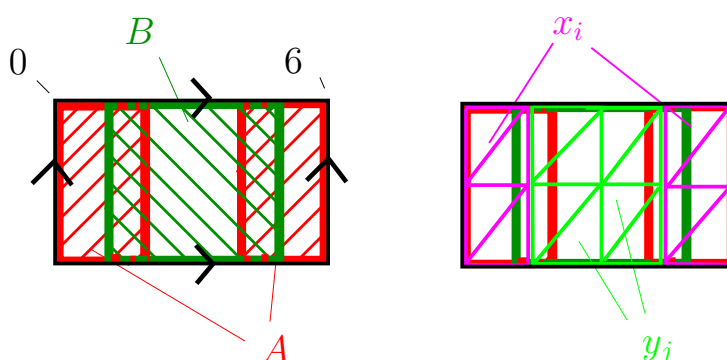


ABBILDUNG 17. Der Torus mit der Überdeckung $A \cup B$.

A und B . Dann ist $a + b$ ein Zykel in X , und es folgt aus Lemma 6.2, dass das Bild von $[a + b]$ unter der Abbildung $\partial: H_1(X) \rightarrow H_0(A \cap B) = \mathbb{Z}^2$ gerade dem Element $(1, -1)$ entspricht. Man kann sich nun davon überzeugen, dass $[c]$ und $[a + b]$ in der Tat die freie abelsche Gruppe $H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$ erzeugen.

Wir betrachten nun auch die singulären 2-Simplizes $x_i \in C_2(A)$ und $y_j \in C_2(B)$, welche in Abbildung 18 angedeutet werden. Die singulären 2-Simplizes sollen dabei kohärent orientiert sein, d.h. der Rand von $\sum x_i$ und von $\sum y_j$ soll jeweils aus den vertikalen 1-Simplizes in den zwei Komponenten von $A \cap B$ besteht. Es folgt aus Lemma 6.2, dass das Bild von $[\sum_i x_i + \sum_j y_j]$ unter der Abbildung $\partial: H_2(X) \rightarrow H_1(A \cap B) = \mathbb{Z}^2$ wieder gerade dem Element $(1, -1)$ entspricht. Insbesondere ist $[\sum_i x_i + \sum_j y_j]$ ein Erzeuger von $H_2(T) \cong \mathbb{Z}$.

⁴⁸Warum?

ABBILDUNG 18. Der Torus mit Simplexes x_i und y_j .

In Übungsblatt 6 werden wir die Homologiegruppen der Kleinschen Flasche K bestimmen. Ein Mayer-Vietoris Argument wie oben beim Torus zeigt, dass

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}, H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ und } H_i(K) = 0 \text{ für alle } i \geq 2.$$

Zudem können wir auch die Erzeuger von $H_1(K)$ explizit bestimmen. Betrachten wir Ab-

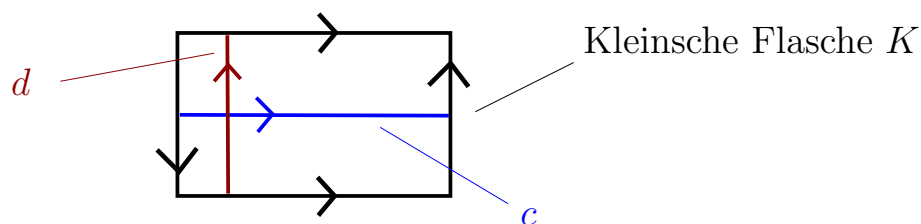


ABBILDUNG 19. Die Kleinsche Flasche.

bildung 19, dann erzeugt der 1-Simplex d den \mathbb{Z} -Summanden und der 1-Simplex c erzeugt den $\mathbb{Z}/2$ -Summanden.

6.4. Die erste Homologiegruppe vom Komplement eines Knotens. Zur Erinnerung, ein Knoten $K \subset S^3$ ist das Bild einer injektiven C^∞ -Abbildung $\varphi: S^1 \rightarrow S^3$. Wir wollen jetzt folgendes Lemma beweisen:

Lemma 6.5. *Es sei $K \subset S^3$ ein Knoten. Dann gilt*

$$H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}.$$

Wir hatten dieses Lemma schon in Korollar 3.8 bewiesen, allerdings unter Verwendung von Satz 3.7, dessen Beweis wir bestenfalls skizziert hatten. Wir werden dann später auch die weiteren Homologiegruppen von $S^3 \setminus K$ bestimmen.

Beweis. Es sei also $K \subset S^3$ ein Knoten. Es gibt dann eine injektive C^∞ -Abbildung $\varphi: S^1 \rightarrow S^3$ mit $\varphi(S^1) = K$. Man kann nun zeigen,⁴⁹ dass es auch eine injektive C^∞ -Abbildung $\Phi: S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ mit $\varphi(z) = \Phi(z, 0)$ für alle $z \in S^1$ gibt.

Wir schreiben $X := S^3 \setminus K$ und $Y := \Phi(S^1 \times D^2)$. Wir können dann Satz 6.1 auf $S^3 = X \cup Y$ anwenden. Wir erhalten dann folgende exakte Sequenz

$$\underbrace{H_2(S^3)}_{=0} \rightarrow H_1(X \cap Y) \rightarrow H_1(X) \oplus H_1(Y) \rightarrow \underbrace{H_1(S^3)}_{=0}.$$

Es folgt, dass die durch die Inklusionen induzierte Abbildung $H_1(X \cap Y) \rightarrow H_1(X) \oplus H_1(Y)$ ein Isomorphismus ist. Die Schnittmenge $X \cap Y = \Phi(S^1 \times D^2 \setminus \{0\})$ ist homotopieäquivalent zum 2-Torus $\Phi(S^1 \times S^1)$, d.h. $H_1(X \cap Y) \cong \mathbb{Z}^2$. Zudem ist $Y = \Phi(S^1 \times D^2)$ homotopieäquivalent zum Kreis $\Phi(S^1 \times 0)$, d.h. $H_1(Y) \cong \mathbb{Z}$. Wir erhalten also eine exakte Sequenz von folgender Form

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\cong} H_1(X) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

und es folgt⁵⁰, dass $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$. □

Wenn $K \subset S^3$ ein Knoten ist, dann haben wir gerade gezeigt, dass $H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. Wenn man den Beweis dieser Aussage genauer studiert, dann sieht man, dass jeder Meridian von K ein Erzeuger von $H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ ist. Ein *Meridian* von K ist hierbei eine Kurve, welche eine Scheibe D berandet, welche den Knoten K in genau einem Punkt schneidet. Wir werden diese Aussage in Übungsblatt 6 beweisen.

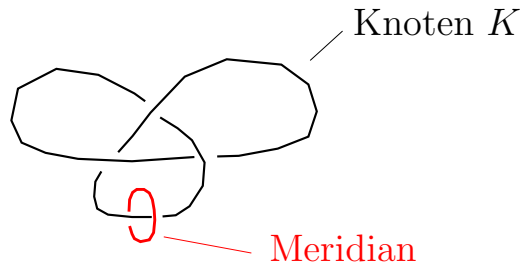


ABBILDUNG 20. Ein Meridian vom Kleeblattknoten.

⁴⁹Es gibt ganz allgemein folgenden Satz von der ‘Existenz der Tubenumgebung’.

Satz. *Es sei M eine kompakte m -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit einer geschlossenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit N . Dann gibt es eine injektive C^∞ -Abbildung $\Phi: M \times D^{n-m} \rightarrow N$, so dass $\Phi(x, 0) = x$ für alle $x \in M$.*

Dieser Satz wird beispielsweise in Kapitel II.11 von

Bredon: Geometry and Topology

bewiesen.

⁵⁰Warum?

6.5. Die Hurewicz-Abbildung. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. In der Topologievorlesung hatten wir die höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$ eingeführt. Diese sind definiert als Homotopieklassen von Abbildungen $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ wobei $*$ $\in S^n$ ein festgewählter Basispunkt ist. Diese Gruppen haben die folgende Eigenschaften:

- (1) Wenn $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von punktierten topologischen⁵¹ Räumen ist, dann ist $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ ein Isomorphismus.
- (2) $\pi_i(S^n) = 0$ für $i < n$ und $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.
- (3) Es ist $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.⁵²

Wir wenden uns nun dem Zusammenhang zwischen den höheren Homologie- und Homotopiegruppen zu. Wir hatten gezeigt, dass $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ und wir wählen nun einen Erzeuger $[S^n]$ von $H_n(S^n)$. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Es folgt aus Satz 3.3, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \pi_n(X, x_0) &\rightarrow H_n(X) \\ [f: S^n \rightarrow X] &\mapsto f_*([S^n]) \end{aligned}$$

wohl-definiert ist. Man kann zudem zeigen, dass dies ein Gruppenhomomorphismus ist (Siehe Proposition 4.36 in Hatcher: Algebraic Topology). Diese Abbildung wird die *Hurewicz-Abbildung* genannt. Im Fall $n = 1$ ist dies natürlich nichts anderes als die Abbildung $\pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$, welche wir schon in Kapitel 3.3 betrachtet hatten.

Es stellt sich nun die Frage, ob der Homomorphismus $\Phi: \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$ zwischen abelschen Gruppen ein Isomorphismus ist, wenn X wegzusammenhängend ist. Dies ist allerdings nicht der Fall:

- (1) Es sei $X = S^3$, dann ist $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ aber $H_3(S^2) = 0$. Wir sehen also, dass $\Phi: \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$ im Allgemeinen nicht injektiv ist.
- (2) Es sei $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der 2-Torus. dann ist $\pi_2(X) = \pi_2(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = \pi_2(\mathbb{R}^2) = 0$ aber $H_2(X) = \mathbb{Z}$. Wir sehen also, dass $\Phi: \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$ im Allgemeinen nicht surjektiv ist.

Etwas überraschenderweise gibt es allerdings doch einen Zusammenhang. Genauer gesagt hat Hurewicz folgenden Satz bewiesen.

Satz 6.6. *Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und es sei $k \geq 2$, so dass $\pi_i(X) = 0$ für alle $i = 0, \dots, k-1$. Dann ist*

$$\Phi: \pi_k(X, x_0) \rightarrow H_k(X)$$

⁵¹Um genau zu sein muss $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Überlagerung von wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden und semilokal einfach zusammenhängenden topologischen Räumen sein.

⁵²Ein Erzeuger von $\pi_3(S^2)$ kann dabei explizit beschrieben werden. Es sei

$$\mathbb{C}P^1 = \{[z_0 : z_1] \mid z_0, z_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } z_0 \neq 0 \text{ oder } z_1 \neq 0\}$$

der 1-dimensionale komplexe projektive Raum. Dieser ist homöomorph zu S^2 . Dann repräsentiert

$$\begin{aligned} H: S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 = 1\} &\rightarrow S^2 = \mathbb{C}P^1 \\ (z_1, z_2) &\mapsto [z_1 : z_2] \end{aligned}$$

einen Erzeuger von $\pi_3(S^2)$.

ein *Isomorphismus*.

Der Beweis führt natürlich weit über die Vorlesung hinaus. Wir verweisen daher auf Seite 371 von Hatcher: Algebraic Topology für einen Beweis.

7. CW-KOMPLEXE

In diesem Kapitel werden wir die CW-Komplexe einführen. Diese geben uns eine hilfreiche Methode um die meisten ‘gängigen’ topologischen Räume zu beschreiben. Wir werden zudem zeigen, dass sich die Homologiegruppen von CW-Komplexen relativ leicht bestimmen lassen.

7.1. Definition von CW-Komplexen und Beispiele. Wir führen nun induktiv den Begriff eines CW-Komplexes und seiner topologischen Realisierung ein. Die Definition ist auf den ersten Blick vielleicht verwirrend, aber wir werden dann in den Beispielen sehen, dass der Begriff eines CW-Komplexes schnell seinen Schrecken verliert.

Fangen wir also mit der Definition an:

- (a) Ein *0-dimensional CW-Komplex* X^0 besteht aus einer Menge von Punkten. Die *topologische Realisierung* $|X^0|$ von einem 0-dimensionalen X^0 ist der topologische Raum, welcher gegeben ist durch die Menge X^0 zusammen mit der diskreten Topologie.
- (b) Wir definieren nun induktiv höher dimensionale CW-Komplexe: Ein *n -dimensionaler CW-Komplex* X^n besteht aus einem $(n-1)$ -dimensionalen CW-Komplex X^{n-1} zusammen mit Abbildungen $\varphi_\alpha: S_\alpha^{n-1} = S_\alpha^{n-1} \rightarrow |X^{n-1}|$ wobei die α Elemente einer Indexmenge sind. Die *topologische Realisierung* $|X^n|$ von X^n ist der topologische Raum

$$|X^n| := |X^{n-1}| \cup \bigcup_{\alpha} D_\alpha^n / \sim$$

wobei wir für jedes α den Rand $S_\alpha^{n-1} = \partial D_\alpha^n$ mithilfe von φ_α mit den entsprechenden Teilmengen von $|X^{n-1}|$ identifizieren.

In der Notation unterscheiden wir normalerweise nicht zwischen dem CW-Komplex und seiner topologischen Realisierung, d.h. wir bezeichnen normalerweise die topologische Realisierung von X^n ebenfalls mit X^n .

Wir führen noch folgende Sprechweisen ein:

- (1) Die Punkte in X^0 heißen die 0-dimensionalen Zellen von X^n .
- (2) Die Bilder von den D_α^k in $X^k \subset X^n$ heißen die k -dimensionalen Zellen von X^n .⁵³
- (3) Die Abbildungen $\varphi_\alpha: S_\alpha^{n-1} \rightarrow X$ heißen die *Anklebeabbildungen* und die Abbildungen $D_\alpha^n \rightarrow X$ heißen die *charakteristischen Abbildungen* der Zellen.

⁵³Man könnte die beiden Definitionen zusammenfassen wenn man bei der induktiven Definition eines CW-Komplexes als erstes den -1 -dimensionalen CW-Komplex als die leere Menge definiert, und dann wie oben induktiv die höher dimensionalen CW-Komplexe einführt. Dann würde die Definition von Zellen in (2) auch die Definition in (1) abdecken.

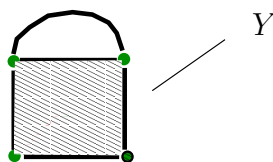
- (4) Die Vereinigung der Zellen der Dimension $\leq k$ heißt das k -Gerüst von X , welches mit X^k bezeichnet wird.
- (5) Eine *CW-Struktur* für einen gegebenen topologischen Raum Y ist ein CW-Komplex X zusammen mit einem Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$.

Wir werden im Folgenden sehen, dass die meisten topologischen Räume, welche wir kennen, CW-Komplexe sind.

- (1) Wir betrachten als erstes folgenden Raum, welcher in Abbildung 1 skizziert wird:

$$Y := [-1, 1] \times [-1, 1] \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1, y \geq 1\}.$$

Der Raum Y besteht also aus einem Quadrat zusammen mit einem Halbkreis.



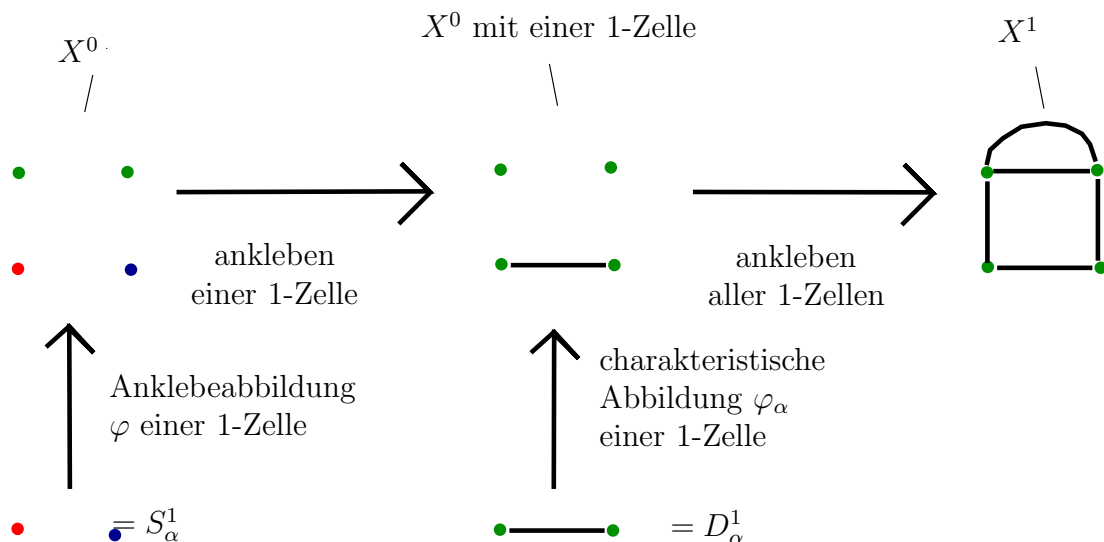
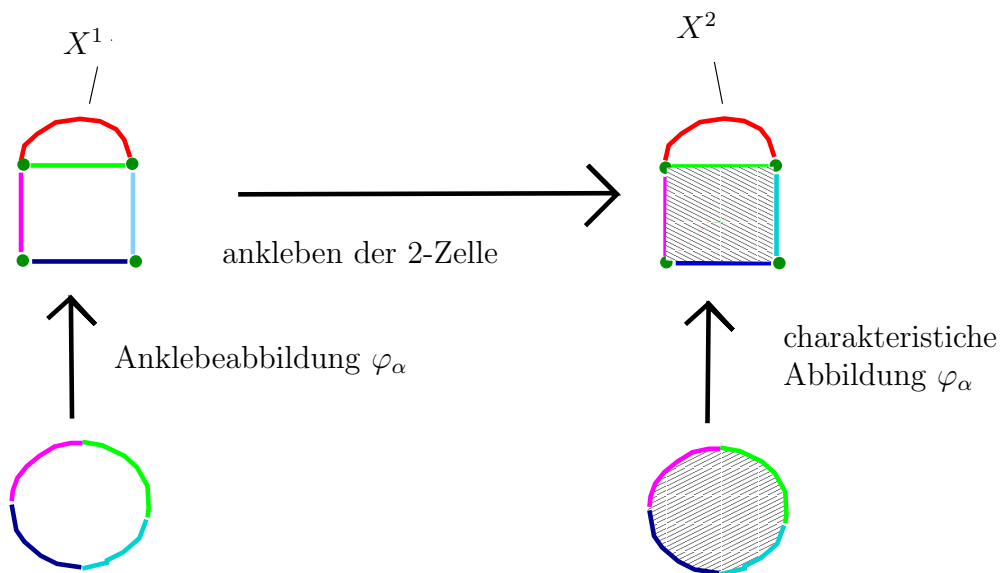
Wir wollen jetzt eine CW-Struktur für Y finden. Wir betrachten dazu erst den 0-dimensionalen CW-Komplex, welcher aus den 4 Eckpunkten des Quadrats besteht. Wir kleben dann fünf 1-dimensionale Zellen an X^0 . Betrachten wir dazu als erstes die Abbildung φ , welche $\partial D^1 = \pm 1$ auf $\pm 1 \times -1$ schickt. Der topologische Raum

$$X^0 \cup_{\varphi} D^1$$

besteht dann aus den vier Punkten zusammen mit einer Kante, welche die unteren beiden Punkte verbindet. Dieser Raum wird in Abbildung 21 in der Mitte skizziert. Ganz analog führen wir vier weitere 1-dimensionale Zellen ein und erhalten den 1-dimensionalen CW-Komplex, welcher Abbildung 21 auf der rechten Seite skizziert wird. Zum Schluß kleben wir noch eine 2-dimensionale Zelle an X^1 an und erhalten einen CW-Komplex X^2 , dessen topologische Realisierung homöomorph zu Y ist. Wir in Abbildung 22 skizziert.

- (2) Wir können den Torus als CW-Komplex mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle betrachten. Man beachte, dass es für die 1-Zellen keine Wahlfreiheit für die Anklebeabbildung gibt. Die Anklebeabbildung für die 2-Zelle ist in Abbildung skizziert.
- (3) Wir können auch die Kleinsche Flasche als CW-Komplex mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle betrachten. Der Unterschied zum Torus ist, dass wir dieses mal eine andere Anklebeabbildung für die 2-Zelle verwenden.

In Abbildung 25 skizzieren wir, wie wir den Torus auf verschiedene Weisen als CW-Komplex auffassen können. In Abbildung 26 skizzieren wir zudem, wie wir den projektiven Raum $\mathbb{R}P^2$, das Möbiusband und die Fläche von Geschlecht 2 als CW-Komplex auffassen können.

ABBILDUNG 21. Der CW-Komplex X^1 .ABBILDUNG 22. Ankleben der 2-Zelle an X^1 .

Zum Abschluß der Diskussion von Flächen betrachten wir noch die 2-Sphäre. Diese können wir als CW-Komplex X wie folgt beschreiben: wir nehmen einen Punkt P und eine 2-Zelle, wobei die Anklebeabbildung $\varphi: S^1 \rightarrow X^0 = \{P\}$ notwendigerweise den ganzen Rand S^1 auf P schickt. Die topologische Realisierung von X ist also gegeben durch

$$X^0 \cup_\varphi D^2 = \{P\} \cup_{P=\partial D^2} D^2 = D^2/S^1 \cong S^2.$$

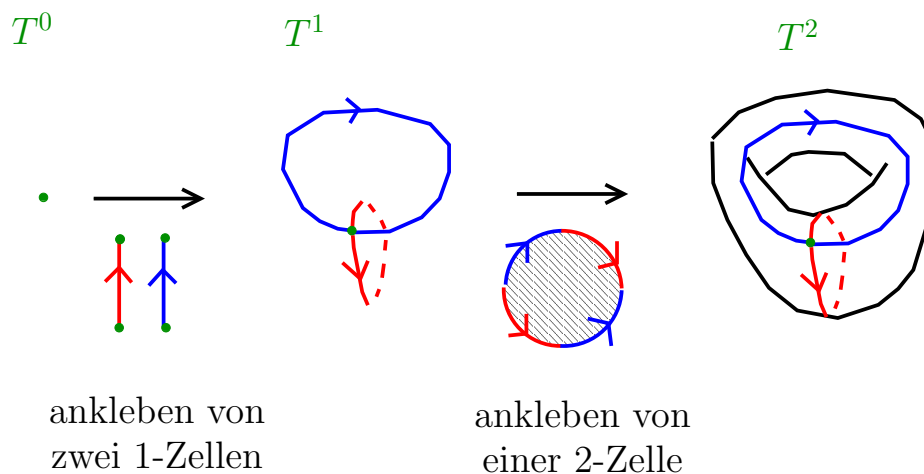


ABBILDUNG 23. Der Torus als CW-Komplex.

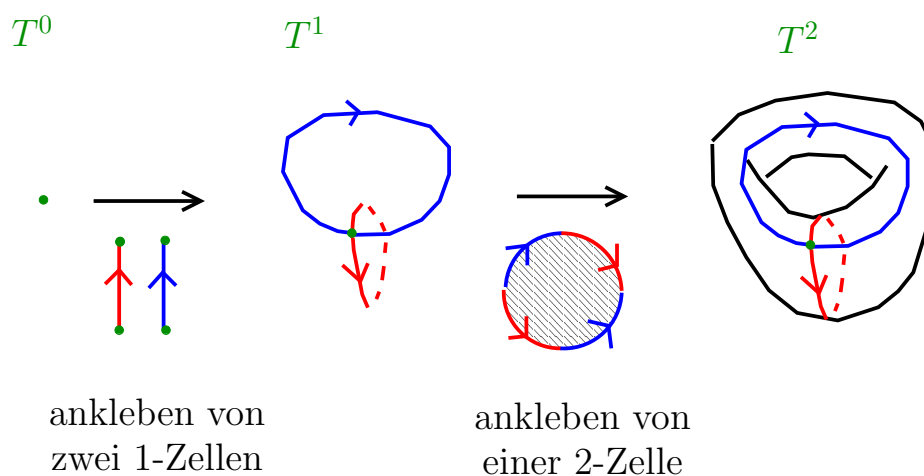
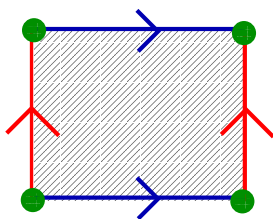


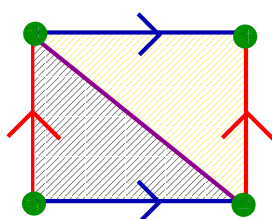
ABBILDUNG 24. Die Kleinsche Flasche als CW-Komplex.

Das Beispiel der 2-Sphäre kann man auch auf Sphäre beliebiger Dimensionen übertragen: wir können S^n als CW-Komplex mit einer 0-Zelle und einer n -Zelle betrachten. Wir sehen also, dass viele von den topologischen Räumen, welche uns interessieren, als CW-Komplex aufgefasst werden können. ⁵⁴

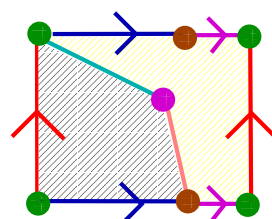
⁵⁴Allerdings kann nicht jeder topologische Raum als CW-Komplex beschrieben werden. Betrachten wir beispielsweise den topologischen Raum X , welcher aus genau 2 Punkten P und Q besteht und mit der



Torus als
CW-Komplex mit
einer 0-Zelle
zwei 1-Zellen
einer 2-Zelle



Torus als
CW-Komplex mit
einer 0-Zelle
drei 1-Zellen
zwei 2-Zellen



Torus als
CW-Komplex mit
drei 0-Zellen
fünf 1-Zellen
zwei 2-Zellen

ABBILDUNG 25. Der Torus mit drei verschiedenen CW-Strukturen.

Zum Abschluß wollen wir die Definition eines CW-Komplexes noch etwas verallgemeinern. Wir sagen, ein topologischer Raum X ist ein *CW-Komplex* wenn folgende zwei Eigenschaften gelten:

- (1) Es gibt eine Folge von CW-Komplexen

$$X^{-1} := \emptyset \subset X^0 \subset X^1 \subset X^2 \dots$$

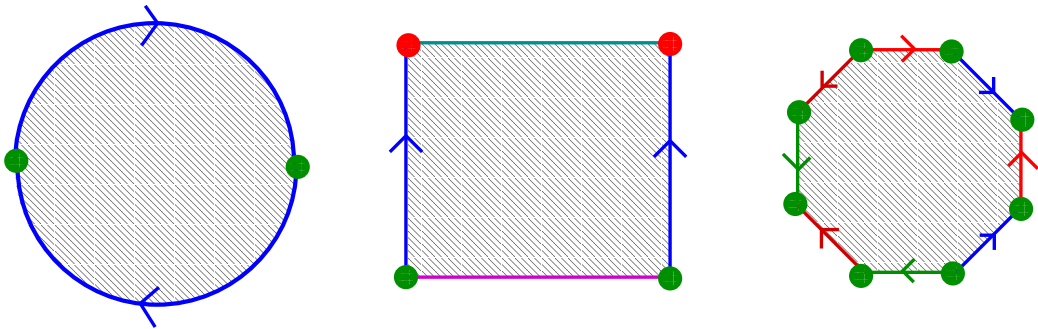
do dass $X = \cup X^n$, und so dass für jedes $m \leq n$ der CW-Komplex X^m gerade das m -Gerüst von X^n ist.

- (2) Eine Menge $U \subset X$ ist offen, genau dann, wenn $U \cap X^n$ offen ist für alle n .

Wir definieren die Dimension $\dim(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eines CW-Komplexes X dann als die maximale Dimension einer Zelle.⁵⁵

trivialen Topologie. D.h. die einzigen offenen Mengen sind die leere Menge und ganz X . Dann können wir X nicht als CW-Komplex auffassen, den ein CW-Komplex mit endlich vielen Punkten besteht nur aus 0-dimensionalen Zellen zusammen mit der *diskreten* Topologie.

⁵⁵Hierbei definieren wir natürlich $\dim(X) = \infty$, wenn X Zellen beliebig grosser Dimensionen besitzt.



Der $\mathbb{R}P^2$ als CW-Komplex mit einer 0-Zelle einer 1-Zellen einer 2-Zelle

Das Möbiusband als CW-Komplex mit zwei 0-Zellen drei 1-Zellen einer 2-Zelle

Fläche von Geschlecht 2 als CW-Komplex mit einer 0-Zelle vier 1-Zellen einer 2-Zelle

ABBILDUNG 26. Der projektive Raum $\mathbb{R}P^2$, das Möbiusband und die Fläche von Geschlecht 2 mit jeweils einer CW-Struktur.

Betrachten wir beispielsweise ⁵⁶

$$S^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum x_i^2 = 1\}.$$

Wir fassen nun \mathbb{R}^n als Teilmenge von \mathbb{R}^∞ auf. Wir betrachten dann iterative S^n als CW-Komplex, wobei S^0 aus zwei 0-Zellen besteht und S^n aus S^{n-1} durch ankleben von zwei n -Zellen (‘obere Hemisphäre und untere Hemisphäre’) hervorgeht. Wir erhalten dann eine aufsteigende Folge

$$S^0 \subset S^1 \subset S^2 \dots$$

von CW-Komplexen, welche genau die oben geforderten Eigenschaften besitzt.

7.2. Die Homologiegruppen von CW-Komplexen. Wir werden nun eine relativ einfache Methode kennenlernen um Homologiegruppen von CW-Komplexen zu bestimmen.

⁵⁶Zur Erinnerung, \mathbb{R}^∞ ist die Menge der reellen Folgen (x_1, x_2, \dots) , so dass nur endlich viele Folgenglieder ungleich null sind. Dies ist ein metrischer Raum bezüglich der Metrik

$$d((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}.$$

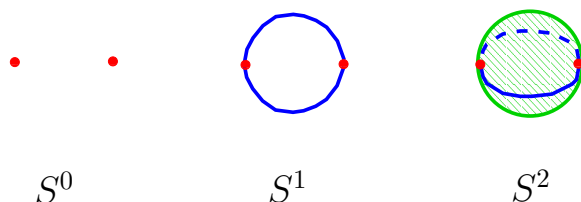


ABBILDUNG 27. Eine aufsteigende Folge von CW-Komplexen $S^0 \subset S^1 \subset S^2 \dots$.

Im Folgenden identifizieren wir durchgehend $H_n(D^n, \partial D_n)$ mit \mathbb{Z} mithilfe der Wahl eines Isomorphismus.

Lemma 7.1. *Es sei X ein CW-Komplex. Dann gilt:*

- (1) Für $k \neq n$ ist $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$. Wenn wir mit Z_n die Menge der n -Zellen bezeichnen, dann induzieren die charakteristischen Abbildungen $\Phi_z: D_z^n \rightarrow X$, $z \in Z_n$ einen Isomorphismus⁵⁷

$$\bigoplus_{z \in Z_n} \Phi_z: \bigoplus_{z \in Z_n} \mathbb{Z} \rightarrow H_n(X^n, X_{n-1}).$$

- (2) Für $k > n$ gilt $H_k(X^n) = 0$.
 (3) Die Inklusion $i: X^n \rightarrow X$ induziert einen Isomorphismus $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ für alle $k < n$.

Die erste Aussage sagt also insbesondere, dass $H_n(X^n, X_{n-1})$ die freie abelsche Gruppe ist, welche von der Menge der n -Zellen aufgespannt wird.

Beweis. (1) Man kann leicht zeigen, dass die Bedingung (*) in Satz 4.10 für $X^{n-1} \subset X^n$ erfüllt ist.⁵⁸ Es folgt also aus Satz 4.10, dass

$$H_k(X^n, X^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) \text{ für alle } k.$$

Es ist

$$X^n/X^{n-1} = (X^{n-1} \cup_{\varphi_\alpha} \bigcup D_\alpha^n)/X^{n-1},$$

wobei wir die Randsphären S_α^{n-1} jeweils mit einer Teilmenge von X^{n-1} identifizieren. Wenn wir alle Punkte in X^{n-1} zu einem einzigen Punkt zusammenfassen, dann ist das Bild von jedem D_α^n gegeben durch $D_\alpha^n/S_\alpha^{n-1} \cong S^n$. Nachdem wir zudem in allen Sphären je einen Punkt mit den anderen Punkten identifizieren, erhalten wir, dass

⁵⁷Jede charakteristischen Abbildung $\Phi_z: D_z^n \rightarrow X$ induziert eine Abbildung $H_n(D^n, \partial D_n) \rightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$. Nachdem wir $H_n(D^n, \partial D_n)$ mit \mathbb{Z} identifiziert hatten erhalten wir also eine Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow H_n(X^n, X_{n-1})$.

⁵⁸In der Tat, wir nehmen aus jeder n -Zelle von X^n einen Punkt im Inneren heraus und bezeichnen die resultierende Menge mit U . Dann ist U eine offene Umgebung X^{n-1} in X^n , so dass X^{n-1} ein Deformationsretrakt von U ist.

X^n/X^{n-1} homöomorph zur Einpunktvereinigung⁵⁹ von n -dimensionalen Sphären ist, wobei die Sphären in ein-eindeutiger Beziehung den n -dimensionalen Zellen von X^n entsprechen. Die erste Aussage folgt nun aus Übungsaufgabe 1 von Übungsblatt 6.⁶⁰

(2) Wir betrachten die lange exakte Sequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) :

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \dots$$

Insbesondere, wenn $k > n$, dann folgt aus (1), dass $H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) = 0$. Wir erhalten also, dass $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$. Iterieren wir dieses Argument, dann sehen wir, dass

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong \dots \cong H_k(X^0) = 0.$$

Die letzte Aussage folgt hierbei daraus, dass X^0 eine Vereinigung von Punkten mit der diskreten Topologie ist.

(3) Das gleiche Argument wie in (2) zeigt nun auch, dass die Inklusionsabbildungen für jedes $k < n$ Isomorphismen $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^{n+1})$ induzieren. Wenn X endlich dimensional ist, dann folgt die Behauptung (3) sofort aus dieser Beobachtung.

Für den Beweis von (3) im Falle, dass X ein unendlich dimensionaler CW-Komplex ist verweise ich auf Seite 138 von Hatcher.

□

Wir bezeichnen im Folgenden mit $d = d_n$ die Abbildung

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

wobei ∂_n die Randabbildung in der langen exakten Sequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) ist und j_{n-1} ist die durch die Projektion $C_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow C_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ induzierte Abbildung. Diese Abbildung d hat folgende Eigenschaft:

Lemma 7.2. *Für alle n gilt $d_n \circ d_{n+1} = 0$.*

⁵⁹Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte topologische Räume. Die Einpunktvereinigung von (X, x_0) und (Y, y_0) ist der topologische Raum

$$X \vee Y := (X \cup Y)/x_0 \sim y_0.$$

Wenn X und Y zusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind, dann hängt der Homöomorphietyp von $X \vee Y$ nicht von der Wahl von den Punkten x_0 und y_0 ab.

⁶⁰Ein Punkt x in einem topologischen Raum X heißt im folgenden *einfach*, wenn es eine offene Umgebung U von x gibt, so dass x ein Deformationsretrakt von U ist. Beispielsweise ist jeder Punkt in einer Mannigfaltigkeit einfach. Wenn $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ einfache Punkte sind, dann induzieren die Inklusionsabbildungen $i: X \rightarrow X \vee Y$ und $j: Y \rightarrow X \vee Y$ für jedes n einen Isomorphismus

$$i_* \oplus j_* : \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y) \rightarrow \tilde{H}_n(X \vee Y).$$

Beweis. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm von Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(X^n) & & \\
 & \nearrow \partial_{n+1} & & \searrow j_n & \\
 H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & \searrow \partial_n & & \nearrow j_{n-1} \\
 & & H_{n-1}(X^{n-1}) & &
 \end{array}$$

Die Abbildung $\partial_n \circ j_n: H_n(X^n) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1})$ ist jedoch die Verknüpfung von zwei sukzessiven Abbildungen in der langen exakten Sequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) , d.h. die Abbildung $\partial_n \circ j_n$ ist die Nullabbildung. \square

Das Lemma besagt also, dass $(H_n(X^n, X^{n-1}), d_n)$ einen Kettenkomplex definiert. Wir bezeichnen diesen Kettenkomplex im Folgenden mit $C_*^{CW}(X)$ und bezeichnen dessen Homologiegruppen mit $H_n^{CW}(X)$. Wir nennen $C_*^{CW}(X) = (H_n(X^n, X^{n-1}), d_n)$ den *zellulären Kettenkomplex* vom CW-Komplex X .

Beispiel. Betrachten wir die n -Sphäre S^n für $n \geq 2$. Im vorherigen Kapitel hatten wir gesehen, dass S^n homöomorph zu einem CW-Komplex X mit einer 0-Zelle und einer n -Zelle ist. Der zelluläre Kettenkomplex $C_*^{CW}(X)$ ist dann von der Form

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{=C_n^{CW}(X)} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{=C_0^{CW}(X)} \rightarrow 0.$$

Nachdem $n \geq 2$ sind die beiden \mathbb{Z} 's durch mindestens eine Null getrennt. Die Randabbildungen sind daher zwangsläufig die Nullabbildungen und wir erhalten, dass

$$H_i^{CW}(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = 0, n, \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Dies sind natürlich die ‘üblichen’ Homologiegruppen von S^n . Wir jetzt sehen, dass dies kein Zufall ist.

Wir können jetzt folgenden Satz formulieren und beweisen:

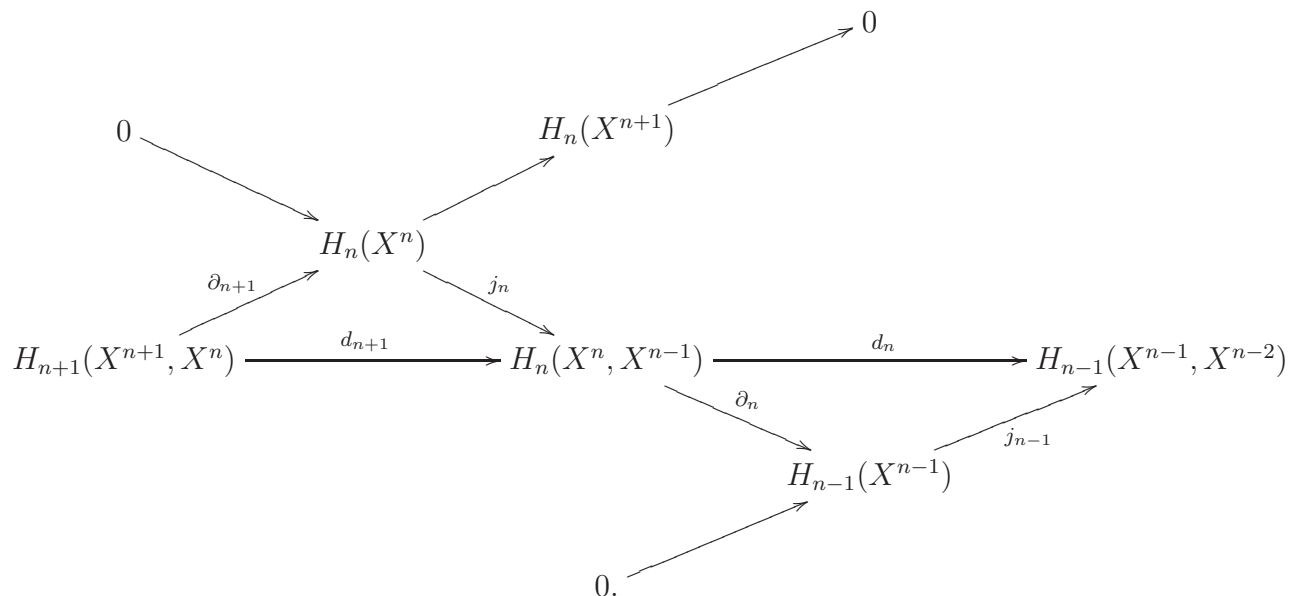
Satz 7.3. *Für jeden CW-Komplex X gibt es einen ⁶¹ Isomorphismus*

$$H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n^{CW}(X).$$

⁶¹Man kann den Satz noch etwas genauer formulieren. Es gibt hier nicht nur ‘irgendeinen Isomorphismus’, sondern es gibt einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\Phi: H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n^{CW}(X),$$

Beweis. Wir ergänzen das kommutative Diagramm aus dem Beweis von Lemma 7.2 noch um ein paar Abbildungen:



Mithilfe von Lemma 7.1 sehen wir, dass die diagonalen Sequenzen von Abbildungen gerade die langen exakten Sequenzen von den jeweiligen Paaren sind. Insbesondere sind alle diagonalen Sequenzen exakt. Aus Lemma 7.1 wissen wir, dass die Inklusion $X^{n+1} \rightarrow X$ einen Isomorphismus $H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X)$ induziert. Die linke diagonale exakte Sequenz erlaubt es nun folgende Identifikation durchzuführen:⁶²

$$H_n(X) = H_n(X^n) / \text{Im}(\partial_{n+1}).$$

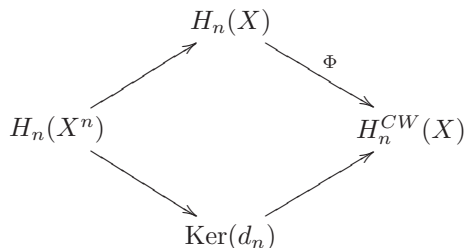
Es genügt nun zu zeigen, dass $j_n: H_n(X^n) \rightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$ einen Isomorphismus

$$H_n(X) = H_n(X^n) / \text{Im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1}) = H_n^{CW}(X)$$

induziert. Diese Behauptung zeigt man wiederum durch ‘Diagrammjagd’.⁶³

(1) Nachdem $\partial_n \circ j_n = 0$ folgt, dass $j_n(H_n(X^n)) \subset \text{Ker}(d_n)$.

mit der Eigenschaft, dass folgendes Diagramm kommutiert:



⁶²Wenn $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz ist, dann ist C isomorph zu $B / \text{Im}(A \rightarrow B)$.

⁶³Es ist am besten jetzt den Beweis nicht mehr zu lesen, sondern sich selber auf die Jagd zu machen.

- (2) Die Abbildung j_{n-1} ist injektiv, d.h. $\text{Ker}(d_n) = \text{Ker}(\partial_n) = \text{Im}(j_n)$, d.h. die Abbildung j_n induziert einen Epimorphismus

$$H_n(X^n) \rightarrow \text{Ker}(d_n)$$

und offensichtlich auch einen Epimorphismus

$$H_n(X^n)/\text{Im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \text{Ker}(d_n)/\text{Im}(d_{n+1}).$$

- (3) Wenn ein Element $j_n(c) \in H_n(X^n, X^{n-1})$ im Bild von $d_{n+1} = j_n \circ \partial_{n+1}$ liegt, dann ist $j_n(c) = j_n(\partial_{n+1}(d))$ für ein $d \in H_{n+1}(X^{n+1}, X^n)$. Nachdem j_n injektiv ist folgt dann aber, dass $c = \partial_{n+1}(d)$. Wir haben damit nun auch gezeigt, dass die Abbildung

$$H_n(X^n)/\text{Im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \text{Ker}(d_n)/\text{Im}(d_{n+1})$$

injektiv ist.

□

Satz 7.3 ist schon hilfreich, selbst wenn wir die Randabbildungen d_n nicht bestimmen können. Beispielsweise, wenn X ein CW-Komplex mit endlich vielen Zellen ist, dann sind die Kettengruppen $C_*^{CW}(X)$ im zellulären Kettenkomplex *endlich erzeugte* freie abelsche Gruppen. Dies ist ein grosser Fortschritt gegenüber den singulären Kettengruppen $C_*(X)$, welche im Allgemeinen freie abelsche Gruppen von überabzählbarem Rang sind.

Wir können nun auch leicht folgendes Korollar beweisen.

Korollar 7.4. *Es sei X ein topologischer Raum, welcher homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex Y ist. Dann gilt:*

- (1) *Wenn Y genau d Zellen der Dimension n besitzt, dann wird $H_n(X)$ von höchstens d Elementen erzeugt.*
- (2) *Wenn Y nur aus endlich vielen Zellen besteht, dann sind alle Homologiegruppen endlich erzeugte Gruppen.*
- (3) *Wenn Y ein n -dimensionaler CW-Komplex ist, dann gilt $H_k(X) = 0$ für $k > n$ und zudem ist $H_n(X)$ torsion-frei.*

Beweis. Nachdem die Homotopiegruppen nicht vom Homotopietyp abhängen, müssen wir die Aussagen nur für die Homologiegruppen von Y beweisen. Wenn Y genau d Zellen der Dimension n besitzt, dann ist $C_*^{CW}(X) \cong \mathbb{Z}^d$. Jede Untergruppe U von \mathbb{Z}^d ist ebenfalls eine freie abelsche Gruppe mit $\text{Rang } \text{Rang}(U) \leq d$.⁶⁴ Es folgt also, dass

$$H_n(Y) = H_n(X) = \text{Ker}(d_n: C_n^{CW}(X) \rightarrow C_{n-1}^{CW}(X))/\text{Im}(d_{n+1}: C_{n+1}^{CW}(X) \rightarrow C_n^{CW}(X))$$

von höchstens d Elementen erzeugt wird, nachdem $\text{Ker}(d_n: C_n^{CW}(X) \rightarrow C_{n-1}^{CW}(X))$ eine freie abelsche Gruppe von $\text{Rang} \leq d$ ist.

⁶⁴Warum?

Die zweite Aussage des Korollars folgt sofort aus der ersten Aussage. Es verbleibt nur noch zu zeigen, dass für einen n -dimensionalen CW-Komplex Y die n -te Homologiegruppe $H_n(Y)$ torsions-frei ist. Aus Satz 7.3 folgt nun aber, dass

$$H_n(Y) \cong H_n^{CW}(Y) = \text{Ker}\{d_n: C_n^{CW}(Y) \rightarrow C_{n-1}^{CW}(Y)\},$$

d.h. $H_n(Y)$ ist eine Untergruppe der freien abelschen Gruppe $C_n^{CW}(Y)$, insbesondere ist auch $H_n(Y)$ torsion-frei. \square

Wir haben also jetzt gezeigt, dass die singulären Homologiegruppen mit den zellulären Homologiegruppen übereinstimmen. Man kann sich nun fragen, ob man diese Aussage noch etwas verallgemeinern kann, nämlich, ob die singulären Kettenkomplexe und die zellulären Kettenkomplexe kettenhomotop sind. Dies ist in der Tat der Fall wenn wir uns ein kleines bisschen bei den CW-Komplexen einschränken.

Satz 7.5. *Es sei X ein CW-Komplex X , welcher in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt. Dann ist der singuläre Kettenkomplex $C_*(X)$ kettenhomotop zum zellulären Kettenkomplex $C_*^{CW}(X)$.*

Dieser Satz folgt sofort aus Satz 7.3 und folgendem rein algebraischen Satz, welchen wir in Übungsblatt 6 beweisen werden.

Satz 7.6. *Es seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' zwei freie ⁶⁵ Kettenkomplexe, so dass die Homologiegruppen endlich erzeugt sind. Wenn es für jedes n einen Isomorphismus $f_n: H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_n(\mathcal{C}')$ gibt, dann gibt es auch eine Kettenabbildung $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, welche die Abbildungen f_n induziert, und welche eine Kettenhomotopieäquivalenz ist.*

7.3. Bestimmung der Randabbildungen im zellulären Kettenkomplex. Damit wir Satz 7.3 für Berechnungen von Homologiegruppen verwenden können müssen wir noch Methoden entwickeln um die Randabbildungen d_n im zellulären Kettenkomplex zu bestimmen.

Es sei im Folgenden X ein CW-Komplex. Wir betrachten zuerst die Randabbildung $d_1: H_1(X^1, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$. Für eine 1-Zelle f mit charakteristischer Abbildung $\Phi_e: D^1 \rightarrow X^0$ folgt dann sofort aus den Definitionen, dass

$$d_1([e]) = \Phi_e(1) - \Phi_e(0).$$

Insbesondere, wenn X genau eine 0-Zelle besitzt, dann ist die Randabbildung d_0 die Nullabbildung.

Es sei nun $n > 1$. Wir wollen die Randabbildung

$$d_n: H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

bestimmen. Wir bezeichnen dazu im Folgenden die n -Zellen mit e_i^n und die $(n-1)$ -Zellen mit e_j^{n-1} , wobei die i und j in geeigneten Indexmengen I und J liegen. Wir haben dann folgende Isomorphismen

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(D_i^n, \partial D_i^n) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i \in I} H_n(D_i^n / \partial D_i^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(\bigvee_i D_i^n / \partial D_i^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(X^n / X^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_n(X^n, X^{n-1}),$$

⁶⁵Ein Kettenkomplex \mathcal{C} ist frei, wenn alle Gruppen C_n freie abelsche Gruppen sind.

hierbei wird die dritte Abbildung durch die charakteristische Abbildungen $\Phi_i: D_i^n \rightarrow X^n$ induziert. Es folgt aus Satz 4.10, dass die erste und letzte Abbildung ein Isomorphismus ist. Wir hatten zudem in Übungsblatt 6 gezeigt, dass die zweite Abbildung ein Isomorphismus ist. Die dritte Abbildung ist durch den Homöomorphismus

$$f_n: \bigvee_i D_i^n / \partial D_i^n \xrightarrow{\cong} X^n / X^{n-1}$$

induziert. Wir können auch die Umkehrabbildung der zweiten Abbildung explizit hinschreiben: Es sei zuerst $j \in I$ gegeben, dann betrachten wir die Abbildung

$$p_j: \bigvee_{i \in I} D_i^n / \partial D_i^n \rightarrow D_j^n / \partial D_j^n,$$

welche die Identität auf D_j^n ist, und welche für $j \neq k$ die Punkte in D_k^n auf den gemeinsamen Punkt der Einpunktvereinigung schickt. Dann ist

$$\bigoplus_{j \in I} p_j: H_n(\bigvee_{i \in I} D_i^n / \partial D_i^n) \rightarrow \bigoplus_{j \in I} H_n(D_j^n / \partial D_j^n),$$

die Umkehrabbildung der zweiten Abbildung. Genau die gleichen Argumente können wir natürlich auch in Dimension $n - 1$ anwenden.

Die Zellen e_i^n bilden also insbesondere auf natürliche Weise eine Basis von $C_n^{CW}(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ und die Zellen e_j^{n-1} bilden analog eine Basis von $C_{n-1}^{CW}(X) = H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$. Wir wollen jetzt die Randabbildung $d_n: C_n^{CW}(X) \rightarrow C_{n-1}^{CW}(X)$ bezüglich dieser Basen bestimmen.

Für jedes $\alpha \in I$ und jedes $\beta \in J$ betrachten wir dazu die Abbildung

$$S_\alpha^{n-1} = \partial D_\alpha^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha^{n-1}} X^{n-1} \xrightarrow{q} X^{n-1} / X^{n-2} \xrightarrow{\cong} \bigvee_{j \in J} D_j^{n-1} / \partial D_j^{n-1} \xrightarrow{p_\beta} D_j^{n-1} / \partial D_j^{n-1} =: S_\beta^{n-1},$$

wobei φ_α die Anklebeabbildung der Zelle e_α^n ist, und wobei $q: X^{n-1} \rightarrow X^{n-1} / X^{n-2}$ die Quotientenabbildung ist. Nachdem wir S_α^{n-1} und S_β^{n-1} Kopien von S^{n-1} sind können wir jetzt insbesondere den Grad dieser Abbildung betrachten. Wir werden jetzt sehen, dass dieser Grad gerade der $\beta \times \alpha$ -Eintrag der Matrix der Randabbildung d_n bezüglich der Basen $\{e_i^n\}_{i \in I}$ und $\{e_j^{n-1}\}_{j \in J}$ ist. Genauer gesagt haben wir folgenden Satz:

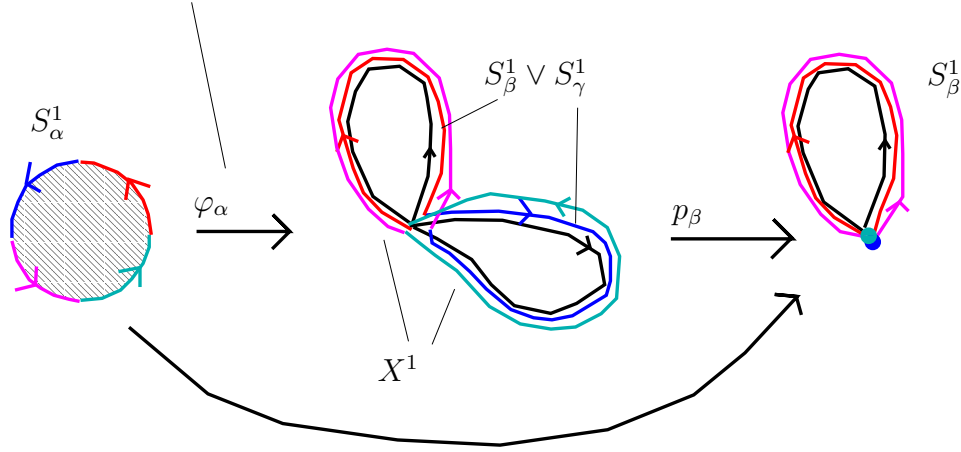
Satz 7.7. *Für jede n -Zelle e_α^n gilt*

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} d_{\alpha,\beta} \cdot e_\beta^{n-1}$$

wobei wir hier über die Menge der $(n - 1)$ -Zellen summieren, und wobei

$$d_{\alpha,\beta} := \text{Grad der Abbildung } S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha^{n-1}} X^{n-1} \xrightarrow{q} X^{n-1} / X^{n-2} \xrightarrow{p_\beta} S_\beta^{n-1}.$$

Anklebeabbildung der 2-Zelle im CW-Komplex für den Torus



Grad der Abbildung $S_\alpha^1 \rightarrow S_\beta^1$ ist Null

ABBILDUNG 28. Illustration der Abbildung $S_\alpha^{n-1} \rightarrow S_\beta^{n-1}$.

Beweis. Wir betrachten folgendes kommutatives⁶⁶ Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bigoplus_{i \in I} H_n(D_i^n, \partial D_i^n) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{i \in I} H_n(D_i^n / \partial D_i^n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(\vee D_i^n / \partial D_i^n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(X^n / X^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X^n, X^{n-1}) \\
 \uparrow & & & & & & & & \downarrow \partial_n \\
 H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & & & & & & & & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \\
 \cong \downarrow \partial & & & & & & & & \downarrow j_{n-1} \\
 \tilde{H}_{n-1}(S_\alpha^{n-1}) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & & & & & & & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \\
 \downarrow \cdot d_{\alpha\beta} & & & & & & & & \downarrow j_{n-1} \\
 \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) & & & & & & & & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \\
 \cong \uparrow & \swarrow = & & & & & \searrow q & & \downarrow j_{n-1} \\
 \tilde{H}_{n-1}(D_\beta^{n-1}, \partial) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(D_\beta^{n-1} / \partial) & \xleftarrow{p_\beta} & \tilde{H}_{n-1}(\vee D_j^{n-1} / \partial) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1} / X^{n-2}) & \xleftarrow{\cong} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}).
 \end{array}$$

Die Verknüpfung der rechten vertikalen Abbildungen ist dann gerade die Randabbildung

$$d_n: H_1(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}).$$

Der Satz folgt nun direkt aus den Definitionen und der Kommutativität des obigen Diagramms. \square

⁶⁶Warum ist das Diagramm kommutativ?

Beispiel. Es sei $F = F_{2g}$ die geschlossene Fläche von Geschlecht g . Wie in Abbildung angedeutet, können wir F als CW-Komplex mit einer 0-Zelle a , $2g$ 1-Zellen b_1, \dots, b_{2g} und einer 2-Zelle c auffassen. Der zelluläre Kettenkomplex ist also von der Form

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Wir müssen also noch die Randabbildungen d_1 und d_2 bestimmen. Nachdem dieser CW-Komplex nur eine 0-Zelle besitzt folgt aus der Diskussion im vorherigen Kapitel, dass $d_1(b_i) = 0$ für $i = 1, \dots, 2g$. Die 2-Zelle c ist so angeklebt, dass jede 1-Zelle jeweils zweimal, aber mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen wird (ähnlich wie in Abbildung 7.3). Es folgt also, dass $d_2(c) = 0$. Die Randabbildungen d_1 und d_2 sind also null, d.h. die Kettengruppen sind schon die Homologiegruppen, d.h.

$$H_2(F_{2g}) \cong \mathbb{Z}, H_1(F_{2g}) \cong \mathbb{Z}^{2g} \text{ und } H_0(F_{2g}) \cong \mathbb{Z}.$$

7.4. Der lokale Abbildungsgrad. Um die Homologiegruppen von komplizierteren Räumen bestimmen zu können werden wir jetzt eine Methode zur Bestimmung des Grads einer Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ einführen, welche in den meisten Fällen des normalen Mathematikerlebens angewendet werden kann.

Es sei also $f: S^n \rightarrow S^n$ eine Abbildung wobei $n > 0$. Für einen Punkt $x \in S^n$ führen wir jetzt den *Grad von f am Punkt x* ein. Es sei dazu U eine offene Umgebung von x und es sei V eine offene Umgebung V von $y := f(x)$, so dass $f(U) \subset V$. Wir betrachten dann folgendes Diagramm

$$(7.1) \quad \begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_n(S^n, S^n \setminus x) & & H_n(S^n, S^n \setminus y) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ H_n(U, U \setminus x) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus y). \end{array}$$

Hierbei stammen die beiden oberen vertikalen Abbildung von den langen exakten Sequenzen der Paare $(S^n, S^n \setminus x)$ und $(S^n, S^n \setminus y)$.⁶⁷ Die unteren vertikalen Abbildungen sind durch die Inklusionen gegeben. Es folgt aus dem Ausschneidungssatz, dass diese Isomorphismen sind. Wir wählen nun einen Erzeuger von $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Mithilfe der Isomorphismen im Diagramm gibt uns dieser dann auch Erzeuger von $H_n(U, U \setminus x)$ und $H_n(V, V \setminus y)$. Wir definieren nun den *Grad $\deg f|_x$ von f am Punkt x* als die natürliche Zahl, welche folgende Gleichheit erfüllt:

$$f_*(\text{Erzeuger von } H_n(U, U \setminus x)) = \deg f|_x \cdot \text{Erzeuger von } H_n(V, V \setminus y).$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass dieser Grad nicht von den Wahlen von U , V und dem Erzeuger von $H_n(S^n)$ abhängt.

⁶⁷Warum sind diese Abbildungen Isomorphismen? Insbesondere warum ist dies der Fall wenn $n = 1$?

Die folgenden beiden Lemmas werden in Übungsblatt 8 beweisen:

Lemma 7.8. *Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$, $n > 0$, ein Homöomorphismus, dann gilt für jedes $x \in S^n$, dass*

$$\deg f|_x = \deg f.$$

Lemma 7.9. *Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$, $n > 0$, eine Abbildung und $x \in S^n$. Wenn f bei x ein lokaler Homöomorphismus⁶⁸ ist, dann ist*

$$\deg f|_x = \pm 1.$$

Bemerkung. Es gibt verschiedene äquivalente Möglichkeiten die Begriffe ‘orientierte Mannigfaltigkeit’ und ‘orientierungserhaltende Abbildung’ einzuführen.⁶⁹ In allen Fällen gilt unter den Voraussetzungen des vorherigen Lemmas, dass

$$\deg f|_x = \begin{cases} 1, & \text{wenn } f \text{ im Punkt } x \text{ lokal orientierungserhaltend,} \\ -1, & \text{wenn } f \text{ im Punkt } x \text{ lokal orientierungsumkehrend ist.} \end{cases}$$

Mithilfe von folgendem Satz können wir jetzt den Grad einer Abbildung mithilfe von lokalen Abbildungsgraden bestimmen.

Satz 7.10. *Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine Abbildung wobei $n > 0$ und es sei $y \in S^n$, so dass $f^{-1}(y)$ aus endlich vielen Punkten x_1, \dots, x_m besteht.⁷⁰ Dann ist*

$$\deg f = \sum_{i=1}^m \deg f|_{x_i}.$$

Beweis. Wir wählen disjunkte offene Umgebungen U_1, \dots, U_m von x_1, \dots, x_m und eine offene Umgebung V von y , so dass $f(U_i) \subset V$ für $i = 1, \dots, m$. Wir betrachten folgende

⁶⁸Wir sagen $f: X \rightarrow Y$ ist ein lokaler Homöomorphismus im Punkt $x \in X$, wenn es eine offene Umgebung U von x gibt, so dass $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein Homöomorphismus ist.

⁶⁹Eine Möglichkeit ist hierbei wie folgt:

- (1) Eine n -Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum M , so dass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung besitzt, welche homöomorph zu D^n ist.
- (2) Wenn M eine n -Mannigfaltigkeit ist, dann folgt aus dem Ausschneidungssatz, dass für jedes $x \in M$ gilt: $H_{n-1}(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$.
- (3) Eine Orientierung von M ist eine Wahl von einem Erzeuger ϕ_x von $H_{n-1}(M, M \setminus x)$ für jedes $x \in M$, so dass es für alle Teilmengen $V \subset M$ mit $H_n(M, M \setminus V) \cong \mathbb{Z}$ einen Erzeuger ψ_V von $H_n(M, M \setminus V)$ gibt, so dass für jedes $x \in V$ das Bild von ψ_V unter dem Isomorphismus

$$H_n(M, M \setminus V) \rightarrow H_n(M, M \setminus x)$$

gerade ϕ_x ist. Für $x \in M$ nennen wir dann ϕ_x einen positiven Erzeuger und wir nennen $-\phi_x$ einen negativen Erzeuger von $H_n(M, M \setminus x)$.

- (4) Ein Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ heißt dann orientierungserhaltend, wenn das Bild von einem positiven Erzeuger wiederum ein positiver Erzeuger ist.

⁷⁰Gibt es immer solch ein y ?

Modifikation von Diagramm (7.1):

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) & & \\
 \downarrow & \searrow j & \downarrow \cong & & \\
 \bigoplus_{i=1}^m H_n(S^n, S^n \setminus x_i) & \xleftarrow{\oplus p_i} & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n \setminus y) \\
 \cong \uparrow & \nearrow \oplus k_i & & & \cong \uparrow q \\
 \bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i \setminus x_i) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus y) & &
 \end{array}$$

Hierbei werden die Abbildungen k_i und p_i durch Inklusionen induziert.⁷¹ Man sieht leicht, dass dieses Diagramm kommutativ ist.⁷² Der Ausschneidungssatz⁷³ besagt, dass die Inklusionen $(U_i, U_i \setminus x_i) \rightarrow (S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^m k_i: \bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i \setminus x_i) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$$

induzieren. Aus der Kommutativität des unteren Dreiecks folgt dann auch, dass

$$\bigoplus_{i=1}^m p_i: H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m H_n(S^n, S^n \setminus x_i)$$

ein Isomorphismus ist.

Wir identifizieren nun $H_n(S^n)$ mit \mathbb{Z} . Wie in der Definition vom lokalen Graden verwenden wir dann die angegebenen Isomorphismen um $H_n(S^n, S^n \setminus x_i)$, $H_n(U_i, U_i \setminus x_i)$ und $H_n(V, V \setminus y)$ ebenfalls mit \mathbb{Z} zu identifizieren. (Wir bezeichnen die 1 manchmal mit $1_{H_n(S^n)}$ etc. um die Gruppen zu unterscheiden.) Die Kommutativität der Dreiecke und die Wahl der Identifikationen mit \mathbb{Z} besagt nun, dass $(p_i \circ j)(1) = (p_i \circ k_i)(1)$ für $i = 1, \dots, m$. Wir sehen also, dass

$$\sum_{i=1}^m (p_i \circ j)(1) = \sum_{i=1}^m (k_i \circ j)(1).$$

Insbesondere erhalten wir, dass

$$((p_1 \circ j)(1), \dots, (p_m \circ j)(1)) = ((p_1 \circ k_1)(1), \dots, (p_m \circ k_m)(1)).$$

⁷¹Warum ist k_i wirklich durch Inklusionen gegeben?

⁷²Die Kommutativität gilt dabei nur in der Richtung der Pfeile der Abbildungen.

⁷³Zusammen mit dem durch die Inklusionen induzierten Isomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i \setminus x_i) \cong H_n(\cup_i U_i, \cup_i U_i \setminus x_i).$$

Nachdem $\bigoplus_{i=1}^m p_i$ ein Isomorphismus ist, erhalten wir nun, dass

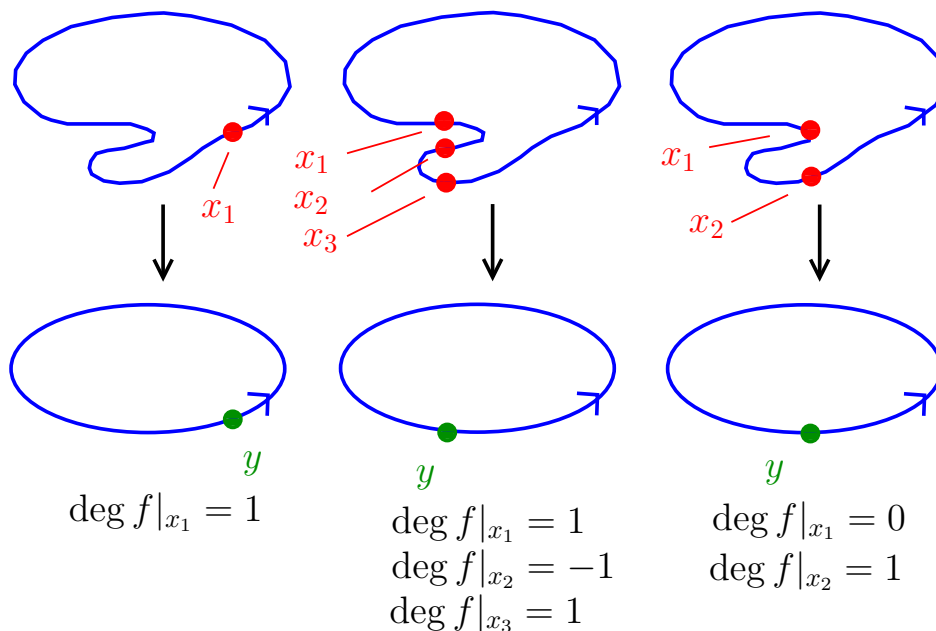
$$j(1) = \sum_{i=1}^m k_i(1).$$

Wir sehen nun, dass

$$\begin{aligned} \deg f &= (q^{-1} \circ f_*)(j(1_{H_n(S^n)})) \\ &= (q^{-1} \circ f_*)(\sum_{i=1}^m k_i(1)) \\ &= \sum_{i=1}^m (q^{-1} \circ f_* \circ k_i)(1_{H_n(U_i, U_i \setminus x_i)}) \\ &= \sum_{i=1}^m f_*(1_{H_n(U_i, U_i \setminus x_i)}) \\ &= \sum_{i=1}^m \deg f|_{x_i}. \end{aligned}$$

Hierbei folgt die erste Gleichheit aus der Definition von $\deg f$ und aus den Identifikationen mit \mathbb{Z} . Die vierte Gleichheit ist gerade die Kommutativität des unteren Vierecks. Die letzte Gleichheit folgt aus den Definitionen von $\deg f|_{x_i}$ und aus den Identifikationen mit \mathbb{Z} . \square

Beispiel. (1) In Abbildung (1) skizzieren wir eine Abbildung $f: S^1 \rightarrow S^1$ und wählen



verschiedene Punkte $y \in S^1$. Wir sehen, dass die Anzahl der Urbilder und die Grade bei den Urbildern ⁷⁴ variieren kann, aber in allen drei Fällen bleibt die Summe der Grade an den Urbildern gleich.

⁷⁴Warum ist im dritten Beispiel der Grad $\deg f|_{x_1}$ gleich null?

(2) Betrachten wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow S^1 \\ z &\mapsto z^m \end{aligned}$$

Wenn $m \neq 0$, dann wählen wir $y = 1$. Die Urbilder von y sind dann gegeben durch $x_j = e^{2\pi i j/m}$ wobei $j = 1, \dots, m$. Dann gilt für jedes i , dass

$$\deg f|_{x_i} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k > 0, \\ -1, & \text{wenn } k < 0. \end{cases}$$

Es folgt also, dass $\deg f = |k| \cdot \text{sign}(k) = k$. Wenn $k = 0$, dann gilt $\deg f = 0$, dies sieht man daraus, dass man beispielsweise $y = -1$ wählt, denn dann ist die Urbildmenge die leere Menge.

Wir kehren jetzt zu der Bestimmung von Homologiegruppen von topologischen Räumen zurück. Betrachten wir nun den projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$. Zur Erinnerung

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \sim \text{ wobei } x \sim -x \text{ für alle } x \in S^n.$$

Wir fassen jetzt für jedes n den Raum \mathbb{R}^n als den Unterraum von \mathbb{R}^{n+1} auf, welcher durch die Bedingung $x_{n+1} = 0$ beschrieben ist. Insbesondere können wir jetzt S^n als Teilmenge von S^{n+1} , und dementsprechend auch $\mathbb{R}P^n$ als Teilmenge von $\mathbb{R}P^{n+1}$ auffassen. Dann ist

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\varphi} D^n \text{ mit } \begin{aligned} \varphi: S^{n-1} = \partial D^n &\rightarrow \mathbb{R}P^{n-1} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto [(x_1, \dots, x_n)] \end{aligned}.$$

Wir sehen also induktiv, dass wir $\mathbb{R}P^n$ als CW-Komplex mit je einer Zelle in den Dimensionen $0, \dots, n$ auffassen können.

Mithilfe von Satz 7.10 und Lemma 5.1 (6) werden wir in Übungsblatt 8 zeigen, dass die Abbildung d_n gerade die Multiplikation mit $1 + (-1)^n$ ist. Wir sehen also, dass der zelluläre Kettenkomplex von $\mathbb{R}P^n$ von folgender Form ist:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^n} \mathbb{Z} \dots \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Es folgt, dass

$$H_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } k = 0, \\ \mathbb{Z}/2, & \text{wenn } k \text{ ungerade und } k < n, \\ 0, & \text{wenn } k \text{ gerade und } k \leq n, \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für $n = 2$ erhalten wir also, wie erhofft, das gleiche Ergebnis wie in Kapitel 6.2.

7.5. Zelluläre Abbildungen. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen CW-Komplexen heißt *zellulär*, wenn für jedes n gilt, dass $f(X^n) \subset Y^n$. Es folgt sofort aus den Definitionen, dass eine zelluläre Abbildung eine Kettenabbildung ⁷⁵

$$f_*: C_*^{CW}(X) \rightarrow C_*^{CW}(Y)$$

induziert.

⁷⁵Warum ist die induzierte Abbildung in der Tat eine Kettenabbildung?

Im allgemeinen sind Abbildungen zwischen CW-Komplexen jedoch nicht zellulär. Betrachten wir beispielsweise den CW-Komplex $X = S^1 = [0, 1]/0 \sim 1$ mit einer 0-Zelle und einer 1-Zelle und betrachten wir den CW-Komplex $Y = S^1 \times S^1 = [0, 1] \times [0, 1]/\sim$ mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle. Dann ist die Diagonalabbildung

$$f: X = [0, 1]/\sim \rightarrow Y = [0, 1] \times [0, 1]/\sim \\ t \mapsto (t, t)$$

keine zelluläre Abbildung. Diesem Problem kann allerdings mithilfe vom nächsten Satz abhilfe geschafft werden.

Wir benötigen dafür noch eine weitere Definition: ein *Unterkomplex* A von einem CW-Komplex X ist eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass die CW-Struktur auf X eine CW-Struktur auf A induziert. Beispielsweise ist jedes n -Gerüst ein Unterkomplex von X . Ein *Paar von CW-Komplexen* ist ein Paar (X, A) wobei X ein CW-Komplex und A ein Unterkomplex von X ist. Wir können jetzt folgenden Satz formulieren.

Satz 7.11. (Zellulärer Approximationsatz) *Es sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren von CW-Komplexen, so dass die Einschränkung von f auf A eine zelluläre Abbildung ist. Dann gibt es eine zelluläre Abbildung $g: X \rightarrow Y$ und eine Homotopie $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ zwischen f und g , so dass $F(a, t) = f(a)$ für alle $a \in A$ und $t \in [0, 1]$.*

Der Satz wird auf Seite 348ff in Hatcher: Algebraic Topology bewiesen. Wir wollen zum Abschluß noch zwei Beispiele dazu betrachten.

(1) Betrachten wir die obige Diagonalabbildung

$$f: X = [0, 1]/\sim \rightarrow Y = [0, 1] \times [0, 1]/\sim \\ t \mapsto (t, t),$$

dann ist f homotop zu der zellulären Abbildung

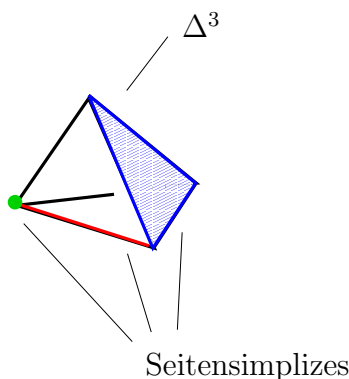
$$f: X = [0, 1]/\sim \rightarrow Y = [0, 1] \times [0, 1]/\sim \\ t \mapsto \begin{cases} (0, 2t), & \text{wenn } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1, 2t - 1), & \text{wenn } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(2) Wir betrachten die n -Sphäre S^n als CW-Komplex mit einer 0-Zelle $P_n = (1, 0, \dots, 0)$ und einer n -Zelle. Es sei $(S^k, P_k) \rightarrow (S^n, P_n)$ eine Abbildung. Wenn $k < n$, dann folgt aus dem Zellulären Approximationsatz, dass es eine Homotopie F von der Abbildung f zur konstanten Abbildung $g(x) = P_n$ gibt, wobei diese Homotopie zudem den Basispunkt P_k fixiert. Es folgt also, dass $\pi_k(S^n, P_n) = 0$.

7.6. Simpliziale Komplexe. Ein *Seitensimplex* von Kodimension r vom Standard n -Simplex ist eine Teilmenge von der Form

$$\{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n \mid t_{d_1} = t_{d_2} = \dots = t_{d_r} = 0\},$$

wobei $d_1 < d_2 < \dots < d_r \in \{0, \dots, n\}$ festgewählt sind. Wir erinnern auch daran, dass wir



mit $\partial\Delta^n$ die Vereinigung aller Seitensimplizes von Δ^n bezeichnen, d.h.

$$\partial\Delta^n = \bigcup_{i=0}^n \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n \mid t_i = 0\}.$$

Wir bezeichnen zudem mit

$$\tilde{\Delta}^n := \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$$

das Innere von Δ^n .

Ein *simplizialer Vor-Komplex* ist ein topologischer Raum zusammen mit injektiven Abbildungen

$$\varphi_i: \Delta^{n_i} \rightarrow X, i \in I.$$

Wir bezeichnen dabei das Bild einer Abbildung $\varphi_i: \Delta^{n_i} \rightarrow X$ als *n_i -dimensionaler Simplex von X* . Wir definieren dann auf offensichtliche Weise auch ‘Unterkomplex’ und ‘das Innere’ von einem Simplex von X .

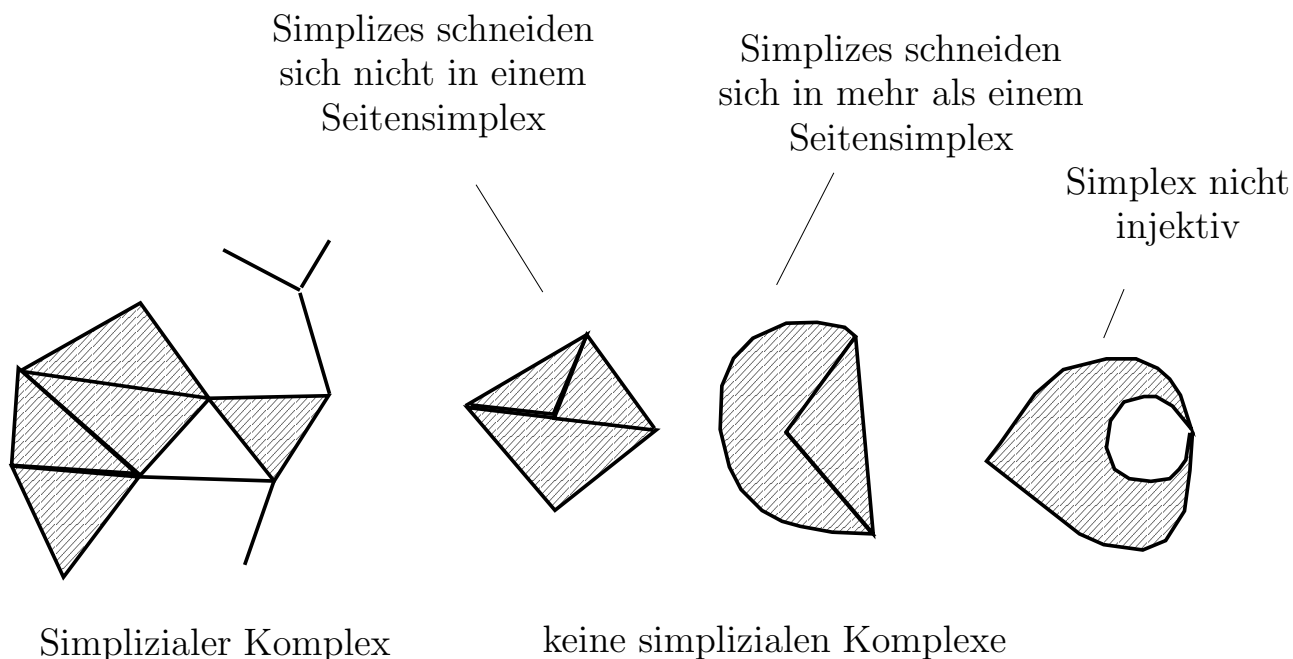
Ein *simplizialer Komplex* ist ein simplizialer Vor-Komplex, wobei die Simplizes folgende Eigenschaften besitzen:

- (1) zu jedem $x \in X$ gibt es genau einen Simplex, so dass x im Inneren des Simplex liegt,
- (2) für jeden Simplex von X ist auch jeder Seitensimplex wiederum ein Simplex von X ,
- (3) zwei Simplizes in X sind entweder disjunkt oder sie schneiden sich in genau einem Seitensimplex,
- (4) eine Teilmenge $A \subset X$ ist offen genau dann, wenn für alle $i \in I$ das Urbild $\varphi_i^{-1}(A)$ offen in Δ^{n_i} ist.⁷⁶

Etwas vereinfacht ausgedrückt ist ein simplizialer Komplex also ein topologischer Raum, welcher daraus entsteht, dass man Simplizes entlang Seitensimplizes verklebt.

Nachdem der Standard n -Simplex homöomorph zum n -dimensionalen Ball ist, sieht man nun leicht, dass ein simplizialer Komplex auch als CW-Komplex aufgefasst werden kann,

⁷⁶Aus der Stetigkeit der Abbildungen $\varphi_i, i \in I$ folgt, dass wenn $A \subset X$ offen ist, dann ist für alle $i \in I$ auch das Urbild $\varphi_i^{-1}(A)$ offen in Δ^{n_i} . Die Aussage von (4) ist also, dass auch der Umkehrschluss gilt.



wobei die n -Simplizes des simplizialen Komplexes gerade den n -Zellen des CW-Komplexes entsprechen.

7.7. Homologiegruppen von Mannigfaltigkeiten. Eine *simpliziale Struktur* (oder auch *Triangulierung*) für einen topologischen Raum X ist ein simplizialer Komplex S zusammen mit einem Homöomorphismus $f: S \rightarrow X$. Folgender Satz wird beispielsweise in

Milnor: Morse theory

bewiesen. Der Beweis geht weit über das hinaus, was wir in dieser Vorlesung schaffen können.

Satz 7.12. *Es sei M eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Dann besitzt M eine simpliziale Struktur, so dass ∂M ein Unterkomplex ist.*

In Übungsblatt 9 werden wir sehen, dass ein CW-Komplex, welcher kompakt und endlich-dimensional ist, nur endlich viele Zellen besitzt. Wenn M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, und wenn wir eine CW-Struktur für M gegeben haben, dann ist n die maximale Dimension einer Zelle. Wir erhalten also nun zusammen mit 7.4 folgendes Korollar zu Satz 7.12.

Korollar 7.13. *Es sei M eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (1) $H_k(M) = 0$ für $k > n$.

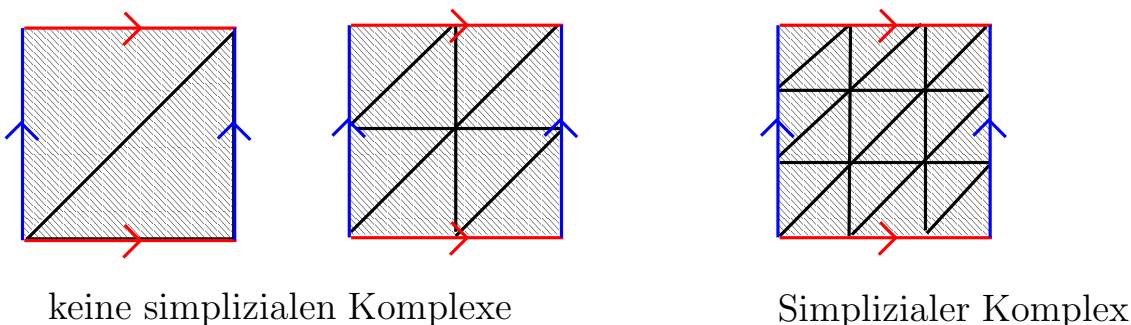


ABBILDUNG 29. Der Torus als simplizialer Komplex.

- (2) Wenn M kompakt ist, dann sind alle Homologiegruppen endlich erzeugte abelsche Gruppen.

Es sei X ein endlicher simplizialer Komplex und es sei c ein k -Simplex von X . Wir sagen c hat *Ordnung* r , wenn es genau r Simplizes der Dimension $k + 1$ gibt, welche c im Rand enthalten. Wir überlassen den Beweis des folgenden Lemmas als freiwillige Übungsaufgabe.

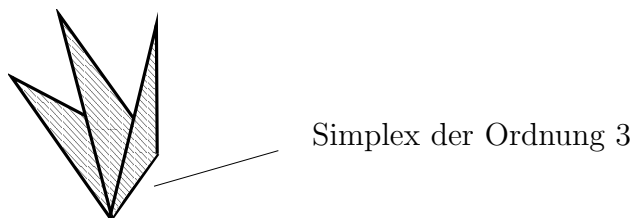


ABBILDUNG 30. Ein Simplex der Ordnung 3.

Lemma 7.14. *Es sei M ein n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer fest gewählten simplizialen Struktur und es sei c ein $(n - 1)$ -dimensionaler Simplex von M . Wenn c im Rand von M liegt, dann ist die Ordnung von c gleich eins, andernfalls ist die Ordnung gleich zwei.*

Wir können nun auch folgenden Satz beweisen.

Satz 7.15. *Es sei M eine zusammenhängende n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } M \text{ orientierbar, kompakt und ohne Rand,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisskizze. Es sei M eine zusammenhängende n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Aus Satz 7.12 folgt, dass M eine simpliziale Struktur besitzt. Wir fassen damit auch M als CW-Komplex auf, wobei die Zellen gerade den Simplizes entsprechen. Aus Satz 7.3 folgt, dass

$$H_n(M) = \text{Ker}\{C_n^{CW}(M) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^{CW}(M)\} = \text{Zykel in } C_n(M).$$

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\varphi_i: \Delta^n \rightarrow M$ die n -Simplizes von M .

Nehmen wir nun an, dass M eine orientierbare, kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Wir wählen eine Orientierung für M und wir wählen eine Orientierung für den Standard n -Simplex Δ^n . Wir können und werden annehmen, dass die Abbildungen φ_i alle orientierungserhaltend⁷⁷ sind. Nachdem M kompakt ist, gibt es nur endlich viele n -dimensionale Simplizes, d.h. wir können annehmen, dass $I = \{1, \dots, k\}$. Wir betrachten dann folgende n -dimensionale Kette in $C_n(X)$:

$$c := \sum_{i=1}^k \varphi_i \in C_n(X).$$

Nachdem M eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist taucht jede $(n-1)$ -dimensionale Zelle im Rand von c bei genau zwei benachbarten n -Zellen auf. Die Wahl der Orientierungen führt zudem dazu, dass jede $(n-1)$ -dimensionale Zelle im Rand von c einmal mit dem Koeffizienten 1 und ein andermal mit dem Koeffizienten -1 aufgeführt wird. Es folgt also, dass $\partial c = 0$, d.h. c ist ein Zykel.

Andererseits, wenn ein Element

$$\sum_{i=1}^k a_i \cdot \varphi_i \in C_n(X).$$

ein Zykel ist, dann müssen nach der obigen Diskussion die Koeffizienten für benachbarte n -Zellen übereinstimmen. Nachdem M zusammenhängend ist, folgt nun, dass alle Koeffizienten übereinstimmen müssen, d.h. der Zykel ist gerade $a c$ für ein $a \in \mathbb{Z}$.

Ähnliche Argumente zeigen nun, dass $H_n(M) = 0$ wenn M nicht orientierbar ist, oder nicht kompakt ist, oder einen nichtleeren Rand besitzt. \square

Es sei M eine kompakte n -dimensionale zusammenhängende C^∞ -Mannigfaltigkeit ohne Rand. Im Beweis von Satz 7.15 haben wir gesehen, dass eine Orientierung einen Erzeuger von $H_n(M)$ festlegt. Wir schreiben diesen als $[M]$ und bezeichnen diesen als die *Fundamentalklasse von M* . Wenn $-M$ die gleiche Mannigfaltigkeit aber mit entgegengesetzter Orientierung ist, dann gilt $[-M] = -[M] \in H_n(M)$.

Ganz ähnlich zu Satz 7.15 kann man auch folgenden Satz beweisen:

Satz 7.16. *Es sei M eine kompakte orientierte n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit mit Randkomponenten N_1, \dots, N_k . Dann gelten folgende Aussagen:*

- (1) $H_n(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}$.
- (2) Die Orientierung von M legt auf kanonische Weise einen Erzeuger $[M]$ von $H_n(M, \partial M)$ fest.
- (3) Die Randkomponenten N_1, \dots, N_k sind kompakte $(n-1)$ -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Die Orientierung von M legt eine Orientierung von N_1, \dots, N_k fest,

⁷⁷Genauer gesagt nehmen wir an, dass die Abbildungen $\varphi_i: \tilde{\Delta}_i \rightarrow M$ orientierungserhaltend sind.

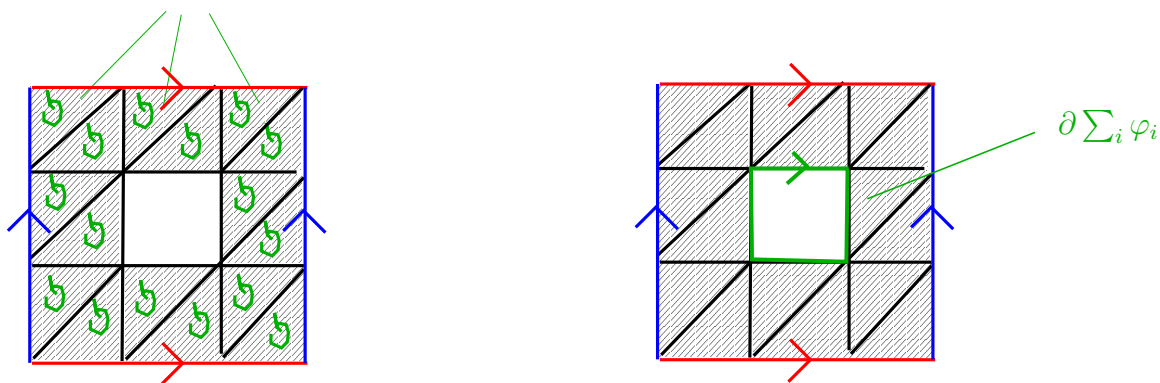
⁷⁸ so dass bei der Randabbildung

$$\partial: H_n(M) \rightarrow H_{n-1}(\partial M) = \bigoplus_{i=1}^k H_{n-1}(N_i)$$

das Bild von $[M]$ gerade $[N_1] + \cdots + [N_k]$ beträgt.

In Abbildung 31 betrachten wir die Fläche F von Geschlecht eins mit einer Randkomponente als simplizialer Komplex. Man sieht dann, dass der Rand der Summe $\sum_i \varphi_i$ von

orientierungserhaltende
2-Simplizes φ_i



Fläche von Geschlecht
eins mit einer Randkomponente
als Simplizialer Komplex

ABBILDUNG 31. Die Fläche von Geschlecht eins mit einer Randkomponente als simplizialer Komplex.

den orientierten 2-Simplizes gerade ein Erzeuger von $H_1(\partial F)$ ist.

Wir beschliessen das Kapitel mit folgendem Satz:

Satz 7.17. *Es sei M eine kompakte n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit mit nichtleerem Rand. Dann ist M homotopieäquivalent zu einem $(n-1)$ -dimensionalen simplizialen Komplex mit endlich vielen Zellen. Insbesondere ist $H_{n-1}(M)$ eine freie abelsche Gruppe.*

⁷⁸Beispielsweise können wir eine Orientierung auf ∂M wie folgt definieren: Es sei $P \in \partial M$. Wir bezeichnen mit $w \in T_P M$ den Normalenvektor zu ∂M , welcher ins 'Innere' von M zeigt. Es sei nun v_1, \dots, v_{n-1} eine Basis von $T_P(\partial M)$. Wir sagen dann, dass v_1, \dots, v_{n-1} eine positive Basis von $T_P(\partial M)$ ist, wenn v_1, \dots, v_{n-1}, w eine positive Basis von $T_P M$ bildet. Dies definiert dann in der Tat eine Orientierung auf ∂M .

Beweisskizze. Es sei also M eine kompakte n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand. Es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für jedes k gibt es einen simplizialen Komplex U in M mit k Simplizes der Dimension n , so dass U ein Deformationsretrakt von M ist, und so dass U einen $(n - 1)$ -Simplex der Ordnung eins enthält.

Aus Satz 7.12 folgt, dass M eine simpliziale Struktur besitzt, so dass ∂M ein Unterkomplex ist. Aus Lemma 7.14 folgt, dass M einen $(n - 1)$ -Simplex der Ordnung eins enthält. Wir haben also bewiesen, dass die Behauptung für zumindest ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Nehmen wir nun an, dass U ein Unterkomplex von M mit k Simplizes der Dimension n ist, wobei U ein Deformationsretrakt von M ist, und wobei U einen $(n - 1)$ -Simplex c der Ordnung eins enthält. Es sei d der n -dimensionalen Simplex mit $c \subset \partial d$.

Wir bezeichnen mit c' die Vereinigung aller Seitensimplizes von d bis auf c . Dann ist c' ein Deformationsretrakt von d . Wir bezeichnen mit U' die Vereinigung von allen Simplizes von U bis auf d . Dann ist U' auch ein Deformationsretrakt von U , und damit auch von M . Der simpliziale Komplex U' besitzt $k - 1$ Simplizes der Dimension n und die $(n - 1)$ -Simplizes in $c' \subset U'$ besitzen alle Ordnung eins.

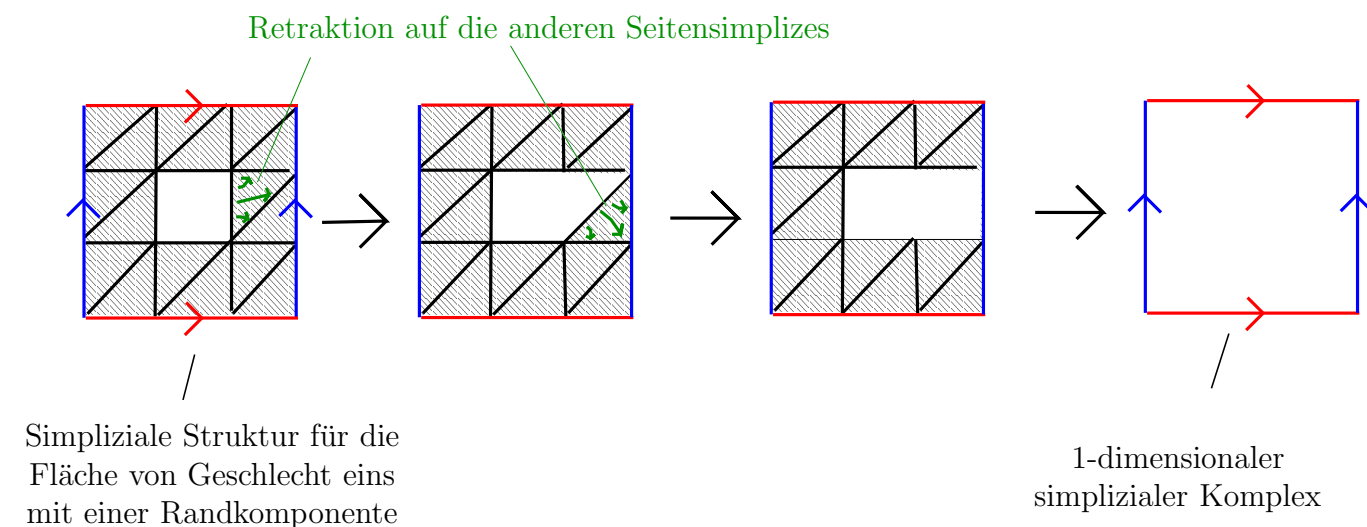


ABBILDUNG 32. Retraktion auf Unterkomplex mit weniger n -dimensionalen Simplizes.

In dem wir dieses Verfahren iterativ fortführen können wir die Behauptung beweisen. \square

8. DIE EULERCHARAKTERISTIK VON EINEM ENDLICHEN CW-KOMPLEX

8.1. Die Definition der Eulercharakteristik. Es sei X ein endlicher CW-Komplex, d.h. ein CW-Komplex mit endlich vielen Zellen. Wir definieren dann die Eulercharakteristik

$\chi(X)$ als die alternierende Summe von der Zahl der Zellen. Genauer gesagt, definieren wir $\chi(X)$ wie folgt:

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \cdot \text{Zahl der } n\text{-dimensionalen Zellen.}$$

Ein kurzer Blick auf die Beispiele in Kapitel 7.1 zeigt, dass die verschiedenen CW-Strukturen vom Torus die gleiche Eulercharakteristik besitzen.

Der folgende Satz besagt, dass dies kein Zufall ist, denn die Eulercharakteristik ist eine topologische Invariante.

Satz 8.1. *Es sei X ein endlicher CW-Komplex, dann gilt⁷⁹*

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \text{Rang}(H_n(X)).$$

Wir nennen

$$b_n(X) := \text{Rang}(H_n(X))$$

die n -te Bettizahl von X . Der Name geht auf den italienischen Mathematiker Betti⁸⁰ zurück, welcher die Vorläufer von den Homologiegruppen studiert hat. Mit dieser Definition können wir also Satz 8.1 umformulieren und erhalten

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^i b_n(X).$$

Beweis. Wenn wir mit (C_n, ∂) den zellulären Kettenkomplex von X bezeichnen, dann entspricht $\text{Rang } C_n$ gerade der Anzahl der n -Zellen in X . Es genügt also folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Es sei

$$0 \rightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \dots C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow 0$$

ein Kettenkomplex von endlich erzeugten Gruppen. Dann gilt

$$\sum_n (-1)^n \text{Rang } C_n = \sum_n (-1)^n \text{Rang } H_n(C_*).$$

Im Beweis der Behauptung werden wir mehrmals folgende Tatsache verwenden, welche wir in Übungsblatt 9 beweisen werden: wenn

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

⁷⁹Zur Erinnerung, wenn G eine endlich erzeugten abelschen Gruppe ist, dann ist G isomorph zu $\mathbb{Z}^r \oplus T$, wobei T endlich ist. Wir nennen dann r den *Rang* von G . Anders ausgedrückt, es sei $T \subset G$ die Torsionsuntergruppe, dann ist T/G isomorph zu \mathbb{Z}^r für ein r , und dieses r ist gerade der Rang von G .

⁸⁰http://de.wikipedia.org/wiki/Enrico_Betti

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten abelschen Gruppen, dann gilt ⁸¹

$$\text{Rang } B = \text{Rang } A + \text{Rang } C.$$

Für den Kettenkomplex schreiben wir nun für jedes n

$$Z_n := \text{Ker}(d_n), B_n := \text{Im}(d_{n+1}) \text{ und } H_n = Z_n/B_n.$$

Diese Gruppen bilden kurze exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0, \text{ und} \\ 0 &\rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Es folgt also, dass

$$\begin{aligned} \text{Rang } C_n &= \text{Rang } Z_n + \text{Rang } B_{n-1}, \text{ und} \\ \text{Rang } Z_n &= \text{Rang } B_n + \text{Rang } H_n. \end{aligned}$$

Wir sehen nun, dass

$$\begin{aligned} \sum_n (-1)^n \text{Rang } C_n &= \sum_n (-1)^n (\text{Rang } Z_n + \text{Rang } B_{n-1}) \\ &= \sum_n (-1)^n (\text{Rang } B_n + \text{Rang } H_n + \text{Rang } B_{n-1}) \\ &= \sum_n (-1)^n \text{Rang } H_n + \sum_n (-1)^n \text{Rang } B_n + \sum_n (-1)^n \text{Rang } B_{n-1} \\ &= \sum_n (-1)^n \text{Rang } H_n + \sum_n (-1)^n \text{Rang } B_n - \sum_m (-1)^m \text{Rang } B_m \\ &= \sum_n (-1)^n \text{Rang } H_n. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Es sei

$$0 \rightarrow H_k \rightarrow H_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow H_1 \rightarrow H_0 \rightarrow 0$$

eine lange exakte Sequenz von Gruppen. Dies bedeutet, dass die Homologiegruppen dieses Komplexes verschwinden. Es folgt also aus der Behauptung im Beweis vom vorherigen Satz, dass

$$\sum_n (-1)^n \text{Rang } H_n = 0.$$

8.2. Eigenschaften der Eulercharakteristik. Die Eulercharakteristik ist also eine Invariante, welcher ‘weniger’ als die Homologiegruppen misst. Andererseits verhält sich die Homologiegruppe besser unter verschiedenen Operationen, wie wir im Folgenden sehen werden.

Lemma 8.2. *Es seien X und Y zwei endliche CW-Komplexe, dann gilt*

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

⁸¹Die Aussage ist analog zur Dimensionsformel für Vektorräume, welche besagt, dass wenn $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von endlich dimensionalen Vektorräumen ist, dann gilt $\dim(B) = \dim(A) + \dim(C)$.

Beweis. Es seien e_α die charakteristischen Abbildungen von X und es seien f_β die charakteristischen Abbildungen von Y . Wir identifizieren im Folgenden für jede Wahl von k, l den Raum $D^k \times D^l$ mit D^{k+l} . Man kann nun $X \times Y$ als CW-Komplex auffassen, wobei für jedes n gilt:

$$(X \times Y)_n = \bigcup_{k+l=n} X_k \times Y_l,$$

und wobei die Zellen in $X \times Y$ gerade die Produkte der Zellen in X und Y sind. Genauer gesagt, für eine k -Zelle von X mit charakteristischer Abbildung e_α und eine l -Zelle von Y mit charakteristischer Abbildung e_β erhalten wir eine $k+l$ -Zelle von $X \times Y$ mit charakteristischer Abbildung

$$\begin{aligned} D^{k+l} = D^k \times D^l &\rightarrow X \times Y \\ (x, y) &\mapsto (e_\alpha(x), f_\beta(y)). \end{aligned}$$

Darüber hinaus ist jede Zelle in $X \times Y$ von dieser Form. Es gilt also, dass

$$\#n\text{-Zellen von } X \times Y = \sum_{k+l=n} \#k\text{-Zellen von } X \cdot \#l\text{-Zellen von } Y.$$

In Übungsblatt 9 werden wir daraus die gewünschte Aussage $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$ herleiten. \square

Folgendes Lemma erlaubt es uns auch die Eulercharakteristik von Vereinigungen von Teilkomplexen zu bestimmen.

Lemma 8.3. *Es sei $X = Y \cup Z$ eine Zerlegung von einem endlichen CW-Komplex in zwei Unterkomplexe Y und Z . Dann gilt*

$$\chi(X) = \chi(Y) + \chi(Z) - \chi(Y \cap Z).$$

Dieses Lemma folgt aus Bemerkung nach Satz 8.1 angewandt auf die Mayer-Vietoris Sequenz angewandt auf $X = Y \cup Z$. Wir können das Lemma aber auch ganz ‘elementar’ beweisen.

Beweis. Für einen endlichen CW-Komplex W bezeichnen wir mit $n(W)$ die Anzahl der n -Zellen. In unserem Fall gilt dann, dass

$$\begin{aligned} n(X) &= n(Y \setminus (Y \cap Z)) + n(Z \setminus (Y \cap Z)) + n(Y \cap Z) \\ &= (n(Y) - n(Y \cap Z)) + (n(Z) - n(Y \cap Z)) + n(Y \cap Z) \\ &= n(Y) + n(Z) - n(Y \cap Z). \end{aligned}$$

Durch ‘alternierendes’ Aufsummieren erhalten wir dann sofort, dass

$$\chi(X) = \chi(Y) + \chi(Z) - \chi(Y \cap Z).$$

\square

Wir können mithilfe von Lemma 8.3 nun endgültig die Homologiegruppen eines Knotenkomplements bestimmen.

Lemma 8.4. *Es sei $K \subset S^3$ ein Knoten. Dann gilt*

$$H_0(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}, H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z} \text{ und } H_i(S^3 \setminus K) = 0 \text{ f\"ur } i \geq 2.$$

Beweis. Es sei also $K \subset S^3$ ein Knoten. Nachdem $S^3 \setminus K$ wegzusammenhängend ist folgt natürlich, dass $H_0(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. In Lemma 6.5 (oder auch Korollar 3.8) hatten wir zudem gezeigt, dass $H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$.

Wie im Beweis von Lemma 6.5 wählen wir eine injektive C^∞ -Abbildung $\Phi: S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ mit $K = \Phi(S^1 \times 0)$. Wir schreiben $X := S^3 \setminus \Phi(S^1 \times \text{int}(D^2))$. Offensichtlich ist X homotopieäquivalent zu $S^3 \setminus K$. Es genügt also die Homologiegruppen von X zu bestimmen.

Nachdem X eine kompakte orientierte n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand ist, folgt aus Satz 7.17, dass $H_2(X)$ torsions-frei ist.

Es genügt also nun zu zeigen, dass $\text{Rang}(H_2(X)) = 0$ ist. Dies ist nun äquivalent zu folgender Behauptung.

Behauptung. Es ist $\chi(X) = 0$.

Wir setzen $Z := \Phi(S^1 \times D^2)$. Dann ist $X \cup Z = S^3$ und $X \cap Z$ ist der 2-Torus $\Phi(S^1 \times S^1)$. Es folgt nun aus Lemmas 8.2 und 8.3, dass

$$0 = \chi(S^3) = \chi(X) + \chi(Z) - \chi(2\text{-Torus}) = \chi(X) + \underbrace{\chi(S^1 \times D^2)}_{=0} - \underbrace{\chi(S^1 \times S^1)}_{=0} = \chi(X).$$

Die beschließt den Beweis der Behauptung und damit auch von Lemma 8.4. □

Es sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine k -fache Überlagerung⁸² von zusammenhängenden topologischen Räumen, dann hatten wir in der Topologievorlesung gesehen, dass $p_*(\pi_1(\tilde{X}))$ eine Untergruppe von Index k von $\pi_1(X)$ ist. Diese Aussage gilt nicht für Homologiegruppen. Beispielsweise ist $p: S^2 \rightarrow S^2 / \sim = \mathbb{R}P^2$ eine 2-fache Überlagerung aber $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ und $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$.⁸³

Es ist daher überraschend im folgenden Satz zu sehen, dass sich die Eulercharakteristik mit Überlagerungen gut verträgt.

Satz 8.5. *Es sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine k -fache Überlagerung von einem CW-Komplex. Dann ist \tilde{X} ebenfalls ein CW-Komplex und es gilt*

$$\chi(\tilde{X}) = k \cdot \chi(X).$$

⁸²Um ganz genau zu sein, muss $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine k -fache Überlagerung von wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden und semilokal einfach zusammenhängenden punktierten topologischen Räumen sein.

⁸³Die Aussage gilt auch nicht für die erste Homologiegruppe. Beispielsweise gibt es eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit P , mit der Eigenschaften, dass $H_1(P) = 0$, dass $\pi_1(P)$ eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 120 ist, und so dass die universelle Überlagerung von P ist S^3 . Diese Mannigfaltigkeit wird die Poincaré-Homologiesphäre genannt. Poincaré hatte zuerst vermutet, dass eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit trivialer Homologiegruppe von homöomorph zu S^3 ist. Nachdem er die Mannigfaltigkeit P gefunden hatte, hat Poincaré seine berühmte Vermutung umformuliert.

Beispielsweise gilt

$$\begin{array}{ll} H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}, & H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}, \\ H_1(S^2) \cong 0, & H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2, \\ H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}, & H_2(\mathbb{R}P^2) \cong 0, \\ H_i(S^2) \cong 0, i \geq 2, & H_i(\mathbb{R}P^2) \cong 0, i \geq 2. \end{array} \quad \text{sowie}$$

Wir sehen also, dass $\chi(S^2) = 2$ in der Tat das zweifache von $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ ist.

Beweis. Es sei nun $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine k -fache Überlagerung von einem CW-Komplex. Es sei $\Phi_\alpha: D_\alpha^n \rightarrow X$ die charakteristische Abbildung einer n -Zelle von X . Wir schreiben $x := \Phi_\alpha(0)$. Dann besteht $p^{-1}(x)$ aus genau k Punkten $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ in \tilde{X} . Nachdem $\pi_1(D_\alpha^n)$ trivial ist folgt aus dem Hochhebungssatz aus der Topologievorlesung, dass es für $i = 1, \dots, k$ genau eine Hochhebung $\Phi_\alpha^i: D_\alpha^n \rightarrow \tilde{X}$ mit $\Phi_\alpha^i(0) = \tilde{x}_i$ gibt.

Man kann nun zeigen, dass diese Abbildungen definieren eine CW-Struktur auf \tilde{X} definieren. Hierbei ist jede Zelle in X von genau k Zellen in \tilde{X} überlagert, d.h. es gilt

$$\#\{n\text{-Zellen von } \tilde{X}\} = k \cdot \#\{n\text{-Zellen von } X\}.$$

Insbesondere folgt also, dass

$$\chi(\tilde{X}) = k \cdot \chi(X).$$

□

Beispiel. Es sei F eine geschlossene Fläche von Geschlecht g . Dann folgt aus den Berechnungen von Kapitel 7.3 und aus Satz 8.1, dass

$$\chi(F) = 2 - 2g.$$

Es sei nun $p: \tilde{F} \rightarrow F$ eine k -fache Überlagerung, dann folgt aus Satz 8.5, dass

$$\chi(\tilde{F}) = k \cdot \chi(F).$$

Lösen wir nun die obigen Formel für die Eulercharakteristik nach dem Geschlecht von \tilde{F} auf, dann erhalten wir, dass

$$\text{Geschlecht von } \tilde{F} = \frac{k}{2} \cdot \text{Geschlecht von } F + 1 - \frac{k}{2}.$$

Wir erinnern daran, dass eine Gruppe G diskret auf einem topologischen Raum X operiert, wenn es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt, so dass

$$U \neq gU \text{ für alle } g \neq e.$$

Beispielsweise operiert für jedes k die Gruppe \mathbb{Z}/k auf S^1 indem wir $l \in \mathbb{Z}/k$ die Multiplikation mit $e^{2\pi il}$ zuordnen. Man kann dieses Beispiel leicht verallgemeinern. Es sei S^{2n-1} eine ungerad-dimensionale Sphäre. Wir fassen S^{2n-1} dann als Teilmenge von \mathbb{C}^n auf, d.h.

$$S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}.$$

Dann definiert

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}/k \times S^{2n-1} & \rightarrow S^{2n-1} \\ (l, (z_1, \dots, z_n)) & \mapsto (e^{2\pi il/k} z_1, \dots, e^{2\pi il/k} z_n) \end{array}$$

eine diskrete Operation von \mathbb{Z}/k auf S^{2n-1} .

Man kann sich nun fragen, ob zyklischen Gruppen auch diskret auf gerad-dimensionalen Sphären operieren können. Offensichtlich operiert die triviale Gruppe auf S^{2n} und auch $\mathbb{Z}/2$ mithilfe der Abbildung $x \mapsto -x$. Das folgende Lemma besagt nun, dass es keine weiteren diskreten Operationen gibt.

Satz 8.6. *Wenn eine Gruppe G diskret auf S^{2n} operiert, dann ist G entweder trivial oder $G \cong \mathbb{Z}/2$.*

Beweis. Wir hatten in der Topologievorlesung gesehen, dass wenn eine Gruppe G diskret auf einer Mannigfaltigkeit M operiert, dann ist die Projektionsabbildung $M \rightarrow M/G$ eine $|G|$ -fache Überlagerung.

Es sei nun G eine Gruppe, welche diskret auf S^{2n} operiert. Dann ist $S^{2n} \rightarrow S^{2n}/G$ eine $|G|$ -fache Überlagerung. Aus Satz 8.5, dass

$$2 = \chi(S^{2n}) = |G| \cdot \chi(S^{2n}/G),$$

d.h. $|G| = 1$ oder $|G| = 2$. Im ersten Fall ist G die triviale Gruppe und im zweiten Fall ist $G \cong \mathbb{Z}/2$. \square

8.3. Graphen. Wir definieren einen *Graphen* als einen 1-dimensionalen CW-Komplex G mit endlich vielen Zellen. Wir bezeichnen die 0-Zellen als die *Eckpunkte* von G und wir bezeichnen die 1-Zellen als die *Kanten* von G . Mithilfe der Ergebnisse von diesem Kapitel

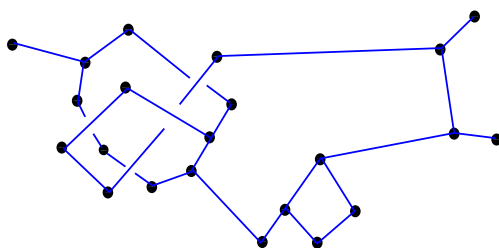


ABBILDUNG 33. Beispiel für einen Graph in \mathbb{R}^3 .

können wir jetzt leicht folgendes Lemma beweisen:

Lemma 8.7. *Es sei G ein zusammenhängender Graph mit e Eckpunkten und k Kanten ist, dann gilt*

$$H_0(G) \cong \mathbb{Z}, H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{k-e+1} \text{ und } H_i(G) = 0 \text{ für } i \geq 2.$$

Beweis. Aus Lemma 2.3 folgt natürlich, dass $H_0(G) \cong \mathbb{Z}$. Aus Korollar 7.4 folgt zudem, dass $H_i(G) = 0$ für $i \geq 2$ und es folgt zudem, dass $H_1(G)$ torsions-frei ist.

Aus Satz 8.1 folgt außerdem, dass

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \text{Rang}(H_i(X)).$$

In unserem Fall erhalten wir also, dass

$$1 - \text{Rang}(H_1(G)) = \chi(X) = \#0\text{-Zellen} - \#1\text{-Zellen} = e - k.$$

Nachdem $H_1(G)$ aber torsion-frei ist erhalten wir dann, dass $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{k-e+1}$. \square

In der Topologievorlesung hatten wir Graphen etwas abstrakter eingeführt und dann deren topologische Realisierung betrachtet. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass Graphen wie oben eingeführt gerade den topologischen Realisierungen von abstrakten Graphen aus der Topologievorlesung entspricht. In der Topologievorlesung hatten wir zudem bewiesen, dass wenn G ein zusammenhängender Graph mit e Eckpunkten und k Kanten ist, dann gilt

$$\pi_1(G) \cong \text{freie Gruppe mit } k - e + 1 \text{ Erzeugern.}$$

Mithilfe von Satz 3.7 gibt das dann einen alternativen Beweis dafür, dass $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{k-e+1}$.

9. HOMOLOGIE MIT KOEFFIZIENTEN

9.1. Kettenkomplexe über Ringen. Es sei R ein kommutativer Ring⁸⁴. Ein *Kettenkomplex* (C_*, ∂_*) von R -Moduln ist eine Folge

$$\rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

von Homomorphismen zwischen R -Moduln, so dass für alle i gilt $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$. Wir definieren dann wie üblich die n -te Homologie des Kettenkomplexes:

$$H_n(C) := \text{Ker}\{\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}\} / \text{Ker}\{\partial_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n\}.$$

Dabei ist $H_n(C)$ als Quotient von zwei R -Moduln ebenfalls selber ein R -Modul.

Die Sätze, welche wir über Kettenkomplexen von freien abelschen Gruppen bewiesen haben, gelten (mit den offensichtlichen Abänderungen) auch für Kettenkomplexen von R -Moduln. Insbesondere kann man sich leicht davon überzeugen, dass Lemma 2.5, Lemma 3.1, Korollar 3.2, Satz 4.6 und 4.7 auch in diesem allgemeineren Kontext gelten.

9.2. Das Tensorprodukt von abelschen Gruppen. Es seien A und B abelsche Gruppen. Wir definieren dann das *Tensorprodukt* $A \otimes B$ wie folgt:

$$A \otimes B := \left\{ \begin{array}{l} \text{freie abelsche Gruppe, welche von} \\ \text{Symbolen } a \otimes b, a \in A, b \in B \text{ erzeugt wird} \end{array} \right\} / \sim$$

wobei für alle $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ gilt

$$\begin{aligned} (a + a') \otimes b &\sim a \otimes b + a' \otimes b, \\ a \otimes (b + b') &\sim a \otimes b + a \otimes b'. \end{aligned}$$

Für $a \in A$ und $b \in B$ bezeichnen wir das Bild von $a \otimes b$ in $A \otimes B$ ebenfalls mit $a \otimes b$. Ein Element in $A \otimes B$ ist also von der Form $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$.

⁸⁴Mit *Ring* meinen wir in der Vorlesung eine abelsche Gruppe mit einer Verknüpfung, welche assoziativ und distributiv ist, und welche zudem ein multiplikativ neutrales Element besitzt. Wir setzen nicht voraus, dass ein Ring kommutativ ist.

Wir beweisen als erstes folgendes Lemma.

Lemma 9.1. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{Z} \otimes A &\rightarrow A \\ \sum_{i=1}^k n_i \otimes a_i &\mapsto \sum_{i=1}^k n_i a_i \end{aligned}$$

ist wohl-definiert und ein Isomorphismus.

Beweis. Es ist leicht zu überprüfen, dass Φ ein wohl-definierter Gruppenhomomorphismus ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: A &\rightarrow \mathbb{Z} \otimes A \\ a &\mapsto 1 \otimes a. \end{aligned}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass Φ und Ψ zueinander inverse Abbildungen sind. Es ist offensichtlich, dass $\Phi \circ \Psi = \text{id}_A$. Es verbleibt zu zeigen, dass $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\mathbb{Z} \otimes A}$. Nachdem $\mathbb{Z} \otimes A$ von Elementen der Form $n \otimes a$ erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass

$$(\Psi \circ \Phi)(n \otimes a) = n \otimes a \in \mathbb{Z} \otimes A$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$. Es sei also $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $n > 0$. Dann gilt

$$(\Psi \circ \Phi)(n \otimes a) = 1 \otimes na = 1 \otimes \sum_{i=1}^n a = \sum_{i=1}^n 1 \otimes a = \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) \otimes a = n \otimes a.$$

□

Für abelsche Gruppen A, B, C und $A_i, i \in I$ kann man nun auch leicht folgende Aussagen beweisen:

- (1) Die Zuweisung $a \otimes b \mapsto b \otimes a$ induziert einen Isomorphismus ⁸⁵

$$A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A.$$

- (2) Die Zuweisung $(\sum_i a_i) \otimes b \mapsto \sum_i a_i \otimes b$ induziert einen Isomorphismus

$$\left(\bigoplus_{i \in I} A_i \right) \otimes B \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i \in I} A_i \otimes B.$$

- (3) Die Zuweisung $(a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$ induziert einen Isomorphismus

$$(A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C).$$

- (4) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ induziert die Zuweisung $n \otimes a \mapsto na$ einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/k \otimes A \xrightarrow{\cong} A/kA.$$

(Diese Aussage wird in Übungsblatt 10 bewiesen.)

⁸⁵Etwas genauer gesagt, die Abbildung $\sum_{j=1}^k a_j \otimes b_j \mapsto \sum_{j=1}^k b_j \otimes a_j$ definiert einen solchen Isomorphismus.

Wenn $f: A \rightarrow A'$ und $g: B \rightarrow B'$ Homomorphismen zwischen abelschen Gruppen sind, dann definiert

$$a \otimes b \mapsto f(a) \otimes f(b)$$

einen Homomorphismus $A \otimes B \mapsto A' \otimes B'$.

Ein wichtiger Spezialfall ist dabei der Fall, dass $B = R$ ein kommutativer Ring ist. Dann definiert

$$\begin{aligned} (A \otimes R) \times R &\mapsto A \otimes R \\ (\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i, r) &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i r \end{aligned}$$

eine R -Modulstruktur auf $A \otimes R$. Beispielsweise, wenn A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist, dann ist $A \otimes \mathbb{Q}$ ein rationaler Vektorraum und es gilt

$$\dim_{\mathbb{Q}}(A \otimes \mathbb{Q}) = \text{Rang}(A).$$

Diese Aussage wird in Übungsblatt 10 bewiesen.

Zudem, wenn $f: A \rightarrow B$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist, dann ist

$$\begin{aligned} f \otimes \text{id}: A \otimes R &\rightarrow B \otimes R \\ \sum_i a_i \otimes r_i &\mapsto \sum_i f(a_i) \otimes r_i \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von R -Moduln. Man kann nun leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} A &\mapsto A \otimes R \\ (f: A \rightarrow B) &\mapsto (f \otimes \text{id}: A \otimes R \rightarrow B \otimes R) \end{aligned}$$

einen Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppe zur Kategorie der R -Module definiert.

Bemerkung. Man kann das Tensorprodukt auch allgemeiner für Moduln über einem beliebigen kommutativen Ring einführen. Es sei also R ein kommutativer Ring und es seien V und W zwei R -Moduln. Wir sagen, dass ein R -Homomorphismus $f: V \times W \rightarrow X$ *bilinear* ist, wenn für alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $r \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} f(v + v', w) &= f(v, w) + f(v', w), & \text{und} & & f(v, w + w') &= f(v, w) + f(v, w') \\ f(rv, w) &= rf(v, w) & & & f(v, rw) &= rf(v, w). \end{aligned}$$

Wir sagen eine bilineare Abbildung $f: V \times W \rightarrow X$ besitzt die *universelle bilineare Eigenschaft*, wenn es zu jeder bilinearen Abbildung $g: V \times W \rightarrow Y$ *genau einen* R -Homomorphismus $\varphi: X \rightarrow Y$ gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow g & \downarrow \varphi \text{ eindeutig} \\ & & Y. \end{array}$$

In Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass folgende Aussagen gelten:

- (a) Es gibt eine bilineare Abbildung $f: V \times W \rightarrow X$, welche die universelle bilineare Eigenschaft besitzt.

- (b) Wenn $f: V \times W \rightarrow X$ und $f': V \times W \rightarrow X'$ die universelle bilineare Eigenschaft besitzen, dann gibt es genau einen Isomorphismus $\varphi: X \rightarrow X'$, so dass $\varphi(f(v, w)) = f'(v, w)$ für alle $v \in V$ und $w \in W$.

Wir bezeichnen den durch (a) und (b) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten R -Modul mit $V \otimes_R W$ und bezeichnen die eindeutig bestimmte Abbildung $V \times W \rightarrow V \otimes_R W$ mit $(v, w) \mapsto v \otimes w$. Wenn $R = \mathbb{Z}$, dann erhalten wir das oben eingeführte Tensorprodukt von abelschen Gruppen und wir schreiben $V \otimes W$ anstatt $V \otimes_{\mathbb{Z}} W$.

9.3. Das Tensorprodukt von Kettenkomplexen mit abelschen Gruppen. Es sei nun

$$\rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

ein algebraischer Kettenkomplex und R ein kommutativer Ring. Dann können wir den Kettenkomplex mit R tensorieren, d.h. wir betrachten die folgende Sequenz von R -Moduln und R -Modulhomomorphismen:

$$\rightarrow C_n \otimes R \xrightarrow{\partial_n \otimes \text{id}} C_{n-1} \otimes R \xrightarrow{\partial_{n-1} \otimes \text{id}} \dots C_1 \otimes R \xrightarrow{\partial_1 \otimes \text{id}} C_0 \otimes R \rightarrow 0.$$

Es ist offensichtlich, dass für alle i gilt

$$(\partial_{i-1} \otimes \text{id}) \circ (\partial_i \otimes \text{id}) = (\partial_{i-1} \circ \partial_i) \otimes \text{id} = 0,$$

d.h. die obige Sequenz von Abbildungen ist ein Kettenkomplex von R -Moduln.

Es sei nun X ein topologischer Raum. Für einen kommutativen Ring R definieren wir dann

$$C_*(X; R) := C_*(X) \otimes R$$

und wir bezeichnen mit

$$H_k(X; R) := H_k(C_*(X; R), \partial)$$

die zugehörigen Homologiegruppen. Wir nennen dann $H_k(X; R)$ die k -te Homologiegruppe von X mit R -Koeffizienten.

Aus Eigenschaft (4) des Tensorproduktes folgt, dass wir kanonische Isomorphismen $C_*(X; \mathbb{Z}) \cong C_*(X)$ und $H_*(X; \mathbb{Z}) \cong H_*(X)$ haben. Wir werden im Folgenden diese Gruppen identifizieren und zwischen diesen Schreibweisen beliebig hin- und herwechseln.

Bemerkung. Warum will man die Homologiegruppen eines topologischen Raums mit R -Koeffizienten studieren? Es gibt dazu mehrere Antworten:

- (1) Es ist manchmal leichter mit einem Körper als mit dem Ring \mathbb{Z} zu arbeiten.
- (2) Die Berechnungen vereinfachen sich wenn wir mit einem endlichen Körper arbeiten. Beispielsweise könnten wir den Fall $R = \mathbb{F}_2$ betrachten, in diesem Fall müssen wir uns um Vorzeichen keine Gedanken mehr machen.
- (3) Wenn M eine geschlossene C^∞ -Mannigfaltigkeit ist, dann kann man mithilfe von Differentialformen für jedes k die k -te de Rham Kohomologiegruppe $H_{dR}^k(M)$ einführen. (Siehe die Analysis III-Vorlesung.) Man kann nun zeigen, dass für jedes k die reelle Homologiegruppe $H_k(M; \mathbb{R})$ isomorph zur k -ten de Rham Kohomologiegruppe

$H_{dR}^k(M)$ ist. Wir werden darauf später in der Vorlesung noch etwas genauer eingehen.

Die meisten Sätze über Homologiegruppen von topologischen Räumen übertragen sich, mit den offensichtlichen Abänderungen, auch zu den Homologiegruppen mit R -Koeffizienten. Beispielsweise gilt:

- (1) Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert für jedes k einen R -Homomorphismus $f_*: H_k(X; R) \rightarrow H_k(Y; R)$. Die k -de Homologiegruppe mit R -Koeffizienten definiert zudem einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume zur Kategorie der R -Moduln.
- (2) Wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist $H_0(X; R) = R$.
- (3) Homotope Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ induzieren die gleichen Abbildungen

$$f_* = g_*: H_k(X; R) \rightarrow H_k(Y; R).$$

- (4) Für Paare (X, A) können wir analog die Homologiegruppen $H_k(X, A; R)$ einführen, und es gibt dann wiederum eine lange exakte Sequenz der Homologiegruppen mit R -Koeffizienten.
- (5) Es gilt der Ausschneidungssatz und der Satz von Mayer-Vietoris für Homologiegruppen mit R -Koeffizienten.
- (6) Für einen CW-Komplex X betrachten wir $C_*^{CW}(X; R) := C_*^{CW}(X) \otimes R$ und die dazugehörigen zellulären Homologiegruppen $H_*^{CW}(X; R)$. Dann gilt wiederum, dass $H_*^{CW}(X; R) \cong H_*(X)$.
- (7) Wenn X ein endlicher CW-Komplex ist und \mathbb{F} ein Körper, dann werden wir in Übungsblatt 10 sehen, dass

$$(9.1) \quad \chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{F}}(H_i(X; \mathbb{F})).$$

Es stellt sich nun die Frage, ob es eine Verbindung zwischen den verschiedenen Homologiegruppen gibt. Beispielsweise kann man sich fragen, ob $H_k(X; R) = H_k(X) \otimes R$. Dies ist jedoch nicht der Fall. Betrachten wir beispielsweise den $\mathbb{R}P^2$ mit der CW-Struktur mit einer 0-Zelle, einer 1-Zelle und einer 2-Zelle. Dann erhalten wir folgenden Kettenkomplex

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

d.h. $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$, $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2$ und $H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$. Andererseits, wenn wir den Kettenkomplex mit \mathbb{F}_2 tensorieren, dann erhalten wir den Kettenkomplex

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \xrightarrow{2=0} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{F}_2 \rightarrow 0,$$

d.h. $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$, $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$ und $H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$. Wir sehen also, dass

$$\mathbb{F}_2 = H_2(X; \mathbb{F}_2) \neq H_2(X) \otimes \mathbb{F}_2 = 0.$$

In diesem Beispiel sieht man auch schön das Satz 8.1 und (9.1) beide die Eulercharakteristik ergeben, obwohl die einzelnen Gruppen verschieden sind: In der Tat, es ist

$$\begin{aligned} \text{Rang}(H_0(X)) - \text{Rang}(H_1(X)) + \text{Rang}(H_2(X)) &= 1 - 0 + 0 = 1, \text{ und} \\ \dim_{\mathbb{F}_2}(H_0(X; \mathbb{F}_2)) - \dim_{\mathbb{F}_2}(H_1(X; \mathbb{F}_2)) + \dim_{\mathbb{F}_2}(H_2(X; \mathbb{F}_2)) &= 1 - 1 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Im folgenden Kapitel werden wir sehen, dass man trotz dieses Beispiels die Homologiegruppen $H_*(X; R)$ aus den Homologiegruppen $H_*(X)$ bestimmen kann. Allerdings ist der Zusammenhang nicht ganz so naiv, wie man sich das am Anfang erhoffen würde.

9.4. Freie Auflösungen und die G -Torsion einer abelschen Gruppe. Zur Erinnerung, wir bezeichnen mit \mathcal{K} die Kategorie der Kettenkomplexe, hierbei ist

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{K}) &:= \text{alle Kettenkomplexe,} \\ \text{Mor}(C_*, D_*) &:= \text{alle Kettenabbildungen von } C_* \text{ nach } D_*. \end{aligned}$$

Es sei $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ ein Funktor.

(1) Wir sagen, F ist *exakt*, wenn für alle exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

auch

$$0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(j)} F(C) \rightarrow 0$$

exakt ist.

(2) Wir sagen, F ist *links-exakt*, wenn für alle exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

auch

$$0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(j)} F(C)$$

exakt ist.

(3) Wir sagen, F ist *rechts-exakt*, wenn für alle exakten Sequenzen

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

auch

$$F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(j)} F(C) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Wenn ein Funktor links-exakt und rechts-exakt ist, dann ist der Funktor natürlich auch exakt.

Wir hatten im vorherigen Kapitel implizit schon gesehen, dass tensorieren mit einer abelschen Gruppe G im Allgemeinen nicht links-exakt ist. Beispielsweise ist

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k$$

exakt, aber das Tensorprodukt mit $\otimes \mathbb{Z}/k$ führt dies in die nicht exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/k \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/k \rightarrow \mathbb{Z}/k$$

über. Wir werden jetzt sehen, dass tensorieren mit einer abelschen Gruppe G immerhin rechts-exakt ist.

Lemma 9.2. *Es sei*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, dann ist für jede abelsche Gruppe auch

$$A \otimes G \xrightarrow{i \otimes \text{id}} B \otimes G \xrightarrow{j \otimes \text{id}} C \otimes G \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Es gilt $(i \otimes \text{id}) \circ (j \otimes \text{id}) = (i \circ j) \otimes \text{id} = 0$, d.h. die Verknüpfung der Abbildungen in der unteren Sequenz ist die Nullabbildung. Nachdem $j: B \rightarrow C$ surjektiv ist, ist auch die Abbildung $j \otimes \text{id}: B \otimes G \rightarrow C \otimes G$ offensichtlich ⁸⁶ surjektiv. Es verbleibt also zu zeigen, dass die induzierte Abbildung

$$j \otimes \text{id}: B \otimes G / \text{Im}\{i \otimes \text{id}: A \otimes G \rightarrow B \otimes G\} \rightarrow C \otimes G$$

ein Isomorphismus ist. Nachdem die Abbildung, wie oben gesehen, surjektiv ist, genügt es nun eine Umkehrabbildung anzugeben.

Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: C \times G &\rightarrow B \otimes G / \text{Im}\{i \otimes \text{id}: A \otimes G \rightarrow B \otimes G\} \\ (c, g) &\mapsto b \otimes g \text{ wobei } j(b) = c. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohl-definiert, denn wenn $j(b) = j(b') = c$, dann gilt $j(b - b') = 0$. Aus der Exaktheit bei B folgt, dass $b - b' = i(a)$ für ein $a \in A$. Dann folgt aber, dass

$$b \otimes g - b' \otimes g = (b - b') \otimes g = i(a) \otimes g \in \text{Im}\{i \otimes \text{id}: A \otimes G \rightarrow B \otimes G\}.$$

Wir haben damit bewiesen, dass φ wohl-definiert ist.

Nachdem φ linear in B und in G ist, induziert φ auch eine Abbildung

$$\begin{aligned} C \otimes G &\rightarrow B \otimes G / \text{Im}\{i \otimes \text{id}: A \otimes G \rightarrow B \otimes G\} \\ \sum_{i=1}^k c_i \otimes g_i &\mapsto \sum_{i=1}^k \varphi(c_i, g_i). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich ein Inverses zur Abbildung

$$j \otimes \text{id}: B \otimes G / \text{Im}\{i \otimes \text{id}: A \otimes G \rightarrow B \otimes G\} \rightarrow C \otimes G.$$

□

Wir wollen jetzt auch etwas genauer untersuchen, in wie weit das tensorieren mit G nicht links exakt ist. Wir führen dafür ein paar weitere Definitionen ein.

- (1) Eine abelsche Gruppe G heißt *frei*, wenn es eine Teilmenge $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in I} \subset G$ mit folgender Eigenschaft gibt: Zu jeder abelschen Gruppe A und jeder Wahl von Elementen $a_i \in A, i \in I$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow A$, so dass $\varphi(b_i) = a_i$ für alle $i \in I$. Wir nennen eine solche Teilmenge \mathcal{B} dann eine Basis von G .

Beispielsweise ist $G = \mathbb{Z}^m$ frei mit Basis $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$.

⁸⁶In der Tat, wenn $\sum_i c_i \otimes g_i \in C \otimes G$, dann gibt es nach Voraussetzung $b_i \in B$ mit $j(b_i) = c_i$, aber dann gilt $(j \otimes \text{id})(\sum_i b_i \otimes g_i) = \sum_i c_i \otimes g_i$.

(2) Eine *freie Auflösung* von einer abelschen Gruppe H ist eine exakte Sequenz

$$\dots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$$

wobei die F_i freie abelsche Gruppen sind.

Wir beweisen zuerst folgendes Lemma.

Lemma 9.3. *Jede abelsche Gruppe besitzt eine freie Auflösung.*

Es folgt aus der Klassifizierung der endlich erzeugten abelschen Gruppen, dass jede *endlich erzeugte* abelsche Gruppe eine freie Auflösung von der Form

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$$

besitzt. Wir werden uns im Folgenden hauptsächlich für endlich erzeugte abelsche Gruppen interessieren, aber der Beweis vom allgemeinen Fall ist schon alleine deshalb interessant, weil er leicht für weitere Fälle (beispielsweise freie Auflösungen von R -Moduln) verallgemeinert werden kann.

Beweis. Zur Erinnerung, für eine Menge M bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(M)$ die von M erzeugte freie abelsche Gruppe. Wenn M selber eine Gruppe ist, dann gibt es genau eine \mathbb{Z} -lineare Abbildung $\alpha(M): \mathcal{A}(M) \rightarrow M$, welche ein $m \in M \subset \mathcal{A}(M)$ auf das entsprechende Element in M schickt.

Es sei nun H eine abelsche Gruppe. Wir betrachten dann

$$\mathcal{A}(H) \xrightarrow{\alpha(H)} H \rightarrow 0.$$

Die Gruppe $\mathcal{A}(H)$ ist frei und $\alpha(H)$ ist ein Epimorphismus. Also ist die Folge exakt. Wir setzen nun $H_1 := \text{Ker}(\mathcal{A}(H) \xrightarrow{\alpha(H)} H)$. Dann ist

$$H_1 \rightarrow \mathcal{A}(H) \xrightarrow{\alpha(H)} H \rightarrow 0$$

exakt. Wir betrachten dann als nächstes

$$\mathcal{A}(H_1) \xrightarrow{\alpha(H_1)} \mathcal{A}(H) \xrightarrow{\alpha(H)} H \rightarrow 0.$$

Auch diese Folge ist exakt und die beiden Gruppen $\mathcal{A}(H_1)$ und $\mathcal{A}(H)$ sind frei. Wir führen nun dieses Verfahren iterativ fort und erhalten die gewünschte freie Auflösung. \square

Bemerkung. Man diese Definitionen leicht verallgemeinern. Es sei dazu R wiederum ein kommutativer Ring. Wir definieren einen freien R -Modul ganz analog zur freien abelschen Gruppe. Eine *freie Auflösung* von einem R -Modul M ist dann eine exakte Sequenz

$$\dots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$$

wobei die F_i freie R -Moduln sind. Ganz ähnlich zum Beweis von Lemma 9.3 kann man nun zeigen, dass jeder R -Modul eine freie Auflösung besitzt.

Wir beweisen nun zuerst folgendes Lemma:

Lemma 9.4. *Es sei F_* eine freie Auflösung einer abelschen Gruppe H und es sei F'_* eine freie Auflösung einer abelschen Gruppe H' . Zu jedem Homomorphismus $\alpha: H \rightarrow H'$ gibt es dann Abbildungen $\alpha_i: F_i \rightarrow F'_i$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f'_2} & F'_1 & \xrightarrow{f'_1} & F'_0 & \xrightarrow{f'_0} & H' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Darüber hinaus sind die Abbildungen α_i , aufgefasst als Kettenabbildung zwischen den horizontalen Kettenkomplexen⁸⁷, bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir definieren zuerst die Abbildung α_0 . Wir wählen dazu eine Basis \mathcal{B}_0 von der freien abelschen Gruppe F_0 . Für jedes $x_i \in \mathcal{B}_0$ wählen wir dann ein $x'_i \in F'_0$ mit $f'_0(x'_i) = \alpha(f_0(x_i))$. Dies ist möglich, nachdem f'_0 surjektiv ist. Es gibt nun (genau) eine Abbildung $\alpha_0: F_0 \rightarrow F'_0$ mit $\alpha_0(x_i) = x'_i$ für alle $i \in I$. Es ist nun offensichtlich, dass das rechte Quadrat kommutiert.

Wir wenden uns nun der Definition der Abbildung α_1 . Wir wählen dazu jetzt eine Basis \mathcal{B}_1 von der freien abelschen Gruppe F_1 . Es sei dann $x_i \in \mathcal{B}_1$. Es folgt aus der Kommutativität des rechten Quadrats, dass

$$f'_0((\alpha_0 \circ f_1)(x)) = \alpha((f_0 \circ f_1)(x)) = 0.$$

Nachdem die untere Sequenz exakt ist, gibt es nun also ein $x'_i \in F'_1$ mit $f'_1(x'_i) = (\alpha_0 \circ f_1)(x)$. Es gibt nun (genau) eine Abbildung $\alpha_1: F_1 \rightarrow F'_1$ mit $\alpha_1(x_i) = x'_i$ für alle $i \in I$. Es ist nun offensichtlich, dass auch das 'zweite Quadrat von rechts' kommutiert.

Ganz analog definieren wir nun die weiteren Abbildungen α_i für $i \geq 2$.

Es seien nun $\alpha_i, \alpha'_i: F_i \rightarrow F'_i$ zwei Kettenabbildungen, welche $\alpha: H \rightarrow H'$ fortsetzen. Wir müssen eine Kettenhomotopie von α_i zu α'_i finden. Die Abbildungen $\beta_i = \alpha_i - \alpha'_i$ sind eine Fortsetzung der Nullabbildung $\beta = 0: H \rightarrow H'$. Es genügt daher, eine Kettenhomotopie λ von $\beta_i = \alpha_i - \alpha'_i$ zu den Nullabbildungen finden. Die Konstruktion der Kettenhomotopie erfolgt ähnlich zur Konstruktion der Abbildungen α_i im ersten Teil des Beweises.

Wir erinnern im folgenden Diagramm an die Art der Abbildungen, welche wir konstruieren müssen:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow \lambda_2 & \downarrow \beta_2 & \swarrow \lambda_1 & \downarrow \beta_1 & \swarrow \lambda_0 & \downarrow \beta_0 & \swarrow \lambda_{-1} & \downarrow \beta=0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f'_2} & F'_1 & \xrightarrow{f'_1} & F'_0 & \xrightarrow{f'_0} & H' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Wir setzen $\lambda_{-1} = 0$. Wir benötigen dann als erstes eine Abbildung $\lambda_0: F_0 \rightarrow F'_1$, so dass $\beta_0 = f'_1 \circ \lambda_0$. Für jedes $x \in \mathcal{B}_0$ wählen wir jetzt ein $x' \in F'_1$ mit $f'_1(x') = \beta_0(x)$. Die Existenz

⁸⁷Eine exakte Sequenz ist insbesondere auch ein Kettenkomplex

eines solchen x' folgt aus der Beobachtung, dass $f'_0(\beta_0(x)) = \beta(f_0(x)) = 0$ und aus der Exaktheit der unteren Sequenz.

Nehmen wir jetzt an, wir hätten schon $\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}$ gefunden, welche die Eigenschaft besitzen, dass

$$(9.2) \quad f'_j \circ \lambda_{j-1} + \lambda_{j-2} \circ f_{j-1} = \beta_{j-1} \text{ für } j = 0, \dots, i.$$

Wir wählen nun wieder eine Basis \mathcal{B}_i von der freien abelschen Gruppe F_i . Wir müssen nun x ein Element $x' \in F'_{i+1}$ zuordnen, welches die Gleichung

$$f'_{i+1}(x') = \beta_i(x) - \lambda_{i-1}(f_i(x))$$

erfüllt. Aus der Exaktheit der unteren Sequenz folgt, dass $\text{Im}(f'_{i+1}) = \text{Ker}(f'_i)$. Es genügt also zu zeigen, dass $f'_i \circ (\beta_i - \lambda_{i-1} \circ f_i) = 0$. Es gilt nun aber in der Tat, dass

$$\begin{aligned} f'_i \circ (\beta_i - \lambda_{i-1} \circ f_i) &= f'_i \circ \beta_i - f'_i \circ \lambda_{i-1} \circ f_i \\ &= \beta_{i-1} \circ f_i - f'_i \circ \lambda_{i-1} \circ f_i \\ &= (\beta_{i-1} - f'_i \circ \lambda_{i-1}) \circ f_i \\ &= \lambda_{i-2} \circ f_{i-1} \circ f_i = 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der zweiten Gleichheit verwendet, dass die β_i 's eine Kettenabbildung bilden, d.h., dass $f'_i \circ \beta_i = \beta_{i-1} \circ f_i$. In der vierten Gleichheit haben wir dann (9.2) benützt, und die letzte Gleichheit folgt aus $f_{i-1} \circ f_i = 0$. \square

Mithilfe von Lemma 9.4 können wir nun folgendes Lemma beweisen:

Lemma 9.5. *Es seien*

$$\dots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$$

und

$$\dots F'_2 \xrightarrow{f'_2} F'_1 \xrightarrow{f'_1} F'_0 \xrightarrow{f'_0} H \rightarrow 0$$

freie Auflösungen von einer abelschen Gruppe H . Dann gibt es für jede abelsche Gruppe G einen kanonischen Isomorphismus

$$H_n(F_* \otimes G) \xrightarrow{\cong} H_n(F'_* \otimes G).$$

Beweis. Es folgt aus Lemma 9.4, dass es Abbildungen $\alpha_i: F_i \rightarrow F'_i$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \text{id} & & \\ \dots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f'_2} & F'_1 & \xrightarrow{f'_1} & F'_0 & \xrightarrow{f'_0} & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wobei die Abbildungen α_i , aufgefasst als Kettenabbildung zwischen den horizontalen Kettenkomplexen bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmt sind. Wir können dieses kommutative Diagramm nun mit G tensorieren und erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 \otimes G & \xrightarrow{f_2 \otimes \text{id}} & F_1 \otimes G & \xrightarrow{f_1 \otimes \text{id}} & F_0 \otimes G & \xrightarrow{f_0 \otimes \text{id}} & H \otimes G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 \otimes G & \xrightarrow{f'_2 \otimes \text{id}} & F'_1 \otimes G & \xrightarrow{f'_1 \otimes \text{id}} & F'_0 \otimes G & \xrightarrow{f'_0 \otimes \text{id}} & H \otimes G & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Diese Abbildungen induzieren dann Abbildungen

$$\alpha_*: H_n(F_* \otimes G) \rightarrow H_n(F'_* \otimes G).$$

Diese Abbildung sind zum eindeutig bestimmt, nachdem die Kettenabbildung bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmt ist.

Wir müssen nun noch zeigen, dass die Abbildungen $\alpha_*: H_n(F_* \otimes G) \rightarrow H_n(F'_* \otimes G)$ Isomorphismen sind. Wir müssen also Umkehrabbildungen zu den α_* konstruieren. Wir wenden dazu Lemma 9.4 auf die Auflösungen F'_* und F_* an (d.h. wir vertauschen die Rollen der Auflösungen) und erhalten die untere Hälfte des folgenden Kommutativen Diagramms.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f'_2} & F'_1 & \xrightarrow{f'_1} & F'_0 & \xrightarrow{f'_0} & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_0 & & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Die Abbildungen $\beta_i \circ \alpha_i$ fügen sich also zusammen zum folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta_2 \circ \alpha_2 & & \downarrow \beta_1 \circ \alpha_1 & & \downarrow \beta_0 \circ \alpha_0 & & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Andererseits ergeben die Abbildungen $\text{id}: F_i \rightarrow F_i$ ebenfalls ein kommutatives Diagramm. Aus Lemma 9.4 folgt nun, dass die Abbildungen $\beta_i \circ \alpha_i$ kettenhomotop zur Identität sind. Dann sind aber auch die Abbildungen $(\beta_i \circ \alpha_i) \otimes \text{id}: F_i \otimes G \rightarrow F_i \otimes G$ kettenhomotop zur Identität. Es folgt also, dass $\beta_* \circ \alpha_*: H_n(F_* \otimes G) \rightarrow H_n(F_* \otimes G)$ die Identität ist. Ganz analog zeigt man auch, dass $\alpha_* \circ \beta_*$ die Identität ist. Wir haben also bewiesen, dass die Abbildungen α_* Isomorphismen sind. □

Es seien nun G und H abelsche Gruppen. Wir wählen eine freie Auflösung

$$\cdots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$$

und wir definieren die n -te G -Torsionsgruppe von H als ⁸⁸

$$\mathrm{Tor}_n(H, G) := H_n(F_* \otimes G).$$

Es folgt aus Lemma 9.5, dass diese Definition (bis auf einen kanonischen Isomorphismus) nicht von der Wahl der Auflösung von H abhängt.

Wenn zudem $\alpha: H \rightarrow H'$ ein Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen ist, dann folgt aus Lemma 9.4, dass α für jedes n einen Homomorphismus

$$\alpha_*: \mathrm{Tor}_n(H, G) \rightarrow \mathrm{Tor}_n(H', G)$$

induziert. Man kann sich nun leicht davon vergewissern, dass

$$H \mapsto \mathrm{Tor}_n(H, G)$$

einen Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen zur Kategorie der abelschen Gruppen definiert.⁸⁹

Das folgende Lemma besagt, dass man zumindest die 0-te Torsionsgruppen leicht bestimmen kann.

Lemma 9.6. *Es seien G und H abelsche Gruppen, dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{Tor}_0(H, G) \xrightarrow{\cong} H \otimes G.$$

Wir werden im weiteren Verlauf der Vorlesung nun die Gruppen $\mathrm{Tor}_0(H, G)$ und $H \otimes G$ identifizieren.

Beweis. Wir wählen also eine freie Auflösung

$$\dots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0.$$

⁸⁸Wir nehmen also eine freie Auflösung für H , vergessen H , tensorieren mit G , und nehmen dann die Homologie.

⁸⁹Um genau zu sein, stimmt die Aussage so nicht, den $\mathrm{Tor}_n(H, G)$ ist nicht wohl-definiert als Gruppe, sondern nur wohl-definiert bis auf einen kanonischen Isomorphismus. Wir können das Problem wie folgt beheben: wir betrachten

$$\mathrm{Tor}_n(H, G)' := \left(\bigoplus_{F_*} H_n(F_* \otimes G) \right) / U$$

wobei wir die direkte Summe über alle freien Auflösungen von H nehmen und wobei U die Untergruppe ist, welche erzeugt wird von allen

$$a - \varphi(a) \text{ wobei } a \in H_n(F_* \otimes G) \text{ und } \varphi: H_n(F_* \otimes G) \rightarrow H_n(F'_* \otimes G) \text{ der kanonische Isomorphismus.}$$

Dann ist $\mathrm{Tor}_n(H, G)'$ wohl-definiert (und nicht nur bis auf einen kanonischen Isomorphismus), und man kann zeigen, dass für jedes F die kanonische Abbildung $H_n(F_* \otimes G) \rightarrow \mathrm{Tor}_n(H, G)'$ ein Isomorphismus ist. Dann definiert

$$H \mapsto \mathrm{Tor}'_n(H, G)$$

einen Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen zur Kategorie der abelschen Gruppen.

Dann ist per Definition

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_0(H, G) &= H_0(\dots F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}} F_0 \otimes G \rightarrow 0) \\ &= \mathrm{Coker}(F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}} F_0 \otimes G).\end{aligned}$$

Andererseits, wenn wir nun die obige exakte Sequenz mit G tensorieren, dann folgt aus Lemma 9.2, dass der ‘rechte Teil’ der Sequenz immer noch exakt ist, d.h. die Sequenz

$$F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}} F_0 \otimes G \xrightarrow{f_0 \otimes \mathrm{id}} H \otimes G \rightarrow 0$$

ist exakt. Dies besagt aber dann gerade, dass es kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned}H \otimes G &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f_0 \otimes \mathrm{id}: F_0 \otimes G \rightarrow H \otimes G) \cong (F_0 \otimes G) / \mathrm{Ker}(f_0 \otimes \mathrm{id}) \\ &= (F_0 \otimes G) / \mathrm{Im}(f_1 \otimes \mathrm{id}) \\ &= \mathrm{Coker}(F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}} F_0 \otimes G)\end{aligned}$$

gibt. □

Bemerkung. Die bisherige Diskussion kann man fast ohne Abänderungen für Module über einem kommutativen Ring R durchführen. In der Tat, wenn M und N Moduln über R sind, dann wählen wir eine freie Auflösung exakte Sequenz

$$\dots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$$

und wir definieren

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) := H_n(F_* \otimes_R N).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der freien Auflösung ab. Für jedes n ist dann $\mathrm{Tor}_n^R(M, -)$ ein Funktor und es gilt $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$.

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, dass H eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist. Die Klassifikation von endlich erzeugten abelschen Gruppen besagt unter anderem, dass

$$H \cong \mathbb{Z}^m \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}/k_i,$$

wobei $k_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, m$. Es folgt, dass es eine exakte Sequenz von der Form

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^{m+n} \rightarrow H$$

gibt, wobei D die Diagonalmatrix mit den Einträgen k_1, \dots, k_n ist. Die Gruppe H besitzt also insbesondere eine freie Auflösung der Länge 2. Es folgt sofort, dass in diesem Fall

$$\mathrm{Tor}_n(H, G) = 0 \text{ für } n \geq 2.$$

Wir schreiben jetzt $\text{Tor}(H, G) := \text{Tor}_1(H, G)$ und bezeichnen die Gruppe als die G -Torsion von H .⁹⁰ Im Hinblick auf Lemma 9.5 kann man sagen, dass die G -Torsionsgruppen ‘messen’, inwieweit der Tensorfunktorkontraktion $- \otimes G$ nicht links-exakt ist.

Wir können nun einige Eigenschaften von $\text{Tor}(H, G)$ in folgendem Lemma zusammenfassen:

Lemma 9.7. *Es seien G, H und $H_i, i \in I$ sowie $G_j, j \in J$ abelsche Gruppen. Dann gilt:*

- (1) $\text{Tor}(\bigoplus_i H_i, G) \cong \bigoplus_i \text{Tor}(H_i, G)$,
- (2) $\text{Tor}(H, \bigoplus_j G_j) \cong \bigoplus_j \text{Tor}(H, G_j)$,
- (3) $\text{Tor}(H, G) = 0$, wenn H eine torsionsfreie abelsche Gruppe⁹¹ ist,
- (4) $\text{Tor}(H, G) = 0$, wenn G eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist,
- (5) wenn T die Torsionsuntergruppe⁹² von H bezeichnet, dann gilt $\text{Tor}(H, G) = \text{Tor}(T, G)$,
- (6) für alle n haben wir einen Isomorphismus $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, G) \cong \text{Ker}\{G \xrightarrow{n} G\}$,
- (7) für $n, m \neq 0$ gilt $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n,m)}$.

Mithilfe dieses Lemmas kann man die G -Torsion von einer abelschen Gruppe H normalerweise problemlos bestimmen. Aus (3) folgt beispielsweise, dass $\text{Tor}(H, \mathbb{Q}) = \text{Tor}(H, \mathbb{R}) = 0$ für alle abelschen Gruppen H . Wir werden zudem in Übungsblatt 11 zeigen, dass wenn G und H endlich erzeugte abelsche Gruppen sind, dann ist die Torsionsgruppe $\text{Tor}(H, G)$ endlich.⁹³

Beweis. (1) Wir wählen für jedes i eine freie Auflösung F^i von H_i . Dann ist $\bigoplus_i F^i$ eine freie Auflösung von $\bigoplus_i H_i$, und die Aussage folgt aus Lemma 2.10.
 (2) Diese Aussage folgt leicht aus den kanonischen Isomorphismen

$$F_i \otimes \bigoplus_j G_j \cong \bigoplus_j F_i \otimes G_j.$$

- (3) Wenn H eine freie abelsche Gruppe ist, dann ist $0 \rightarrow F_0 := H \xrightarrow{\text{id}} H \rightarrow 0$ schon eine freie Auflösung, und es ist dann offensichtlich, dass $\text{Tor}(H, G) = 0$. Wenn H eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist, welche nicht frei ist, dann ist der Beweis schwieriger und wir verweisen auf Seite 265 von Hatcher: Algebraic Topology.
- (4) Wenn G eine freie abelsche Gruppe ist, dann ist $G \cong \bigoplus_I \mathbb{Z}$ für eine Indexmenge I . Es folgt nun aus (2), dass es genügt zu zeigen, dass $\text{Tor}(H, \mathbb{Z}) = 0$. Wir wählen also eine freie Auflösung F_* für H . Wenn wir diese mit \mathbb{Z} tensorieren, erhalten wir (bis

⁹⁰Für eine freie Auflösung $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{j} H \rightarrow 0$ gilt also, dass

$$\text{Tor}(H, G) = \text{Ker}\{F_1 \otimes G \xrightarrow{i \otimes \text{id}} F_0 \otimes G\}.$$

⁹¹Eine Gruppe H heißt torsionsfrei wenn H kein Element endlicher Ordnung besitzt. Jede freie abelsche Gruppe ist torsionsfrei (siehe Übungsblatt 11), aber nicht jede torsionsfreie abelsche Gruppe ist eine freie abelsche Gruppe. Beispielsweise ist \mathbb{Q} eine torsionsfreie abelsche Gruppe, aber wir werden in Übungsblatt 11 sehen, dass \mathbb{Q} nicht frei ist.

⁹²Die Torsionsuntergruppe einer abelschen Gruppe ist definiert als die Untergruppe aller Elemente endlicher Ordnung.

⁹³Daher rührt auch der Name ‘Torsionsgruppe’.

auf einen kanonischen Isomorphismus), die gleiche exakte Sequenz. Insbesondere verschwindet die erste Homologiegruppe von $F_* \otimes \mathbb{Z} \cong F_*$.

Wenn G eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist, welche nicht frei ist, dann verweisen wir wiederum auf Seite 265 von Hatcher: Algebraic Topology.

- (5) Wenn H eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist, dann können wir H als direkte Summe $F \oplus T$ schreiben, wobei G die Torsionsuntergruppe ist und wobei F eine freie abelsche Gruppe ist. Dann folgt aus (1) und (2), dass

$$\operatorname{Tor}(H, G) \cong \operatorname{Tor}(F \oplus T, G) \cong \operatorname{Tor}(F, G) \oplus \operatorname{Tor}(T, G) = \operatorname{Tor}(T, G).$$

Für den Beweis im Falle, dass H keine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist verweisen wir auf Seite 265 von Hatcher: Algebraic Topology.

- (6) Diese Aussage folgt leicht aus den Definitionen, wenn wir die freie Auflösung

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

für $H = \mathbb{Z}/n$ wählen.

- (7) Die letzte Aussage folgt sofort aus (5). □

9.5. Spaltende kurze exakte Sequenzen. Wir sagen nun, dass eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

spaltet (oder zerfällt), wenn es eine Spaltung $s : C \rightarrow B$ gibt, d.h. eine Abbildung s , so dass $p \circ s = \operatorname{id}_C$. Beispielsweise spaltet die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k \mapsto (k, 0)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n \xrightarrow{(k, l) \mapsto l} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

aber die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k \mapsto nk} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0.$$

spaltet nicht.

Lemma 9.8. *Es sei*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Wenn C eine freie abelsche Gruppe ist, dann spaltet die kurze exakte Sequenz.

Beweis. Es sei $\{c_i\}_{i \in I}$ eine Basis der freien abelschen Gruppe C . Für jedes $c_i \in C$ wählen wir ein $b_i \in B$ mit $p(b_i) = c_i$. Dann gibt es genau eine Abbildung $s : C \rightarrow B$ mit $\varphi(c_i) = b_i$ für alle i . Es ist dann also $(p \circ s)(c) = c$ für jedes c , welches eine Linearkombination der c_i 's ist. In Übungsblatt 11 werden wir zeigen, dass jedes Element in c eindeutig als Linearkombination der c_i 's geschrieben werden kann. Die Abbildung s ist also in der Tat eine Spaltung. □

Folgendes Lemma werden wir in Übungsblatt 11 beweisen:

Lemma 9.9. *Es sei*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) die kurze exakte Sequenz spaltet,
- (2) es gibt eine Abbildung $t : B \rightarrow A$, so dass $t \circ i = \text{id}_A$,
- (3) es gibt einen Isomorphismus $\Phi : B \rightarrow A \oplus C$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & B & & \\
 & & & & \downarrow p & & \\
 & & & & \Phi & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \downarrow & \nearrow & \\
 & & & & A \oplus C & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & \Phi & & \\
 & & & & \downarrow i & & \\
 & & & & A & &
 \end{array}$$

wobei die unteren beiden diagonalen Abbildungen die offensichtliche Inklusion und die offensichtliche Projektion sind.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma.

Lemma 9.10. *Es sei*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz und es sei G eine abelsche Gruppe. Wenn die kurze exakte Sequenz spaltet, dann ist auch

$$0 \rightarrow A \otimes G \xrightarrow{i \otimes \text{id}} B \otimes G \xrightarrow{p \otimes \text{id}} C \otimes G \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Nach Lemma 9.9 können wir o.B.d.A. annehmen, dass die kurze exakte Sequenz von der Form

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} A \oplus C \xrightarrow{(a,c) \mapsto c} C \rightarrow 0$$

ist. Wenn wir diese kurze exakte Sequenz mit G tensorieren, dann erhalten wir unter der Verwendung von $(A \oplus C) \otimes G = A \otimes G \oplus C \otimes G$ die Sequenz

$$0 \rightarrow A \otimes G \xrightarrow{\sum_i a_i \otimes g_i \mapsto \left(\sum_i a_i \otimes g_i, 0\right)} A \otimes G \oplus C \otimes G \xrightarrow{\left(\sum_i a_i \otimes g_i, \sum_j c_j \otimes g_j\right) \mapsto \sum_j c_j \otimes g_j} C \otimes G \rightarrow 0,$$

welche offensichtlich exakt ist. \square

9.6. Das universelle Koeffiziententheorem. Wir können jetzt das folgende Theorem formulieren und beweisen:

Theorem 9.11. (Das universelle Koeffiziententheorem) *Es sei (C_n, ∂_n) ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen und es sei G eine abelsche Gruppe. Dann gibt es für jedes n eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{i_C} H_n(C; G) \xrightarrow{p_C} \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0.$$

Hierbei ist die i_C die Abbildung

$$\begin{aligned} H_n(C) \otimes G &\rightarrow H_n(C; G) \\ \sum_{i=1}^k [c_i] \otimes g_i &\mapsto \sum_{i=1}^k [c_i \otimes g_i]. \end{aligned}$$

Im Beweis vom universellen Koeffiziententheorem werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 9.12. *Es sei H eine Untergruppe einer freien abelschen Gruppen, dann ist auch H auch eine freie abelsche Gruppe.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass F eine endliche erzeugte freie abelsche Gruppe ist.

Wir beweisen dann das Lemma per Induktion nach dem Rang von F . Es gibt offensichtlich nichts zu beweisen, wenn $\text{Rang}(F) = 0$. Wir nehmen nun also an, dass wir die Aussage schon für alle freie abelschen Gruppen von Rang kleiner m beweisen haben. Es sei nun F eine freie abelsche Gruppe von Rang m . Wir können dann F mit \mathbb{Z}^m identifizieren. Es sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^m$ ein Erzeugendensystem von H . Für $i = 1, \dots, m$ bezeichnen wir mit $p_i: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ die Projektion auf die i -te Koordinate.

Nach eventuellem vertauschen von Koordinaten können wir annehmen, dass $p_1(v_j) \neq 0$ für ein j . Wir setzen

$$g := \text{ggT}(p_1(v_1), \dots, p_1(v_n)).$$

Dann gibt es $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\sum_{i=1}^n a_i p_1(v_i) = g.$$

Wir betrachten dann das Erzeugendensystem

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i p_1(v_i)}_{=: w_0}, \underbrace{v_1 - \frac{p_1(v_1)}{g} w_0}_{=: w_1}, \dots, \underbrace{v_n - \frac{p_1(v_n)}{g} w_0}_{=: w_n}.$$

Die ersten Koordinaten von w_1, \dots, w_n sind also null, d.h. wir können diese Vektoren als Vektoren in \mathbb{Z}^{m-1} auffassen.

Nach Induktionsvoraussetzung erzeugen w_1, \dots, w_n dann also eine freie abelsche Gruppe in \mathbb{Z}^{m-1} auf. Es ist dann leicht zu sehen, dass w_0, w_1, \dots, w_n ebenfalls eine freie abelsche

Gruppe erzeugen.

Mit leichten Abänderungen kann man mit dem gleichen Argument auch zeigen, dass wenn F eine freie abelsche Gruppe mit *abzählbarer* Basis ist, dann ist jede Untergruppe wiederum eine freie abelsche Gruppe.

Der allgemeine Fall wird mit etwas mehr Aufwand als Theorem 9.3 in

Rotman: An introduction to algebraic topology

bewiesen. □

Beweis. Es sei (C_n, ∂_n) ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen. Für jedes n betrachten wir $Z_n := \text{Ker}(\partial_n)$ und $B_n := \text{Im}(\partial_{n+1})$. Wir erhalten dann folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \partial_n & & \downarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & B_{n-2} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

Man sieht leicht, dass dieses Diagramm kommutativ ist, und dass die horizontalen Sequenzen exakt sind. Wir können die linke und die rechte vertikale Spalte auch als Kettenkomplex auffassen. In anderen Worten, das obige Diagramm ist eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen.

Es sei nun G eine abelsche Gruppe. Wir tensorieren nun die obige kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen mit G und erhalten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Z_n \otimes G & \longrightarrow & C_n \otimes G & \xrightarrow{\partial_n \otimes \text{id}} & B_{n-1} \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \partial_n \otimes \text{id} & & \downarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & Z_{n-1} \otimes G & \longrightarrow & C_{n-1} \otimes G & \xrightarrow{\partial_{n-1} \otimes \text{id}} & B_{n-2} \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

Dies ist wiederum eine Sequenz von Kettenkomplexen.

Die Gruppen B_n , als Untergruppen von freien abelschen Gruppen, sind nach Lemma 9.12 wiederum freie abelsche Gruppen. Es folgt nun aus Lemmas 9.8 und 9.10, dass die horizontalen Sequenzen ebenfalls exakt sind. Wir können daher Satz 4.6 anwenden. Nachdem die vertikalen Randabbildungen links und rechts die Nullabbildungen sind, erhalten

wir folgende lange exakte Sequenz

$$\rightarrow B_n \otimes G \rightarrow Z_n \otimes G \rightarrow H_n(C; G) \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \otimes G \rightarrow Z_{n-1} \otimes G \rightarrow \dots$$

Es folgt leicht aus der Definition der Randabbildung der langen exakten Sequenz, dass die Randabbildung $B_n \otimes G \rightarrow Z_n \otimes G$ gerade die durch die Inklusion $i_n: B_n \rightarrow Z_n$ induzierte Abbildung ist.⁹⁴

Wir erhalten jetzt folgende kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Coker}(i_n \otimes \text{id}) \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow \text{Ker}(i_{n-1} \otimes \text{id}) \rightarrow 0.$$

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass die Ausdrücke links und rechts mit den gewünschten Ausdrücken übereinstimmen.

Wir betrachten nun die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \rightarrow H_n(C) \rightarrow 0.$$

Es folgt wiederum aus Lemma 9.12, dass B_n und Z_n freie Gruppen sind, d.h. dies ist eine freie Auflösung von $H_n(C)$. Es folgt aus der Definition von $\text{Tor}_0(H_n(C), G)$ und aus Lemma 9.6, dass

$$\text{Coker}(i \otimes \text{id}) = \text{Tor}_0(H_n(C), G) = H_n(C) \otimes G.$$

Andererseits ist auch

$$0 \rightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow 0$$

eine freie Auflösung von $H_{n-1}(C)$. Es folgt also aus der Definition der G -Torsion von $H_{n-1}(C)$, dass

$$\text{Ker}(i_{n-1} \otimes \text{id}) = \text{Tor}(H_{n-1}(C), G).$$

□

Bemerkung. Es sei nun R ein kommutativer Ring und es sei (C_*, ∂_*) ein Kettenkomplex von R -Moduln. Es sei zudem M ein weiterer R -Modul. Wir können dann den Kettenkomplex $C_* \otimes_R M$ von R -Moduln betrachten. Es stellt sich dann wiederum die Frage, ob man die Homologiegruppen von $C_* \otimes_R M$ aus den Torsionsgruppen $\text{Tor}_k^R(H_l(C), M)$ bestimmen kann. Dies ist in der Tat der Fall, aber nachdem es im Allgemeinen nicht nur die Torsionsgruppen für $k = 0$ und $k = 1$ gibt, ist der Zusammenhang deutlich subtiler. Um genau zu sein, gibt es eine ‘Spektralsequenz’ von den Gruppen $\text{Tor}_k^R(H_l(C), M)$, welche gegen die Homologiegruppen von $C_* \otimes_R M$ konvergiert.

Bemerkung. Wir können also jedem Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen, jedem G und jedem n eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{i_C} H_n(C; G) \xrightarrow{p_C} \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0$$

zuordnen. Es stellt sich nun die Frage, ob dies ebenfalls ein Funktor mit geeignet gewählten Kategorien ist. Dies ist in der Tat der Fall: Es sei \mathcal{K} die Kategorie der Kettenkomplexe und es sei \mathcal{S} die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen, wobei die Objekte die kurzen exakten

⁹⁴Warum ist dies in der Tat der Fall?

Sequenzen sind und die Funktoren sind die Kettenabbildungen. Dann definiert G und n einen Funktor $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}$ indem wir einem C in \mathcal{K} die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0$$

zuordnen, und indem wir einer Kettenabbildung $f: C \rightarrow D$ das Diagramm⁹⁵

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(C) \otimes G & \xrightarrow{i_C} & H_n(C; G) & \xrightarrow{p_C} & \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ 0 & \longrightarrow & H_n(D) \otimes G & \xrightarrow{i_D} & H_n(D; G) & \xrightarrow{p_D} & \text{Tor}(H_{n-1}(D), G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

zuordnen. Die vertikalen Abbildungen sind dabei durch die Kettenabbildung $f: C \rightarrow D$ induziert. Es folgt nun direkt aus den Definitionen, dass dieses Diagramm kommutiert. Die Verifikation dieser Aussage überlassen wir als freiwillige Übungsaufgabe.

Das universelle Koeffiziententheorem ist in gewisser Weise auch etwas enttäuschend, denn es besagt unter anderem, dass die Homologiegruppen von $C \otimes G$ nicht mehr Informationen enthalten, also sowie schon in den Homologiegruppen von C enthalten sind. Dies ist allerdings nicht mehr überraschend, nachdem wir schon in Satz 7.6 gesehen hatten, dass in den meisten Fällen die Homologiegruppen schon den Kettenhomotopietyp eines Kettenkomplexes C_* festlegen, und also insbesondere auch die Gruppen $H_n(C; G)$ festlegen.

Unser Ziel war es, die Homologiegruppen $H_n(C; G)$ nur mithilfe der ursprünglichen Gruppen $H_k(C)$ zu bestimmen. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht möglich die ‘mittlere Gruppe’ einer kurzen exakten Sequenz eindeutig aus den ‘Randgruppen’ links und rechts zu bestimmen. Beispielsweise könnte eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow B \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

gegeben sein durch

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k \mapsto (k, 0)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n \xrightarrow{(k, l) \mapsto l} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

oder auch durch⁹⁶

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k \mapsto nk} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0.$$

Andererseits hatten wir in Lemma 9.9 gesehen, dass in einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0,$$

welche spaltet, die mittlere Gruppe B die Summe der äußeren Gruppen A und C ist. Es stellt sich daher nun die Frage, ob die kurze exakte Sequenz im universellen Koeffiziententheorem spaltet. Dies ist zum Glück der Fall:

⁹⁵Die vertikalen Abbildungen werden alle mit f_* bezeichnet, aber wie sind diese eigentlich definiert?

⁹⁶Gibt es noch weitere Möglichkeiten für B ?

Satz 9.13. *Es sei (C_n, ∂_n) ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen und es sei G eine abelsche Gruppe. Dann spaltet die kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{i} H_n(C; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0.$$

Insbesondere gibt es also einen Isomorphismus

$$H_n(C; G) \cong H_n(C) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(C), G).$$

Beweis. Nach Lemma 9.9 genügt es eine Abbildung $t: H_n(C; G) \rightarrow H_n(C) \otimes G$ zu konstruieren, so dass $t \circ i = \text{id}_{H_n(C)}$.

Wir betrachten dazu zuerst die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$$

Die Gruppe $B_{n-1} \subset C_{n-1}$ ist als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ebenfalls eine freie abelsche Gruppe. Es folgt also aus Lemma 9.8, dass die obige Sequenz spaltet. Insbesondere gibt es nach Lemma 9.9 eine Abbildung $p: C_n \rightarrow Z_n$, so dass p auf $Z_n \subset C_n$ die Identität ist. Wir bezeichnen die Komposition von p mit der Projektion $Z_n \rightarrow H_n(C) = Z_n/B_n$ ebenfalls mit p_n . Wir erhalten nun folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots \\ & & \downarrow p_{n+1} & & \downarrow p_n & & \downarrow p_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1} & \xrightarrow{0} & H_n & \xrightarrow{0} & H_{n-1} & \xrightarrow{0} & \cdots \end{array}$$

Die untere Sequenz ist natürlich auch ein Kettenkomplex. Die Abbildungen ergeben zudem eine Kettenabbildung: in der Tat, denn sei $c \in C_n$. Die ‘runter-dann-rechts’ Abbildung ist offensichtlich die Nullabbildung. Andererseits ist $\partial_n(c) \subset B_{n-1} \subset Z_{n-1} \subset C_{n-1}$, d.h. $p_n(\partial_n(c)) = \partial_n(c) = 0 \in Z_{n-1}/B_{n-1}$.

Wir tensorieren nun das obige Diagramm mit G und erhalten folgendes kommutative Diagramm von Kettenkomplexen.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} \otimes G & \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes \text{id}} & C_n \otimes G & \xrightarrow{\partial_n \otimes \text{id}} & C_{n-1} \otimes G & \xrightarrow{\partial_{n-1} \otimes \text{id}} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1} \otimes G & \xrightarrow{0} & H_n \otimes G & \xrightarrow{0} & H_{n-1} \otimes G & \xrightarrow{0} & \cdots \end{array}$$

Die induzierten Abbildungen auf den Homologien dieser zwei Kettenkomplexe geben uns nun eine Abbildung

$$t: H_n(C; G) = H_n(C_* \otimes G) \rightarrow H_n(\text{untere Sequenz}) = H_n \otimes G.$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass $t \circ i = \text{id}_{H_n(C)}$. □

Bemerkung. Wenn eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

spaltet, dann gibt es im Allgemeinen nicht nur eine Spaltung sondern viele Spaltungen. Betrachten wir beispielsweise die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(a,c) \mapsto c} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Dann ist für jedes $a \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $c \mapsto (ac, c)$ eine Spaltung der exakten Sequenz. Insbesondere hatten wir zwar in Satz 9.13 gesehen, dass die Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{i} H_n(C; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0,$$

spaltet, aber es gibt keinen kanonischen Isomorphismus

$$H_n(C; G) \cong H_n(C) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(C), G).$$

Wir verweisen auf die Bemerkung am unteren Ende von Seite 264 von Hatcher: Algebraic Topology für mehr Informationen.

9.7. Anwendung auf topologische Räume. Wenn (X, A) ein Paar von topologischen Räumen ist, dann können wir jetzt die Ergebnisse der vorherigen Kapitel auf den Kettenkomplex $C_*(X, A)$ anwenden und erhalten aus dem universellen Koeffiziententheorem und aus Satz 9.13 sofort folgenden Satz:

Satz 9.14. *Es sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen und es sei G eine abelsche Gruppe. Dann gibt es für jedes n eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow H_n(X, A) \otimes G \rightarrow H_n(X, A; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G) \rightarrow 0,$$

und diese kurze exakte Sequenz spaltet. Insbesondere gibt es einen Isomorphismus

$$H_n(X, A; G) \cong H_n(X, A) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G).$$

Beispiel. Betrachten wir noch einmal den $\mathbb{R}P^2$ mit der CW-Struktur mit einer 0-Zelle, einer 1-Zelle und einer 2-Zelle. Wir hatten schon gesehen, dass $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$, $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2$ und $H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$. Es folgt nun aus Satz 9.14 und Lemma 9.7, dass

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) &\cong H_2(\mathbb{R}P^2) \otimes \mathbb{F}_2 \oplus \text{Tor}(H_1(\mathbb{R}P^2), \mathbb{F}_2) \cong 0 \otimes \mathbb{F}_2 \oplus \text{Tor}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \\ H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) &\cong H_1(\mathbb{R}P^2) \otimes \mathbb{F}_2 \oplus \text{Tor}(H_0(\mathbb{R}P^2), \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2 \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \\ H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) &\cong H_0(\mathbb{R}P^2) \otimes \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

Aber dies deckt sich zum Glück mit der Berechnung in Kapitel 9.3.

Zusammen mit Lemma 9.7 (4) erhalten wir zudem folgendes Korollar aus Satz 9.14:

Korollar 9.15. *Es sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen und es sei R ein Teilring von \mathbb{C} . Dann ist für jedes n die Abbildung*

$$\begin{aligned} H_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes R &\rightarrow H_n(X, A; R) \\ \sum_i [c_i] \otimes r_i &\mapsto [\sum_i c_i \otimes r_i] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Nachdem die Abbildung $H_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes R \rightarrow H_n(X, A; R)$ funktoriell ist, können und werden wir im Folgenden für einen Unterring R von \mathbb{C} die Gruppen $H_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes R$ und $H_n(X, A; R)$ identifizieren.

Aus der Bemerkung in Kapitel 9.6 nach dem universellen Koeffiziententheorem folgt zudem, dass sich die kurzen exakten Sequenzen in Satz 9.14 und der Isomorphismus in Korollar 9.15 mit induzierten Abbildungen von topologischen Räumen vertragen. Beispielsweise gilt für jede Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zwischen topologischen Räumen, dass sich die induzierten Abbildungen und die kurzen exakten Sequenzen zu folgendem *kommutativen* Diagramm zusammenfügen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(X, A) \otimes G & \longrightarrow & H_n(X, A; G) & \longrightarrow & \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ 0 & \longrightarrow & H_n(Y, B) \otimes G & \longrightarrow & H_n(Y, B; G) & \longrightarrow & \text{Tor}(H_{n-1}(Y, B), G) \longrightarrow 0. \end{array}$$

10. DIE HOMOLOGIEGRUPPEN VON PRODUKTEN

Es seien X und Y zwei topologische Räume. In diesem Kapitel wollen wir der Frage nachgehen, was denn der Zusammenhang zwischen den Homologiegruppen von X und Y sowie den Homologiegruppen des Produktraums $X \times Y$ ist.

10.1. Das Tensorprodukt von Kettenkomplexen. Wir wollen zuerst die Kettenkomplexe von X , Y und $X \times Y$ in Verbindung setzen. Wir brauchen dazu den Begriff des Tensorproduktes von Kettenkomplexen. Wir beginnen also mit einem kurzen Ausflug in die homologische Algebra, d.h. in das Studium von Kettenkomplexen.

Es seien $\mathcal{C} = (C_*, \partial_*)$ und $\mathcal{C}' = (C'_*, \partial'_*)$ zwei Kettenkomplexe. Wir definieren dann das Tensorprodukt $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ der Kettenkomplexe wie folgt: Die n -te Kettengruppe ist

$$(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')_n := \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C'_q$$

und wir betrachten die lineare Abbildungen $\bar{\partial}: (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')_n \rightarrow (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')_{n-1}$, welche eindeutig bestimmt ist durch

$$\bar{\partial}(c_p \otimes c'_q) = \partial c_p \otimes c'_q + (-1)^p c_p \otimes \partial' c'_q$$

für $c_p \in C_p$ und $c'_q \in C'_q$. Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\bar{\partial}(c_p \otimes c'_q)) &= \bar{\partial}(\underbrace{\partial c_p}_{\in C_{p-1}} \otimes c'_q) + \bar{\partial}((-1)^p c_p \otimes \partial' c'_q) \\ &= \partial \partial c_p \otimes c'_q + (-1)^{p-1} \partial c_p \otimes \partial' c'_q + (-1)^p \partial c_p \otimes \partial' c'_q + (-1)^p c_p \otimes \partial' \partial' c'_q \\ &= (-1)^{p-1} \partial c_p \otimes \partial' c'_q - (-1)^{p-1} \partial c_p \otimes \partial' c'_q \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}', \bar{\partial})$ ein Kettenkomplex ist.⁹⁷ Wir skizzieren die Definition des Tensorprodukt von Kettenkomplexen in Abbildung 34.

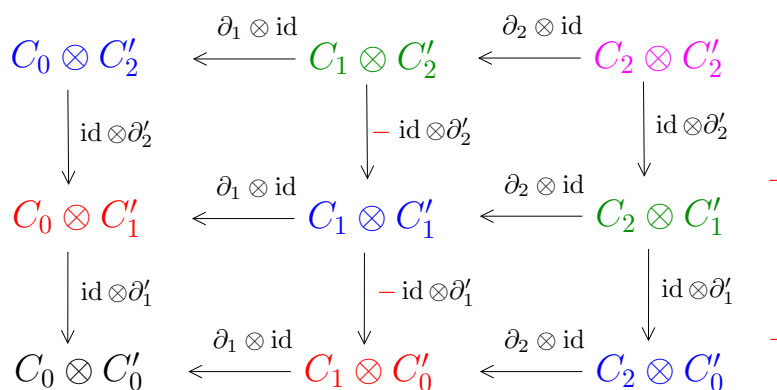


ABBILDUNG 34. Das Tensorprodukt von Kettenkomplexen.

Es ist auch zum Abschluß auch leicht zu sehen, dass zwei Kettenabbildungen $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $g: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$ eine Kettenabbildung $f \otimes g: \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'$ induzieren.

10.2. Das Produkt von CW-Komplexen. Wir betrachten jetzt zuerst den Spezialfall, dass X und Y CW-Komplexe sind. Um gewisse topologische Spitzfindigkeiten zu vermeiden nehmen wir im Folgenden an, dass X und Y in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzen.

Wir wollen nun auch das Produkt $X \times Y$ als CW-Komplex auffassen. Wir identifizieren im Folgenden die n -dimensionale Scheibe D^n durchgehend mit dem n -dimensionalen Quadrat $Q^n = [0, 1]^n$. Für $p+q = n$ gilt dann, dass $Q^n = Q^p \times Q^q$. Die Idee ist nun eine CW-Struktur auf $X \times Y$ so einzuführen, so dass das Produkt einer p -Zelle in X mit einer q -Zelle in Y eine $(p+q)$ -Zelle in $X \times Y$ entspricht.

Wir wollen diese Idee nun etwas genauer ausführen. Wir machen dazu zuerst die Beobachtung, dass

$$\partial(Q^n) = \partial Q^p \times Q^q \cup Q^p \times \partial Q^q.$$

Wir definieren nun die CW-Struktur auf $X \times Y$ induktiv wie folgt:

- (1) Wir setzen $(X \times Y)^0 = X^0 \times Y^0$.
- (2) Nehmen wir nun an, dass das $(n-1)$ -Gerüst $(X \times Y)^{(n-1)}$ schon definiert ist. Wir betrachten nun eine p -Zelle e in X , welche gegeben ist durch eine charakteristische Abbildung $\varphi: Q^p \rightarrow X^n$ und eine $(n-p)$ -Zelle f in Y , welche gegeben ist durch

⁹⁷Man beachte, dass dafür der Extra-Term $(-1)^p$ in der Randabbildung nötig ist. Wenn wir die Randabbildung 'naiv' als $\bar{\partial}(c_p \otimes c'_q) = \partial c_p \otimes c'_q + c_p \otimes \partial' c'_q$ definiert hätten, dann würden wir keinen Kettenkomplex erhalten.

eine charakteristische Abbildung $\psi : Q^q \rightarrow Y^n$. Dann bezeichnen wir mit $e \times f$ die n -Zelle in $X \times Y$, welche gegeben ist durch die Anklebeabbildung ⁹⁸

$$\begin{aligned} \partial(Q^n) = \partial Q^p \times Q^q \cup Q^p \times \partial Q^q &\rightarrow (X \times Y)^{n-1} \\ (x, y) &\mapsto (\varphi(x), \psi(y)). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen dann mit $(X \times Y)^n$ die Vereinigung von $(X \times Y)^{n-1}$ mit allen solchen n -dimensionalen Produktzellen.

Wir können nun also $X \times Y$ als CW-Komplex auffassen, wobei jede Zelle in $X \times Y$ das Produkt, im obigen Sinne, von einer Zelle in X und einer Zelle in Y ist. Es folgt, dass wir für jedes n einen kanonischen Isomorphismus ⁹⁹

$$C_n^{CW}(X \times Y) = \bigoplus_{p=0}^n C_p^{CW}(X) \otimes C_{n-p}^{CW}(Y)$$

haben.

Wir wollen allerdings nicht nur Isomorphismen von den Gruppen in den jeweiligen Kettenkomplexen, sondern wir müssen auch die Randabbildungen in Verbindung setzen. Es sei nun e eine p -dimensionale Zelle in X und f eine q -dimensionale Zelle in Y . Rein als Menge betrachtet haben wir gesehen, dass

$$\partial(Q^{p+q}) = \partial Q^p \times Q^q \cup Q^p \times \partial Q^q.$$

Allerdings müssen wir die Randabbildungen wirklich als Abbildungen betrachten, und es zeigt sich dann, dass

$$\underbrace{\partial(e \times f)}_{\in C_{p+q-1}^{CW}(X \times Y)} = \underbrace{\partial e \times f}_{\in C_{p-1}^{CW}(X) \otimes C_q^{CW}(Y)} + (-1)^p \underbrace{e \times \partial f}_{\in C_p^{CW}(X) \otimes C_{q-1}^{CW}(Y)}.$$

Diese Aussage kann man durch sorgfältiges bestimmen der Vorzeichen beweisen. Die Aussage wird in Abbildung 35 skizziert.

Wir haben also folgenden Satz ‘bewiesen’:

Satz 10.1. *Es seien X und Y zwei CW-Komplexe mit endlich vielen Zellen in jeder Dimension. Dann gibt es einen Isomorphismus*

$$\Phi_{XY} : C_*^{CW}(X) \otimes C_*^{CW}(Y) \xrightarrow{\cong} C_*^{CW}(X \times Y)$$

von zellulären Kettenkomplexen.

⁹⁸Warum liegt das Bild dieser Anklebeabbildung in $(X \times Y)^{n-1}$?

⁹⁹Hierbei haben wir folgende einfache algebraische Tatsache verwendet: wenn M und N zwei Mengen sind, dann haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{A}(M \times N) = \mathcal{A}(M) \otimes \mathcal{A}(N),$$

wobei wir für eine Menge W mit $\mathcal{A}(W)$ die von W aufgespannte freie abelsche Gruppe bezeichnen.

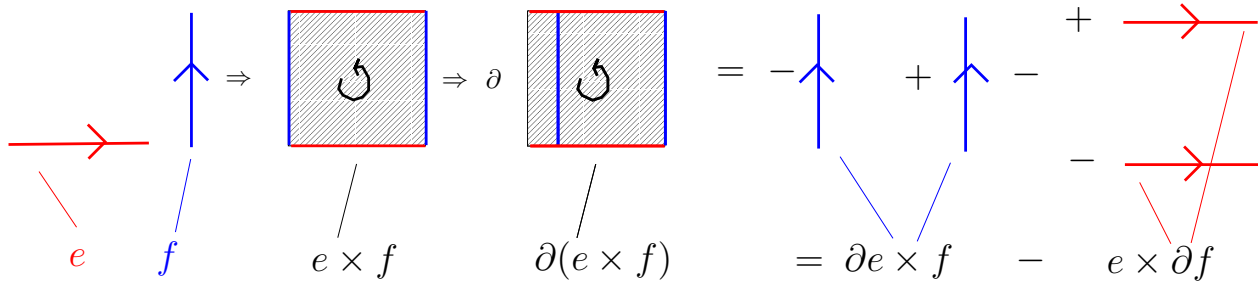


ABBILDUNG 35. Der Rand vom Produkt von zwei 1-Zellen.

10.3. Der Satz von Eilenberg-Zilber. Der Satz von Eilenberg-Zilber ist das Analogon von Satz 10.1 für die singulären Kettenkomplexen von beliebigen topologischen Räumen.

Satz 10.2. (Eilenberg-Zilber) *Es seien X und Y zwei topologische Räume. Dann gibt es Kettenabbildungen*

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightarrow{\mu} C_*(X \times Y) \text{ und } C_*(X \times Y) \xrightarrow{\nu} C_*(X) \otimes C_*(Y),$$

welche Kettenhomotopie-Inverse zueinander sind. Die Abbildungen μ und ν sind darüber hinaus natürlich.¹⁰⁰ Insbesondere gilt also, dass

$$H_*(X \times Y) \cong H_*(C_*(X) \otimes C_*(Y)).$$

Beweis. Wenn X und Y Kettenkomplexe sind, dann folgt die Behauptung aus Satz 7.5 zusammen mit Satz 7.6. Im allgemeinen Fall beruht der Beweis vom Satz von Eilenberg-Zilber auf dem Satz von den ‘azyklischen Modellen’ und ist nicht besonders anschaulich. Wir verweisen auf Kapitel 59 von

Munkres: Elements of algebraic topology

für den Beweis. □

10.4. Die Künneth-Formel für Kettenkomplexe. Aus dem vorherigen Kapitel folgt, dass wir einen Zusammenhang zwischen den Homologiegruppen von den Kettenkomplexen

¹⁰⁰Hier ‘natürlich’ bedeutet, dass wir für Abbildungen $f: X \rightarrow X'$ und $g: Y \rightarrow Y'$ kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) \otimes C_*(Y) & \xrightarrow{\mu} & C_*(X \times Y) & \text{ und } & C_*(X \times Y) & \xrightarrow{\nu} & C_*(X) \otimes C_*(Y) \\ \downarrow f_* \otimes g_* & & \downarrow (f \times g)_* & & \downarrow (f \times g)_* & & \downarrow f_* \otimes g_* \\ C_*(X') \otimes C_*(Y') & \xrightarrow{\mu} & C_*(X' \times Y') & & C_*(X' \times Y') & \xrightarrow{\nu} & C_*(X') \otimes C_*(Y') \end{array}$$

erhalten.

\mathcal{C} , \mathcal{C}' und $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ finden müssen. Wir betrachten dabei folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \Theta: H_p(\mathcal{C}) \otimes H_q(\mathcal{C}') &\rightarrow H_{p+q}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \\ \sum_{i=1}^r [c_i] \otimes [c'_i] &\mapsto \sum_{i=1}^r [c_i \otimes c'_i]. \end{aligned}$$

101

Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 10.3. (Die Künneth-Formel für Kettenkomplexe) *Es seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' Kettenkomplexe. Wenn \mathcal{C} frei ist, d.h. wenn alle Gruppen C_n freie abelsche Gruppen sind, dann gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{C}) \otimes H_q(\mathcal{C}') \xrightarrow{\Theta} H_n(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(\mathcal{C}), H_q(\mathcal{C}')) \rightarrow 0.$$

Wenn \mathcal{C}' ein Kettenkomplex ist, welcher gerade aus einer Gruppe G besteht, dann erhalten wir als Spezialfall der Künneth-Formel gerade das Universelle Koeffiziententheorem. In der Tat ist der Beweis der Künneth-Formel ähnlich dem Beweis des Universellen Koeffiziententheorems.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass alle Randabbildungen $C_n \rightarrow C_{n-1}$ die Nullabbildung sind. In diesem gilt Fall insbesondere, dass $H_n(\mathcal{C}) = C_n$ für alle n . Es folgt zudem, dass $\bar{\partial}c_p \otimes c'_q = (-1)^p c_p \otimes \partial c'_q$. Der Kettenkomplex $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ ist also die direkte Summe der Kettenkomplexe $C_p \otimes \mathcal{C}'$. Nachdem \mathcal{C} frei ist, folgt zudem, dass jeder Kettenkomplex $C_p \otimes \mathcal{C}'$ dann einfach die mehrfache direkte Summe vom Kettenkomplex \mathcal{C}' ist. Es folgt, dass

$$H_n(C_p \otimes \mathcal{C}') \cong C_p \otimes H_{n-p}(\mathcal{C}') = H_p(\mathcal{C}) \otimes H_{n-p}(\mathcal{C}').$$

Insbesondere gilt dann, dass

$$H_n(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{C}) \otimes H_q(\mathcal{C}').$$

In Lemma 9.7 hatten wir gesehen, dass die Torsionsgruppen $\text{Tor}(A, B)$ verschwinden, wenn A eine torsionsfreie Gruppe ist. Wir erhalten also die gewünschte kurze exakte Sequenz.

¹⁰¹Diese Abbildung ist wohl-definiert. Zum einen, wenn c_i und c'_i Zykel sind, dann gilt

$$\bar{\partial}(c_i \otimes c'_i) = \partial c_i \otimes c'_i + (-1)^p c_i \otimes \partial c'_i = 0$$

d.h. $c_i \otimes c'_i \in CC \otimes \mathcal{C}'$ ist ein Zykel. Zum anderen, wenn $c_i + \partial d_i$ ein anderer Repräsentant von $[c_i]$ ist, dann gilt

$$(c_i + \partial d_i) \otimes c'_i = c_i \otimes c'_i + \bar{\partial}(d_i \otimes c'_i),$$

und ganz analog, wenn $c'_i + \partial d'_i$ ein anderer Repräsentant von $[c'_i]$ ist, dann gilt

$$c_i \otimes (c'_i + \partial d'_i) = c_i \otimes c'_i + (-1)^p \bar{\partial}(c_i \otimes d'_i).$$

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu, d.h. wir nehmen nicht mehr an, dass die Randabbildungen $C_n \rightarrow C_{n-1}$ Nullabbildungen sind. Der folgende Beweis weißt jetzt große Ähnlichkeiten zum Beweis vom Universellen Koeffiziententheorem auf.

Wir betrachten wiederum

$$\begin{aligned} Z_p &= \text{Ker}\{\partial_p: C_p \rightarrow C_{p-1}\}, \text{ und} \\ B_p &= \text{Im}\{\partial_{p+1}: C_{p+1} \rightarrow C_p\}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen dann mit \mathcal{Z} den Kettenkomplex, welcher durch die Z_p gegeben ist, wobei die Randabbildungen gerade die Nullabbildungen sind. Ganz analog bilden die B_p einen Kettenkomplex \mathcal{B} . Wie im Beweis vom Universellen Koeffiziententheorem erhalten wir jetzt eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen

$$0 \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\partial} \mathcal{B} \rightarrow 0.$$

Zudem sehen wir wiederum, dass die Gruppen B_{n-1} freie abelsche Gruppen sind, und dass daher für jedes C'_q , das Tensorprodukt der obigen exakten Sequenz mit C'_q wiederum eine exakte Sequenz ist. Es folgt dann auch, dass

$$0 \rightarrow \mathcal{Z} \otimes C' \rightarrow \mathcal{C} \otimes C' \rightarrow \mathcal{B} \otimes C' \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen ist.

Aus Satz 4.6 erhalten wir also folgende lange exakte Sequenz ¹⁰²

$$\dots \rightarrow H_n(\mathcal{Z} \otimes C') \rightarrow H_n(\mathcal{C} \otimes C') \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{B} \otimes C') \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{Z} \otimes C') \rightarrow \dots$$

Die ‘Randabbildung’ $H_{n-1}(\mathcal{B} \otimes C') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathcal{Z} \otimes C')$ aus Satz 4.6 ist dabei, wie im Beweis vom Universellen Koeffiziententheorem, gegeben durch die Inklusion $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Z}$.

Nachdem die Randabbildungen in \mathcal{B} und \mathcal{Z} die Nullabbildungen sind folgt aus dem zu Anfang betrachteten Spezialfall, dass wir folgende lange exakte Sequenz erhalten:

$$\dots \xrightarrow{i_n} \bigoplus_{j=0}^n Z_n \otimes H_{n-j}(C') \rightarrow H_n(\mathcal{C} \otimes C') \rightarrow \bigoplus_{j=0}^{n-1} B_j \otimes H_{n-j-1}(C') \xrightarrow{i_{n-1}} \bigoplus_{j=0}^{n-1} Z_j \otimes H_{n-j-1}(C') \rightarrow \dots$$

Wir erhalten also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Coker}(i_n) \rightarrow H_n(\mathcal{C} \otimes C') \rightarrow \text{Ker}(i_{n-1}) \rightarrow 0.$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Ausdrücke links und rechts den gewünschten Ausdrücken entsprechen. Der Beweis davon ist ganz analog zum Beweis der entsprechenden Aussage im Beweis vom Universellen Koeffiziententheorem.

Wir führen jetzt das Argument etwas genau aus. Wie im Beweis vom Universellen Koeffiziententheorem sehen wir, dass für jedes $j \in \{0, \dots, n-1\}$ die Sequenz

$$0 \rightarrow B_j \rightarrow Z_j \rightarrow H_j(\mathcal{C}) \rightarrow 0$$

¹⁰²Der Index reduziert sich dabei im Schritt von $H_n(\mathcal{C} \otimes C') \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{B} \otimes C')$, weil diese Abbildung induziert wird durch $0 \rightarrow Z_p \rightarrow C_p \rightarrow B_{p-1} \rightarrow 0$.

eine freie Auflösung von $H_j(\mathcal{C})$ ist. Insbesondere folgt aus den Definitionen und aus 9.6, dass für jedes l gilt

$$\begin{aligned} \text{Coker}(i_j: B_j \otimes H_l(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_j} Z_j \otimes H_l(\mathcal{C}')) &= H_j(\mathcal{C}) \otimes H_l(\mathcal{C}'), \text{ und} \\ \text{Ker}(i_j: B_j \otimes H_l(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_j} Z_j \otimes H_l(\mathcal{C}')) &= \text{Tor}_1(H_j(\mathcal{C}), H_l(\mathcal{C}')). \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass

$$\begin{aligned} \text{Coker}(i_n) &= \text{Coker} \left(\bigoplus_{j=0}^n B_j \otimes H_{n-j}(\mathcal{C}') \rightarrow \bigoplus_{j=0}^n Z_j \otimes H_{n-j}(\mathcal{C}') \right) \\ &= \bigoplus_{j=0}^n \text{Coker} \left(i_j: B_j \otimes H_{n-j}(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_j} Z_j \otimes H_{n-j}(\mathcal{C}') \right) \\ &= \bigoplus_{j=0}^n H_j(\mathcal{C}) \otimes H_{n-j}(\mathcal{C}'). \end{aligned}$$

Ganz analog zeigt man, dass

$$\begin{aligned} \text{Ker}(i_{n-1}) &= \text{Coker} \left(\bigoplus_{j=0}^{n-1} B_j \otimes H_{n-j-1}(\mathcal{C}') \rightarrow \bigoplus_{j=0}^{n-1} Z_j \otimes H_{n-j-1}(\mathcal{C}') \right) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{n-1} \text{Ker} \left(i_j: B_j \otimes H_{n-j-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_j} Z_j \otimes H_{n-j-1}(\mathcal{C}') \right) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{n-1} \text{Tor}_0(H_j(\mathcal{C}), H_{n-j}(\mathcal{C}')). \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die kurze exakte Sequenz im Künneth-Theorem ist natürlich. D.h. wenn $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $f': \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$ Kettenabbildungen sind, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm von kurzen exakten Sequenzen: ¹⁰³

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{C}) \otimes H_q(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\Theta} & H_n(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') & \rightarrow & \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}(H_p(\mathcal{C}), H_q(\mathcal{C}')) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f_* \otimes f'_* & & \downarrow (f \otimes f')_* & & \downarrow \text{Tor}(f_*, f'_*) \\ 0 & \rightarrow & \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{D}) \otimes H_q(\mathcal{D}') & \xrightarrow{\Theta} & H_n(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}') & \rightarrow & \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}(H_p(\mathcal{D}), H_q(\mathcal{D}')) \rightarrow 0. \end{array}$$

Wir kehren jetzt zu der Ausgangsfrage zurück, was denn die Homologiegruppen von den topologischen Räumen X, Y und $X \times Y$ miteinander zu tun haben. Der Satz von Eilenberg-Zilber zusammen mit der Künneth-Formel für Kettenkomplexe gibt uns folgenden Satz:

¹⁰³Die Torsionsgruppe $\text{Tor}(-, -)$ ist ‘funktoriell in beiden Einträgen’, d.h. wenn $\varphi: A \rightarrow B$ und $\psi: C \rightarrow D$ Abbildungen sind, dann gibt es eine induzierte Abbildung $\text{Tor}(\varphi, \psi): \text{Tor}(A, B) \rightarrow \text{Tor}(C, D)$.

Satz 10.4. (Die Künneth-Formel für topologische Räume) *Es seien X und Y zwei topologische Räume. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \xrightarrow{\Theta} H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y)) \rightarrow 0,$$

und diese kurze exakte Sequenz ist natürlich bezüglich der topologischen Räume X und Y .

Bemerkung. Die kurze exakte Sequenz in Satz 10.4 spaltet, aber diese Spaltung ist nicht natürlich. Siehe auch Theorem 59.3 von Munkres: Elements of algebraic topology.

Beispiel. Es sei X ein topologischer Raum. Wir wollen die Homologiegruppen von $S^1 \times X$ bestimmen. Die Homologiegruppen von S^1 sind natürlich \mathbb{Z} in der Dimension 0 und 1. Nachdem für jede abelsche Gruppe A gilt, dass $\mathbb{Z} \otimes A = A$ und $\text{Tor}(\mathbb{Z}, A) = 0$ folgt nun aus der Künneth-Formel, dass es einen Isomorphismus

$$H_{n-1}(X) \oplus H_n(X) \rightarrow H_n(S^1 \times X)$$

gibt.

11. DIE KOHOMOLOGIEGRUPPEN EINES TOPOLOGISCHEN RAUMS

11.1. Duale Kokettenkomplexe. In diesem Kapitel sei G durchgehend eine abelsche Gruppe. Es sei nun $f: A \rightarrow B$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann induziert f eine Abbildung

$$\begin{aligned} f^*: \text{Hom}(B, G) &\rightarrow \text{Hom}(A, G) \\ (\varphi: B \rightarrow G) &\mapsto \left(\begin{array}{l} A \rightarrow G \\ a \mapsto \varphi(f(a)). \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen $f^*: \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G)$ als die durch f induzierte Abbildung.

Wenn A beispielsweise eine Untergruppe von B ist, und wenn $i: A \rightarrow B$ die Inklusionsabbildung ist, dann ist für jeden Homomorphismus $\varphi: B \rightarrow G$ die Abbildung $i^*\varphi: A \rightarrow G$ gerade die Einschränkung von φ auf $A \subset B$.

Es folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$\begin{aligned} (\text{id}_A)^* &= \text{id}_{\text{Hom}(A, G)}, \text{ und} \\ (g \circ f)^* &= f^* \circ g^* \text{ für alle } f: A \rightarrow B \text{ und } g: B \rightarrow C. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaften ähneln den Eigenschaften eines Funktors, mit der Ausnahme, dass in der Gleichheit $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ die Reihenfolge von f und g wechselt.

Wir erinnern im Folgenden an eine Definition aus der Topologievorlesung. Es seien C und D Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $F: C \rightarrow D$ besteht aus einer Abbildung

$$F: \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$$

und für alle $X, Y \in \text{Ob}(C)$ gibt es zudem eine Abbildung¹⁰⁴

$$\text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}(F(Y), F(X))$$

¹⁰⁴Man beachte, dass sich die ‘Richtung umkehrt’, d.h. wir ordnen einem Morphismus in $\text{Mor}(X, Y)$ einen Morphismus in $\text{Mor}(F(Y), F(X))$ zu.

so dass folgende Axiome erfüllt sind

- (F1) $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \text{Ob}(C)$,
 (F2) für $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$ und $\psi \in \text{Mor}(Y, Z)$, gilt

$$F(\psi \circ \phi) = F(\phi) \circ F(\psi).$$

Zur Unterscheidung bezeichnen wir die Funktor, welche wir ihn in Kapitel 1.3 eingeführt hatten, manchmal auch als *kovariante Funktoren*.

Mit dieser Definition können wir also jetzt die obige Diskussion wie folgt zusammenfassen: Die Abbildungen

$$\begin{aligned} A &\mapsto \text{Hom}(A, G) \\ (f: A \rightarrow B) &\mapsto (f^*: \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G)) \end{aligned}$$

definieren einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen zur Kategorie der abelschen Gruppen.

Es sei nun ein Kettenkomplex

$$(C_*, \partial_*): \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

gegeben. Wir betrachten dann folgende Sequenz von Abbildungen

$$\leftarrow \text{Hom}(C_n, G) \xleftarrow{\partial_n^*} \text{Hom}(C_{n-1}, G) \xleftarrow{\partial_{n-1}^*} \dots \text{Hom}(C_1, G) \xleftarrow{\partial_1^*} \text{Hom}(C_0, G) \leftarrow 0.$$

Wir nennen diese Sequenz von Abbildungen einen zu (C_*, ∂_*) dualen Kokettenkomplex.¹⁰⁵ Wir definieren nun die *n-te Kohomologiegruppe des Kettenkomplexes (C_*, ∂_*) mit G -Koeffizienten* wie folgt:

$$H^n(C; G) := \text{Ker}\{\partial_{n+1}^*: \text{Hom}(C_n, G) \rightarrow \text{Hom}(C_{n+1}, G)\} / \text{Im}\{\partial_n^*: \text{Hom}(C_{n-1}, G) \rightarrow \text{Hom}(C_n, G)\}.$$

Wenn G ein kommutativer Ring ist, beispielsweise $G = \mathbb{F}_p, G = \mathbb{Z}, G = \mathbb{Q}$ oder $G = \mathbb{R}$, dann sind die Randabbildungen Modulhomomorphismen, insbesondere sind dann die Kohomologiegruppen $H^n(C; G)$ Moduln über dem kommutativen Ring G .

Viele von den Aussagen über Kettenkomplexe und deren Homologiegruppen gelten in leicht abgewandelter Form auch für Kohomologiegruppen. Wenn beispielsweise $f: C_* \rightarrow D_*$

¹⁰⁵Ein *Kokettenkomplex* ist eine Folge

$$\rightarrow D_n \xleftarrow{\delta_n} D_{n-1} \xleftarrow{\delta_{n-1}} \dots D_1 \xleftarrow{\delta_1} D_0 \rightarrow 0$$

von Abbildungen zwischen abelschen Gruppen, so dass für alle i gilt $\delta_{i+1} \circ \delta_i = 0$. Viele von den Definitionen für Kettenkomplexe übertragen sich auf offensichtliche Weise zu Kokettenkomplexen. Beispielsweise sagen wir, dass der Kokettenkomplex *exakt* ist, wenn für jedes n gilt:

$$\text{Ker}(\delta_n) = \text{Im}(\delta_{n-1}).$$

Zudem haben wir auch den offensichtlichen Begriff einer Kokettenabbildung, und die Kokettenkomplexe zusammen mit den Kokettenabbildungen bilden die Kategorie der Kokettenkomplexe.

eine Kettenabbildung zwischen Kettenkomplexen C_* und D_* ist, dann ist für jedes n die Abbildung

$$\begin{aligned} f^*: H_n(C; G) &\rightarrow H^n(D; G) \\ [\varphi: C_n \rightarrow G] &\mapsto [\varphi \circ f_*: D_n \rightarrow G] \end{aligned}$$

wohl-definiert. Für jedes n definiert dann

$$\begin{aligned} C_* &\mapsto H^n(C; G) \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe zur Kategorie der abelschen Gruppen.

Analog zu Satz 4.6 kann man zudem zeigen, dass wenn

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{p} C_* \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist, dann existiert für jedes n eine Abbildung

$$\delta_n: H^n(A; G) \rightarrow H^{n+1}(C; G),$$

so dass

$$\dots \rightarrow H^n(C; G) \xrightarrow{p^*} H^n(B; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C; G) \xrightarrow{p^*} H_{n+1}(B; G) \xrightarrow{i^*} \dots$$

eine exakte Sequenz bildet.¹⁰⁶

11.2. Die singulären Kohomologiegruppen eines topologischen Raums. Es sei nun X ein topologischer Raum und es sei wiederum durchgehend G eine abelsche Gruppe. Wir schreiben dann

$$C^n(X; G) := \text{Hom}(C_n(X), G) \text{ und } \delta_n := \partial_n^*$$

und erhalten einen Kokettenkomplex

$$\dots \xleftarrow{\delta_{n+2}} C^{n+1}(X; G) \xleftarrow{\delta_{n+1}} C^n(X; G) \xleftarrow{\delta_n} C^{n-1}(X; G) \xleftarrow{\delta_{n-1}} \dots \xleftarrow{\delta_1} C^0(X; G) \leftarrow 0.$$

Wir definieren nun die n -te *singuläre Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in G* ¹⁰⁷ als

$$\begin{aligned} H^n(X; G) &:= H^n(C_*(X); G) \\ &= \text{Ker}\{\delta_{n+1}: C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G)\} / \text{Ker}\{\delta_n: C^{n-1}(X; G) \rightarrow C^n(X; G)\}. \end{aligned}$$

Wenn $G = \mathbb{Z}$, dann schreiben wir einfach $H^n(X) = H^n(X; \mathbb{Z})$. Wenn $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, dann hatten wir schon gesehen, dass f eine Kettenabbildung $f_*: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ induziert. Es folgt nun aus der Diskussion vom

¹⁰⁶Die Tatsache, dass die Abbildungen in die ‘falsche Richtung laufen’, ist eine nie versiegende Quelle der Verwirrung.

¹⁰⁷Normalerweise lassen wir das Adjektiv ‘singuläre’ weg, und reden einfach von der n -ten Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in G .

vorherigen Kapitel, dass f eine Abbildung $f^*: H^n(Y; G) \rightarrow H^n(X; G)$ induziert. Darüber hinaus definieren die Abbildungen

$$\begin{aligned} X &\mapsto H^n(X; G) \\ (f: X \rightarrow Y) &\mapsto (f^*: H^n(Y; G) \rightarrow H^n(X; G)) \end{aligned}$$

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der topologischen Räume zur Kategorie der abelschen Gruppen. (Oder im Falle, dass G ein kommutativer Ring ist, zur Kategorie der G -Moduln.)

Bevor wir die Theorie der Kohomologiegruppen ausführen wollen wir erst uns einmal ein ganz explizites Beispiel erarbeiten:

Beispiel. Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Was ist dann $H_0(X; G)$? Betrachten wir dazu das ‘rechte Ende’ vom Kettenkomplex von $C_*(X)$ und vom Kokettenkomplex $\text{Hom}(C_*(X), G)$.

$$C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \text{Hom}(C_1(X), G) \xleftarrow{\partial_1^*} \text{Hom}(C_0(X), G) \leftarrow 0.$$

Es folgt also, dass

$$H^0(X; G) = \text{Ker} \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Hom}(C_0(X), G) & \rightarrow & \text{Hom}(C_1(X), G) \\ (f: C_0(X) \rightarrow G) & \mapsto & (f \circ \partial_1: C_1(X) \rightarrow G) \end{array} \right\}.$$

Nachdem die singulären 1-Simplizes eine Basis von $C_1(X)$ bilden können wir $H^0(X; G)$ auch wie folgt schreiben:

$$H^0(X; G) = \{f: C_0(X) \rightarrow G \mid f(\partial\sigma) = 0 \text{ für alle singulären 1-Simplizes } \sigma: \Delta^1 \rightarrow X\}.$$

Zur Erinnerung, wir identifizieren die singulären 0-Simplizes in X mit den Punkten in X . Ein Element in $\text{Hom}(C_0, G)$ ist eindeutig durch die Bildwerte auf den singulären 0-Simplizes festgelegt, das heißt, wir können ein Element in $\text{Hom}(C_0, G)$ als Funktion von X nach G auffassen. Für einen singulären 1-Simplex $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$ ist dann $f(\partial\sigma)$ die Differenz zwischen den Werten am Anfangspunkt und am Endpunkt von σ . Nachdem wir fordern, dass $f(\partial\sigma) = 0$ für alle $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$, und nachdem X wegzusammenhängend ist, folgt, dass f allen Punkten in X den gleichen Wert zuweisen muss. Wir sehen also, dass $H^0(X; G) \cong G$.

Viele von den Aussagen über Homologiegruppen kann man auch ganz analog für Kohomologiegruppen beweisen.

- (1) Homotope Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ induzieren die gleichen Abbildungen

$$f^* = g^*: H^n(Y; G) \rightarrow H^n(X; G).$$

- (2) Es sei X ein topologischer Raum mit endlich vielen Wegzusammenhangskomponenten X_1, \dots, X_k , dann gilt

$$H^n(X; G) := \bigoplus_{i=1}^k H^n(X_i; G).$$

Wenn X unendlich viele Wegzusammenhangskomponenten besitzt, dann ist die Lage diffiziler. Dies wird in Übungsblatt 12 behandelt.

- (3) Wenn (X, A) ein Paar von topologischen Räumen ist, dann definieren wir die relativen Kohomologiegruppen als

$$H^n(X, A; G) := H^n(C_*(X, A); G)$$

und wir erhalten eine lange exakte Sequenz

$$\dots H^n(X, A; G) \xrightarrow{p^*} H^n(X; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, A; G) \dots$$

hierbei ist

- (a) p^* die durch die Projektion $C_*(X) \rightarrow C_*(X, A)$ induzierte Abbildung.
- (b) i^* die durch die Inklusion $C_*(A) \rightarrow C_*(X)$ induzierte Abbildung.
- (c) Die ‘Korand-Abbildung’ $\delta: H^n(A; G) \rightarrow H^{n+1}(X, A; G)$ ist gegeben durch die Abbildung

$$\begin{aligned} H^n(A; G) &\rightarrow H^{n+1}(X, A; G) \\ [f: C_n(A) \rightarrow G] &\mapsto [f \circ \partial: C_{n+1}(X, A) \rightarrow G] \end{aligned}$$

- (4) (Ausschneidungssatz für Kohomologiegruppen) Es seien $Z \subset A \subset X$ Teilmengen, wobei der Abschluss von Z im Inneren von A enthalten ist. Dann induziert die Inklusion $i: (X \setminus Z, A \setminus Z; G) \rightarrow (X, A; G)$ Isomorphismen

$$H^n(X, A; G) \xrightarrow{i^*} H^n(X \setminus Z, A \setminus Z; G).$$

- (5) (Mayer–Vietoris Sequenz für Kohomologiegruppen) Es sei X ein topologischer Raum und es seien $A, B \subset X$ Teilmengen, so dass $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{i^* \oplus i^*} H^n(A; G) \oplus H^n(B; G) \xrightarrow{i^* \oplus -i^*} H^n(A \cap B; G) \rightarrow H^{n+1}(X; G) \rightarrow \dots$$

wobei die Abbildungen i^* jeweils durch die Einschränkungen auf den Teilraum induziert werden.

- (6) Wenn X ein wegzusammenhängender Raum ist, dann haben wir oben schon gesehen, dass $H^0(X; G) \cong G$.
- (7) Es sei X ein CW-Komplex. Zur Erinnerung, wir nennen dann

$$C_*^{CW}(X): \quad \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \xrightarrow{d_{n-2}} \dots \rightarrow 0$$

den *zellulären Kettenkomplex*. Wir bezeichnen dann

$$H_{CW}^n(X; G) := H^n(C_*^{CW}(X), G)$$

als die *n-te zelluläre Kohomologiegruppe von X mit G -Koeffizienten*. Es gibt dann wiederum einen kanonischen Isomorphismus

$$H_{CW}^n(X; G) \cong H^n(X; G).$$

Für Details zu den Beweisen verweisen wir auf die Seiten 199 bis 204 von Hatcher: Algebraic Topology.

Die letzte Aussage besagt also, dass wir die Kohomologiegruppen eines topologischen Raums mithilfe des zellulären Kettenkomplexes bestimmen können. Wir werden dies im nächsten Kapitel ausnützen um mehrere Kohomologiegruppen zu bestimmen.

11.3. Beispiel von Kohomologiegruppen. Betrachten wir zuerst die n -Sphäre mit $n > 0$. Wir können S^n als CW-Komplex mit einer 0-Zelle und einer weiteren Zelle der Dimension n auffassen, und die Randabbildungen sind die Nullabbildungen. Wir betrachten also den zellulären Kettenkomplex

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Der duale Kokettenkomplex ist dann

$$0 \leftarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \leftarrow 0.$$

Die Evaluations-Abbildung

$$\begin{aligned} \varepsilon : \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) &\rightarrow G \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

gibt uns einen kanonischen Isomorphismus zwischen G und $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$. Der obige duale Kokettenkomplex ist also von der Form

$$0 \leftarrow G \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} G \leftarrow 0.$$

Wir sehen also, dass

$$H^k(S^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0, n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenden wir uns nun $F = F_{2g}$, der geschlossenen Fläche von Geschlecht g zu. In Kapitel 7.3 hatten wir gesehen, dass es eine CW-Struktur auf F gibt, so dass der zelluläre Kettenkomplex von folgender Form ist:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Es folgt dann wie oben, dass

$$H^2(F_{2g}; G) \cong G, H^1(F_{2g}; G) \cong G^{2g} \text{ und } H^0(F_{2g}; G) \cong G.$$

In den bisherigen Beispielen stimmen also die Homologie- und die Kohomologiegruppen mit G -Koeffizienten über ein. Betrachten wir nun den 2-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{R}P^2$. In Kapitel 7.3 hatten wir gesehen, dass es eine CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^2$ gibt, so dass der zugehörige zelluläre Kettenkomplex von folgender Form ist:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Der zugehörige duale Kokettenkomplex ist dann also

$$0 \leftarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xleftarrow{(\cdot 2)^*} \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{0} \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \rightarrow 0.$$

Mithilfe der Evaluations-Abbildung $\varepsilon: \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} G$ sehen wir, dass dieser Kokettenkomplex isomorph ist zu folgendem Kokettenkomplex:

$$0 \leftarrow G \xleftarrow{\cdot 2} G \xrightarrow{0} G \rightarrow 0.$$

Im Fall $G = \mathbb{Z}$ erhalten wir also, dass

$$H^2(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2, H^1(\mathbb{R}P^2) \cong 0 \text{ und } H^0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}.$$

Andererseits hatten wir in Kapitel 6.2 gesehen, dass

$$H_2(\mathbb{R}P^2) = 0, H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2 \text{ und } H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}.$$

In diesem Fall stimmen also die Homologie- und die Kohomologiegruppen von $\mathbb{R}P^2$ mit \mathbb{Z} -Koeffizienten *nicht* über ein.

Um die Verwirrung komplett zu machen betrachten wir noch die Kohomologie von $\mathbb{R}P^2$ mit \mathbb{F}_2 -Koeffizienten. Der zugehörige duale Kokettenkomplex ist dann

$$0 \leftarrow \mathbb{F}_2 \xleftarrow{\cdot 2=0} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

und wir sehen, dass

$$H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2, H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2 \text{ und } H^0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2.$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit den Berechnung in Kapitel 9.3 sehen wir also, dass die Homologie- und die Kohomologiegruppen von $\mathbb{R}P^2$ mit \mathbb{F}_2 -Koeffizienten dann doch wieder übereinstimmen.

12. DAS UNIVERSELLE KOEFFIZIENTEN THEOREM FÜR KOHOMOLOGIEGRUPPEN

12.1. Die Extgruppen. Es stellt sich nun die Frage, wie man das Beispiel von der Kohomologie des 2-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{R}P^2$ mit den verschiedenen Koeffizienten erklären kann. Zudem wäre es auch wieder interessant zu wissen, ob man die Kohomologie mit G -Koeffizienten aus der Homologie mit \mathbb{Z} -Koeffizienten bestimmen kann.

Diese Fragestellungen sind wieder rein algebraischer Natur. Es sei also (C_*, ∂_*) ein Kettenkomplex und G eine abelsche Gruppe. Wir wollen einen Zusammenhang zwischen den Kohomologiegruppen $H^n(C; G)$ und den Homologiegruppen $H_*(C)$ herstellen. Diese Problemstellung, und die Lösung dazu, ähnelt der Situation in Kapitel 9.

Zur Erinnerung, wir bezeichnen mit \mathcal{K} die Kategorie der Kettenkomplexe. Wir bezeichnen nun mit \mathcal{K}^* die Kategorie der Kokettenkomplexe. Wir hatten definiert, wann ein kovarianter Funktor $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ exakt, links-exakt und rechts-exakt ist. Ganz analog können wir diese

Begriffe jetzt auch für kontravariante Funktoren $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^*$ einführen. Beispielsweise heißt ein kontravarianter Funktor $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^*$ *links-exakt*¹⁰⁸, wenn für alle exakten Sequenzen

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

auch

$$0 \rightarrow F(C) \xrightarrow{F(j)} F(B) \xrightarrow{F(i)} F(A)$$

exakt ist. Zudem heißt ein kontravarianter Funktor $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^*$ *rechts-exakt*, wenn für alle exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

auch

$$F(C) \xrightarrow{F(j)} F(B) \xrightarrow{F(i)} F(A) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Wir hatten gesehen, dass der kovariante Funktor $- \otimes G$ rechts-exakt ist aber nicht links-exakt. Beim kontravarianten Funktor $\text{Hom}(-, G)$ ist die Lage genau umgekehrt. In Übungsblatt 13 werden wir zeigen, dass dieser Funktor links-exakt ist. Andererseits wenn wir den Kettenkomplex

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2$$

zusammen mit $G = \mathbb{F}_2$ betrachten, dann ist der zugehörige Kokettenkomplex von der Form

$$\mathbb{F}_2 \xrightarrow[p \cong]{p^*} \mathbb{F}_2 \xrightarrow[=0]{(\cdot 2)^*} \mathbb{F}_2 \rightarrow 0.$$

Nachdem dieser Kokettenkomplex nicht exakt ist, folgt, dass $\text{Hom}(-, G)$ kein rechts-exakter Funktor ist.

In Kapitel 9.4 hatten wir die Torsions-Gruppen $\text{Tor}(G, H)$ eingeführt, welche ‘messen’, wie weit der Funktor $- \otimes G$ von einem links-exakten Funktor entfernt ist. Ganz analog führen wir jetzt die sogenannten Extgruppen $\text{Ext}(G, H)$ ein, welche ‘messen’, wie weit der Funktor $\text{Hom}(-, G)$ von einem links-exakten Funktor entfernt ist.

Es seien nun G und H abelsche Gruppen. Wir wählen eine freie Auflösung

$$\dots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$$

der abelschen Gruppe H und wir definieren die n -te G -Extgruppe von H als

$$\text{Ext}_n(H, G) := H^n(F_*; G).$$

Wie in Kapitel 9.4 kann man nun zeigen, dass diese Gruppe nicht von der Wahl der freien Auflösung abhängt. Die Null-te Extgruppe ist wie auch bei der Null-ten Torgruppe ein ‘alter Bekannter’: In Übungsblatt 13 werden wir zeigen, dass

$$\text{Ext}_0(H, G) = \text{Hom}(H, G).$$

¹⁰⁸Ob man solche Funktoren nun links-exakt oder rechts-exakt nennen ist von der Definition nicht unbedingt klar, aber die Definition wie sie hier gegeben ist, ist die übliche Definition.

Wenn H eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist, dann können wir wiederum eine freie Auflösung der Länge 2 wählen:

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0.$$

Insbesondere ist $\text{Ext}_n(H, G) = 0$ für $n \geq 2$. Wir bezeichnen

$$\text{Ext}(H, G) = \text{Ext}_1(H, G)$$

als *die* G -Extgruppe von H . Die Eigenschaften von Extgruppen sind den Eigenschaften von den Torsionsgruppen sehr ähnlich. Ganz analog zu Lemma 9.7 kann man zeigen, dass wenn G, H und H_1, \dots, H_k sowie $G_j, j \in J$ abelsche Gruppen sind, dann gilt ¹⁰⁹

- (1) $\text{Ext}(\bigoplus_{i=1}^k H_i, G) \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{Ext}(H_i, G)$,
- (2) $\text{Ext}(H, \bigoplus_j G_j) \cong \bigoplus_j \text{Ext}(H, G_j)$,
- (3) $\text{Ext}(H, G) = 0$, wenn H eine freie abelsche Gruppe ist,
- (4) für alle n haben wir einen Isomorphismus $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \cong G/nG$,
- (5) für $n, m \neq 0$ gilt $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n,m)}$.

Zudem kann man auch noch folgende Aussage beweisen:

- (5) Wenn $G = \mathbb{Q}$ oder $H = \mathbb{R}$, dann gilt $\text{Ext}(H, G) = 0$.

Wir hatten gesehen, dass $\text{Tor}(H, G) = 0$ wenn immer G eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist. Für die Extgruppen gilt diese Aussage nun nicht mehr. In der Tat kann man mithilfe der Klassifikation von endlich erzeugten abelschen Gruppen, sowie den Eigenschaften (1), (3) und (4) leicht folgendes Lemma beweisen.

Lemma 12.1. *Es sei H eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann ist ¹¹⁰*

$$\text{Ext}(H, \mathbb{Z}) \cong \text{Torsions-Untergruppe von } H.$$

Es sei nun $\alpha: H \rightarrow H'$ ein Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen und es sei G eine abelsche Gruppe. Es folgt dann aus Lemma 9.4 und aus der Definition von der G -Torsion, dass α einen Homomorphismus

$$\alpha^*: \text{Ext}(H', G) \rightarrow \text{Ext}(H, G)$$

induziert. Man kann sich nun leicht davon vergewissern, dass

$$\begin{aligned} H &\mapsto \text{Ext}(H, G) \\ (\alpha: H \rightarrow H') &\mapsto (\alpha^*: \text{Ext}(H', G) \rightarrow \text{Ext}(H, G)) \end{aligned}$$

einen *kontravarianten* Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen zur Kategorie der abelschen Gruppen definiert. Andererseits, wenn $\beta: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen ist, dann sieht man leicht, dass α einen Homomorphismus

$$\beta_*: \text{Ext}(H, G) \rightarrow \text{Ext}(H, G')$$

¹⁰⁹Wenn wir unendlich viele abelsche Gruppen $H_i, i \in I$ gegeben sind, was ist dann der Zusammenhang zwischen der Gruppe $\text{Ext}(\bigoplus_i H_i, G)$ und den Gruppen $\text{Ext}(H_i, G), i \in I$? Insbesondere, was ist der Zusammenhang zwischen der Gruppe $\text{Hom}(\bigoplus_i H_i, G)$ und den Gruppen $\text{Hom}(H_i, G), i \in I$?

¹¹⁰Dieser Isomorphismus ist allerdings nicht kanonisch.

induziert. Man kann zudem leicht beweisen, dass

$$\begin{aligned} G &\mapsto \text{Ext}(H, G) \\ (\beta: G \rightarrow G') &\mapsto (\beta_*: \text{Ext}(H, G) \rightarrow \text{Ext}(H, G')) \end{aligned}$$

einen *kovarianten* Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen zur Kategorie der abelschen Gruppen definiert.

12.2. Das universelle Koeffiziententheorem. Es sei (C_n, ∂_n) ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen und es sei G eine abelsche Gruppe. Man kann sich nun wiederum die Frage stellen, was ist der Zusammenhang zwischen den Kohomologiegruppen von C und den normalen Homologiegruppen. Beispielsweise haben wir die Evaluationsabbildung, welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{ev}: H^n(C; G) &\rightarrow \text{Hom}(H_n(C), G) \\ [f: C_n \rightarrow G] &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} H_n(C) & \rightarrow & G \\ [c] & \mapsto & f(c) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Anhand der Beispiele im vorherigen Kapitel sieht man leicht, dass dies im Allgemeinen kein Isomorphismus ist.

Der Zusammenhang zwischen Homologie- und Kohomologiegruppen ist nun durch das folgende Theorem gegeben.

Theorem 12.2. (Das universelle Koeffiziententheorem für Kohomologiegruppen)
Es sei (C_n, ∂_n) ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen und es sei G eine abelsche Gruppe. Dann gibt es für jedes n eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow H^n(C; G) \xrightarrow{\text{ev}} \text{Hom}(H_n(C), G) \rightarrow 0.$$

Diese exakte Sequenz spaltet, und es gibt daher einen Isomorphismus

$$H^n(C; G) \cong \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \oplus \text{Hom}(H_n(C), G).$$

Der Beweis des Theorems ist analog zum Beweis von Theorem 12.2. Wir verweisen auf Kapitel 3.1 von Hatcher: Algebraic Topology für die Details vom Beweis.

Bemerkung. (1) Die kurze exakte Sequenz ist ‘natürlich’, indem Sinne, dass wenn $f: C \rightarrow D$ eine Kettenabbildung ist, dann ergeben die induzierten Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(D), G) & \longrightarrow & H^n(D; G) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom}(H_n(D), G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) & \longrightarrow & H^n(C; G) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Insbesondere, wenn (X, A) ein Paar von topologischen Räumen ist, dann erhalten wir folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-2}(A), G) & \longrightarrow & H^{n-1}(A; G) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom}(H_{n-1}(A), G) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), G) & \longrightarrow & H^n(X, A; G) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom}(H_n(X, A), G) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(X), G) & \longrightarrow & H^n(X; G) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom}(H_n(X), G) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(A), G) & \longrightarrow & H^n(A; G) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom}(H_n(A), G) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

(2) Es gibt keinen ‘kanonischen’ Isomorphismus

$$H^n(C; G) \cong \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \oplus \text{Hom}(H_n(C), G)$$

indem Sinne, dass man Kettenkomplexen und Gruppen nicht durchgehend solch einen Isomorphismus zuordnen kann, so dass eine Kettenabbildung $f: C \rightarrow D$ immer ein kommutatives Diagramm ergeben würde.

Beispiel. Betrachten wir noch einmal den projektiven Raum $P := \mathbb{R}P^2$. Zur Erinnerung, es ist $H_2(P) = 0$, $H_1(P) = \mathbb{Z}/2$ und $H_0(P) = \mathbb{Z}$. Es folgt nun aus Theorem 12.2 und aus den Eigenschaften der Extgruppen, dass

$$\begin{aligned}
 H^2(P; \mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}(H_2(P), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_1(P), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0 \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \\
 H^1(P; \mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}(H_1(P), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_0(P), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \oplus 0 = 0 \\
 H^0(P; \mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}(H_0(P), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 H^2(P; \mathbb{F}_2) &\cong \text{Hom}(H_2(P), \mathbb{F}_2) \oplus \text{Ext}(H_1(P), \mathbb{F}_2) \cong \text{Hom}(0, \mathbb{F}_2) \oplus \text{Ext}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = 0 \oplus \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2 \\
 H^1(P; \mathbb{F}_2) &\cong \text{Hom}(H_1(P), \mathbb{F}_2) \oplus \text{Ext}(H_0(P), \mathbb{F}_2) \cong \text{Hom}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \oplus \text{Ext}(\mathbb{F}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{F}_2 \oplus 0 = \mathbb{F}_2 \\
 H^0(P; \mathbb{F}_2) &\cong \text{Hom}(H_0(P), \mathbb{F}_2) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2.
 \end{aligned}$$

Glücklicherweise deckt sich das mit den Berechnungen aus Kapitel 11.3

Beispiel. Es sei nun $R = \mathbb{Q}$ oder $R = \mathbb{R}$. Im vorherigen Kapitel hatten wir gesehen, dass die Extgruppen für $G = R$ verschwinden. Es folgt also, dass ¹¹¹

$$H^n(X; R) \cong \text{Hom}(H_n(X); R) \cong \text{Hom}(H_n(X)/\text{torsion}; R) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}^{b_i(X)}; R) \cong R^{b_1(X)}.$$

Es folgt zudem aus Theorem 9.11 und aus Lemma 9.7, dass

$$H_n(X; R) \cong H_n(X) \otimes R \cong (H_n(X)/\text{torsion}) \otimes R \cong \mathbb{Z}^{b_i(X)} \otimes R \cong R^{b_1(X)}.$$

Wir sehen also, dass für $R = \mathbb{Q}$ oder $R = \mathbb{R}$ die Homologie- und die Kohomologiegruppen mit R -Koeffizienten isomorph sind. Allerdings gibt es keinen kanonischen Isomorphismus.

¹¹¹Zur Erinnerung, die i -Bettizahl von X ist definiert als $b_i(X) := \text{Rang}(H_i(X))$.

12.3. Die Kohomologiegruppen von Produkträumen. In diesem Kapitel wollen wir folgender Frage nachgehen:

Frage. Es seien X und Y zwei topologische Räume. Was ist der Zusammenhang zwischen den Kohomologiegruppen von X , Y sowie von $X \times Y$.

Zur Erinnerung, der Satz von Eilenberg-Zilber, d.h. Satz 10.2 besagt, dass es eine natürliche Kettenhomotopieäquivalenz

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$$

gibt. Um die obige Frage zu beantworten müssen wir also jetzt folgende rein algebraische Frage beantworten: was ist der Zusammenhang zwischen den Kohomologiegruppen von zwei Kettenkomplexen \mathcal{C} , \mathcal{C}' und dem Tensorprodukt $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$? Wir betrachten dazu die lineare Abbildung:

$$\Theta: \text{Hom}(C_p, \mathbb{Z}) \times \text{Hom}(C'_q, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}', \mathbb{Z})$$

$$(\varphi_p, \varphi'_q) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i,j} C_i \otimes C'_j & \rightarrow & C_p \otimes C'_q & \rightarrow & R \\ \sum_k \sum_{i,j} c_i^k \otimes (c'_j)^k & \mapsto & \sum_k c_p^k \otimes (c'_q)^k & \mapsto & \sum_k \varphi_p(c_p^k) \cdot \varphi'_q((c'_q)^k) \end{array} \right).$$

Man kann nun sich nun leicht davon vergewissern, dass diese Abbildungen wohl-definierte Abbildungen auf den Kohomologiegruppen definieren, d.h. dass die Abbildung

$$\Theta: H^p(\mathcal{C}) \otimes H^q(\mathcal{C}') \rightarrow H^{p+q}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')$$

$$([\varphi_p], [\varphi'_q]) \mapsto [\Theta(\varphi_p, \varphi'_q)]$$

wohl-definiert ist. Zudem kann man leicht zeigen, dass Θ natürlich¹¹² bezüglich \mathcal{C} und \mathcal{C}' ist.

Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 12.3. (Die Künneth-Formel für Kokettenkomplexe) *Es seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' Kettenkomplexe. Wenn \mathcal{C} frei ist und wenn alle Homologiegruppen von \mathcal{C} endlich erzeugt sind, dann gibt es eine kurze exakte Sequenz¹¹³*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathcal{C}) \otimes H^q(\mathcal{C}') \xrightarrow{\Theta} H^n(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(\mathcal{C}), H^q(\mathcal{C}')) \rightarrow 0,$$

welche natürlich bezüglich \mathcal{C} und \mathcal{C}' ist.

¹¹²In diesem Fall heißt das, dass für Kettenabbildungen $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $f': \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathcal{D}) \otimes H^q(\mathcal{D}') & \xrightarrow{\Theta} & H^{p+q}(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}') \\ \downarrow f^* \otimes (f')^* & & \downarrow (f \otimes f')^* \\ H^p(\mathcal{C}) \otimes H^q(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\Theta} & H^{p+q}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'). \end{array}$$

¹¹³Die Tatsache, dass in der kurzen exakten Sequenz die Torsionsgruppen auftauchen ist *kein* Tippfehler.

Der Beweis dieses Satzes ist ähnlich zum Beweis von Satz 10.3 und wir überspringen daher den Beweis aus Zeitgründen. Der Beweis wird beispielsweise in Kapitel 60 von

Munkres: Elements of algebraic topology

ausgeführt.

Für uns von Interesse ist dabei natürlich die Anwendung auf Kohomologiegruppen von Produkten von topologischen Räumen. Der folgende Satz folgt sofort aus Satz 10.2 und Satz 12.3.

Satz 12.4. (Die Künneth-Formel für Kohomologiegruppen) *Es seien X und Y zwei topologische Räume. Wenn alle Homologiegruppen von X endlich erzeugt sind, dann gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y) \xrightarrow{\Theta} H^n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(X), H^q(Y)) \rightarrow 0,$$

welche natürlich bezüglich der topologischen Räume X und Y ist.

13. DIE DE RHAM-KOHOMOLOGIE UND DIE SINGULÄRE KOHOMOLOGIE

In diesem Kapitel wollen wir den Zusammenhang zwischen der de Rham-Kohomologie und den singulären Kohomologiegruppen herausarbeiten. Wir erinnern dazu zuerst an die Definition und die Eigenschaften von alternierenden Formen und dem Dachprodukt, und danach an die Definition der de Rham-Kohomologie einer C^∞ -Untermannigfaltigkeit.

13.1. Alternierende Formen und das Dach-Produkt. Eine *alternierende k -Form* auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega: V^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto \omega(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) ω ist linear in jedem Argument, d.h. für alle $v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \omega(\dots, v + v', \dots) &= \omega(\dots, v, \dots) + \omega(\dots, v', \dots) \\ \omega(\dots, \lambda v, \dots) &= \lambda \cdot \omega(\dots, v, \dots), \end{aligned}$$

(ii) vertauscht man zwei Argumente, so ändert sich das Vorzeichen, d.h. für alle $v, v' \in V$ gilt

$$\omega(\dots, v, \dots, v', \dots) = -\omega(\dots, v', \dots, v, \dots).$$

Wir bezeichnen den Vektorraum der alternierenden k -Formen auf V mit $\wedge^k V^*$. Eine 0-Form auf V ist per Definition zudem eine reelle Zahl, d.h. $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$.

Beispiel. (1) Eine alternierende 1-Form ist einfach eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$. Es ist also $\wedge^1 V^* = V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ der zu V duale Raum. Wir bezeichnen alternierende 1-Formen manchmal auch als *Linearformen*.

(2) Für $V = \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit dx_i die Linearform, welche gegeben ist durch

$$dx_i(v_1, \dots, v_n) = v_i.$$

Anders ausgedrückt, dx_1, \dots, dx_n ist die duale Basis zur Standardbasis vom \mathbb{R}^n .

(3) Wenn $V = \mathbb{R}^n$, dann ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto \det(v_1 \dots v_n) \end{aligned}$$

eine alternierende n -Form und man kann zeigen, dass jede alternierende n -Form auf \mathbb{R}^n von diesem Typ ist, d.h. $\wedge^n(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}$.

Wir erinnern nun an das Dachprodukt von Linearformen. Im Folgenden sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ Linearformen. Wir betrachten dann

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k : V^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In der Analysis III Vorlesung hatten wir gesehen, dass dies eine alternierende k -Form ist. Diese bezeichnen wir als das *Dachprodukt* (oder auch *äußere Produkt*) von $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

Es sei nun $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis für V^* und es sei $k \in \{0, \dots, n\}$. In der Analysis III Vorlesung hatten wir bewiesen, dass die Dachprodukte

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \text{ mit } i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

eine Basis von $\wedge^k V^*$ bilden.

Wir können nun auch das Dachprodukt von allgemeineren alternierenden Formen einführen. Es sei dazu $\omega \in \wedge^k V^*$ und $\sigma \in \wedge^l V^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \text{ und} \\ \sigma &= \sum_{j_1 < \dots < j_l} b_{j_1, \dots, j_l} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} a_{i_1, \dots, i_k} b_{j_1, \dots, j_l} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l}.$$

Man kann leicht zeigen, dass es sich bei $\omega \wedge \sigma$ um eine alternierende $k+l$ -Form handelt. Wir fassen einige wichtige Eigenschaften vom Dachprodukt in einem Lemma zusammen.

Lemma 13.1. *Es sei V ein reeller Vektorraum.*

(1) Für $\omega \in \wedge^k V^*$ und $\sigma \in \wedge^l V^*$ gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega.$$

(2) *Die Abbildung*

$$\wedge^k V^* \times \wedge^l V^* \rightarrow \wedge^{k+l} V^*$$

ist bilinear¹¹⁴ und distributiv.

(3) *Für $\omega \in \wedge^k V^*$, $\sigma \in \wedge^l V^*$ und $\tau \in \wedge^m V^*$ gilt*

$$(\omega \wedge \sigma) \wedge \tau = \omega \wedge (\sigma \wedge \tau).$$

Die Aussagen folgen leicht aus den Definitionen.

13.2. Die de Rham-Kohomologie einer Mannigfaltigkeit. Es stellt sich nun also die Frage, wofür sind Kohomologiegruppen eigentlich gut? Das universelle Koeffiziententheorem für Kohomologiegruppen besagt, dass die Kohomologiegruppen nicht mehr Informationen als die Homologiegruppen enthalten. Kohomologiegruppen haben dann auch noch den ‘Nachteil’, dass die induzierten Abbildungen in die ‘falsche’ Richtung gehen, was zu heilloser Verwirrung führt.

In diesem Kapitel wollen wir eine Antwort skizzieren: die reellen Kohomologiegruppen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeiten entsprechen den de Rham-Kohomologiegruppen, welche mithilfe von Differentialformen definiert sind.

Wir erinnern dazu an einige Definitionen und Ergebnisse aus der Analysis III-Vorlesung. Es sei im Folgenden M eine n -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k .¹¹⁵ Eine *Differentialform k -ter Ordnung ω auf M* (oder auch kurz *k -Form ω auf M*) ordnet jedem Punkt $P \in M$ eine alternierende k -Form auf $T_P M$ zu. Mithilfe von Karten kann man den Begriff der Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw. von Differentialformen einführen.

Wir schreiben dann

$$\Omega^k(M) = \{C^\infty\text{-Differentialformen } k\text{-ter Ordnung auf } M\}.$$

¹¹⁴Eine Abbildung $\Theta : U \times V \rightarrow W$ zwischen R -Moduln heißt *bilinear*, wenn für alle $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ und $r \in R$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \Theta(u + u', v) &= \Theta(u, v) + \Theta(u', v) & \text{und} & & \Theta(ru, v) &= r\Theta(u, v), \text{ sowie} \\ \Theta(u, v + v') &= \Theta(u, v) + \Theta(u, v') & \text{und} & & \Theta(u, rv) &= r\Theta(u, v). \end{aligned}$$

¹¹⁵Eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^N ist eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit, wenn es einen Atlas gibt, so dass alle Kartenwechsel C^∞ -Abbildungen sind.

Wir hatten zudem eine Abbildung ¹¹⁶

$$d_k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

eingeführt.

Wir hatten Differentialformen in der Analysis III-Vorlesung eingeführt, weil dies die ‘richtigen’ Objekte zum integrieren auf Mannigfaltigkeiten sind. Etwas genauer gesagt, wenn M eine kompakte orientierte k -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit ist, und wenn $\omega \in \Omega^k(M)$, dann hatten wir das Integral

$$\int_M \omega \in \mathbb{R}$$

eingeführt. Der wichtigste Satz in diesem Zusammenhang ist dabei der Satz von Stokes, welcher besagt, dass wenn M eine kompakte orientierte k -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit mit Rand ¹¹⁷ ∂M ist, und wenn $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$, dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Man kann relativ leicht nachrechnen, dass die Abbildungen $d_k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ die Eigenschaft besitzen, dass $d_{l+1} \circ d_l = 0$. Wir erhalten also einen Kokettenkomplex

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d_2} \dots$$

Die k -te de Rham Kohomologiegruppe von M ist nun definiert als

$$H_{dR}^k(M) := \text{Ker}\{d_k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)\} / \text{Im}\{d_{k-1}: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)\}.$$

Man beachte, dass $H_{dR}^k(M)$ der Quotient von reellen Vektorräumen sind, d.h. $H_{dR}^k(M)$ ist selber ein reeller Vektorraum.

Wenn $f: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildungen zwischen C^∞ -Untermannigfaltigkeiten ist, dann induziert f für jedes k eine Abbildung

$$\begin{aligned} f^*: \Omega^k(N) &\rightarrow \Omega^k(M) \\ \omega &\mapsto ((v_1, \dots, v_k) \in T_P M \mapsto \omega_{f(P)}(df(v_1), \dots, df(v_k))). \end{aligned}$$

¹¹⁶Zur Erinnerung: mithilfe von Karten genügt es das Differential für k -Formen auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ einzuführen. Wir betrachten dazu eine k -Form

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

wobei $f_{i_1 \dots i_k}$ reellwertige C^∞ -Funktionen auf U sind. Das Differential von ω ist dann definiert als die Differentialform

$$d\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

¹¹⁷Der Satz von Stokes gilt auch, wenn der Rand ∂M leer ist, d.h. wenn M eine geschlossene Untermannigfaltigkeit ist. In diesem Fall ist dann $\int_{\partial M} \omega = 0$

In der Analysis III-Vorlesung hatten wir zudem bewiesen, dass f^* eine Kokettenabbildung ist (natürlich hatten wir das damals so nicht genannt). Es folgt also, dass f^* für jedes k eine Abbildung $f^*: H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M)$ induziert.

Wir bezeichnen nun mit \mathcal{M}^∞ die Kategorie der C^∞ -Untermannigfaltigkeiten, welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{M}^\infty) &:= \text{alle } C^\infty\text{-Untermannigfaltigkeiten,} \\ \text{Mor}(M, N) &:= \text{alle } C^\infty\text{-Abbildungen von } M \text{ nach } N. \end{aligned}$$

Dann definiert

$$\begin{aligned} M &\mapsto H_{dR}^k(M) \\ (f: M \rightarrow N) &\mapsto (f^*: H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M)) \end{aligned}$$

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der C^∞ -Untermannigfaltigkeiten¹¹⁸ zur Kategorie \mathcal{V} der reellen Vektorräume.

13.3. Der Zusammenhang zwischen den Kohomologie-Theorien. Die reelle singuläre Kohomologie $H^n(M; \mathbb{R})$ und die de Rham-Kohomologie $H_{dR}^n(M)$ definieren also kontravariante Funktoren von der Kategorie \mathcal{M}^∞ der C^∞ -Mannigfaltigkeiten zur Kategorie der reellen Vektorräume. Die Notation legt nahe, dass die beiden Funktoren etwas miteinander zu tun haben.

Es sei also M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Wie können wir überhaupt einen Zusammenhang zwischen $H_{dR}^n(M)$ und $H^n(M; \mathbb{R})$ erkennen? Wir werden jetzt sehen, dass sowohl ein Element in $H_{dR}^n(M)$ als auch ein Element $H^n(M; \mathbb{R})$ einer geschlossenen¹¹⁹ n -dimensionalen orientierten Untermannigfaltigkeit N von M eine reelle Zahl zuordnen.

- (1) Es sei zuerst eine de Rham-Kohomologieklass $[\omega]$ gegeben. Dann können wir die n -Form ω auf der orientierten n -Untermannigfaltigkeit N integrieren¹²⁰ und erhalten die reelle Zahl $\int_N \omega \in \mathbb{R}$. Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass diese Zahl nicht von der Wahl des Repräsentanten ω abhängt.¹²¹

¹¹⁸Die Beschränkung auf Untermannigfaltigkeiten ist hierbei völlig irrelevant. Für (abstrakte) C^∞ -Mannigfaltigkeiten, welche wir in der Topologievorlesung eingeführt hatten, kann man ebenfalls Tangentialräume, und damit auch Differentialformen usw. einführen. Dies ermöglicht es dann die de Rham-Kohomologie auf C^∞ -Mannigfaltigkeiten einzuführen. Für jedes n erhalten wir dann einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der C^∞ -Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der reellen Vektorräume.

¹¹⁹Zur Erinnerung, eine Untermannigfaltigkeit heißt geschlossen, wenn sie kompakt ist und keinen Rand besitzt.

¹²⁰Genauer gesagt, wir betrachten die Einschränkung von ω auf N , dies ist eine n -Form auf einer orientierten geschlossenen n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit. Aus der Analysis III wissen wir, dass wir eine solche Form integrieren können und erhalten eine reelle Zahl.

¹²¹In der Tat, denn wenn $\omega = \tau + d\sigma$, dann ist

$$\int_N \omega = \int_N (\tau + d\sigma) = \int_N \tau + \int_N d\sigma = \int_N \tau + \underbrace{\int_{\partial N} \sigma}_{=0 \text{ da } \partial N = \emptyset} = \int_N \tau.$$

- (2) Es sei nun eine singuläre Kohomologieklass $[\varphi: C_n(M) \rightarrow \mathbb{R}]$ gegeben. Wir bezeichnen mit $[N] \in H_n(N)$ die Fundamentalklasse von N und wir betrachten die reelle Zahl $\varphi([N])$. Man kann zeigen, dass dies nicht von der Wahl des Repräsentanten φ abhängt.

Man kann diese Analogie noch etwas erweitern: Sei dazu N eine orientierte n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Wenn $f: N \rightarrow M$ eine C^∞ -Abbildung ist, dann können wir sowohl $f^*\omega$ auf N integrieren oder $f^*\varphi$ auf $[N]$ anwenden. In beiden Fällen erhalten wir also eine reelle Zahl.

Diese Diskussion macht es vielleicht weniger abwegig, dass ein Zusammenhang bestehen könnte. In der Tat kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 13.2. *Es sei M eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit. Dann ist für jedes n die de Rham-Kohomologiegruppe $H_{dR}^n(M)$ isomorph zur singulären Kohomologiegruppe $H^n(M; \mathbb{R})$.*

Ein solcher Satz ist zwar gut, aber eigentlich will man mehr, man will nicht nur ‘irgendeinen Isomorphismus’, sondern man will jeder C^∞ -Mannigfaltigkeit Isomorphismen zuordnen, welche mit C^∞ -Abbildungen verträglich sind.

Wir erinnern dazu an einen Begriff aus Kapitel 3.3. Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und es seien $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation zwischen F und G* ordnet jedem $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\Phi_X: F(X) \rightarrow G(X)$ zu, so dass für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F_*(f)} & F(Y) \\ \downarrow \Phi_X & & \downarrow \Phi_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G_*(f)} & G(Y). \end{array}$$

Mit dieser Definition können wir nun folgenden Satz formulieren.

Satz 13.3. *Es gibt eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\infty & \rightarrow & \mathcal{V} \\ M & \mapsto & H_{dR}^n(M) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\infty & \rightarrow & \mathcal{V} \\ M & \mapsto & H^n(M; \mathbb{R}) \end{array}$$

Der Beweis von den Sätzen 13.2 und 13.3 führt weit über diese Vorlesung hinaus. Wir verweisen auf das Buch

Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups

für einen Beweis. In diesem Buch werden die Sätze dadurch bewiesen, dass man zeigt, dass beide Kohomologietheorien äquivalent zu einer dritten Kohomologietheorie ist, nämlich der Kohomologietheorie von Garben.

13.4. Das Dachprodukt von Differentialformen. Wenn V ein Vektorraum ist, dann hatten wir schon das Dachprodukt

$$\wedge^k V^* \times \wedge^l V^* \rightarrow \wedge^{k+l} V^*$$

eingeführt. Mithilfe von Karten können wir für jede C^∞ -Untermannigfaltigkeit M nun auch eine Abbildung

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M)$$

eingeführen. Diese hat die folgende wichtige Eigenschaft: für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\sigma \in \Omega^l(M)$ gilt, dass^{122 123}

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma.$$

Dies kann man als Verallgemeinerung der üblichen Produktformel von Ableitungen von differenzierbaren Funktionen auffassen.

Diese Formel hat folgende überraschende Konsequenz: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \wedge : H_{dR}^k(M) \times H_{dR}^l(M) &\rightarrow H_{dR}^{k+l}(M) \\ ([\omega], [\sigma]) &\mapsto [\omega] \wedge [\sigma] := [\omega \wedge \sigma] \end{aligned}$$

ist wohl-definiert. Es folgt aus Lemma 13.1, dass diese Abbildung bilinear und distributiv ist. Wir schreiben jetzt

$$H_{dR}(M) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_{dR}^i(M).$$

Wenn $a \in H_{dR}(M)$ in einem Summanden $H_{dR}^d(M)$ liegt, dann nennen wir a *homogen* und wir nennen $\dim(a) := d$ die *Dimension von a* . Wir betrachten dann folgende Abbildung

$$\begin{aligned} H_{dR}(M) \times H_{dR}(M) &\rightarrow H_{dR}(M) \\ \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) &\mapsto \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i \wedge b_j. \end{aligned}$$

Es folgt aus Lemma 13.1, dass diese Abbildung assoziativ ist. Die konstante Funktion¹²⁴ $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, ist zudem ein multiplikativ neutrales Element. Wir sehen also, dass $H_{dR}(M)$ mit dieser Produktabbildung einen Ring bildet. Das Nullelement in dem Ring ist dabei gegeben durch die Nullfunktion auf M .

Wenn $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen C^∞ -Untermannigfaltigkeiten ist, dann kann man nun zeigen, dass für alle $\omega \in \Omega^k(N)$ und $\sigma \in \Omega^l(N)$ folgende Gleichheit gilt:

$$(f^* \omega \wedge f^* \sigma) = f^*(\omega \wedge \sigma).$$

Die Abbildung f induziert also einen *Ringhomomorphismus* $f^*: H_{dR}(N) \rightarrow H_{dR}(M)$. In der Tat definiert

$$\begin{aligned} M &\mapsto H_{dR}^k(M) \\ (f: M \rightarrow N) &\mapsto (f^*: H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M)) \end{aligned}$$

¹²²Für einen Beweis verweise ich auf Forster: Analysis III, fünfte Auflage, Seite 223.

¹²³Das Vorzeichen sollte Ihnen auch bekannt vorkommen.

¹²⁴Zur Erinnerung: null-dimensionale alternierende Formen auf M sind nichts anderes als Funktionen auf M .

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Ringe.

Beispiel. Wir betrachten die 1-Formen dx und dy auf \mathbb{R}^2 , welche gegeben sind durch¹²⁵ $dx(v, w) = v$ und $dy(v, w) = w$. Wir betrachten zudem den 2-Torus T wiederum als Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und wir bezeichnen die Projektion $\mathbb{R}^2 \rightarrow T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit p . Dann definieren dx und dy auch eine 1-Form auf T , welche wir ebenfalls mit dx und dy bezeichnen.¹²⁶ Die 1-Formen dx und dy sind geschlossen, d.h. $ddx = ddy = 0$. Es folgt zudem aus dem Satz von Stokes, dass diese nicht-trivial in $H_{dR}^1(T)$ sind.¹²⁷ Wenn wir $dx \wedge dy$ auf T mit der Standardorientierung integrieren, dann erhalten wir 1. Es folgt nun insbesondere aus dem Satz von Stokes, dass $dx \wedge dy$ nicht exakt ist, d.h. es gibt keine 1-Form ω , so dass $dx \wedge dy = d\omega$. Es folgt also, dass $dx \wedge dy$ ein nicht-triviales Element in $H_{dR}^2(T)$ ist.

Es folgt insbesondere, dass dx und dy nicht-triviale Elemente in $H_{dR}^1(T)$ definieren und es ist

$$[dx] \wedge [dy] = [dx \wedge dy] \neq -[dx \wedge dy] = [dy \wedge dx] = [dy] \wedge [dx].$$

Wir sehen also, dass $H_{dR}(T)$ ein nicht kommutativer Ring ist.

Wir haben gerade im Beispiel gesehen, dass der de Rham Kohomologiering im Allgemeinen nicht kommutativ ist. Wir wollen die Frage der (nicht-) Kommutativität etwas genauer beleuchten. Es sei dazu φ eine alternierende k -Form und es sei ψ eine alternierende l -Form. Es folgt dann aus der Definition vom Dachprodukt, und wir werden es in Übungsblatt 13 beweisen, dass

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi.$$

Es folgt dann direkt aus den Definitionen, dass für homogene Elemente a und b in $H_{dR}(M)$ folgende Gleichheit gilt:

$$a \wedge b = (-1)^{\dim(a)\dim(b)} b \wedge a.$$

Diese Entdeckung der Ringstruktur auf der de Rham Kohomologie wirft nun die Frage auf, ob man diese Ringstruktur auch mithilfe der singulären Kohomologie einführen kann, und ob es diese vielleicht auch für allgemeinere topologische Räume gibt. Wir werden dieser Frage im nächsten Kapitel nachgehen.

14. DAS CUP-PRODUKT

14.1. Die Definition des cup-Produkts. Die Diskussion in Kapitel 13.4 legt nahe, dass es auf den Kohomologiegruppen einer Untermannigfaltigkeit eine Ringstruktur gibt. Es sei nun X ein topologischer Raum und es sei R ein kommutativer Ring. Wir betrachten

$$H^*(X; R) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(X; R).$$

¹²⁵Wir identifizieren hierbei $T_P\mathbb{R}^2$ wie immer mit \mathbb{R}^2 .

¹²⁶Genauer gesagt, es gibt genau eine 1-Form dx auf T , so dass für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und $v \in T_P\mathbb{R}^2$ gilt, dass $dx_P(v) = dx_{p(P)}(p_*(v))$.

¹²⁷In der Tat, denn integrieren wir beispielsweise dx auf der geschlossenen orientierten Untermannigfaltigkeit $X := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times 0 \in T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dann erhalten wir $\int_X dx = 1$. Andererseits, wenn $dx = d\omega$ für eine 0-Form auf T , dann müsste gelten, dass $\int_X dx = \int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega$, aber dies ist null, weil $\partial X = \emptyset$.

Wir wollen also eine Abbildung

$$H^*(X; R) \times H^*(X; R) \rightarrow R$$

finden, welche eine Ringstruktur definiert.

In Kapitel 12.3 hatten wir gesehen, dass es für jedes p, q eine natürliche ¹²⁸ Abbildung

$$\Theta: H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X \times X; R)$$

gibt. Wir können diese Abbildungen für alle p, q ‘aufaddieren’ und erhalten eine natürliche Abbildung

$$\Theta: H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \rightarrow H^*(X \times X; R),$$

welche bilinear ¹²⁹ ist. Das ist zwar nett, aber wir möchten gerne in der Kohomologie von X landen, und nicht in der Kohomologie von $X \times X$. Zudem könnten wir ganz analog Homologiegruppen betrachten und wir erhalten eine bilineare Abbildung

$$\Theta: H_*(X; R) \otimes H_*(X; R) \rightarrow H_*(X \times X; R).$$

Wir müssen also jetzt auf der rechten Seite der Abbildungen vom Raum $X \times X$ zurück zu X kommen. Es gibt im allgemeinen keine ‘interessanten’¹³⁰ Abbildungen $X \times X \rightarrow X$. Es gibt allerdings eine interessante Abbildung in die entgegengesetzte Richtung, nämlich die Diagonalabbildung

$$\begin{aligned} d: X &\rightarrow X \times X \\ x &\mapsto (x, x). \end{aligned}$$

Diese induziert eine Abbildung $d_*: H_*(X; R) \rightarrow H_*(X \times X; R)$ und, viel interessanter, eine Abbildung $d^*: H^*(X \times X; R) \rightarrow H^*(X; R)$.

Wir definieren nun das *cup-Produkt*¹³¹ auf der Kohomologie als die Verknüpfung

$$H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) \xrightarrow{\Theta} H^{p+q}(X \times X; R) \xrightarrow{d^*} H^{p+q}(X; R).$$

Für $a \in H^p(X; R)$ und $b \in H^q(X; R)$ bezeichnen wir das Bild von (a, b) mit $a \cup b \in H^{p+q}(X; R)$ und nennen $a \cup b$ das cup-Produkt von a und b . Wir können diese Abbildungen wieder zusammenfassen und erhalten eine Abbildung

$$\cup: H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \rightarrow H^*(X; R),$$

¹²⁸In diesem Fall heißt *natürlich*, dass für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H^p(Y; R) \otimes H^q(Y; R) & \xrightarrow{\Theta} & H^{p+q}(Y \times Y; R) \\ \downarrow f^* \times f^* & & \downarrow (f \times f)^* \\ H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) & \xrightarrow{\Theta} & H^{p+q}(X \times X; R). \end{array}$$

¹²⁹ Es folgt leicht aus der Definition von $\Theta: H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \rightarrow H^*(X \times X; R)$, dass diese Abbildung bilinear ist.

¹³⁰Die Projektionen von $X \times X$ auf eine der beiden Faktoren zählen hierbei als ‘uninteressant’, den sie geben keine neuen Informationen.

¹³¹Der Name ‘cup-Produkt’ kommt von der Notation ‘ $a \cup b$ ’ für die Verknüpfung.

welche offensichtlich bilinear ist.

Bemerkung. Wenn X ein CW-Komplex ist, welcher in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt, dann können wir das cup-Produkt auch auf der zellulären Homologie einführen. In der Tat, es sei $d^{CW}: X \rightarrow X \times X$ eine zelluläre Approximation der Diagonalabbildung $d: X \rightarrow X \times X$. In Satz 10.1 hatten wir gesehen, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$\Phi_{XX}: C_*^{CW}(X) \otimes C_*^{CW}(X) \xrightarrow{\cong} C_*^{CW}(X \times X)$$

von Kettenkomplexen gibt. Wir bezeichnen dann mit

$$\Theta: H_{CW}^*(X; G) \otimes H_{CW}^*(X; G) \rightarrow H_{CW}^*(X \times X; G).$$

Das cup-Produkt auf der zellulären Kohomologie ist dann definiert als die Verknüpfung

$$H_{CW}^*(X; G) \otimes H_{CW}^*(X; G) \xrightarrow{\Theta} H_{CW}^*(X \times X; G) \xrightarrow{d_{CW}^*} H_{CW}^*(X; G).$$

Diese Abbildung hängt nicht von der Wahl der zellulären Approximation von d ab.

Wir fassen jetzt einige wichtige Eigenschaften vom cup-Produkt im folgenden Satz zusammen.

Satz 14.1. *Es sei X ein topologischer Raum und R ein kommutativer Ring. Dann ist die abelsche Gruppe $H^*(X; R)$ zusammen mit der Verknüpfung*

$$\cup: H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \rightarrow H^*(X; R)$$

ein Ring. Zudem gilt für homogene Elemente¹³² a und b in $H^(M; R)$, dass*

$$a \cup b = (-1)^{\dim(a) \dim(b)} b \cup a.$$

Beweis. Es sei X ein topologischer Raum. Um die Notation zu vereinfachen behandeln wir nur den Fall, dass $R = \mathbb{Z}$.

- (1) Es folgt aus der Bilinearität von $H^p(X) \otimes H^q(X) \xrightarrow{\Theta} H^{p+q}(X \times X)$, dass das cup-Produkt distributiv ist.
- (2) Es folgt leicht aus den Definitionen, dass die Abbildung $f: C_0(X) \rightarrow R$, welche jedem Punkt in X den Wert 1 zuordnet, ein Element in $H^0(X; R)$ repräsentiert, welches ein neutrales Element bezüglich des cup-Produkts ist.
- (3) Wir beweisen die Assoziativität des cup-Produkts nur in dem Spezialfall, dass X ein CW-Komplex ist, welcher in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt. Im Folgenden meinen wir mit CW-Komplex immer einen CW-Komplex, welcher in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt.

Zur Erinnerung, für zwei CW-Komplexe U und V hatten wir in Kapitel 10.2 einen Isomorphismus

$$\Phi_{UV}: C_*^{CW}(U) \otimes C_*^{CW}(V) \xrightarrow{\cong} C_*^{CW}(U \times V)$$

¹³²Homogene Elemente in $H^*(M; R)$ werden natürlich genauso definiert wie homogene Elemente in der de Rham-Kohomologie einer C^∞ -Mannigfaltigkeit.

eingeführt. Es seien nun X, Y und Z CW-Komplexe. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C_*^{CW}(X) \otimes C_*^{CW}(Y) \otimes C_*^{CW}(Z) & \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \Phi_{YZ}} & C_*^{CW}(X) \otimes C_*^{CW}(Y \times Z) \\ \downarrow \Phi_{XY} \otimes \text{id}_Z & & \downarrow \Phi_{X, Y \times Z} \\ C_*^{CW}(X \times Y) \otimes C_*^{CW}(Z) & \xrightarrow{\Phi_{X \times Y, Z}} & C_*^{CW}(X \times Y \times Z). \end{array}$$

Wenden wir nun diese Beobachtung auf $X = Y = Z$ an, dann erhält man relativ leicht aus der Definition des zellulären cup-Produkts, dass dieses assoziativ ist.

(4) Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} w_{pq}: C_p(X) \otimes C_q(Y) &\rightarrow C_q(Y) \otimes C_p(X) \\ \sum_{i=1}^r c_i \otimes d_i &\mapsto \sum_{i=1}^r d_i \otimes c_i. \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind offensichtlich Isomorphismen von abelschen Gruppen. Andererseits folgt aus der Definition des Differential im Tensorprodukt von Kettenkomplexen¹³³ dass die w_{pq} keine Kettenabbildung von $C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(Y) \otimes C_*(X)$ bilden. Man kann nun aber leicht zeigen, dass die Abbildungen $(-1)^{pq} w_{pq}$ eine Kettenabbildung $C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(Y) \otimes C_*(X)$ definieren.

□

Aus den Definitionen und der Natürlichkeit der Abbildungen in der Definition des cup-Produkts folgt nun auch leicht folgendes Lemma.

Lemma 14.2. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und es sei R ein kommutativer Ring. Dann ist*

$$f^*: H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)$$

ein Ringhomomorphismus.

Es sei R ein kommutativer Ring. Es ist nun auch leicht nachzuweisen, dass

$$\begin{aligned} X &\mapsto H^*(X; R) \\ (f: X \rightarrow Y) &\mapsto (f^*: H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)) \end{aligned}$$

¹³³Zur Erinnerung, für $c_p \in C_p$ und $c'_q \in C'_q$ ist die Randabbildung gegeben durch

$$\bar{\partial}(c_p \otimes c'_q) = \partial c_p \otimes c'_q + (-1)^p c_p \otimes \partial' c'_q.$$

ein kontravarianter Funktor von der Kategorie \mathcal{T} der topologischen Räume zur Kategorie \mathcal{R} der Ringe ¹³⁴ ist. Zur Erinnerung, wir bezeichnen mit \mathcal{M}^∞ die Kategorie der C^∞ -Untermannigfaltigkeiten und mit \mathcal{V} die Kategorie der reellen Vektorräume. Dann ist

$$\begin{aligned} M &\mapsto H_{dR}^k(M) \\ (f: M \rightarrow N) &\mapsto (f^* H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M)) \end{aligned}$$

ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der C^∞ -Untermannigfaltigkeiten zur Kategorie der Ringe.

Wenn wir einer Mannigfaltigkeit die reellen Kohomologiegruppen zuordnen, dann hatten wir in Satz 13.3 schon gesehen, dass diese isomorph zu den de Rham-Kohomologiegruppen sind. Wir können jetzt Satz 13.3 verallgemeinern:

Satz 14.3. *Es gibt eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\infty &\rightarrow \mathcal{R} \\ M &\mapsto H_{dR}^*(M) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\infty &\rightarrow \mathcal{R} \\ M &\mapsto H^*(M; \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Der Beweis von den Sätzen 13.2 geht natürlich auch weit über diese Vorlesung hinaus, und wir verweisen wiederum auf das Buch

Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups

für einen Beweis.

14.2. Das cup-Produkt vom Torus. In diesem Kapitel wollen wir explizit das cup-Produkt vom 2-Torus bestimmen. Es sei also $T = S_a^1 \times S_b^1$ der 2-Torus. Wir betrachten $S_a^1 = S^1 = [0, 1]/\sim$ als CW-Komplex mit einer 0-Zelle $*$ und einer 1-Zelle a , ganz analog betrachten wir $S_b^1 = S^1$ als CW-Komplex mit einer 0-Zelle $*$ und einer 1-Zelle b . Wir betrachten dann $S_a^1 \times S_b^1$ als CW-Komplex mit der Produkt CW-Struktur, d.h. $S_a^1 \times S_b^1$ hat eine 0-Zelle $* \times *$, zwei 1-Zellen $a \times *$ und $* \times b$, sowie einer 2-Zelle $a \times b$. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, dann bezeichnen wir der Einfachheit halber $* \times *$ mit $*$, sowie $a \times *$ mit a und $* \times b$ mit b . Die Randabbildung im zugehörigen zellulären Kettenkomplex sind die Nullabbildungen, d.h. der zellulären Kettenkomplex ist von folgender Form: ¹³⁵

$$C_*(S_a^1 \times S_b^1): 0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdot (a \times b) \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \cdot a \oplus \mathbb{Z} \cdot b \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \cdot * \rightarrow 0.$$

¹³⁴Die Kategorie \mathcal{R} der Ringe ist natürlich wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{R}) &:= \text{alle Ringe,} \\ \text{Mor}(R, S) &:= \text{alle Ringhomomorphismen von } R \text{ nach } S. \end{aligned}$$

¹³⁵In diesem Kapitel arbeiten wir durchgehend mit den zellulären Kettenkomplexen, der Einfachheit halber bezeichnen wir diese mit $C_*(T)$ anstatt mit $C_*^{CW}(T)$.

Wir bezeichnen jetzt mit $a^*, b^* \in \text{Hom}(C_1(T), \mathbb{Z})$ die zu $a, b \in C_1(T)$ duale Basis. Anders ausgedrückt, es ist

$$a^*(a) = 1 \text{ und } a^*(b) = 0 \text{ sowie } b^*(a) = 0 \text{ und } b^*(b) = 1.$$

Nachdem die Randabbildungen im zellulären Kettenkomplex die Nullabbildungen sind, sind auch die Randabbildungen im dualen Komplex $\text{Hom}(C_*(T), \mathbb{Z})$ die Nullabbildungen. Insbesondere sind a^* und b^* Kozykel, und a^* und b^* bilden eine Basis von $H^1(T)$.

Ganz analog bezeichnen wir mit $(a \times b)^*: C_2(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ die Abbildung, welche durch $(a \times b)^*(a \times b) = 1$ eindeutig festgelegt ist. Dann ist wie oben $(a \times b)^*$ ein Erzeuger von $H^2(T) \cong \mathbb{Z}$. Wenn wir das cup-Produkt $x \cup y$ für $x, y \in H_1(T)$ bestimmen wollen genügt es also $(x \cup y)(a \times b)$ zu bestimmen. Wir wollen also jetzt folgende Matrix bestimmen:

$$\begin{pmatrix} (a^* \cup a^*)(a \times b) & (a^* \cup b^*)(a \times b) \\ (b^* \cup a^*)(a \times b) & (b^* \cup b^*)(a \times b) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun

$$T_1 = T = S_{a_1}^1 \times S_{b_1}^1 \text{ sowie } T_2 = T = S_{a_2}^1 \times S_{b_2}^1,$$

und verwenden die gleiche Notation wie oben für die Zellen von $S_{a_i}^1$ und $S_{b_i}^1$.

Die Diagonalabbildung $d: T \rightarrow T \times T = T_1 \times T_2$ ist keine zelluläre Abbildung, wir müssen diese also durch eine zelluläre Abbildung g ersetzen, welche zu d homotop ist. In Kapitel 7.5 hatten wir schon gesehen, dass die Diagonalabbildung $d_a: S_a^1 \rightarrow S_{a_1}^1 \times S_{a_2}^1$ homotop ist zu der zellulären Abbildung

$$\begin{aligned} d_a^{CW}: S_a^1 = [0, 1]/\sim &\rightarrow S_{a_1}^1 \times S_{a_2}^1 = [0, 1]/\sim \times [0, 1]/\sim \\ t &\mapsto \begin{cases} (0, 2t), & \text{wenn } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1, 2t - 1), & \text{wenn } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Wir definieren d_b^{CW} ganz analog. Dann ist $d^{CW} = d_a^{CW} \times d_b^{CW}: T \rightarrow T \times T$ eine zelluläre Approximation der Diagonalabbildung $d: T \rightarrow T \times T$. Man sieht nun, dass

$$(f_a \times f_b)(a \times b) = (a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2).$$

Es folgt nun aus den Definitionen, dass

$$\begin{aligned} (a^* \cup a^*)(a \times b) &= \Phi_{TT}(a^* \otimes a^*)(d^{CW}(a \times b)) \\ &= (a_1 \times a_2)^*((a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2)) = 1 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Ganz analog sieht man, dass

$$\begin{aligned} (b^* \cup b^*)(a \times b) &= \Phi_{TT}(b^* \otimes b^*)(d^{CW}(a \times b)) \\ &= (b_1 \times b_2)^*((a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2)) = 0, \text{ und} \\ (a^* \cup b^*)(a \times b) &= \Phi_{TT}(a^* \otimes b^*)(d^{CW}(a \times b)) \\ &= (a_1 \times b_2)^*((a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2)) = 0. \end{aligned}$$

Zudem ist

$$\begin{aligned} (b^* \cup a^*)(a \times b) &= \Phi_{TT}(b^* \otimes a^*)(d^{CW}(a \times b)) \\ &= (b_1 \times a_2)^*((a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2)) = -1. \end{aligned}$$

Bezüglich den Basen $\{a, b\}$ für $H_1(T)$ sowie $\{a \times b\}$ für $H_2(T)$ ist das cup-Produkt also durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

repräsentiert.

Wir haben damit also gezeigt, dass das cup-Produkt im allgemeinen nicht-trivial ist, und, dass es im allgemeinen nicht kommutativ ist. Wir sehen auch, dass die Kohomologieringe mehr Informationen enthalten als die Homologie- oder auch die Kohomologiegruppen alleine. Beispielsweise haben der 2-Torus und $S^1 \wedge S^1 \wedge S^2$ die gleichen Homologie- und Kohomologiegruppen. Das cup-Produkt im ersten Fall ist dabei nicht-null, man kann aber zeigen, dass es im zweiten Fall immer verschwindet.

Als Anwendung können wir jetzt Abbildungen zwischen der 2-Sphäre und dem 2-Torus studieren. Es gibt beispielsweise eine Abbildung $f: T^2 \rightarrow S^2$, so dass f_* einen Isomorphismus $H_2(T^2) \rightarrow H_2(S^2)$ induziert. In der Tat, wenn $D^2 \subset T^2$ eine Scheibe ist, dann hat

$$T^2 \rightarrow T^2 / \overline{T^2 \setminus D^2} \cong D^2 / S^1 \cong S^2$$

diese Eigenschaft. Wir werden nun sehen, dass es hingegend keine Abbildung $f: S^2 \rightarrow T^2$ gibt, so dass $f_*([S^2]) \in H_2(T^2)$ nicht-trivial ist.

Lemma 14.4. *Es gibt keine Abbildung $f: S^2 \rightarrow T^2$, so dass $f_*([S^2]) \in H_2(T^2)$ nicht-trivial ist.*

Beweis. Es sei also $f: S^2 \rightarrow T^2$ eine Abbildung. Wir hatten gerade bewiesen, dass es Elemente $a, b \in H^1(T^2)$ gibt, so dass $a \cup b$ ein Erzeuger von $H^2(T^2)$ ist. Nachdem $H^1(S^2) = 0$ folgt nun, dass $f^*(a) = f^*(b) = 0$. Nachdem f^* ein Ringhomomorphismus ist, erhalten wir, dass Es folgt nun, dass

$$f^*(a \cup b) = f^*(a) \cup f^*(b) = 0 \cup 0 = 0.$$

Nachdem $a \cup b$ ein Erzeuger von $H^2(T^2)$ ist, folgt also, $f^*: H^2(T^2) \rightarrow H^2(S^2)$ die triviale Abbildung ist.

Dann folgt aber aus der Natürlichkeit der kurzen exakten Sequenz im Universellen Koeffiziententheorem, dass dann auch die induzierte Abbildung $f^*: H^2(T^2) \rightarrow H^2(S^2)$ trivial ist. \square

15. DIE POINCARÉ-DUALITÄT UND DIE SCHNITTFORM EINER MANNIGFALTIGKEIT

15.1. Die Poincaré-Dualität. Zum Abschluß dieser Vorlesung wollen wir nun noch folgenden Satz beweisen und dessen Bedeutung diskutieren.

Satz 15.1. (Poincaré-Dualität) *Es sei M eine geschlossene orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes k und jeden kommutativen Ring R einen Isomorphismus*

$$PD: H_k(M; R) \xrightarrow{\cong} H^{m-k}(M; R).$$

Beispiel. Es sei M eine zusammenhängende geschlossene orientierte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt $H_0(M) = \mathbb{Z}$ und es gilt nach Satz 7.15, dass $H_3(M) = \mathbb{Z}$. Zudem folgt aus der Poincaré-Dualität und aus dem Universellen Koeffiziententheorem, dass

$$H_2(M) \cong H^1(M) \cong \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}) \oplus \underbrace{\text{Ext}(H_0(M), \mathbb{Z})}_{=0 \text{ da } H_0(M)=\mathbb{Z}} = \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}).$$

Wir können also $H_2(M)$ aus $H_1(M)$ bestimmen. Es folgt übrigens insbesondere, dass $b_2(M) = b_1(M)$ und wir erhalten, dass $\chi(M) = 0$.

Beweisskizze. Wir skizzieren den Beweis für den Fall, dass M eine geschlossene orientierbare m -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit ist. Nach Satz 7.12 besitzt M eine simpliziale Struktur X .¹³⁶ Zur Erinnerung, dies bedeutet unter anderem, dass M die Vereinigung von Simplizes ist (d.h. von Bildern von injektiven Abbildungen $\sigma: \Delta^m \rightarrow M$).

Wir erinnern zuerst an verschiedene Definitionen für den Standard-Simplex Δ^n :

- (1) Ein *Seitensimplex* von Kodimension r vom Standard n -Simplex ist eine Teilmenge von der Form

$$\{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n \mid t_{d_1} = t_{d_2} = \dots = t_{d_r} = 0\},$$

wobei $d_1 < d_2 < \dots < d_r \in \{0, \dots, n\}$ festgewählt sind.

- (2) Wir bezeichnen mit $B_n := (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}) \in \Delta^n$ den Schwerpunkt, oder das Baryzentrum vom Standard n -Simplex Δ^n .
- (3) Wenn P_0, \dots, P_k Punkte im Simplex Δ^n sind, dann bezeichnen wir mit

$$\langle P_0, \dots, P_k \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^k t_i P_i \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1 \text{ und } t_i \geq 0 \text{ für } i = 0, \dots, k \right\}$$

die konvexe Hülle von P_0, \dots, P_k in Δ^n . Anders ausgedrückt, $\langle P_0, \dots, P_k \rangle$ ist die kleinste konvexe Teilmenge von Δ^n , welche die Punkte P_0, \dots, P_k enthält.

Wir verwenden jetzt die Bezeichnungen für die Standard-Simplizes ganz analog für die Simplizes von M .¹³⁷ Wir führen zudem noch ein paar weitere Definitionen ein.

- (1) Wenn σ ein Seitensimplex von einem Simplex σ von M ist, dann schreiben wir $\sigma \leq \tau$. Wenn $\sigma \neq \tau$, dann schreiben wir $\sigma < \tau$. Es folgt dabei aus der Definition eines simplizialen Komplexes, dass ein Seitensimplex von einem Simplex $\sigma \subset M$ wiederum ein Simplex von M ist.
- (2) Wir bezeichnen das Baryzentrum von einem Simplex σ im Folgenden mit $\underline{\sigma}$.
- (3) Für eine Folge $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k$ von Seitensimplizes von σ ist $\langle \underline{\sigma}_0, \dots, \underline{\sigma}_k \rangle$ ein k -dimensionaler Simplex in σ .

¹³⁶Zur Erinnerung, dies bedeutet, dass X ein simplizialer Komplex ist, und dass es einen Homöomorphismus $X \rightarrow M$ gibt. Der Homöomorphismus wird in der Notation oft unterschlagen.

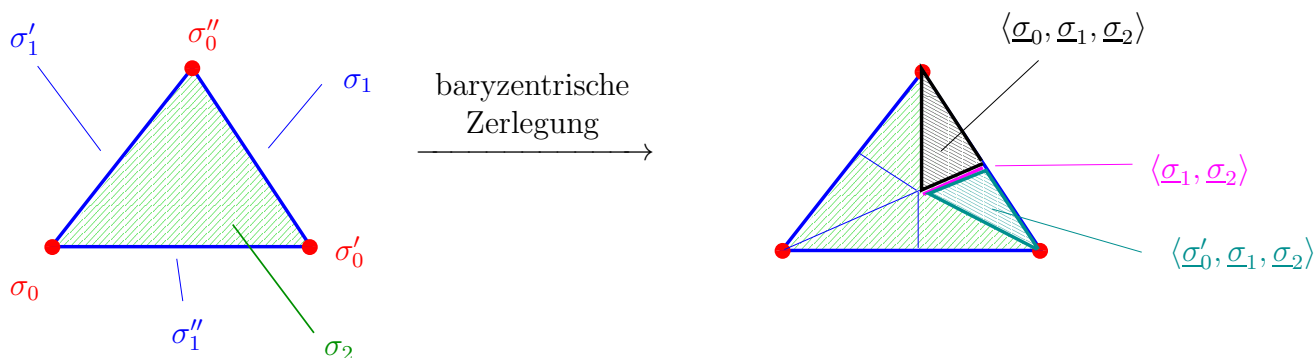
¹³⁷Beispielsweise bezeichnen wir für einen Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow M$ den Punkt $\sigma(B_n)$ als das Baryzentrum vom Simplex σ .

Behauptung. Es sei σ ein Simplex in M . Die Menge aller Simplizes von der Form

$$\langle \underline{\sigma}_0, \dots, \underline{\sigma}_k \rangle \text{ wobei } \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq \sigma$$

bilden eine Triangulisierung von σ .

Wir bezeichnen diese Zerlegung von σ als die *baryzentrische Zerlegung* von σ . Der Beweis der Behauptung ist elementar, und wir überlassen ihn als freiwillige Übungsaufgabe. Die Aussage der Behauptung wird in Abbildung 36 illustriert.



2-dimensionaler Simplex σ_2 mit
 drei 0-dimensionalen Seitensimplizes $\sigma_0, \sigma'_0, \sigma''_0$
 drei 1-dimensionalen Seitensimplizes $\sigma_1, \sigma'_1, \sigma''_1$

ABBILDUNG 36. Baryzentrische Zerlegung von einem 2-Simplex σ_2 .

Wir wenden nun die baryzentrische Zerlegung auf jeden Simplex von M an und erhalten einen neuen simplizialen Komplex, welchen wir die *baryzentrische Zerlegung* von M nennen. Für einen k -Simplex σ von M betrachten wir jetzt

$$\sigma^d := \bigcup_{\sigma = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k} \langle \underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1, \dots, \underline{\sigma}_k \rangle.$$

Wir nennen σ^d die zu σ *duale Zelle*. Wir betrachten zudem

$$\partial\sigma^d := \bigcup_{\sigma < \sigma_1 < \dots < \sigma_k} \langle \underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1, \dots, \underline{\sigma}_k \rangle \subset \sigma^d.$$

Wir illustrieren σ^d und $\partial\sigma^d$ in Abbildung 37. Wir sehen in der Abbildung, dass in beiden Beispielen die duale Zelle eine Scheibe ist, und dass in der $\partial\sigma^d$ der Rand von σ^d ist. Die folgende Behauptung besagt nun, dass dies kein Zufall ist.

Behauptung. Das Paar $(\sigma^d, \partial\sigma^d)$ ist homöomorph zu (D^{m-k}, S^{m-k}) .

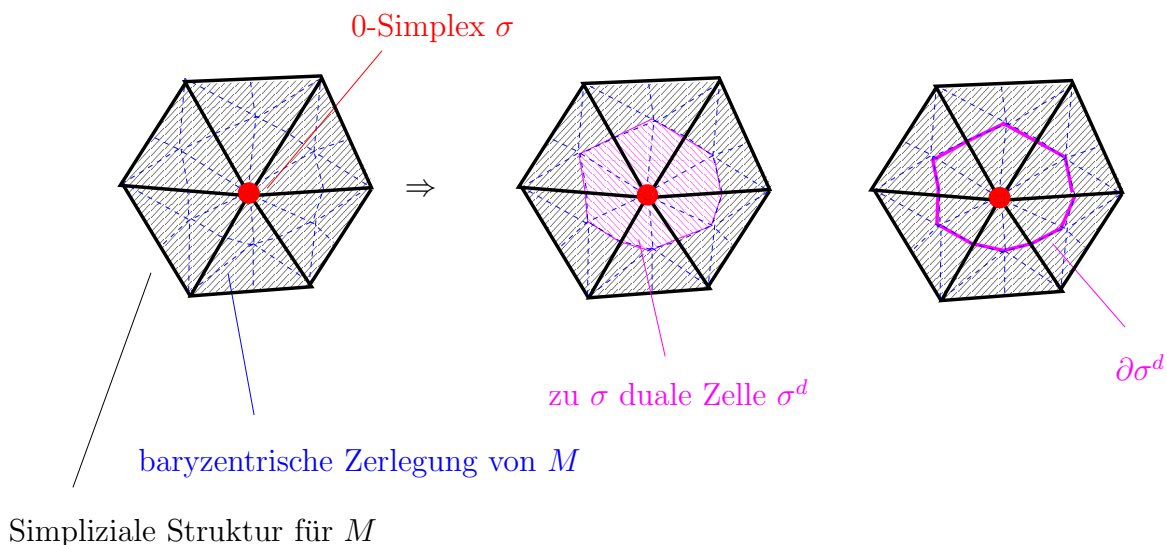


ABBILDUNG 37. Duale Zellen für einen 0-Simplex und einen 1-Simplex.

Für den Beweis dieser Behauptung benötigt man nun, dass M eine geschlossene n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ein Beweis der Behauptung wird beispielsweise in Kapitel 2 von

Rourke und Sanderson, Introduction to piecewise-linear topology

gegeben.

In Abbildung 37 sehen wir zwei Simplizes σ und τ , wobei $\sigma \subset \partial\tau$. Bei den dualen Zellen dreht sich das Verhältnis um und wir erhalten, dass $\tau^d \subset \partial\sigma^d$. Auch diese ist kein Zufall sondern gilt ganz allgemein.

Behauptung. Es seien σ und τ zwei Simplizes von M . Dann gilt

$$\sigma \subset \partial\tau \text{ von Kodimension } c \Leftrightarrow \tau^d \subset \partial\sigma^d \text{ von Kodimension } c.$$

Es sei σ ein Simplex im Rand von τ , d.h. σ ist ein Seitensimplex von τ . Dann kann jede Folge $\tau = \tau_0 < \tau_1 \cdots < \tau_k$ fortgesetzt werden zu einer Folge $\sigma < \tau = \tau_0 < \tau_1 \cdots < \tau_k$. Insbesondere gilt dann $\langle \underline{\sigma}_0, \dots, \underline{\sigma}_k \rangle \subset \langle \underline{\sigma}, \underline{\sigma}_0, \dots, \underline{\sigma}_k \rangle$, also $\tau^d \subset \partial\sigma^d$. Wir sehen also, dass τ^d eine Zelle im Rand von σ^d ist. Die Aussage über die Kodimensionen folgt ebenso leicht aus dem Argument. Die umgekehrte Aussage wird ganz analog bewiesen. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Zur Erinnerung, wenn σ ein k -dimensionaler Simplex von M ist, dann bezeichnen wir mit σ nicht nur die Teilmenge von M , sondern auch die zugehörige Abbildung $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$. Wir bezeichnen nun auch mit $\sigma^d: D^{m-k} \rightarrow M$ die charakteristische Abbildung für $\sigma^d \subset M$, wobei wir die Abbildung so wählen, dass am Punkt $\underline{\sigma}$ die positive Basis von σ zusammen mit einer positiven Basis von σ^d gerade eine positive Basis von M ergeben. Man kann nun leicht zeigen, dass diese Zellen eine CW-Struktur für M bilden. Wir bezeichnen mit Y diesen CW-Komplex und nennen ihn den zum simplizialen Komplex X dualen CW-Komplex.

Wenn $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ die k -Simplizes von X sind, dann sind also $\sigma_1^d, \dots, \sigma_l^d$ gerade die $(n-k)$ -Zellen von Y . Die Zellen $\sigma_1^d, \dots, \sigma_l^d$ bilden eine Basis von $C_{n-k}^{CW}(Y)$. Wir bezeichnen nun die dazu duale Basis von $\text{Hom}(C_{n-k}^{CW}(Y), \mathbb{Z})$ mit $PD(\sigma_1), \dots, PD(\sigma_l)$. Anders ausgedrückt, $PD(\sigma_i)$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} PD(\sigma_i): C_{n-k}^{CW}(Y) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{j=1}^l a_j \sigma_j^d &\mapsto a_i. \end{aligned}$$

Behauptung. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} PD: C_k^{CW}(X) &\rightarrow \text{Hom}(C_{m-k}^{CW}(Y), \mathbb{Z}) \\ \sum_{i=1}^m a_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i=1}^m a_i PD(\sigma_i) \end{aligned}$$

sind Isomorphismen, so dass für jedes k das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C_k^{CW}(X) & \xrightarrow{PD} & \text{Hom}(C_{m-k}^{CW}(Y), \mathbb{Z}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial^* \\ C_{k-1}^{CW}(X) & \xrightarrow{PD} & \text{Hom}(C_{m-k+1}^{CW}(Y), \mathbb{Z}). \end{array}$$

Wenn $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ die k -Simplizes von X sind, dann bilden per Definition $PD(\sigma_1), \dots, PD(\sigma_l)$ eine Basis für $\text{Hom}(C_{n-k}^{CW}(Y), \mathbb{Z})$. Es folgt also, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} PD: C_k^{CW}(X) &\rightarrow \text{Hom}(C_{m-k}^{CW}(Y), \mathbb{Z}) \\ \sum_{i=1}^m a_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i=1}^m a_i PD(\sigma_i) \end{aligned}$$

Isomorphismen sind. Wir müssen nun also noch zeigen, dass das Diagramm kommutiert.

Zur Erinnerung, wir hatten gezeigt, dass für Simplizes σ und τ von M gilt

$$\sigma \subset \partial\tau \text{ von Kodimension } 1 \Leftrightarrow \tau^d \subset \partial\sigma^d \text{ von Kodimension } 1.$$

Es folgt nun relativ leicht aus den Definitionen, dass das gewünschte Diagramm mit \mathbb{F}_2 -Koeffizienten kommutiert, d.h. es kommutiert

$$\begin{array}{ccc} C_k^{CW}(X; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{PD} & \text{Hom}(C_{m-k}^{CW}(Y; \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial^* \\ C_{k-1}^{CW}(X; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{PD} & \text{Hom}(C_{m-k+1}^{CW}(Y; \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2). \end{array}$$

Man kann nun aber auch zeigen, dass die konsistente Orientierungen der Simplizes von X und der Zellen von Y dafür sorgen, dass das Diagramm wie gewünscht auch für \mathbb{Z} -Koeffizienten kommutiert. Dieser Beweis wird beispielsweise auf Seite 73 von

Turaev: Introduction to combinatorial torsion

ausgeführt. Wir beschließen damit den Beweis der Behauptung.

Es folgt nun aus der Behauptung und den Definitionen, dass PD einen Isomorphismus

$$H_k^{CW}(X) \cong H_{CW}^{m-k}(Y)$$

induziert. Nachdem wir die Homologie- und Kohomologiegruppen von M auch mit den zellulären Kettenkomplexen von den CW-Komplexen X und Y bestimmen können erhalten wir nun folgende Isomorphismen:

$$H_k(M) = H_k^{CW}(X) \cong H_{CW}^{m-k}(Y) = H_{CW}^{m-k}(M).$$

□

Bemerkung. Es sei M eine orientierbare kompakte m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es sei $\partial M = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung von ∂M in Komponenten. Dann kann man ganz analog zeigen, dass es für jeden kommutativen Ring R und jedes k einen Isomorphismus

$$H_k(M, A; R) \rightarrow H^{m-k}(M, B; R)$$

gibt.

Bemerkung. Wenn M eine geschlossene *nicht* orientierbare C^∞ -Mannigfaltigkeit ist, dann gilt die Poincaré-Dualität nicht mehr. Beispielsweise hatten wir schon gesehen, dass für zusammenhängende nicht orientierbare m -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeiten gilt, dass $H_m(M) = 0$ aber $H^0(M) = \mathbb{Z}$. Im nicht orientierbaren Fall zeigt Wort-für-Wort der gleiche Beweis wie zuvor dass wir eine Dualität erhalten, wenn wir uns auf \mathbb{F}_2 -Koeffizienten einschränken. Das heißt für jedes k gibt es einen Isomorphismus

$$H_k(M; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{m-k}(M; \mathbb{F}_2),$$

mit den offensichtlichen Verallgemeinerungen, wenn M nichtleeren Rand besitzt. ¹³⁸

¹³⁸Für die nicht-orientierbare 2-Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}P^2$ hatten wir gesehen, dass $H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$ für $i = 0, 1, 2$ und zudem auch $H^i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$ für $i = 0, 1, 2$. Dies entspricht also gerade der Poincaré-Dualität für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung. Wir nennen einen topologischen Raum X eine n -dimensionale *Homologie-Mannigfaltigkeit*, wenn für jedes x die Gruppe $H_k(X, X \setminus x)$ isomorph zu $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$ ist. Eine Homologie-Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, wenn es ein Element $[X] \in H_n(X)$ gibt, so dass für jedes $x \in X$ das Bild von $[X]$ unter der Abbildung $H_n(X) \rightarrow H_n(X, X \setminus x)$ ein Erzeuger ist. Es ist offensichtlich, dass eine (orientierbare) C^∞ -Mannigfaltigkeit insbesondere eine (orientierbare) Homologie-Mannigfaltigkeit ist. Man kann nun die Poincaré-Dualität auch für orientierbare Homologie-Mannigfaltigkeiten beweisen. Dies ist der Zugang, welcher in Hatcher: Algebraic Topology gewählt wird. Dieser Beweis ist moderner und allgemeiner, allerdings vielleicht weniger anschaulich.

Bemerkung. Der Isomorphismus, welchen wir im Beweis der Poincaré-Dualität konstruiert hatten ist natürlich in dem Sinne, dass wenn $f: M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung zwischen geschlossenen orientierbaren m -dimensionalen C^∞ -Mannigfaltigkeiten ist, dann kommutiert für jedes k das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_k(M; R) & \xrightarrow{PD} & H^{m-k}(M; R) \\ \downarrow f_* & & \uparrow f^* \\ H_k(N; R) & \xrightarrow{PD} & H^{m-k}(N; R) \end{array}$$

Es ist von unserem Zugang zur Poincaré-Dualität nicht unbedingt ersichtlich, dass dieses Diagramm kommutiert. Der abstraktere Zugang, welcher in Hatcher: Algebraic Topology gewählt wird, ist dafür deutlich besser geeignet.

15.2. Die Schnittform einer Mannigfaltigkeit. Es sei M eine geschlossene orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Wenn wir den Isomorphismus

$$PD: H_k(M; R) \rightarrow H^{m-k}(M; R)$$

mit der Evaluationsabbildung

$$\text{ev}: H^{m-k}(M; R) \rightarrow \text{Hom}(H_{m-k}(M, R), R)$$

kombinieren, dann erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} I_M: H_k(M; R) \times H_{m-k}(M; R) &\rightarrow R \\ (a, b) &\mapsto \text{ev}(PD(a))(b), \end{aligned}$$

welche offensichtlich bilinear ist. Zudem gilt für alle $a \in H_k(M; R)$ und $b \in H_{m-k}(M; R)$, dass ¹³⁹

$$I_M(a, b) = (-1)^{k(n-k)} I_M(b, a).$$

¹³⁹Diese Aussage wird beispielsweise in Kapitel VI.11 von

Bredon: Geometry and Topology

bewiesen.

Von besonderem Interesse ist dabei der Fall, dass $m = 2k$ eine gerad-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Wir erhalten dann eine Abbildung

$$I_M: H_k(M; R) \times H_k(M; R) \rightarrow R,$$

welche die *Schnittform* genannt wird. Diese dann die wichtige Eigenschaft, dass für alle $a, b \in H_k(M)$ gilt

$$I_M(a, b) = (-1)^k I_M(b, a).$$

Insbesondere, wenn $m = 4l$, dann ist die Schnittform also eine symmetrische bilineare Form.

Bemerkung. Die Schnittform von Mannigfaltigkeiten ist eine der wichtigsten Invarianten von Mannigfaltigkeiten überhaupt:

- (1) Mike Freedman hat 1981 bewiesen, dass jede symmetrische bilineare Form die Schnittform einer topologischen¹⁴⁰ geschlossenen 4-Mannigfaltigkeit ist. Darüber hinaus hat er bewiesen, dass wenn M und N zwei einfach zusammenhängende geschlossene topologische 4-Mannigfaltigkeiten sind, dann gilt

$$M \text{ ist homöomorph zu } N \Leftrightarrow I_M \text{ ist isometrisch zu } I_N.$$

- (2) Simon Donaldson hat 1982 bewiesen, dass die Aussagen von Freedman nicht für differenzierbare 4-Mannigfaltigkeiten gelten. Beispielsweise ist die bilineare Form, welche gegeben ist durch die Matrix

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nach Freedman die Schnittform einer geschlossenen topologischen 4-Mannigfaltigkeit aber nach Donaldson ist sie nicht die Schnittform einer differenzierbaren 4-Mannigfaltigkeit. Zudem ist der Diffeomorphietyp einer einfach zusammenhängenden geschlossenen differenzierbaren 4-Mannigfaltigkeit *nicht* durch die Schnittform festgelegt.

Für diese Ergebnisse erhielten Freedman und Donaldson 1986 jeweils die Fields-Medaille.

Die Abbildung $H_k(M) \times H_{m-k}(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ und insbesondere die Schnittform hat in vielen Fällen eine anschauliche Interpretation. Es sei dazu $U \subset M$ eine orientierte geschlossene

¹⁴⁰Eine topologische Mannigfaltigkeit ist einfach eine Mannigfaltigkeit im bisherigen Sinne, d.h. wir nehmen nur an, dass es lokale Homöomorphismen gibt. Nachdem der Begriff ‘Mannigfaltigkeit’ von vielen als C^∞ -Mannigfaltigkeit eingeführt wird, schreibt man manchmal ‘topologische Mannigfaltigkeit’ um diese von den C^∞ -Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden.

Untermannigfaltigkeit der Dimension k und es sei V eine orientierte geschlossene Untermannigfaltigkeit $V \subset M$ der Dimension $n - k$. Wir nehmen an, dass sich U und V transversal schneiden, d.h. für jeden Schnittpunkt $P \in U \cap V$ gilt $T_P U \oplus T_P V = T_P M$. Jedem Schnittpunkt P von U und V ordnen wir jetzt das Vorzeichen $\varepsilon_P = 1$ zu, wenn

$$\{\text{positive Basis von } T_P U, \text{ positive Basis von } T_P V\} = \text{positive Basis von } T_P M.$$

Andernfalls setzen wir $\varepsilon_P = -1$. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Definition nicht von der Wahl der positiven Basen von $T_P U$ und $T_P V$ abhängt. Wir bezeichnen dann

$$U \cdot V := \sum_{P \in U \cap V} \varepsilon_P \in \mathbb{Z}$$

als die *algebraische Schnittzahl* von U und V .

Wir können jetzt folgenden Satz formulieren.

Satz 15.2. *Es sei M eine geschlossene orientierte m -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Es sei zudem $U \subset M$ eine orientierte geschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension k und es sei V eine orientierte geschlossene Untermannigfaltigkeit $V \subset M$ der Dimension $n - k$. Wir bezeichnen mit $[U] \in H_k(M)$ und $[V] \in H_{n-k}(M)$ die Bilder der Fundamentalklassen der orientierten Mannigfaltigkeiten U und V unter den Inklusionsabbildungen. Wenn U und V sich transversal schneiden, dann gilt*

$$I_M([U], [V]) = U \cdot V.$$

Zudem, wenn U' aus U durch eine Homotopie vorgeht, und wenn U und U' sich transversal schneiden, dann gilt

$$I_M([U], [U']) = U \cdot U'.$$

Für den Beweis des Satzes haben wir keine Zeit mehr. Für den Beweis des Satzes verweise ich auf Theorem VI.11.9 von

Bredon: Geometry and Topology.

Betrachten wir beispielsweise die geschlossene Fläche F von Geschlecht $g = 3$, welche in Abbildung 38 zusammen mit einer Orientierung und einer Basis $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ für $H_1(F)$ skizziert wird. Dann ist bezüglich dieser Basis die Matrix für die Schnittform gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Es sei M eine geschlossene orientierte m -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Wir sagen eine Klasse $a \in H_k(M)$ ist durch eine Untermannigfaltigkeit repräsentiert, wenn es eine orientierte geschlossene Untermannigfaltigkeit U der Dimension k gibt, so dass

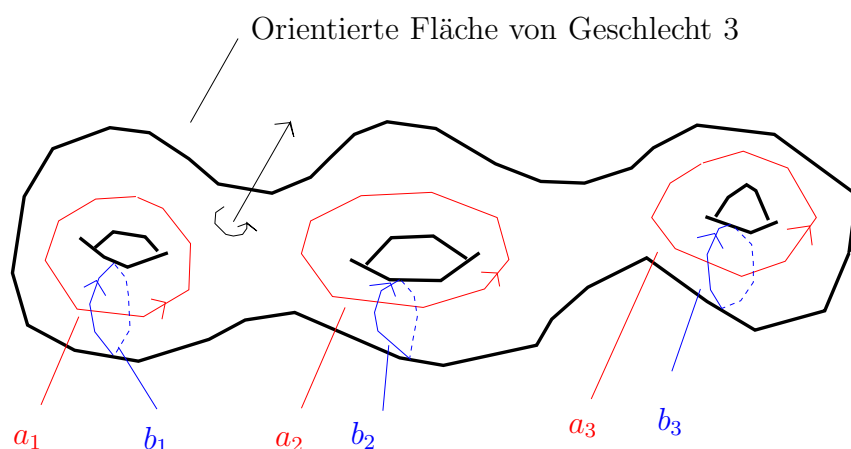


ABBILDUNG 38. Die orientierte Fläche F von Geschlecht 3 zusammen mit einer Basis für $H_1(F)$.

$[U] = a$. Es folgt aus den Arbeiten von Thom, dass jede Klasse in $H_k(M)$ für $k \leq 6$ und $k \geq m - 2$ durch Untermannigfaltigkeiten repräsentiert werden kann. Für die anderen Dimensionen gilt dies im Allgemeinen jedoch nicht.

15.3. Die Schnittform und das cup-Produkt. Wir kennen jetzt also zwei verschiedene Arten von 'Produkten'. Zum einen, wenn X ein topologischer Raum und R ein kommutativer Ring ist, dann gibt uns das cup-Produkt für jedes p, q eine bilineare Abbildung

$$H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R),$$

mit der Eigenschaft, dass für $a \in H^p(X; R)$ und $b \in H^q(X; R)$ gilt, dass

$$a \cup b = (-1)^{\dim(a) \dim(b)} b \cup a.$$

Andererseits, im deutlich eingeschränkteren Fall, dass M eine geschlossene orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, dann gibt uns die Schnittform eine Abbildung

$$I_M: H_k(M; R) \times H_{m-k}(M; R) \rightarrow R,$$

welche ebenfalls die Eigenschaft besitzt, dass für alle $a \in H_k(M; R)$ und $b \in H_{m-k}(M; R)$ gilt, dass

$$I_M(a, b) = (-1)^{k(n-k)} I_M(b, a).$$

Wir haben das cup-Produkt und die Schnittform für den 2-Torus bestimmt, und wir haben gesehen, dass in beiden Fällen, für geeignete Basen, das bilineare Produkt repräsentiert wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz besagt nun, dass das cup-Produkt in der Tat die Schnittform bestimmt.

Satz 15.3. *Es sei M eine geschlossene orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es seien $a \in H_k(M; R)$ und $b \in H_{m-k}(M; R)$. Dann gilt*

$$I_M(a, b) = \underbrace{(PD(a) \cup PD(b))}_{\in H^m(M)} \underbrace{([M])}_{\in H_m(M)}.$$

Etwas ausführlicher gesagt, die Schnittform von a und b ist also gegeben dadurch, dass wir das cup-Produkt $PD(a) \cup PD(b) \in H^m(M; R)$ mithilfe der Evaluationsabbildung $H^m(M; R) \rightarrow \text{Hom}(H_m(M), R)$ auf der Fundamentalklasse $[M]$ auswerten.

Dieser Satz zusammen mit Satz 15.2 erlaubt es uns in vielen Fällen das cup-Produkt einer Mannigfaltigkeit geometrisch zu bestimmen.

16. WEITERFÜHRENDE LITERATUR

Es gibt nun natürlich viele weiterführende Bücher. Wenn man sich für das Studium von Mannigfaltigkeiten als topologische Objekte interessiert, dann ist man vielleicht am besten mit den Klassikern von John Milnor bedient:

Milnor: *Topology from the Differentiable Viewpoint*

Milnor: *Morse Theory*

Milnor: *Characteristic Classes*

Sehr viel weiterführender, etwas moderner allerdings auch weniger leicht zu lesen ist

Bredon: *Geometry and Topology*