

Analysis IV - Sommersemester 2022

Stefan Friedl

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	2
Einleitung	3
1. Topologische Räume I	4
1.1. Mengentheoretische Begriffe	4
1.2. Metrische Räume	4
1.3. Topologische Räume	6
1.4. Die Teilraumtopologie	9
1.5. Abgeschlossene Teilmengen	10
1.6. Stetige Abbildungen	11
1.7. Homöomorphismen	11
1.8. Kompakte topologische Räume	12
2. Definition und Beispiele von Untermannigfaltigkeiten	18
2.1. Glatte Abbildungen und Diffeomorphismen	18
2.2. Die Definition von Untermannigfaltigkeiten	20
2.3. Untermannigfaltigkeiten und Graphen	23
2.4. Der Satz vom regulären Wert	25
2.5. Differenzierbare Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten	28
3. Maß- und Integrationstheorie	31
3.1. Erinnerung: Maß- und Integrationstheorie	31
3.2. Vertauschbarkeit von Integration und partiellen Ableitungen	34
4. Das k -dimensionale Volumen von Parallelotopen	36
4.1. Erinnerung an orthogonale Matrizen	36
4.2. Das k -dimensionale Volumen von Parallelotopen	36
4.3. Die Gramsche Determinante	38
4.4. Das Kreuzprodukt	40
5. Integration und Untermannigfaltigkeiten	44
5.1. Integration auf Untermannigfaltigkeiten I	44
5.2. Integration auf Untermannigfaltigkeiten II	45
5.3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten III	47
5.4. Das k -dimensionale Volumen	49
5.5. Integrale und Parametrisierungen	50
6. Untermannigfaltigkeiten mit Rand	55
6.1. Definition von Untermannigfaltigkeiten mit Rand	55
6.2. Beispiele	57
6.3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten mit Rand	59
7. Zusammenhängende topologische Räume	61
8. Der Gaußsche Integralsatz	64
8.1. Tangentialvektoren zu Untermannigfaltigkeiten	64
8.2. Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten	67
8.3. Formulierung des Gaußschen Integralsatzes	70

8.4.	Beweis des Gaußschen Integralsatzes I: Quader	72
8.5.	Beweis des Gaußschen Integralsatzes II: Stempel	73
8.6.	Beweis des Gaußschen Integralsatzes III: Der allgemeine Fall	76
8.7.	Der Gaußsche Integralsatz für Untermannigfaltigkeiten mit Kanten	78
8.8.	Ausblick	81
9.	Kategorien und Funktoren	82
9.1.	Induzierte Abbildungen auf Tangentialräumen	82
9.2.	Duale Vektorräume	84
9.3.	Kategorien	86
9.4.	Funktoren	88
10.	Differentialformen erster Ordnung	91
10.1.	Definition von Differentialformen erster Ordnung	91
10.2.	Beweis von Satz 10.3 (*)	95
10.3.	Integrierbarkeit von 1-Formen	98
10.4.	Integration und Parametertransformationen	101
10.5.	Orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeiten	102
11.	Differentialformen höherer Ordnung	106
11.1.	Motivation	106
11.2.	Alternierende Multilinearformen I: Definition	107
11.3.	Alternierende Multilinearformen II: Das Dachprodukt von Linearformen	109
11.4.	Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten	113
11.5.	Glatte Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten	114
11.6.	Integration von Differentialformen I	116
11.7.	Orientierte Vektorräume und Untermannigfaltigkeiten	118
11.8.	Integration von Differentialformen II	124
11.9.	Integration von Differentialformen III	125
11.10.	Null-dimensionale Untermannigfaltigkeiten	129
12.	Vorbereitungen für den Satz von Stokes	130
12.1.	Orientierte Untermannigfaltigkeiten mit Rand	130
12.2.	Das Differential von Differentialformen	133
12.3.	Das Differential von Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten	137
13.	Der Satz von Stokes	140
13.1.	Formulierung des Satz von Stokes	140
13.2.	Beweis des Satzes von Stokes	140
13.3.	Der klassische Satz von Stokes und der Satz von Green	143
13.4.	Anwendung auf holomorphe Funktionen	145
14.	Topologische Räume II	148
14.1.	Basis einer Topologie	148
14.2.	Das Produkt von topologischen Räumen	152
15.	Quotientenräume	155
15.1.	Äquivalenzrelationen	155
15.2.	Die Quotiententopologie	157
15.3.	Offene Abbildungen	159
15.4.	Beispiele: Zylinder, Torus, das Möbius Band und die Kleinsche Flasche	160
15.5.	Beispiele: Flächen von höherem Geschlecht	163

16.	Topologische Mannigfaltigkeiten	166
16.1.	Zweitabzählbare topologische Räume	166
16.2.	Definition von topologischen Mannigfaltigkeiten	167
16.3.	Gruppenoperationen	169
16.4.	Stetige Operationen	171
16.5.	Gruppenoperationen auf topologischen Mannigfaltigkeiten	175
17.	Mannigfaltigkeiten	178
17.1.	Definition und Beispiele von Mannigfaltigkeiten	178
17.2.	Die Fläche von Geschlecht 2 als Mannigfaltigkeit	182
17.3.	Untermannigfaltigkeiten und Produkte von Mannigfaltigkeiten	184
18.	Der Tangentialraum von Mannigfaltigkeiten	187
18.1.	Der Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit	187
18.2.	Natürliche Transformationen und natürliche Isomorphismen	192
19.	Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten	195
20.	Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten	199
20.1.	Mannigfaltigkeiten mit Rand	199
20.2.	Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	200
21.	Die de Rham-Kohomologie von Mannigfaltigkeiten	204
21.1.	Quotientenvektorräume	204
21.2.	Die Definition der de Rham-Kohomologie	204
21.3.	Berechnungen der de Rham-Kohomologie	205
21.4.	Die Funktorialität der de Rham-Kohomologie	207
21.5.	Die Sphäre und der Torus sind nicht diffeomorph	209
21.6.	Das Dachprodukt auf de Rham-Kohomologie (*)	211
22.	Ausblick	213

LITERATUR

- [Br2] T. Bröcker. *Analysis II*, Spektrum Akademischer Verlag (1995).
- [Fr1] S. Friedl. *Analysis 1*, Vorlesungsskript (2021).
- [Fr2] S. Friedl. *Analysis 2*, Vorlesungsskript (2021).
- [Fr3] S. Friedl. *Analysis 2*, Vorlesungsskript (2022).
- [FrT] S. Friedl. *Topology*, Vorlesungsskript, siehe GRIPS-Kurs.
- [K2] K. Königsberger. *Analysis 2*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag (2004).
- [L] J. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, 2nd revised ed. Graduate Texts in Mathematics 218 (2013).
- [Na1] N. Naumann. *Lineare Algebra I*, Vorlesungsskript (2021).
- [Na2] N. Naumann. *Lineare Algebra II*, Vorlesungsskript (2021).
- [Na3] N. Naumann. *Algebra*, Vorlesungsskript (2022).
- [Na4] N. Naumann. *Kommutative Algebra*, Vorlesungsskript (2022).

EINLEITUNG

Eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist, vereinfacht gesprochen, eine „ k -dimensionale Teilmenge von \mathbb{R}^n “. Beispielsweise ist die Sphäre S^2 eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 . In der Analysis IV Vorlesung wollen wir folgende Themen behandeln:

- (1) Das Integral von reellwertigen Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten.
- (2) Die klassischen Sätze der Vektoranalysis, z.B. der Satz von Gauß, der Satz von Stokes, und die Verallgemeinerungen auf höher dimensionale Untermannigfaltigkeiten.
- (3) Die Erweiterung des Begriffs von Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n zu Mannigfaltigkeiten.
- (4) Wir wollen beweisen, dass die Sphäre S^2 nicht diffeomorph zu einem Torus ist.

1. TOPOLOGISCHE RÄUME I

In diesem Kapitel führen wir den Begriff des topologischen Raumes ein. Diese Räume abstrahieren den Begriff von „offenen“ und „abgeschlossenen“ Teilmengen. Insbesondere übertragen sich die meisten Definitionen und Aussagen aus der Analysis II über metrische Räume, welche nur mithilfe von offenen Teilmengen eingeführt wurden, auf topologische Räume. Beispielsweise macht es Sinn von kompakten topologischen Räumen und von stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen zu sprechen.

1.1. Mengentheoretische Begriffe. Bevor wir die topologischen Räume einführen erinnern wir an ein paar grundlegende Definitionen und Aussagen aus der Mengentheorie.

Definition.

- (1) Wir bezeichnen mit \emptyset die leere Menge.
- (2) Es seien X und Y Mengen, dann bezeichnen wir mit

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

die Menge aller angeordneter Paare.

- (3) Es sei X eine Menge. Eine Familie $A_i, i \in I$ von Teilmengen von X besteht aus einer Indexmenge I (z.B. $I = \{1, \dots, k\}$ oder $I = \mathbb{Z}$), und einer Teilmenge $A_i \subset X$ für jedes $i \in I$.
- (4) Es seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen. Wir sagen A und B sind **disjunkt**, wenn sich A und B nicht schneiden, d.h. wenn $A \cap B = \emptyset$.

Das folgende Lemma fasst einige elementare mengentheoretische Aussagen zusammen, welche wir implizit immer wieder verwenden werden.

Lemma 1.1.

- (1) Es sei $A_i, i \in I$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X , dann gilt

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) \quad \text{und} \quad X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Diese Aussagen werden manchmal die „de Morgansche Gesetze“ genannt.

- (2) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, dann gilt:

- (a) $V \supset f(f^{-1}(V))$ für jede Teilmenge $V \subset Y$
- (b) $V = f(f^{-1}(V))$ für jede Teilmenge $V \subset Y$, wenn f surjektiv
- (c) $U \subset f^{-1}(f(U))$ für jede Teilmenge $U \subset X$
- (d) $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ für jede Teilmenge $V \subset Y$
- (e) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ für Teilmengen $V_i \in Y, i \in I$
- (f) $f\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(U_i)$ für Teilmengen $U_i \in X, i \in I$.

Beweis. Das Lemma folgt aus den Definitionen und elementarer Logik. ■

1.2. Metrische Räume. Wir hatten die metrischen Räume schon in Analysis II eingeführt und behandelt. Wir erinnern noch einmal kurz an die Definition:

Definition. Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer **Metrik** d auf X , d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \\ (x, y) &\mapsto d(x, y), \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (positive Definitheit)
- (2) für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
- (3) für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Beispiel. Das vielleicht wichtigste Beispiel eines metrischen Raumes ist gegeben durch $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik, d.h. mit der Metrik, welche definiert ist durch

$$d(x, y) := \|x - y\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

wie üblich bezeichnen wir für $a \in \mathbb{R}^n$ mit a_1, \dots, a_n die Koordinaten von a

Wenn wir nichts anderes schreiben, dann betrachten wir \mathbb{R}^n als metrischen Raum bezüglich der euklidischen Metrik.

Definition. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (1) Es sei $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

als die **offene r -Kugel** um x .

- (2) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **offen**, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x)$ noch in U enthalten ist.
- (3) Wir sagen $A \subset X$ ist **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Lemma 1.2. Es sei X ein metrischer Raum.¹ Dann gilt

- (1) \emptyset und X sind offen,
- (2) der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist wiederum offen, d.h. es gilt

$$U_1, \dots, U_k \text{ offen} \implies U_1 \cap \dots \cap U_k \text{ ist offen,}$$

- (3) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wiederum offen, d.h. es gilt

$$U_i, i \in I \text{ offen} \implies \bigcup_{i \in I} U_i \text{ ist offen.}$$

Beweis. Das Lemma folgt leicht aus den Definitionen. Wir hatten den Beweis in [Fr2, Lemma 1.6 und Satz 1.9] ausgeführt. ■

Definition. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Wir definieren:²

$$f: X \rightarrow Y \text{ ist stetig} \iff \forall_{x \in X} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in B_\delta(x)} d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Mit der Definition von offenen Mengen können wir nun folgenden Satz formulieren:

¹Wenn nichts anderes angegeben ist, dann wird die Metrik immer mit d bezeichnet, d.h. „Es sei X ein metrischer Raum“ ist kurz für „Es sei (X, d) ein metrischer Raum“.

²Diese Definition der Stetigkeit ist eine Verallgemeinerung der „ $\epsilon - \delta$ “-Definition von Stetigkeit für Funktionen auf \mathbb{R} .

Satz 1.3. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) f ist stetig,
- (2) für jede offene Menge U in Y ist das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ,
- (3) für jede abgeschlossene Menge A in Y ist das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .

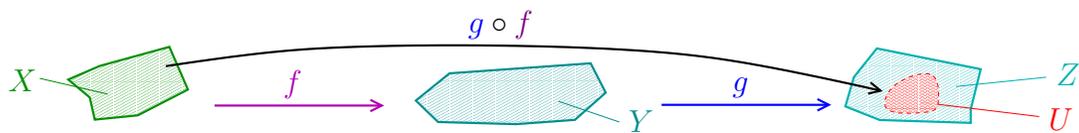
Beweis. Wir hatten den Satz als [Fr2, Satz 2.15] bewiesen. Die Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) kann man auch leicht mit Lemma 1.1 (2d) zeigen. ■

Die Formulierung von Stetigkeit mit offenen Mengen kann man sich nicht nur leichter merken als die „ $\epsilon - \delta$ “-Definition, diese Umformulierung erleichtert auch das Beweisen vieler Aussagen. Beispielsweise läßt sich folgendes Lemma jetzt ganz einfach beweisen:

Lemma 1.4. Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f: X \rightarrow Z$ ebenfalls stetig.

Beweis. Aus Satz 1.3 folgt, dass es genügt zu zeigen, dass für jede offene Teilmenge $U \subset Z$ auch das Urbild $(g \circ f)^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Es sei also $U \subset Z$ offen. Dann gilt

$$((g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } g \text{ ist stetig und } U \text{ ist offen}}}{=} f^{-1}(\text{der offenen Menge } (g^{-1}(U))) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } f \text{ ist stetig.}}}{=} \text{offen.} \quad \blacksquare$$



1.3. Topologische Räume. Wir führen jetzt die sogenannten topologischen Räume ein. Diese kann man als eine Verallgemeinerung des Begriffes des metrischen Raumes auffassen.

Definition. Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, \mathcal{T}) , wobei X eine Menge ist und \mathcal{T} eine Topologie auf X , d.h. \mathcal{T} ist eine Menge von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- (1) die leere Menge und die ganze Menge X sind in \mathcal{T} enthalten,
- (2) der Durchschnitt von endlich vielen Mengen in \mathcal{T} ist wiederum eine Menge in \mathcal{T} ,
- (3) die Vereinigung von beliebig vielen Mengen in \mathcal{T} ist wiederum eine Menge in \mathcal{T} .

Die Mengen in \mathcal{T} werden **offen** genannt.

In der folgenden Definition führen wir viele Topologien ein, welchen wir immer wieder begegnen werden.

Definition.

- (A) Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann folgt aus Lemma 1.2, dass

$$\mathcal{T} := \text{alle offenen Teilmengen von } (X, d)$$

eine Topologie auf X ist. Wir bezeichnen dies als die **Standardtopologie auf einem metrischen Raum**. Insbesondere betrachten wir den metrischen Raum \mathbb{R}^n mit dieser Standardtopologie, außer wir geben explizit eine andere Topologie an.³

- (B) Es sei X eine Menge, dann ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X . Diese Topologie wird die **triviale Topologie auf X** genannt.
- (C) Es sei X eine Menge und \mathcal{T} die Menge aller Teilmengen von X . Dann ist \mathcal{T} eine Topologie auf X . Die Topologie wird als die **diskrete Topologie auf X** bezeichnet.
- (D) Es sei $X = \mathbb{R}$ und es sei \mathcal{T} wie folgt definiert:

$$U \in \mathcal{T} \iff \begin{array}{l} \text{entweder ist } U = \emptyset, \text{ oder} \\ U \text{ ist das Komplement von endlich vielen Punkten in } \mathbb{R}. \end{array}$$

Beispielsweise liegen $\emptyset, \mathbb{R} \setminus \{\pi\}, \mathbb{R} \setminus \{-1, \sqrt{2}\}$ aber auch \mathbb{R} (als Komplement von null Punkten) in \mathcal{T} . Es folgt leicht aus den de Morganschen Gesetzen 1.1, dass \mathcal{T} eine Topologie auf $X = \mathbb{R}$ ist.

- (E) Wir betrachten die Menge

$$X := \mathbb{R} \cup \{*\},$$

d.h. X besteht wiederum aus \mathbb{R} und einem weiteren Punkt $*$. Wir sagen $U \subset X$ ist **offen**⁴, wenn gilt:

- (a) zu jedem Punkt $x \in U \cap \mathbb{R}$ existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$,
 (b) wenn $* \in U$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $(-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon) \subset U$.

Man leicht zeigen, dass dies in der Tat eine Topologie auf X definiert. Wir bezeichnen diesen topologischen Raum als **Gerade mit zwei Nullen**.⁵

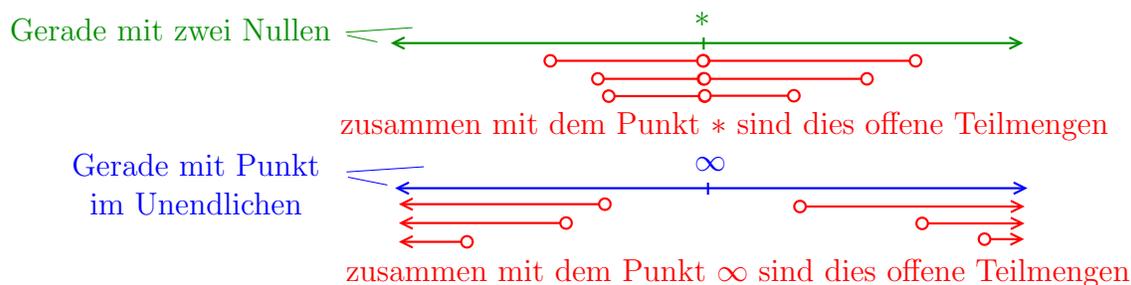
- (F) Wir betrachten die Menge

$$X := \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

d.h. X besteht aus \mathbb{R} und einem weiteren Punkt ∞ . Wir sagen $U \subset X$ ist **offen**, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) zu jedem Punkt $x \in U \cap \mathbb{R}$ existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$,
 (b) wenn $\infty \in U$, dann gibt es ein $C > 0$, so dass $(-\infty, -C) \cup (C, \infty) \subset U$.

Man kann wiederum leicht zeigen, dass dies in der Tat eine Topologie auf X definiert. Wir bezeichnen diesen topologischen Raum als die **Gerade mit einem Punkt im Unendlichen**.



Definition.

³Dieses Beispiel ist wohl das ursprüngliche Beispiel für einen topologischen Raum und erklärt auch, warum Mengen in einer Topologie „offen“ genannt werden.

⁴Wenn wir eine Topologie spezifizieren wollen, müssen wir also festlegen, welche Teilmengen „offen“ genannt werden sollen.

⁵Der etwas eigenwillige Name „Gerade mit zwei Nullen“ rührt daher, dass 0 und * die gleiche Rolle spielen. Formaler ausgedrückt, die Abbildung, welche 0 und * vertauscht, ist ein Homöomorphismus.

(G) Es sei \mathbb{K} ein Körper (z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, d.h. der Körper mit p Elementen, wobei p eine Primzahl ist). Wir betrachten

$$\mathbb{K}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}.$$

Für eine Menge $\mathcal{F} = \{f_1(x, y), \dots, f_k(x, y)\}$ von Polynomen definieren wir die **Ver-
schwindungsmenge**

$$V(f_1, \dots, f_k) := \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid f_1(x, y) = \dots = f_k(x, y) = 0\}.$$

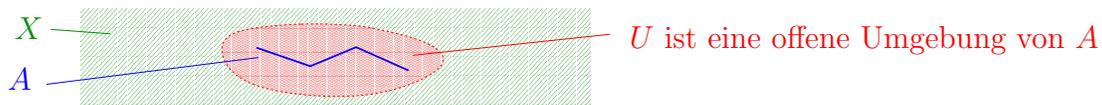
Wir definieren nun eine Topologie of \mathbb{K}^2 wie folgt:

$$U \subset \mathbb{K}^2 \text{ ist offen} \quad :\iff \quad \begin{array}{l} \text{es gibt Polynome } f_1(x, y), \dots, f_k(x, y), \text{ so} \\ \text{dass } U = \mathbb{K}^2 \setminus V(f_1(x, y), \dots, f_k(x, y)). \end{array}$$

Dann ist \mathcal{T} eine Topologie auf $X = \mathbb{K}^2$. Wir überlassen den Beweis dieser Aussage als freiwillige Übungsaufgabe.⁶ Diese Topologie wird die **Zariski-Topologie auf \mathbb{K}^2** ⁷ genannt, und ist ein zentrales Objekt der „algebraischen Geometrie“. Die Mengen in der Zariski-Topologie werden oft **Zariski-offen** genannt.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist jede Zariski-offene Menge auch offen im üblichen Sinne, aber die Umkehrung gilt nicht. Für $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ erhalten wir nun einen Begriff von Offenheit, welcher wenig mit Anschauung zu tun hat, aber trotzdem sehr hilfreich ist.

Definition. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und es sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir sagen $U \subset X$ ist ein **offene Umgebung** von A , falls U offen ist und falls $A \subset U$.



Beispiele.

- (1) Es sei X ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Für jedes $r > 0$ ist die offene Kugel $B_r(x_0)$ eine offene Umgebung von x_0 .
- (2) Es sei X die Gerade mit einem Punkt im Unendlichen. Dann ist für jedes $C > 0$ die Menge $\{\infty\} \cup (-\infty, -C) \cup (C, \infty)$ eine offene Umgebung von ∞ .

Definition. Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff**, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ immer *disjunkte* offene Umgebungen U von x und V von y gibt. Ein topologischer Raum, welcher Hausdorff ist, wird auch als **Hausdorff-Raum** bezeichnet.



Beispiel. Wir wollen nun überprüfen, ob die obigen Beispiele Hausdorff sind:

- (A) Wir hatten schon in [Fr2, Satz 1.11] gesehen, dass der einem metrischen Raum (X, d) zugeordnete topologische Raum Hausdorff ist. In der Tat, denn für $x \neq y$

⁶In dem Beweis benötigt man, dass der Ring $\mathbb{K}[x, y]$ noethersch ist, d.h. dass jedes Ideal in $\mathbb{K}[x, y]$ schon von endlich vielen Polynomen erzeugt wird. Diese Aussage wird in der (kommutativen) Algebra-Vorlesung bewiesen.

⁷Oskar Zariski (1899-1986) war ein amerikanischer Mathematiker.

setzen wir $r = d(x, y)$, dann sind $B_{\frac{r}{2}}(x)$ und $B_{\frac{r}{2}}(y)$ disjunkte offene Umgebungen von x und y .

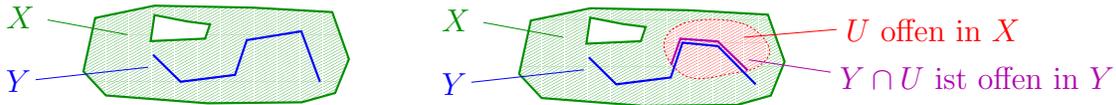
- (B) Wenn X mindestens zwei Elemente besitzt, dann ist (X, \mathcal{T}) nicht Hausdorff.
- (C) Diese Topologie ist Hausdorff, denn, für gegebene $x \neq y$ können wir $U = \{x\}$ und $V = \{y\}$ wählen.
- (D) Diese Topologie ist nicht Hausdorff, denn die Schnittmenge von zwei nichtleeren offenen Mengen in (X, \mathcal{T}) ist nichtleer, es gibt also keine disjunkten nichtleeren offenen Teilmengen in (X, \mathcal{T}) .
- (E) Dies ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 1.
- (F) Dies ist ebenfalls eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 1.
- (G) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann ist der topologische Raum nicht Hausdorff. Wir werden diese Aussage nicht verwenden und skizzieren daher nur einen Beweis. Für jedes Polynom $f \neq 0$ ist $V(f)$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^2 . Es folgt nun leicht, dass jede nichtleere Zariski-offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ die Eigenschaft besitzt, dass $\mathbb{R}^2 \setminus U$ eine Nullmenge ist. Insbesondere schneiden sich je zwei nichtleere Zariski-offene Teilmengen von \mathbb{R}^2 . Insbesondere kann \mathbb{R}^2 mit der Zariski-Topologie kein Hausdorff-Raum sein.

1.4. Die Teilraumtopologie.

Definition. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Wir betrachten dann

$$\mathcal{S} := \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

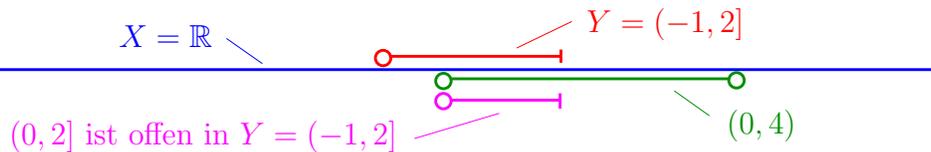
Es ist völlig elementar sich davon zu überzeugen, dass \mathcal{S} in der Tat eine Topologie auf Y definiert. Wir nennen \mathcal{S} die **Teilraumtopologie** auf Y . Die Definition besagt also, dass eine Teilmenge U offen in Y ist, genau dann, wenn es eine Menge $V \subset X$ gibt, welche offen in X ist, so dass $U = Y \cap V$.



Konvention. Wir betrachten jede Teilmenge Y von \mathbb{R}^n immer als topologischen Raum bezüglich der durch \mathbb{R}^n induzierten Teilraumtopologie.

Beispiel.

- (1) Wir betrachten $Y = (-1, 2]$ mit der durch \mathbb{R} induzierten Teilraumtopologie. Dann ist $V = (0, 2]$ eine offene Teilmenge von Y , denn $V = Y \cap (0, 4)$ und $(0, 4)$ ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R} .



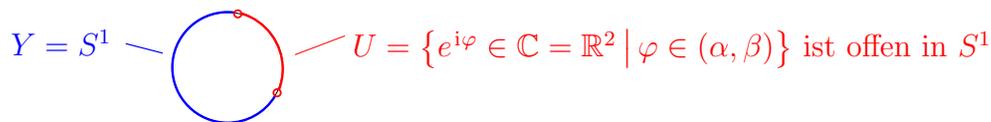
- (2) Es sei

$$Y := S^1 = \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \mid |z| = 1\}.$$

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. In Übungsblatt 1 zeigen wir, dass das „offene Kreisstück“

$$U := \{e^{i\varphi} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in (\alpha, \beta)\}$$

eine offene Teilmenge von $Y = S^1$ ist.



1.5. Abgeschlossene Teilmengen.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.⁸ Wir sagen $A \subset X$ ist abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel. Wir betrachten den topologischen Raum $X = (-1, 2]$. Dann ist $A = (-1, 0]$ eine abgeschlossene Teilmenge, denn $X \setminus A = (0, 2]$ ist eine offene Teilmenge von X .

Lemma 1.5. Es sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

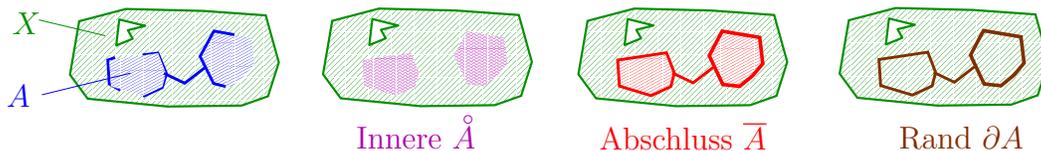
- (1) \emptyset und X sind abgeschlossen,
- (2) die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen ist abgeschlossen,
- (3) der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Teilmengen ist wiederum abgeschlossen.

Beweis. Der Beweis folgt leicht aus den Axiomen von offenen Mengen und den de Morganschen Gesetzen aus Lemma 1.1 (1). Wir hatten den Beweis in [Fr2, Lemma 1.10] für metrische Räume ausgeführt. Der Beweis für topologische Räume ist wort-wörtlich der Gleiche. ■

In [Fr2, Kapitel 11] hatten wir den Begriff des Inneren und des Randes einer Teilmenge eines metrischen Raumes definiert. Wir verallgemeinern nun diese Begriffe zu Teilmengen von topologischen Räumen.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \text{Innere von } A &:= \overset{\circ}{A} := \{x \in X \mid \text{es gibt eine offene Teilmenge } U \text{ mit } x \in U \subset A\} \\ \text{Abschluss von } A &:= \bar{A} := \{x \in X \mid \text{für jede offene Umgebung von } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\} \\ \text{Rand von } A &:= \partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}. \end{aligned}$$



Satz 1.6. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt:

- (1) Das Innere $\overset{\circ}{A}$ ist eine offene Teilmenge von X .
- (2) Der Abschluss \bar{A} und der Rand ∂A sind abgeschlossene Teilmengen von X .

Beweis. Wir beweisen Aussage (2) in Übungsblatt 1. Der Beweis von Aussage (1) verläuft ganz ähnlich. ■

⁸Wenn wir schreiben „es sei X ein topologischer Raum“, dann meinen wir das X eine Menge ist mit einer Topologie. Im Normalfall erwähnen wir die Topologie nicht in der Notation. Diese Konvention ist gang und gäbe in der Mathematik, beispielsweise schreiben wir in Linearer Algebra, „sei V ein Vektorraum“, wenn wir wirklich schreiben müssten, „sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum“.

1.6. Stetige Abbildungen.

Definition. Es seien X und Y topologische Räume und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir definieren

f ist stetig $:\iff$ für jede offene Menge U in Y ist $f^{-1}(U)$ offen in X .

Beispiele.

- (1) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Dann folgt aus Satz 1.3, dass f stetig ist als Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann, wenn f stetig ist als Abbildung zwischen den entsprechenden topologischen Räumen.
- (2) Es sei Y eine Menge, welche mit der trivialen Topology $\{\emptyset, Y\}$ versehen ist. Dann ist jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ von einem topologischen Raum nach Y stetig, denn für jede Abbildung gilt $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$.

Folgender Satz ist nun das Analogon zu Satz 1.3.

Satz 1.7. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) f ist stetig,
- (2) für jede abgeschlossene Menge A in Y ist das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .

Beweis. Ganz analog zum Beweis der Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) von Satz 1.3 kann man auch diesen Satz leicht mit Lemma 1.1 (2d) zeigen. ■

Beispiel. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Da $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, ist nach Satz 1.7 die Sphäre

$$S^n := f^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^{n+1} .

Satz 1.8. Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, dann ist auch $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig.

Beweis. Der Beweis ist wort-wörtlich der gleiche, wie der Beweis von Lemma 1.4. ■

1.7. Homöomorphismen. Folgende Definition hatten wir in [Fr2, Kapitel 2.6] schon für metrische Räume eingeführt.

Definition. Es seien X und Y topologischen Räume und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen f ist ein **Homöomorphismus**, wenn f folgende drei Eigenschaften besitzt:

- (1) f ist stetig,
- (2) f ist bijektiv,
- (3) die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ist stetig.

Es seien X und Y topologische Räume. Wir sagen X und Y sind **homöomorph**, wenn es einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt.

Beispiele.

(1) Die Abbildungen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1) \quad \text{und} \quad g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

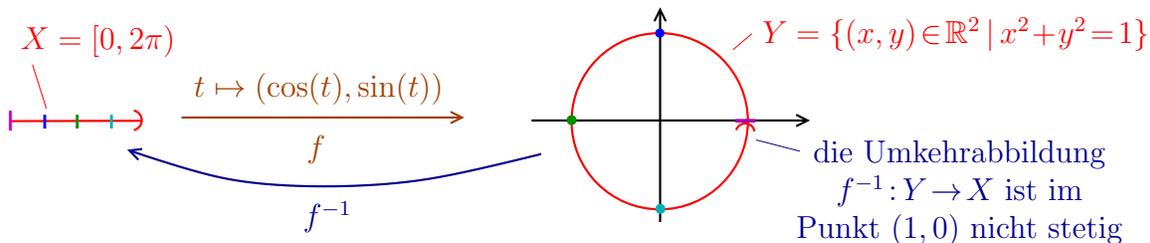
$$x \mapsto \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(x) \quad \quad \quad x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

sind stetig und invers zueinander. Also sind beide Abbildungen Homöomorphismen.

(2) Die Abbildung

$$[0, 2\pi) \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

ist eine stetige Bijektion, aber kein Homöomorphismus, nachdem die Umkehrabbildung $f^{-1}: S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ im Punkt $(1, 0)$ nicht stetig ist.(3) In Übungsblatt 1 werden wir zeigen, dass die Gerade mit einem Punkt im Unendlichen homöomorph zu S^1 ist.

1.8. Kompakte topologische Räume. In [Fr2, Kapitel 3.1] hatten wir den Begriff von kompakten Teilmengen für metrische Räume eingeführt. Die Definition kann man, wie wir gleich sehen werden, problemlos auf topologische Räume verallgemeinern. Viele von den Sätzen, welche wir in Analysis II über kompakte metrische Räume bewiesen hatten, gelten mit minimalen Abänderungen der Aussagen und Beweise auch für kompakte topologische Räume.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.(1) Eine offene Überdeckung von X ist eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Teilmengen von X , so dass

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

(2) Wir sagen X ist kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ gibt, so dass

$$X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

(3) Wir sagen eine Teilmenge $A \subset X$ ist kompakt, wenn A bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.**Beispiele.** Wir betrachten wiederum die obigen Beispiele.

- (A) Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann erhalten wir den gleichen Kompaktheitsbegriff wie in Analysis II.
- (B) Es sei X eine beliebige Menge mit der trivialen Topologie. Dann ist X offensichtlich kompakt.
- (C) Es sei X eine beliebige Menge mit der diskreten Topologie. Wenn X endlich ist, dann ist X offensichtlich kompakt. Wenn X unendlich ist, dann ist X nicht kompakt, denn

$\{x\}_{x \in X}$ ist nun eine offene Überdeckung von X , aber X wird nicht von endlich vielen dieser offenen Menge überdeckt.

(D) Wir werden in Präsenzübungsblatt 1 zeigen, dass dieser topologische Raum kompakt ist.

(E) und (F) Wir werden in Übungsblatt 1 der Frage nachgehen, ob diese topologischen Räume kompakt sind.

Der folgende Satz von Heine–Borel gibt uns viele Beispiele von kompakten Mengen.

Satz 1.9. (Satz von Heine–Borel) Es sei A eine Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann gilt:

$$A \text{ ist kompakt} \iff A \text{ ist beschränkt und abgeschlossen in } \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Dies ist gerade die Aussage von [Fr2, Satz 3.7]. ■

Beispiel. Wir betrachten die Kugel

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Diese ist, wie wir gerade auf Seite 11 gesehen hatten, abgeschlossen und zudem offensichtlich beschränkt. Also ist S^n nach dem Satz 1.9 von Heine–Borel kompakt.

Viele der Aussagen, welche wir in Analysis II über kompakte metrische Räume bewiesen haben, gelten auch allgemeiner im Kontext von topologischen Räumen.

Satz 1.10. Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist auch A kompakt.⁹

Beweis. Der Beweis ist ganz ähnlich zum Beweis von [Fr2, Satz 3.3]. Es sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung des topologischen Raums A . Per Definition der Teilraumtopologie auf A gibt es zu jedem $i \in I$ eine offene Teilmenge V_i von X mit $U_i = A \cap V_i$. Nachdem A abgeschlossen in X ist, folgt, dass $X \setminus A$ offen ist. Also ist

$$(X \setminus A) \text{ zusammen mit } \{V_i\}_{i \in I}$$

eine *offene* Überdeckung von X . Nachdem X kompakt ist, können wir X durch endlich viele dieser Mengen $X \setminus A$ und $V_i, i \in I$ überdecken. Es gibt also i_1, \dots, i_k , so dass

$$X = (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}.$$

Nachdem $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ und $U_i = V_i \cap A$ erhalten wir, dass

$$A = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Wir haben also gezeigt, dass A durch endlich viele der U_i 's überdeckt wird, d.h. A ist in der Tat kompakt. ■



Satz 1.11. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn X kompakt ist, dann ist auch das Bild $f(X)$ kompakt.

⁹Wir fassen dabei A als topologischen Raum bezüglich der Teilraumtopologie auf.

Beweis. Der Beweis ist fast identisch zum Beweis von [Fr2, Satz 3.9]. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir das Argument. Wir nehmen also an, dass X kompakt ist. Wir wollen beweisen, dass $f(X)$ wiederum kompakt ist. Es sei also $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Wir müssen zeigen, dass $f(X)$ in der Vereinigung von endlich vielen U_i 's enthalten ist. Es gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \subset & f^{-1}(f(X)) & \subset & f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) & = & \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i). \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{Lemma 1.1 (2c)} & & \text{Lemma 1.1 (2e)} & & \end{array}$$

Behauptung. Jedes Urbild $f^{-1}(U_i)$ ist eine offene Teilmenge von X .

Beweis. Es sei $i \in I$. Da U_i eine offene Teilmenge von $f(X)$ ist, existiert nach Definition der Teilraumtopologie auf $f(X)$ eine offene Menge V_i von Y mit $U_i = f(X) \cap V_i$. Nun sehen wir, dass

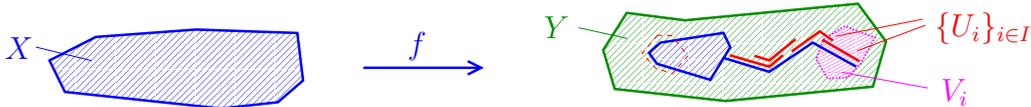
$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(U_i) & = & f^{-1}(f(X) \cap V_i) & = & f^{-1}(V_i) & = & \text{offen in } X. \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{elementare Logik} & & \text{da } f: X \rightarrow Y \text{ stetig und } V_i \subset Y \text{ offen} & & \square \end{array}$$

Wir sehen also, dass $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. Nachdem X kompakt ist, existieren endlich viele Indizes i_1, \dots, i_k , so dass

$$X \subset f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k}).$$

Dann folgt aber:

$$\begin{array}{ccccccc} f(X) & \subset & f(f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k})) & & & & \\ & = & f(f^{-1}(U_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_{i_k})) & \subset & U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}. & & \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ & \text{Lemma 1.1 (2f)} & \text{Lemma 1.1 (2b) angewandt auf jedes } f(f^{-1}(U_{i_j})) & & & & \blacksquare \end{array}$$



Definition. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) Wir sagen, f nimmt in $P \in X$ das **globale Minimum** an, wenn

$$f(P) \leq f(Q) \quad \text{für alle } Q \in X.$$

(2) Wir sagen, f nimmt in $P \in X$ ein **lokales Minimum** an, wenn es eine offene Umgebung V von P gibt, so dass

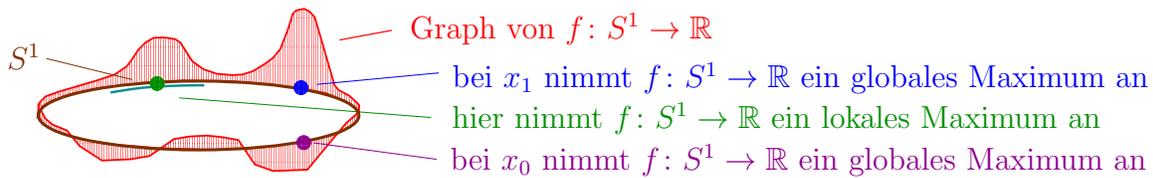
$$f(P) \leq f(Q) \quad \text{für alle } Q \in V.$$

Ganz analog definieren wir **globales Maximum** und **lokales Maximum**.

Satz 1.12. Es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung auf einem kompakten nichtleeren topologischen Raum. Dann nimmt f ein globales Minimum und ein globales Maximum an, d.h. es existieren $x_0, x_1 \in X$, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. Da X kompakt und f stetig ist, folgt aus Satz 1.11, dass das Bild $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt ist. Es folgt aus dem Satz 1.9 von Heine–Borel, dass $f(X)$ beschränkt und abgeschlossen in \mathbb{R} ist. Da $f(X)$ beschränkt und nichtleer ist existieren $y_0 = \inf(f(X))$ und



$y_1 = \sup(f(X))$. Da $f(X)$ abgeschlossen in \mathbb{R} ist, gilt $y_0, y_1 \in f(X)$. Also folgt, dass

$$y_0 \leq y \leq y_1 \quad \text{für alle } y \in f(X).$$

Da $y_0, y_1 \in f(X)$ gibt es $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = y_0$ und $x_1 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$. Dann gilt

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in X. \quad \blacksquare$$

Der Satz 1.9 von Heine-Borel besagt insbesondere, dass eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^n abgeschlossen in \mathbb{R}^n ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass diese Aussage im Allgemeinen nicht für topologische Räume gilt, d.h. eine kompakte Teilmenge eines topologischen Raumes X ist nicht notwendigerweise abgeschlossen in X .

Beispiel. Es sei X eine beliebige Menge mit mindestens zwei Elementen und es sei \mathcal{T} die triviale Topologie auf X , d.h. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Es sei nun $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq X$. Dann ist die Teilraumtopologie von A gegeben durch $\{\emptyset, A\}$, d.h. die Teilraumtopologie auf A ist die triviale Topologie. Insbesondere ist A kompakt. Andererseits ist A keine abgeschlossene Teilmenge von X .

Der folgende Satz besagt, dass im Gegenzug kompakte Teilmengen von *Hausdorff-Räumen* abgeschlossen sind.

Satz 1.13. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Wenn X ein Hausdorff-Raum ist, dann ist A abgeschlossen in X .

Wir müssen in Satz 1.13 also zeigen, dass A abgeschlossen in X ist. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass $X \setminus A$ offen in X ist. Folgendes Lemma gibt uns eine Kriterium um zu zeigen, dass eine Teilmenge eines topologischen Raums offen ist.

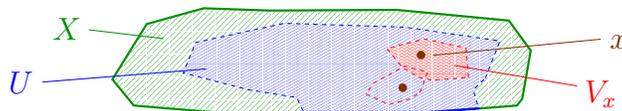
Hilfslemma 1.14. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $U \subset X$ eine Teilmenge. Wenn es zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung V von x gibt, welche in U enthalten ist, dann ist U offen.

Beweis von Lemma 1.14. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $U \subset X$ eine Teilmenge. Wir nehmen an, dass es zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung V_x von x gibt, welche in U enthalten ist. Wir sehen nun, dass

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset U.$$

\uparrow \uparrow
 denn $x \in V_x$ \uparrow \uparrow
 denn V_x ist in U enthalten

Es folgt, dass $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. Also ist U die Vereinigung von offenen Teilmengen von X , daher ist U offen. \blacksquare



Beweis von Satz 1.13.¹⁰ Es sei X ein topologischer Raum, welcher Hausdorff ist. Es sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Wir wollen zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Nach Lemma 1.14 genügt es folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Zu jedem $x \in X \setminus A$ existiert eine offene Umgebung V von x , welche in $X \setminus A$ enthalten ist.

Beweis. Es sei $x \in X \setminus A$. Wir wenden die Hausdorff-Eigenschaft auf x und jedes $a \in A$ an. Für jedes $a \in A$ erhalten wir offene disjunkte Umgebungen U_a von a und V_a von x . Offensichtlich ist

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A} \underbrace{(U_a \cap A)}_{\text{offen in } A} \subset A.$$

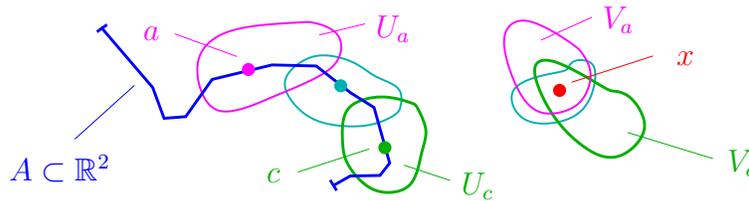
Es folgt, also dass $\{U_a \cap A\}_{a \in A}$ eine offene Überdeckung von A ist. Nachdem A kompakt ist, gibt es $a_1, \dots, a_k \in A$, so dass

$$A = \bigcup_{i=1}^k (U_{a_i} \cap A).$$

Wir betrachten nun

$$V := \bigcap_{i=1}^k V_{a_i}.$$

Als Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist V eine offene Umgebung von x . Zudem ist V von allen U_{a_1}, \dots, U_{a_k} disjunkt, also auch von $A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_k}$. \square \blacksquare



Wir hatten auf Seite 12 gesehen, dass eine bijektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen nicht notwendigerweise ein Homöomorphismus ist. Wir müssen also eigentlich noch nachweisen, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist. In der Praxis kann es aber sehr schwierig sein, die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \rightarrow X$ explizit zu bestimmen, geschweige denn zu zeigen, dass diese stetig ist. Der folgende brillante Satz ermöglicht es uns oft diesen unangenehmen Schritt zu umgehen.

Satz 1.15. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine bijektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn X kompakt ist, und wenn Y Hausdorff ist, dann ist f ein Homöomorphismus.

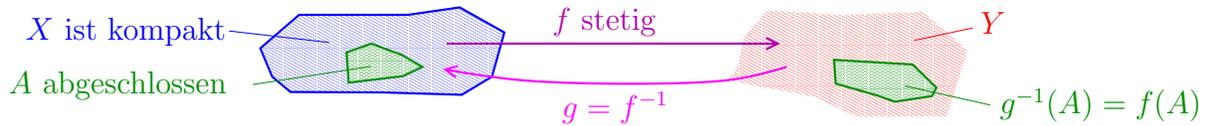
Bemerkung. Wir werden in Präsenzübungsblatt 1 sehen, dass die zusätzliche Voraussetzung, dass Y Hausdorff ist, notwendig ist.

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass die Umkehrabbildung $g := f^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig ist. Nach Satz 1.7 genügt es zu zeigen, dass für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$ auch das Urbild $g^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

- Es sei also $A \subset X$ eine abgeschlossene Menge.
- Nachdem X kompakt ist, ist nach Satz 1.10 auch A kompakt.

¹⁰Der Beweis des Satzes ähnelt dem Beweis von [Fr2, Satz 3.5], in diesem Satz hatten wir gezeigt, dass kompakte Teilmengen von \mathbb{R}^n abgeschlossen sind.

- Da f stetig ist folgt aus Satz 1.11, dass $g^{-1}(A) = f(A)$ kompakt ist.
- Da Y Hausdorff ist, folgt aus Satz 1.13, dass $g^{-1}(A) = f(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y ist. ■



Nach dieser kurzen Einführung in die topologischen Räume werden wir uns die nächsten Wochen nur auf Teilmengen von \mathbb{R}^n mit der Teilraumtopologie konzentrieren. Die allgemeineren topologischen Räume werden erst gegen Ende der Vorlesung wieder eine wichtige Rolle spielen.

2. DEFINITION UND BEISPIELE VON UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

In diesem Kapitel führen den Begriff einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit ein. Grob gesprochen handelt es sich dabei um eine „ k -dimensionale Teilmenge“ von einem \mathbb{R}^n .

2.1. Glatte Abbildungen und Diffeomorphismen.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei

$$f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

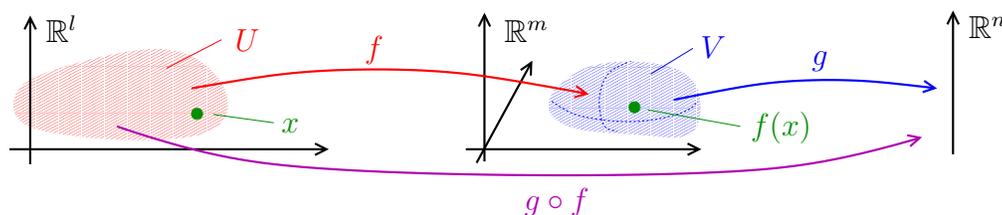
eine Abbildung.

- (1) Wir sagen f ist **glatt**, wenn die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar sind.¹¹¹²
- (2) Wenn f glatt ist, dann definieren wir für $P \in U$ das **Differential** als die $m \times n$ -Matrix¹³

$$Df_P := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$$

Satz 2.1. (Kettenregel) Es seien $U \subset \mathbb{R}^l$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und es seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatte Abbildungen, so dass $f(U) \subset V$. Dann ist die Abbildung $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls glatt, und für jeden Punkt $x \in U$ gilt:

$$\underbrace{D(g \circ f)_x}_{n \times l\text{-Matrix}} = \underbrace{Dg_{f(x)}}_{n \times m\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{Df_x}_{m \times l\text{-Matrix}} \in M(n \times l, \mathbb{R}).$$



Beweis. Wir hatten die Kettenregel als [Fr2, Satz 6.13] bewiesen. ■

Definition. Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ zwischen zwei offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n heißt **Diffeomorphismus**, wenn gilt:

- (1) f ist glatt,
- (2) f ist bijektiv, und
- (3) f^{-1} ist ebenfalls glatt.

Beispiel. Wir bezeichnen mit $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ die offene Kugel von Radius 1. In Präsenzübungsblatt 2 werden wir sehen, dass die Abbildungen

$$f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R}^n \rightarrow B^n$$

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \quad \text{und} \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}$$

¹¹In der Literatur werden glatte Abbildungen sehr oft auch als C^∞ -Abbildungen bezeichnet.

¹²Wir arbeiten in dieser Vorlesung durchgehend mit glatten Abbildungen, die meisten Ergebnisse und Konstruktionen können analog auch für stetige differenzierbare Abbildungen eingeführt werden.

¹³In Analysis II hatten wir das Differential anders eingeführt, aber wir hatten dann in Satz 6.7 gesehen, dass für glatte Abbildungen das Differential eben durch diese Matrix gegeben ist.

zueinander invers sind. Beide Abbildungen sind glatt, also sind beide Diffeomorphismen.

Lemma 2.2. Wenn $f: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n ist, dann ist für jedes $x \in U$ das Differential $Df_x \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix.

Beweis. Es sei $g: V \rightarrow U$ die Umkehrung von f . Dann gilt

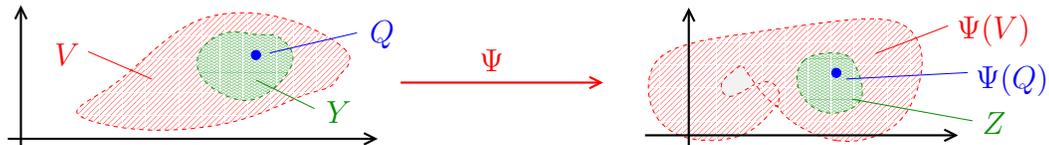
$$\text{id}_n = D \text{id}_x = D(g \circ f)_x \underset{\uparrow}{=} Dg_{f(x)} \cdot Df_x.$$

Kettenregel 2.1, diese können wir anwenden, da g glatt ist

Wir sehen also, dass die $n \times n$ -Matrix Df_x ein Inverses besitzt, also ist Df_x eine invertierbare Matrix. ■

In der Praxis ist es oft relativ einfach eine glatte bijektive Abbildung anzugeben, aber es ist oft schwierig das Inverse explizit zu beschreiben und es ist daher oft nicht so einfach zu zeigen, dass das Inverse auch eine glatte Abbildung ist. Zum Glück hilft uns der folgende Satz aus der Patsche, welcher als eine teilweise Umkehrung von Lemma 2.2 aufgefasst werden kann.

Satz 2.3. (Satz über die Umkehrabbildung) Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung und $Q \in V$. Wenn $D\Psi_Q$ invertierbar ist, dann existieren offene Umgebungen $Y \subset V$ von Q und Z von $\Psi(Q)$, so dass $\Psi: Y \rightarrow Z$ ein Diffeomorphismus ist.



Beweis. Die Aussage dieses Satzes ist fast durch den Satz über die Umkehrabbildung [Fr2, Satz 14.4] abgedeckt. Wir hatten allerdings nur gezeigt, dass es offene Umgebungen gibt, so dass $\Psi: Y \rightarrow Z$ eine Umkehrabbildung besitzt. Die Tatsache, dass die Umkehrabbildung dann auch glatt ist folgt aus [K2, Seite 104] oder auch [Br2, Seite 47] und dem Argument von [Fr2, Satz 14.4 (5)]. ■

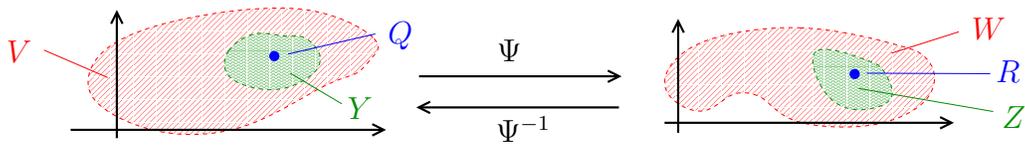
Wir erhalten folgendes hilfreiche Korollar, welches es erlaubt zu zeigen, dass eine Abbildung ein Diffeomorphismus ist, ohne die Umkehrabbildung zu bestimmen.

Korollar 2.4. Es seien $V, W \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\Psi: V \rightarrow W$ eine glatte Abbildung. Wenn Ψ bijektiv ist und wenn für alle $Q \in V$ das Differential $D\Psi_Q$ invertierbar ist, dann ist die Abbildung $\Psi: V \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, dass $\Psi^{-1}: W \rightarrow V$ ebenfalls eine glatte Abbildung ist. Es sei also $R \in W$. Wir müssen zeigen, dass es eine offene Umgebung Z von R gibt, so dass Ψ^{-1} auf Z glatt ist. Wir setzen $Q := \Psi^{-1}(R)$. Nach dem $D\Psi_Q$ invertierbar ist können wir den Satz 2.3 über die Umkehrabbildung anwenden. Wir erhalten eine offene Umgebung Y von Q und eine offene Umgebung Z von R , so dass $\Psi: Y \rightarrow Z$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist also Ψ^{-1} auf der offenen Umgebung Z von R glatt. ■

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: (-\pi, \pi) \times (0, 2) &\rightarrow W := \{(x, y) \in B_2^2 \mid x > 0 \text{ oder } y \neq 0\} \\ (\varphi, r) &\mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

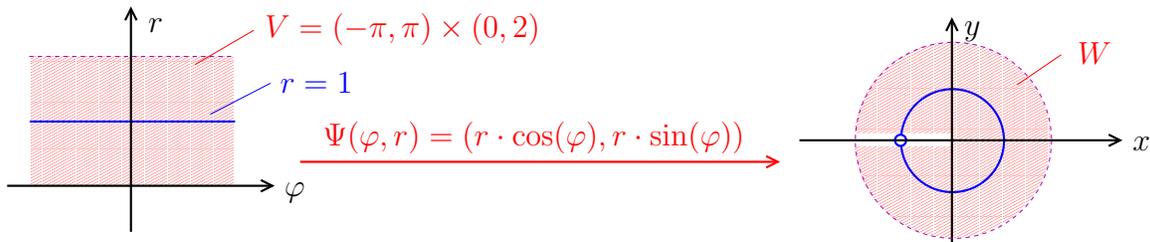


welche wir aus der Definition der Polarkoordinaten kennen. Es folgt aus dem Satz über die Polarkoordinatendarstellung [Fr1, Satz 11.11], dass Ψ eine Bijektion ist. Offensichtlich ist Ψ glatt. Wir wollen nun zeigen, dass Ψ ein Diffeomorphismus ist. Im Prinzip kann man in diesem Fall eine Umkehrabbildung auch angeben, aber es ist viel einfacher mithilfe von Korollar 2.4 zu argumentieren. In diesem Fall gilt für alle $(\varphi, r) \in (-\pi, \pi) \times (0, 2)$, dass

$$\det(D\Psi_{(\varphi,r)}) = \det \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ r \cdot \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix} = -r < 0.$$

\uparrow
 da $r \in (0, 2)$

Also folgt aus Korollar 2.4, dass die Abbildung ein Diffeomorphismus ist.



2.2. Die Definition von Untermannigfaltigkeiten.

Notation. Für $k \leq n$ bezeichnen wir im Folgenden

$$E_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

als die k -dimensionale Ebene in \mathbb{R}^n .

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

- (1) Es sei $P \in M$. Eine k -dimensionale Karte um P ist ein Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Umgebung von $P \in \mathbb{R}^n$ und einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\Phi(U \cap M) = V \cap E_k.$$
- (2) Wir sagen $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $P \in M$ eine k -dimensionale Karte um P gibt.¹⁴
- (3) Ein Atlas für M ist eine Familie $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von k -dimensionalen Karten mit $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.



¹⁴Die leere Menge ist per Definition für jedes k eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass der Kreis

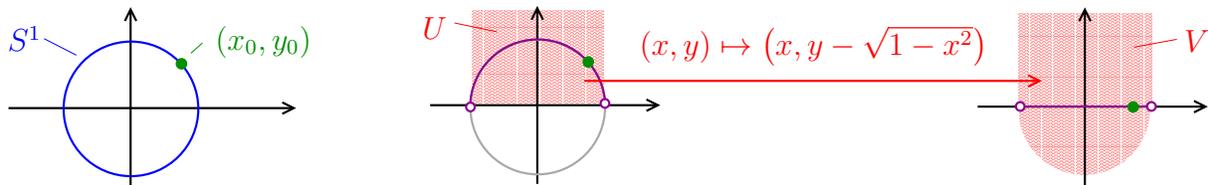
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ist. Es sei $P = (x_0, y_0) \in S^1$ ein Punkt. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $x_0 \in (-1, 1)$, und dass $y_0 > 0$. Dann ist

$$\Phi: \overbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1, 1) \text{ und } y > 0\}}^{=:U} \rightarrow \overbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1, 1) \text{ und } y > -\sqrt{1-x^2}\}}^{=:V}$$

$$(x, y) \mapsto (x, y - \sqrt{1-x^2})$$

eine Karte. In Übungsblatt 2 werden wir sehen, wie wir diese Karte abwandeln können um Karten für alle anderen Punkte auf S^1 zu erhalten.



Beispiel. Wir wollen nun noch einen anderen Atlas für S^1 angeben, welcher nur aus zwei Karten besteht. Dieser Atlas wird später bei Berechnungen noch sehr hilfreich sein. Die Idee dazu ist ganz einfach: die Abbildung Ψ , welche wir auf Seite 19 betrachtet hatten, schaut eigentlich fast aus wie die Umkehrung einer Karte, nämlich sie schickt die Gerade $s = 1$ auf den Kreis S^1 . Wir müssen diese Abbildung also nur leicht abwandeln, um die Umkehrung einer Karte zu erhalten. Wir betrachten dazu die Abbildung

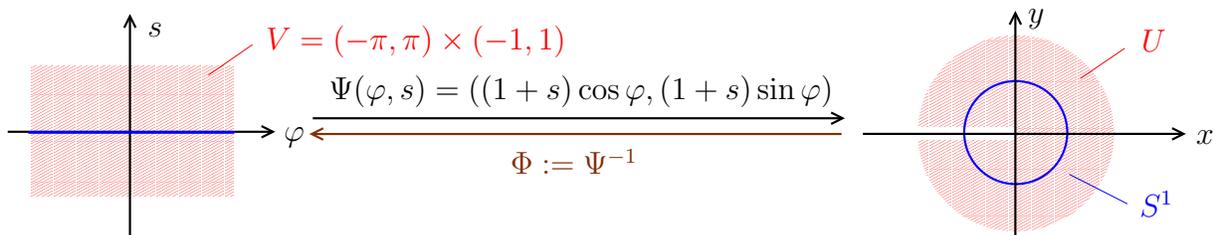
$$\Psi: V := (-\pi, \pi) \times (-1, 1) \rightarrow U := \Psi(V) \subset \mathbb{R}^2$$

$$(\varphi, s) \mapsto \begin{pmatrix} (1+s) \cdot \cos(\varphi) \\ (1+s) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dies ist eine glatte bijektive Abbildung mit $\Psi(V \cap E_1) = U \cap S^1$. Es folgt leicht aus Korollar 2.4, dass dies sogar ein Diffeomorphismus ist. Also definiert

$$\Phi := \Psi^{-1}: U \rightarrow V$$

eine Karte. Diese Karte deckt alle Punkte in $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ ab. Wir benötigen nun noch

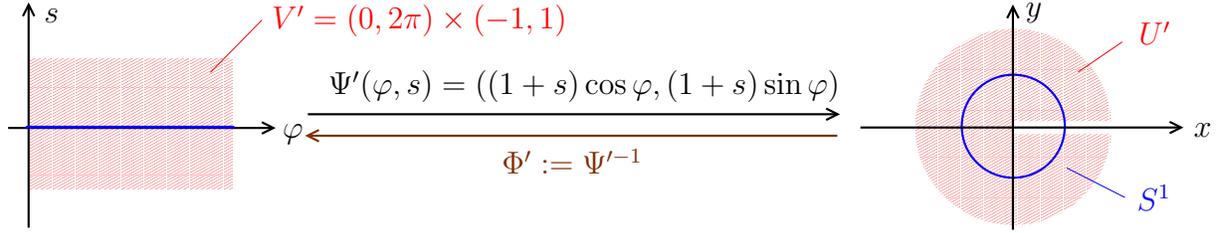


eine Karte um $(-1, 0)$. Eine solche ist beispielsweise gegeben durch die Umkehrabbildung Φ' von

$$\Psi': V' := (0, 2\pi) \times (-1, 1) \rightarrow U' := \Psi'(V') \subset \mathbb{R}^2$$

$$(\varphi, s) \mapsto \begin{pmatrix} (1+s) \cdot \cos(\varphi) \\ (1+s) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die beiden Karten Φ und Φ' bilden also einen Atlas von S^1 .



Beispiel. Für jedes $r > 0$ und $C > 0$ betrachten wir nun

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } z \in (-C, C)\},$$

anschaulich gesprochen ist Z ein Zylinder mit Radius r . Ganz analog zum vorherigen Beispiel kann man zeigen, dass Z eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Beispiel. Wir wollen nun zeigen, dass die Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 ist. Der Beweis dieser Aussage läuft ganz analog zur vorherigen Beispiel von S^1 . Wir betrachten zuerst folgende, von den sphärischen Koordinaten inspirierte Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: V := (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-1, 1) &\rightarrow U := \Psi(V) \subset \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta, s) &\mapsto \begin{pmatrix} (1+s) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ (1+s) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ (1+s) \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine langweilige Rechnung zeigt, dass $\det(D\Psi_{(\varphi, \theta, s)}) = (1+s)^2 \cdot \sin(\theta)$. Mithilfe von Korollar 2.4 kann man nun leicht zeigen, dass $\Psi: V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist. Zudem gilt $\Psi(V \cap E_2) = U \cap S^2$. Also definiert

$$\Phi := \Psi^{-1}: U \rightarrow V$$

eine Karte für alle Punkte in $U \cap S^2$. Mit anderen Worten Φ deckt alle Punkte in S^2 außerhalb des Halbkreises $K := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \leq 0 \text{ und } y = 0\}$ ab. Wir brauchen nun noch eine Karte, welche die fehlenden Punkte abdeckt. Wir verwenden dazu die vorherige Abbildung Ψ , vertauschen die Rollen der y - und z -Koordinaten und wir spiegeln entlang der yz -Ebene. Genauer gesagt, wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi': V' := (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-1, 1) &\rightarrow U' := \Psi'(V') \subset \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta, s) &\mapsto \begin{pmatrix} -(1+s) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ (1+s) \cdot \cos(\theta) \\ (1+s) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mithilfe von Korollar 2.4 zeigt man wiederum, dass ein Diffeomorphismus ist. Das Inverse

$$\Phi' := \Psi'^{-1}: U' \rightarrow V'$$

ist eine Karte, welche alle Punkte außerhalb von $L = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0 \text{ und } z = 0\}$ abdeckt. Nachdem es auf S^2 keinen Punkt gibt, welcher in den beiden Halbkreisen K und L liegt, decken die beiden Karten S^2 ab. Wir haben also insbesondere gezeigt, dass S^2 einen Atlas besitzt, welcher aus zwei Karten besteht.

Beispiel. Wir betrachten noch einmal die 2-dimensionale Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

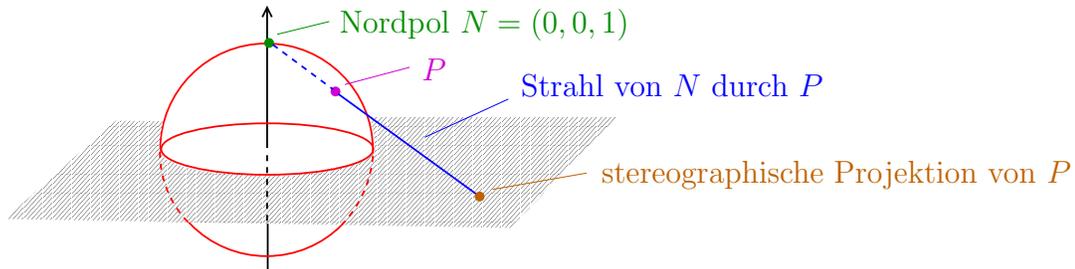
mit den Punkten

$$N = (0, 0, 1) \quad \text{„Nordpol“} \quad \text{und} \quad S = (0, 0, -1) \quad \text{„Südpol“}.$$

Wir geben nun einen anderen Atlas für S^2 an, bei dem wir die Karten explizit hinschreiben können. Genauer gesagt, wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \{(x, y, z) \mid z < 1\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 1 - x^2 - y^2 - z^2 \right). \end{aligned}$$

Eingeschränkt auf $S^2 \setminus N$ ist dies die stereographische Projektion bezüglich des Nordpol N .



Wir betrachten auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: \{(x, y, z) \mid z > -1\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 1 - x^2 - y^2 - z^2 \right). \end{aligned}$$

Eingeschränkt auf $S^2 \setminus S$ ist dies die stereographische Projektion bezüglich des Südpols S . In Übungsblatt 2 werden wir sehen, dass Einschränkungen von Φ und Ψ auf geeignet gewählte offene Mengen Karten für S^2 sind, welche S^2 überdecken. Nachdem die Definitionsbereiche ganz S^2 abdecken, bilden diese Einschränkungen von Φ und Ψ einen Atlas für S^2 .

2.3. Untermannigfaltigkeiten und Graphen.

Lemma 2.5. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung. Dann ist der Graph

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, welche einen Atlas mit nur einer Karte besitzt.

Beweis. Wir werden das Lemma in Übungsblatt 2 beweisen. ■

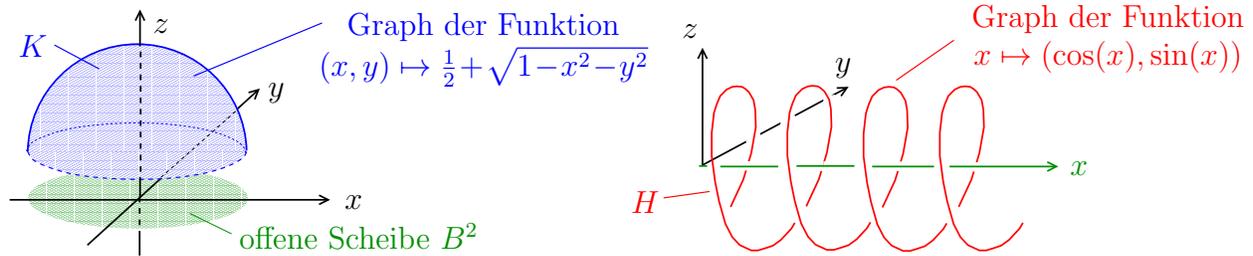
Beispiel. Die offene Halbsphäre

$$K := \left\{ \left(x, y, \frac{1}{2} + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

ist der Graph der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ auf der offenen Scheibe B^2 , also nach Lemma 2.5 eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit. Zudem ist die unendliche Helix

$$H := \{(x, \cos(x), \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

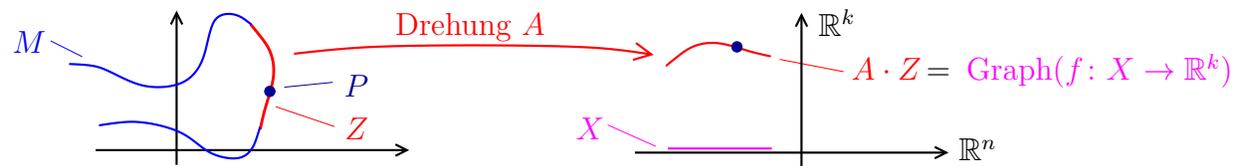
der Graph der Funktion $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ auf \mathbb{R} , also nach Lemma 2.5 eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .



Der folgende Satz besagt nun, dass jede Untermannigfaltigkeit „lokal“, bis auf eine Rotation, ein Graph ist.

Satz 2.6. Es sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $P \in M$. Dann existiert eine Permutationsmatrix A , eine offene Umgebung Z von P in M , eine offene Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine glatte Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass

$$A \cdot Z = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$



Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $P \in M$. Wir wählen eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um P . Wir setzen $\Psi := \Phi^{-1}: V \rightarrow U$ und wir schreiben $\Phi(P) = (Q, 0)$, wobei $Q \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Abbildung

$$i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k} \\ x \mapsto (x, 0).$$

Es gilt

$$D(\Psi \circ i)_Q = \overset{\substack{\text{invertierbar da } \Psi \\ \text{Diffeomorphismus}}}{\underbrace{D\Psi_{(Q,0)}}} \cdot \overset{\text{Rang } n}{\underbrace{Di_Q}} \in M((n+k) \times n, \mathbb{R}).$$

Kettenregel 2.1

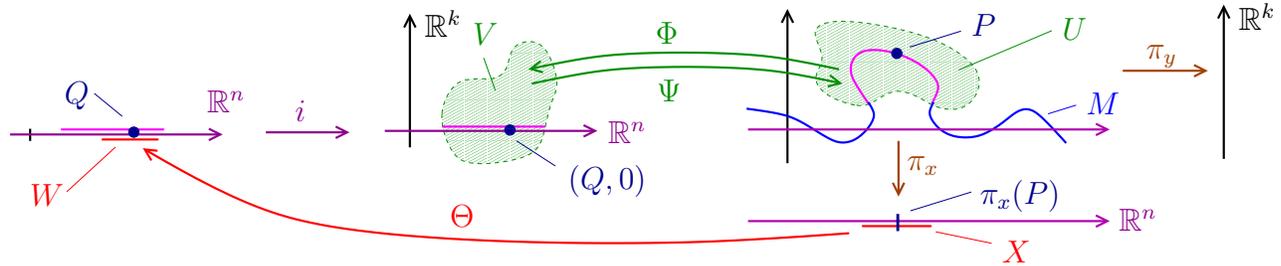
Die $(n+k) \times n$ -Matrix $D(\Psi \circ i)_Q$ hat also Rang n . Aus der linearen Algebra, siehe auch Präsenzübungsblatt 2, sehen wir, dass es n Zeilen von $D(\Psi \circ i)_Q$ gibt, welche linear unabhängig sind. Indem wir die Koordinaten von \mathbb{R}^{n+k} permutieren, d.h. in dem wir eine Permutationsmatrix A auf M anwenden, können wir annehmen, dass schon die ersten n Zeilen von $D(\Psi \circ i)_Q$ linear unabhängig sind. Wir betrachten nun noch folgende Projektionen

$$\pi_x: \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \pi_y: \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \\ (x, y) \mapsto x \quad \quad \quad (x, y) \mapsto y.$$

Wir betrachten die Abbildung $\pi_x \circ \Psi \circ i: i^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$D(\pi_x \circ \Psi \circ i)_Q = \underset{\substack{\text{Kettenregel 2.1} \\ \uparrow}}{D(\pi_x)_P} \cdot D(\Psi \circ i)_Q = \text{ersten } n \text{ Zeilen von } D(\Psi \circ i)_Q = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{invertierbar}}}{\text{invertierbar}} \\ \text{denn } D(\pi_x)_P = \pi_x \text{ ist die Projektion auf } \mathbb{R}^n \quad \quad \quad \text{da die ersten } n \text{ Zeilen linear unabhängig sind}$$

Es folgt also aus dem Satz 2.3 über die Umkehrabbildung, dass es offene Umgebungen $W \subset i^{-1}(V)$ von Q und X von $\pi_x(P)$ gibt, so dass $\pi_x \circ \Psi \circ i: W \rightarrow X$ ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen die Umkehrabbildung mit $\Theta: X \rightarrow W$.



Wir setzen $Z := (\Psi \circ i)(W) = (\Psi \circ i \circ \Theta)(X)$. Für $x \in X$ gilt dann

$$(\Psi \circ i \circ \Theta)(x) \underset{\uparrow}{=} ((\pi_x \circ \Psi \circ i \circ \Theta)(x), (\pi_y \circ \Psi \circ i \circ \Theta)(x)) \underset{\uparrow}{=} (x, \overbrace{(\pi_y \circ \Psi \circ i \circ \Theta)(x)}^{=: f(x)}).$$

für jeden Punkt $z \in \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ gilt $z = (\pi_x(z), \pi_y(z))$ denn Θ ist Umkehrabbildung von $\pi_x \circ \Psi \circ i$

Die Abbildung $f := \pi_y \circ \Psi \circ i \circ \Theta: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ hat also die gewünschten Eigenschaften. ■

2.4. Der Satz vom regulären Wert. Wir erinnern an folgende Definition aus der linearen Algebra [Na1, Seite 39].

Definition. Der Rang einer $k \times n$ -Matrix A ist definiert als die Dimension des Vektorraums $A \cdot \mathbb{R}^n$.

Beispiel. Eine $1 \times n$ -Matrix $(b_1 \dots b_n)$ hat Rang 1 genau dann, wenn es mindestens einen Eintrag b_i gibt, der nicht Null ist.

Wir erinnern an folgende Definition aus Analysis II.

Definition. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung.

- (1) Wir sagen $P \in X$ ist ein regulärer Punkt von f , wenn das Differential Df_P den Rang k besitzt. Ein Punkt, welcher nicht regulär ist, wird singulär genannt.
- (2) Wir sagen $w \in \mathbb{R}^k$ ist ein regulärer Wert von f , wenn alle Punkte im Urbild $f^{-1}(\{w\})$ regulär sind.¹⁵

Beispiel. Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reelle Zahlen, welche von 0 verschieden sind.

(1) Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_n^2.$$

Für jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ in \mathbb{R}^n gilt, dass

$$Df(x_1, \dots, x_n) = (2 \cdot \underbrace{a_1}_{\neq 0} \cdot x_1 \dots 2 \cdot \underbrace{a_n}_{\neq 0} \cdot x_n).$$

¹⁵Anders ausgedrückt, ein Wert $w \in \mathbb{R}^k$ ist regulär, wenn dieser nicht das Bild von einem singulären Punkt in X ist.

Die Matrix hat also Rang = 1, genau dann, wenn gilt $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. Mit anderen Worten, alle $P \in \mathbb{R} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ sind regulär.

(2) Es folgt aus (1), dass alle Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ reguläre Werte sind.

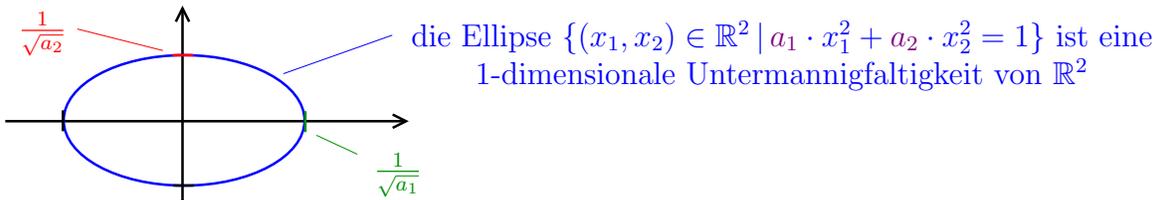
Wir können jetzt folgenden wichtigen Satz formulieren:

Satz 2.7. (Satz vom regulären Wert)¹⁶ Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung. Wenn $z \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert ist, dann ist $f^{-1}(\{z\}) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.¹⁷

Beispiel. Wir fahren mit dem vorherigen Beispiel fort. Es folgt insbesondere aus dem Satz 2.7 vom regulären Wert, dass

$$f^{-1}(\{1\}) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_n^2 = 1\}$$

eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Wenn $a_1, \dots, a_n > 0$, dann handelt es sich bei $f^{-1}(\{1\})$ um eine Ellipse ($n = 2$) oder Ellipsoid ($n \geq 3$).



Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2. \end{aligned}$$

In Übungsblatt 2 werden wir sehen, dass $1 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f ist, also ist $T := f^{-1}(\{1\})$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 . Die Frage ist, wie soll man sich T vorstellen? Eine etwas langwierige Rechnung zeigt, dass T gerade die Menge aller Punkte in \mathbb{R}^3 ist, welche geschrieben werden können als Produkt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um die } z\text{-Achse}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 + \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{beschreibt Kreis in } xz\text{-Ebene}},$$

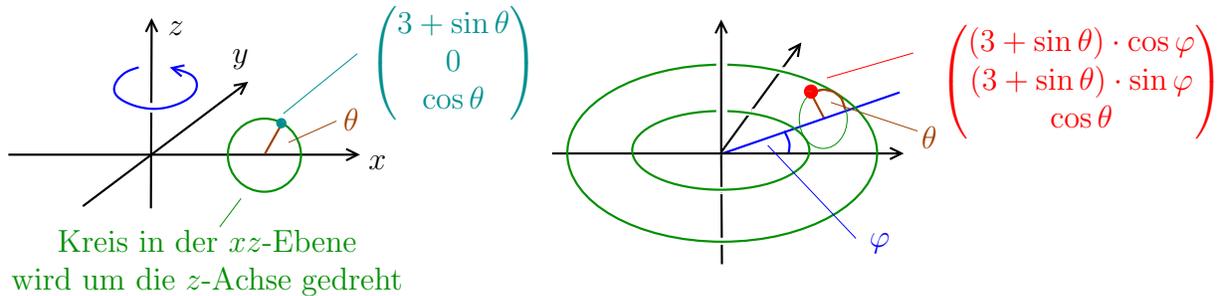
wobei $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten, T ist die Menge

$$T := \{((3 + \sin \theta) \cdot \cos \varphi, (3 + \sin \theta) \cdot \sin \varphi, \cos \theta) \mid \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

¹⁶In [Fr2, Satz 15.4] hatten wir ebenfalls einen „Satz vom regulären Wert“ formuliert, welcher die gleichen Voraussetzungen besitzt, aber eine andere Aussage macht, nämlich dieser machte eine Aussage über Tangentialräume. Wenn man sich durch die Definitionen wühlt, dann sieht man am Ende, dass man [Fr2, Satz 15.4] aus dem jetzigen Satz vom regulären Wert herleiten kann. Wir werden in einem späteren Kapitel das Studium von Tangentialräumen wieder aufnehmen.

¹⁷Wenn z nicht im Bild von f liegt, dann ist $f^{-1}(\{z\}) = \emptyset$ die leere Menge, insbesondere eine (nicht besonders interessante) Untermannigfaltigkeit beliebiger Dimension.

Dies ist also ein Kreis in der xz -Ebene, welche um die z -Achse gedreht wird. Also ist T ein Torus.



Beweis. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei \mathbf{z} ein regulärer Wert einer glatten Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(\{\mathbf{z}\})$ eine $(n-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Es sei also $P \in M = f^{-1}(\{\mathbf{z}\})$. Wir müssen für P eine $(n-k)$ -dimensionale Karte finden.

Die Idee ist nun die Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$, zu einer Abbildung nach $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ zu ergänzen, und dann mithilfe des Satzes 2.3 über die Umkehrabbildung zu zeigen, dass diese Abbildung in einer Umgebung U von P ein Diffeomorphismus ist.

Nach Voraussetzung ist P ein regulärer Punkt. Das Differential Df_P hat daher den Rang k . Aus [Na1, Satz 10.13] wissen wir, dass der Zeilenrang gerade der Spaltenrang einer Matrix ist. In unserem Fall sind also die Zeilen der $k \times n$ -Matrix Df_P linear unabhängig. Nach dem Basisergänzungssatz gibt es nun eine $(n-k) \times n$ -Matrix B , so dass die Zeilen der $n \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} B \\ Df_P \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, d.h. die Matrix ist invertierbar. Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: X &\rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} B \cdot x \\ f(x) - \mathbf{z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Am Punkt P ist das Differential von Φ gegeben durch die invertierbare Matrix

$$D\Phi_P = \begin{pmatrix} B \\ Df_P \end{pmatrix}.$$

Es folgt nun aus dem Satz 2.3 über die Umkehrabbildung, dass es eine offene Umgebung U von $P \in X$ und eine offene Umgebung V von $\Phi(P) \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\Phi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.

Es verbleibt nun folgende Behauptung zu beweisen.

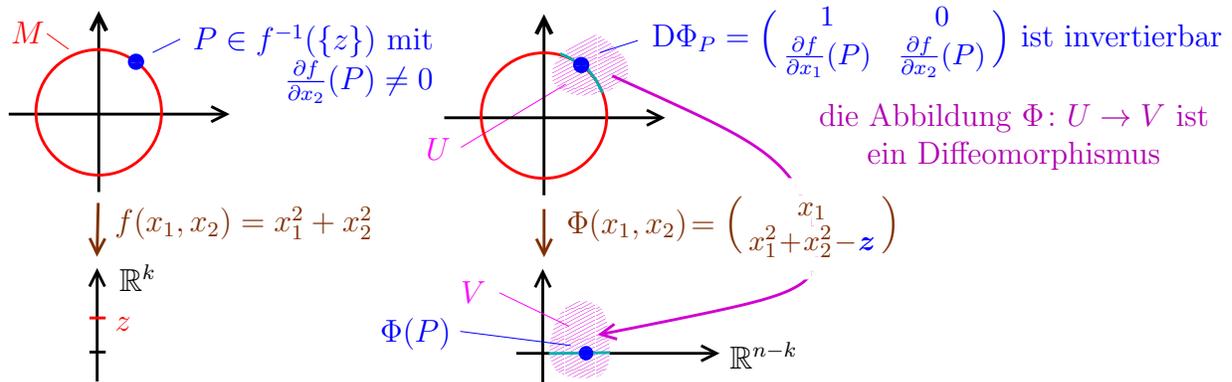
Behauptung. Die Abbildung $\Phi: U \rightarrow V$ ist eine Karte um den Punkt P .

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \Phi(U \cap M) &= V \cap E_{n-k} \\ &= \text{alle } x \in V, \text{ so dass die letzten } (n-k) \text{ Koordinaten verschwinden.} \end{aligned}$$

Es sei nun $x \in U$. Dann gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} x \in M & \iff & f(x) = \mathbf{z} & \iff & \Phi(x) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \{0\} & \iff & \Phi(x) \in V \cap E_{n-k}. \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{denn } M = f^{-1}(\{\mathbf{z}\}) & & \text{folgt aus der Definition von } \Phi & & \blacksquare \end{array}$$



Bemerkung.

(1) Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{n^2} = M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \det(A).$$

In Übungsblatt 2 sehen wir, dass jedes $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein regulärer Wert ist. Also folgt aus dem Satz 2.7 vom regulären Wert, dass $SL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(\{1\})$ eine Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R})$ der Dimension $n^2 - 1$ ist.

(2) Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{n^2} = M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = A^T\} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n \cdot (n+1)}$$

$$A \mapsto A \cdot A^T.$$

Per Definition ist $f^{-1}(\{\text{id}\})$ gerade die Menge der orthogonalen Matrizen $O(n)$. Man kann nun zeigen, dass id ein regulärer Wert von f ist. Es folgt aus dem Satz 2.7 vom regulären Wert, dass $O(n) = f^{-1}(\{\text{id}\})$ eine Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R})$ der Dimension $n^2 - \frac{1}{2}n \cdot (n+1) = \frac{1}{2}n \cdot (n-1)$ ist. Die Details werden in [FrT, Kapitel 25.4] ausgearbeitet.

2.5. Differenzierbare Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wie immer betrachten wir M als topologischen Raum bezüglich der Teilraumtopologie, d.h. $U \subset M$ ist offen genau dann, wenn es eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, mit $U = M \cap V$. Es sei nun $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Nachdem wir M als topologischen Raum auffassen, haben wir schon einen Stetigkeitsbegriff für Funktionen auf M . In der Tat, eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig, wenn für jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}^m$, das Urbild $f^{-1}(X)$ eine offene Teilmenge von M ist.

Andererseits ist es a priori nicht klar, was es heißen soll, dass eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer Untermannigfaltigkeit glatt ist, denn wir können keine partiellen Ableitungen bilden, da für $P \in M$ die Punkte $P + h \cdot e_i$ im Allgemeinen nicht mehr in M , d.h. im Definitionsbereich von f liegen.

Dies führt uns zu folgender Definition.

Definition.

- (1) Es sei $V \subset E_k \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Wir sagen eine Abbildung $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist glatt, wenn die Abbildung

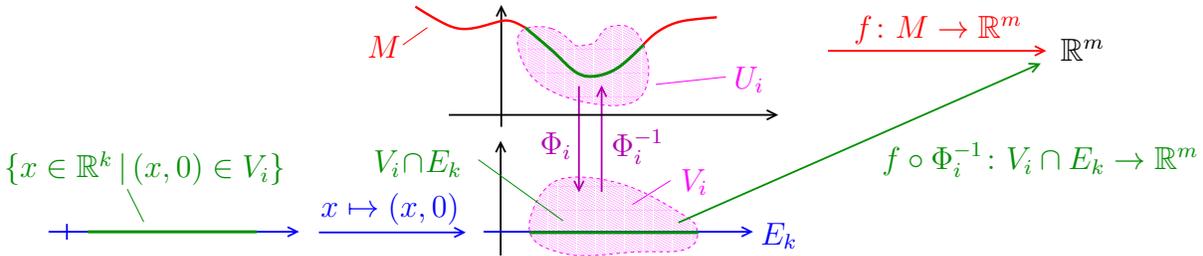
$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, 0) \in V\}}_{\text{offen in } \mathbb{R}^k} \xrightarrow{x \mapsto (x, 0)} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

glatt ist im Sinne der Definition auf Seite 18.

- (2) Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir sagen f ist glatt, wenn es einen Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ gibt, so dass für alle $i \in I$ die Abbildung

$$V_i \cap E_k \xrightarrow{\Phi_i^{-1}} U_i \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

glatt ist.



Beispiel.

- (1) Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Dann ist die Einschränkung von f auf jede Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^n ebenfalls glatt. In der Tat, denn für eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ ist dann $f \circ \Phi^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Verknüpfung von zwei glatten Abbildungen, also ebenfalls glatt. Dann ist aber auch die Einschränkung von $f \circ \Phi^{-1}$ auf $V \cap E_k$ glatt.
- (2) Es gibt „im realen“ Leben viele Funktionen, welche nur auf einer Untermannigfaltigkeit definiert sind, und nicht auf dem „umgebenden“ \mathbb{R}^n . Beispielsweise macht es Sinn in Physik die elektrische Ladung, also eine reellwertige Funktion, auf einer Kugeloberfläche zu betrachten.

Satz 2.8. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M . Dann gilt

$$f \text{ ist glatt} \iff \text{für jede Karte } \Phi: U \rightarrow V \text{ ist } f \circ \Phi^{-1}: V \cap E_k \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ glatt.}$$

Beweis. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

Die „ \Leftarrow “-Aussage ist offensichtlich. Wir müssen nun noch die „ \Rightarrow “-Aussage beweisen. Es sei also $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas, so dass für alle $i \in I$ die Abbildung

$$V_i \cap E_k \xrightarrow{\Phi_i^{-1}} U_i \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

glatt ist. Es sei nun $\Phi: U \rightarrow V$ eine weitere Karte.

Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $Q \in V \cap E_k$ eine offene Umgebung Y gibt, so dass $f \circ \Phi^{-1}: Y \cap E_k \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt ist. Es sei also $Q \in V \cap E_k$. Wir setzen $P = \Phi^{-1}(Q)$. Da

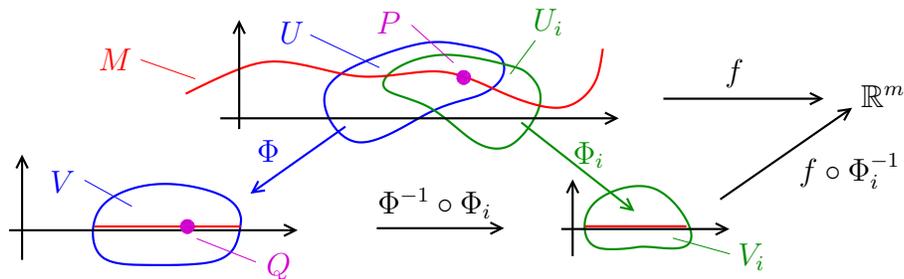
$\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas ist gibt es ein $i \in I$, so dass $P \in U_i$. Wir setzen $X = U \cap U_i$ und $Y = \Phi(X)$. Wir müssen zeigen, dass die Abbildung

$$Y \cap E_k \xrightarrow{\Phi^{-1}} X \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

glatt ist. Dies ist der Fall, denn es ist

$$f \circ \Phi^{-1} = \underbrace{f \circ \Phi_i^{-1}}_{\text{glatt nach Voraussetzung}} \circ \underbrace{\Phi_i \circ \Phi^{-1}}_{\text{glatt, da } \Phi \text{ und } \Phi_i \text{ Diffeomorphismen sind}}$$

■



3. MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE

3.1. Erinnerung: Maß- und Integrationstheorie. In Analysis III hatten wir das Lebesgue-Maß und das Lebesgue-Integral eingeführt. Die genauen Definitionen interessieren uns jetzt nicht weiter. Wir erinnern in diesem kurzen Kapitel jedoch an die wichtigsten Eigenschaften des Lebesgue-Maß und des Lebesgue-Integrals.

Satz 3.1. Jede kompakte Teilmenge und jede beschränkte offene Teilmenge von \mathbb{R}^n ist messbar und besitzt ein endliches Volumen.

Beweis. Der Satz 1.9 von Heine-Borel besagt insbesondere, dass kompakte Teilmengen von \mathbb{R}^n beschränkt und abgeschlossen sind. Es folgt aus [Fr3, Satz II.5.1], dass abgeschlossene und offene Teilmengen von \mathbb{R}^n messbar sind. Es folgt leicht aus [Fr3, Satz II.5.2], dass jede beschränkte messbare Teilmenge von \mathbb{R}^n ein endliches Volumen besitzt. ■

Satz 3.2. Für alle messbaren Teilmengen B von \mathbb{R}^n und alle $T \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\text{Vol}_n(T \cdot B) = |\det(T)| \cdot \text{Vol}_n(B).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus [Fr3, Satz II.5.5] und [Fr3, Satz II.6.3]. ■

Definition. Für Vektoren v_1, \dots, v_k in \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit

$$P(v_1, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1] \right\}$$

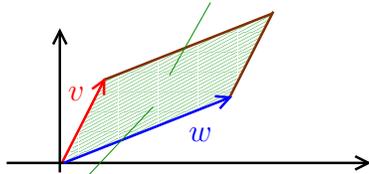
das durch v_1, \dots, v_k in \mathbb{R}^n aufgespannte **Parallelotop**. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, dann nennen wir $P(v_1, \dots, v_k)$ ein k -dimensionales Parallelotop.¹⁸

Der folgende Satz gibt nun insbesondere eine geometrische Interpretation des Absolutbetrags der Determinante einer quadratischen Matrix.

Satz 3.3. Es seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

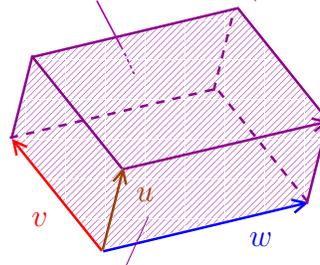
$$\text{Vol}_n(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1 \dots v_n)|.$$

$P(v, w) = \{ \lambda \cdot v + \mu \cdot w \mid \lambda, \mu \in [0, 1] \}$
ist das von den Vektoren v und w
aufgespannte Parallelogramm



der Flächeninhalt beträgt $|\det(v \ w)|$

das Parallelotop $P(u, v, w)$ in \mathbb{R}^3



das Volumen beträgt $|\det(u \ v \ w)|$

Beweis. Die Aussage erhält man indem man Satz 3.2 auf den Einheitswürfel $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ anwendet. ■

In Analysis III hatten wir den Begriff der Lebesgue-Integrierbarkeit und des Lebesgue-Integrals eingeführt. Der folgende Satz verbindet die Begriffe von Lebesgue-Integral und

¹⁸Für $k = n = 2$ ist dies insbesondere das durch v_1 und v_2 aufgespannte Parallelogramm. Für $k = n = 3$ ist dies der durch v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Spat.

Riemann-Integral. Zudem erlaubt es uns dieser Satz in den meisten Fällen, dass Integral einer Funktion im reellen mithilfe der Methoden aus der Analysis I zu bestimmen.

Satz 3.4. Jede Riemann-integrierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\underbrace{\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx}_{\text{Riemann-Integral}} = \underbrace{\int_{[a,b]} f d\lambda}_{\text{Lebesgue-Integral}}$$

Beweis. Dies ist gerade die Aussage von [Fr3, Satz II.8.3]. ■

Im weiteren Verlauf der Vorlesung sagen wir einfach „integrierbar“ anstatt „Lebesgue-integrierbar“ und wir sagen „Integral“ anstatt „Lebesgue-Integral“. Für eine integrierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, welche auf einer Teilmenge U von \mathbb{R}^n definiert ist, verwenden wir, je nach Zusammenhang, unter anderem folgende Notationen für das Integral:

$$\int_U f d\lambda = \int_{x \in U} f(x) dx = \int_{y \in U} f(y) dy.$$

Der nächste Satz gibt uns in den meisten Fällen, welche uns interessieren, die Integrierbarkeit.

Satz 3.5. Jede stetige Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer kompakten Teilmenge K von \mathbb{R}^n ist integrierbar.

Beweis. Dieser Satz folgt aus [Fr3, Korollar II.3.10] und [Fr3, Satz II.7.20]. ■

Satz 3.6. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion auf einer messbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Wenn sich $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ von f nur auf einer Nullmenge unterscheidet, dann ist auch g integrierbar und es gilt zudem, dass

$$\int_A f d\lambda = \int_A g d\lambda.$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von [Fr3, Satz II.8.17]. ■

Der nächste Satz erlaubt es uns den Absolutbetrag von Integralen nach oben abzuschätzen.

Satz 3.7. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\left| \int_A f d\lambda \right| \leq \int_A |f| d\lambda \leq \text{Vol}_n(A) \cdot \sup \{ |f(x)| \mid x \in A \}.$$

Insbesondere verschwindet das Integral, wenn A eine Nullmenge ist.

Beweis. Dieser Satz folgt aus [Fr3, Satz II.7.11]. ■

Der folgende Satz von Fubini erlaubt es uns in vielen Fällen das Integral im mehrdimensionalen auf mehrere eindimensionale Integral zurückzuführen.

Satz 3.8. (Fubini) Es sei $A \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ eine kompakte Teilmenge und es sei

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Wir schreiben

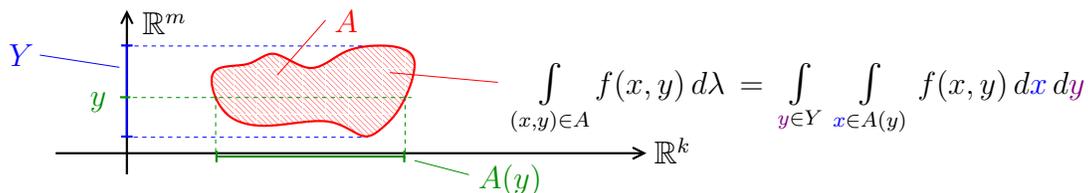
$$Y := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \text{es gibt ein } x \in \mathbb{R}^k \text{ mit } (x, y) \in A\},$$

und für alle $y \in Y$ setzen wir

$$A(y) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in A\}.$$

Dann gilt

$$\int_{(x,y) \in A} f(x, y) d\lambda = \int_{y \in Y} \int_{x \in A(y)} f(x, y) dx dy.$$

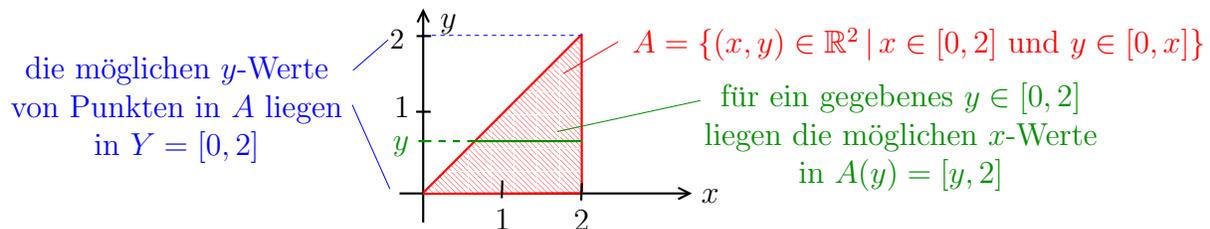


Beweis. Dieser Satz folgt aus [Fr3, Satz II.9.4]. ■

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf dem Dreieck

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2] \text{ und } y \in [0, x]\}.$$

Es folgt aus Satz 3.5, dass f integrierbar ist. Wir möchten nun das Integral von f mithilfe des Satzes 3.8 von Fubini bestimmen. In diesem Fall ist



$$Y = \text{alle möglichen } y\text{-Werte von Punkten in } A = [0, 2].$$

Zudem gilt für jedes $y \in [0, 2]$, dass

$$A(y) = \text{alle } x\text{-Werte von Punkten in } A \text{ mit } y\text{-Wert } y = [y, 2].$$

Es folgt also, dass

$$\int_A x^2 + y^2 dx dy = \int_{\substack{\uparrow \\ y \in [0, 2]}} \int_{\substack{\uparrow \\ x \in [y, 2]}} x^2 + y^2 dx dy = \int_{\substack{\uparrow \\ y=0}}^{y=2} \int_{\substack{\uparrow \\ x=y}}^{x=2} x^2 + y^2 dx dy.$$

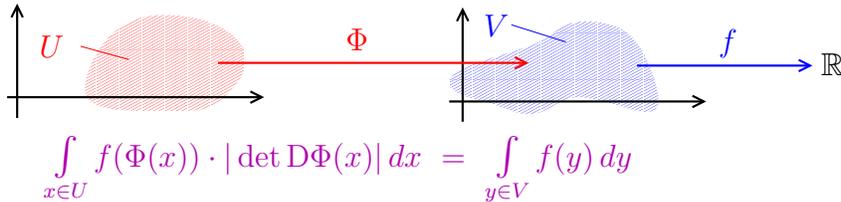
Satz 3.8 von Fubini Satz 3.4

Der Rest der Rechnung besteht nun aus zwei einfachen Riemann-Integralen.

Der vielleicht wichtigste und auch schwierigste Satz den wir in Analysis III bewiesen hatten ist der Transformationsatz.

Satz 3.9. (Transformationsatz) Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, es sei $\Phi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus und es sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt¹⁹

$$\int_{x \in U} f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| dx = \int_{y \in V} f(y) dy.$$



Beweis. Dies ist gerade die Aussage von [Fr3, Satz II.10.2]. ■

3.2. Vertauschbarkeit von Integration und partiellen Ableitungen. Wir führen folgende allgemeine Definition ein.

Definition. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir sagen eine Funktion $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ ist *glatt*, wenn es eine offene Umgebung U von K und eine glatte Funktion $\tilde{g}: U \rightarrow \mathbb{R}$, im Sinne der Definition auf Seite 18, gibt, so dass $\tilde{g}|_K = g$.

Beispiel. Es sei $K = [0, 1]$. Die Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch $f(x) = \sqrt{x}$ ist *nicht* glatt im obigen Sinne.

Der folgende Satz besagt, dass man unter gewissen Voraussetzungen Integral und Differentiation vertauschen kann. Wir werden diesen Satz später im Beweis des Integralsatz von Gauß benötigen.

Satz 3.10. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge²⁰ und es sei

$$\begin{aligned} f: [a, b] \times K &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto f(t, x) \end{aligned}$$

eine glatte Funktion. Dann gilt für alle $t_0 \in (a, b)$, dass

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{x \in K} f(t, x) dx}_{\text{Funktion in } t} \Big|_{t=t_0} = \int_{x \in K} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)}_{\text{partielle Ableitung von } f \text{ bei } (t_0, x)} dx.$$

Beweis. Wenn $\text{Vol}(K) = 0$, dann sind alle Integrale = 0, also gilt die Aussage trivialerweise. Wir nehmen nun an, dass $\text{Vol}(K) > 0$. Es sei $t_0 \in (a, b)$. Wir wählen ein $\eta > 0$ mit $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \subset (a, b)$. Wir wollen zeigen, dass gilt

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{x \in K} f(t, x) dx}_{=:\varphi(t)} \Big|_{t=t_0} - \int_{x \in K} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx = 0.$$

¹⁹Die Gleichheit soll dahingehend interpretiert werden, dass das Integral auf der linken Seite existiert genau dann, wenn es auf der rechten Seite definiert ist, und wenn diese existieren, dann gilt die Gleichheit der Integrale.

²⁰In der Anwendung wird K ein Quader sein.

Aus $\frac{d}{dt}\varphi|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h}$ und der Linearität des Integrals folgt, dass wir folgende Behauptung zeigen müssen:

Behauptung.
$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{x \in K} \frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx = 0.$$

Beweis. Es sei nun also $\epsilon > 0$. Es folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung [Fr1, Satz 13.2], dass es für jedes $x \in K$ und jedes $0 \neq h \in [-\eta, \eta]$ ein $\xi_{x,h} \in [-\eta, \eta]$ gibt, so dass

$$\frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \xi_{x,h}, x).$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$, aufgefasst als Funktion $\frac{\partial f}{\partial t}: [-\eta, \eta] \times K \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Voraussetzung insbesondere stetig. Da $[-\eta, \eta] \times K$ kompakt ist, folgt wie in [Fr1, Satz 7.14], dass $\frac{\partial f}{\partial t}$ gleichmäßig stetig ist. Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass für alle $(s_1, x_1), (s_2, x_2)$ in $[-\eta, \eta] \times K$ gilt:

$$\|(s_1, x_1) - (s_2, x_2)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s_1, x_1) - \frac{\partial f}{\partial t}(s_2, x_2) \right| < \frac{\epsilon}{\text{Vol}(K)}.$$

Also gilt für alle $0 \neq h \in (-\delta, \delta) \cap [-\eta, \eta]$, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{x \in K} \frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx \right| &= \left| \int_{x \in K} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \xi_{x,h}, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx \right| \\ &< \text{Vol}(K) \cdot \sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \xi_{x,h}, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| \right\} < \text{Vol}(K) \cdot \frac{\epsilon}{\text{Vol}(K)} = \epsilon. \end{aligned}$$

\uparrow
 Satz 3.7
 es ist $\|(t_0 + \xi_{x,h}, x) - (t_0, x)\| = |\xi_{x,h}| < |h| < \delta$
■

4. DAS k -DIMENSIONALE VOLUMEN VON PARALLELOTOPEN

Für eine gegebene k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ wollen wir am Ende das Integral für „vernünftige“ Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ einführen. Dieses Integral sollte dabei sicherlich folgende Eigenschaft besitzen: wenn $M = P(v_1, \dots, v_k)$ ein k -dimensionales Parallelotop in \mathbb{R}^n ist und wenn $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine konstante Funktion mit Wert C ist, dann soll gelten²¹

$$\int_M f d\lambda = C \cdot k\text{-dimensionales Volumen von } M.$$

Die rechte Seite ist von der Bedeutung wohl intuitiv klar, aber wir wollen im Folgenden Kapitel eine präzise Definition des k -dimensionalen Volumen eines k -dimensionalen Parallelotops geben, und wir wollen eine brauchbare Gleichung für dieses Volumen herleiten.

4.1. Erinnerung an orthogonale Matrizen.

Notation. Für Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit

$$v \cdot w := \langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i \in \mathbb{R}$$

das Skalarprodukt.

Wir erinnern an die Definition von orthogonalen Matrizen aus [Fr2, Kapitel 7.1].

Definition.

(1) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle A \cdot v, A \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

(2) Die Menge aller orthogonalen $n \times n$ -Matrizen wird mit $O(n)$ bezeichnet. In [Fr2, Lemma 7.4] hatten wir gesehen, dass $O(n)$ eine Gruppe ist.

Lemma 4.1. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Die Matrix ist orthogonal.
- (2) Die Spalten s_1, \dots, s_n der Matrix A bilden ein Orthonormalbasis, d.h. die s_1, \dots, s_n bilden eine Basis und für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\langle s_i, s_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

↑
Kronecker-Symbol

- (3) Es ist $A^T \cdot A = \text{id}$. (Mit anderen Worten A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$.)

Beweis. Dies ist gerade die Aussage von [Fr2, Lemma 7.3]. ■

4.2. Das k -dimensionale Volumen von Parallelotopen.

²¹Die Tatsache, dass ein Polytop streng genommen keine Untermannigfaltigkeit ist, soll uns bei dieser Diskussion nicht stören. Die inneren Punkte von einem k -dimensionalen Polytop bilden beispielsweise eine Untermannigfaltigkeit.

Konvention. Es sei $k \leq n$. Im Folgenden identifizieren wir die k -dimensionale Ebene

$$E_k := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$

mit \mathbb{R}^k , d.h. wir fassen Teilmengen von E_k auch als Teilmengen von \mathbb{R}^k auf.

Es seien v_1, \dots, v_k linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^n . Dann spannen die Vektoren das k -dimensionale Parallelotop

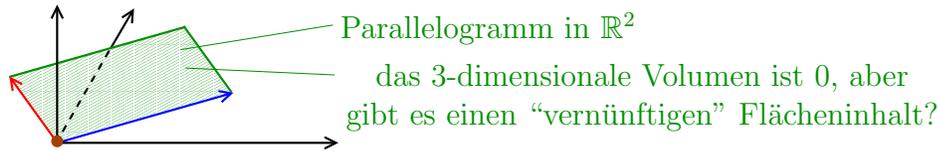
$$P := P(v_1, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1] \right\}$$

auf. Wenn $k < n$ dann folgt aus [Fr3, Satz II.5.5], dass $\text{Vol}_n(P) = 0$. Aber zumindest anschaulich ist es klar, dass P ein „ k -dimensionales Volumen besitzt“. Wir wollen nun ein vernünftiges k -dimensionales Volumen $\text{Vol}_k(P)$ für solche k -dimensionale Polytope einführen. Hierbei soll „vernünftig“ folgendes heißen:

- (1) Wenn das Parallelotop P schon in E_k liegt, dann können wir P als Teilmenge von \mathbb{R}^k auffassen und $\text{Vol}_k(P)$ soll gerade das übliche k -dimensionale Volumen einer Teilmenge von \mathbb{R}^k sein.
- (2) Das Volumen soll invariant unter Anwendung von orthogonalen Matrizen sein, d.h. wenn P ein k -dimensionales Parallelotop ist und $A \in O(n)$ eine orthogonale Matrix, dann soll

$$\text{Vol}_k(A \cdot P) = \text{Vol}_k(P)$$

gelten.



Wir werden jetzt diese beiden Wünsche verwenden um $\text{Vol}_k(P)$ allgemein einzuführen. Dazu benötigen wir folgenden Satz.

Satz 4.2. Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein k -dimensionales Parallelotop. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Es gibt eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$, so dass $A \cdot P$ in $E_k = \mathbb{R}^k$ liegt.
- (2) Wenn A und B zwei orthogonale Matrizen in $O(n)$ sind, so dass $A \cdot P$ und $B \cdot P$ in $E_k = \mathbb{R}^k$ liegen, dann gibt es auch eine orthogonale Matrix $Q \in O(k)$, so dass

$$Q \cdot (A \cdot P) = B \cdot P,$$

hierbei fassen wir $A \cdot P$ und $B \cdot P$ als Teilmengen von \mathbb{R}^k auf.

- (3) Unter der Voraussetzung von (2) gilt

$$\text{Vol}_k(A \cdot P) = \text{Vol}_k(B \cdot P).$$

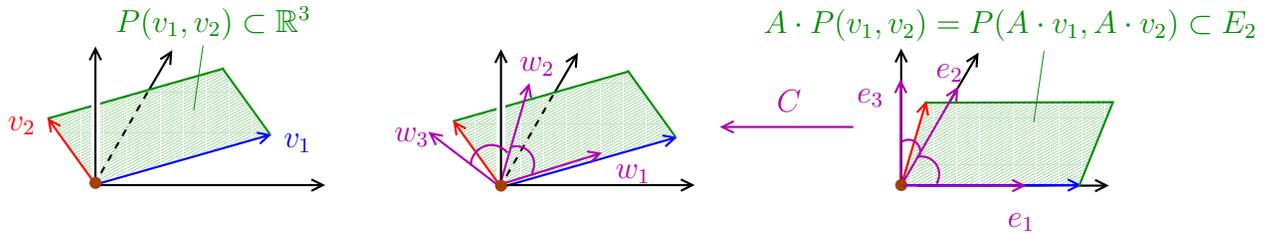
Beweis. Es sei also P ein von linear unabhängigen Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ aufgespanntes Parallelotop.

- (1) Wir müssen nun also zeigen, dass es eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$ gibt, so dass $Av_1, \dots, Av_k \in E_k = \mathbb{R}^k$. Nachdem v_1, \dots, v_k linear unabhängig sind, können wir nach dem Basisergänzungssatz diese Vektoren zu einer Basis v_1, \dots, v_n von \mathbb{R}^n ergänzen. Wir wenden nun den Gram-Schmidt-Algorithmus [Na1, Kapitel 20] auf diese Basis v_1, \dots, v_n an und erhalten eine orthonormale Basis w_1, \dots, w_n mit der Eigenschaft, dass für alle $m \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_m\}$.

Wir bezeichnen nun mit $C = (w_1 \dots w_m)$ die Matrix, deren Spalten gerade durch w_1, \dots, w_m gegeben sind. Es folgt aus Lemma 4.1 (2) \Rightarrow (1), dass C eine orthogonale Matrix ist. Für alle i gilt $C \cdot e_i = w_i$. Also gilt $C^{-1} \cdot w_i = e_i$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} C^{-1} \cdot P(v_1, \dots, v_k) &\subset C^{-1} \cdot \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} &&= C^{-1} \cdot \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} \\ &= \text{Span}\{C^{-1} \cdot w_1, \dots, C^{-1} \cdot w_k\} &&= \text{Span}\{e_1, \dots, e_k\} = E_k. \end{aligned}$$

Also hat die orthogonale Matrix $A = C^{-1}$ die gewünschte Eigenschaft.



- (2) Es seien A und B zwei orthogonale Matrizen, so dass $A \cdot P$ und $B \cdot P$ in $E_k = \mathbb{R}^k$ liegen. Wir schreiben $V := \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt $A \cdot V = E_k$ und $B \cdot V = E_k$. Insbesondere gilt $A^{-1}(E_k) = V$. Die Matrix $B \cdot A^{-1}$ hat also die Eigenschaft, dass $(B \cdot A^{-1})(E_k) = B \cdot V = E_k$. Wir sehen also, dass die Matrix $B \cdot A^{-1}$ von der Form

$$\begin{pmatrix} Q & D \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

ist. Es folgt aus einem elementaren Argument, welches wir in Präsenzübungsblatt 3 ausarbeiten werden, dass $Q \in O(k)$. Unter der Identifikation $E_k = \mathbb{R}^k$ gilt dann, dass

$$\begin{aligned} Q \cdot (A \cdot P) &= (B \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot P) = B \cdot P. \\ &\quad \uparrow \\ &\text{eingeschränkt auf } E_k = \mathbb{R}^k \text{ gilt } B \cdot A^{-1} = Q \end{aligned}$$

- (3) Diese Aussage folgt nun aus (2) und Satz 3.2, denn für jede orthogonale Matrix Q gilt $|\det(Q)| = 1$. ■

Definition. Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein k -dimensionales Parallelotop. Nach Satz 4.2 (1) existiert eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$, so dass $A \cdot P$ in $E_k = \mathbb{R}^k$ liegt. Wir definieren nun das k -dimensionale Volumen von P als

$$\text{Vol}_k(P) := \text{Vol}_k(\underbrace{A \cdot P}_{\subset E_k = \mathbb{R}^k}).$$

Es folgt aus Satz 4.2 (3), dass diese Definition nicht von der Wahl der orthogonalen Matrix A abhängt. Wenn $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig sind, dann definieren wir $P(v_1, \dots, v_k) = 0$.

4.3. Die Gramsche Determinante. Es sei $P = P(v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$ ein k -dimensionales Parallelotop. Es stellt sich nun die Frage, ob man das k -dimensionale Volumen von P auch „direkt“ von den Vektoren v_1, \dots, v_k ablesen kann, ohne zuerst eine orthogonale Matrix A wie oben finden zu müssen.

Wir machen hierzu folgende Überlegungen. Wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in E_k = \mathbb{R}^k$ liegen, dann gilt nach Satz 3.3, dass

$$\text{Vol}_k(P(v_1, \dots, v_k)) = |\det(v_1 \dots v_k)|.$$

In diesem Fall können wir also das k -dimensionale Volumen mithilfe der Koordinaten der Vektoren v_1, \dots, v_k bestimmen. Nachdem sich das k -dimensionale Volumen unter Anwendung einer orthogonalen Matrix nicht ändern soll, wollen wir nun einen Ausdruck in den Koordinaten v_1, \dots, v_k hinschreiben, welcher folgende zwei Eigenschaften besitzt:

- (1) wenn v_1, \dots, v_k in $E_k = \mathbb{R}^k$ liegen erhalten wir den Absolutbetrag der Determinante der Matrix $(v_1 \dots v_k)$,
- (2) der Ausdruck ändert sich nicht unter Anwendung einer orthogonalen Matrix.

Die Idee ist nun die Determinante der Matrix $(v_1 \dots v_k)$ zu bestimmen durch die Skalarprodukte $v_i \cdot v_j$, $i = 1, \dots, k$, denn diese sind invariant unter Anwendung einer orthogonalen Matrix. Wir benötigen nun folgendes Lemma aus der linearen Algebra.

Lemma 4.3. Es seien $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^k$ beliebig. Dann gilt

$$|\det(u_1 \dots u_k)| = \sqrt{\det \underbrace{((u_i \cdot u_j)_{i,j=1,\dots,k})}_{\substack{k \times k\text{-Matrix gegeben durch} \\ \text{alle Skalarprodukt } u_i \cdot u_j}}}.$$

Beweis. Für $i = 1, \dots, k$ schreiben wir $u_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{ik} \end{pmatrix}$. Zudem betrachten wir die $k \times k$ -Matrix

$U = (u_1 \dots u_k)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det((u_i \cdot u_j)_{i,j=1,\dots,k}) &= \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_1 \cdot u_k \\ \vdots & & \vdots \\ u_k \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix} = \det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} \end{pmatrix}}_{=U^T} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1k} & \dots & u_{kk} \end{pmatrix}}_{=U} \right) \\ &= \det(U^T) \cdot \det(U) = \det(U)^2. \end{aligned}$$

\uparrow Multiplikativität der Determinante \uparrow denn $\det(U^T) = \det(U)$

Wir erhalten die gewünschte Aussage durch Wurzelziehen. ■

Lemma 4.3 motiviert nun folgende Definition.

Definition. Für eine $n \times k$ -Matrix V mit Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Gramsche Determinante wie folgt:

$$\text{Gram}(V) := \text{Gram} \underbrace{(v_1 \dots v_k)}_{n \times k\text{-Matrix}} := \det \underbrace{((v_i \cdot v_j)_{i,j=1,\dots,k})}_{k \times k\text{-Matrix}}.$$

Satz 4.4. Es seien v_1, \dots, v_k Vektoren in \mathbb{R}^n . Es gilt²²

$$\text{Vol}_k(P(v_1, \dots, v_k)) = \sqrt{\text{Gram}(v_1 \dots v_k)}.$$

Beweis. Es seien v_1, \dots, v_k Vektoren in \mathbb{R}^n . Wir betrachten zuerst den Fall, dass v_1, \dots, v_k linear abhängig sind. Es folgt direkt aus der Definition, dass $\text{Vol}_k(P(v_1, \dots, v_k)) = 0$. Andererseits werden wir in Übungsblatt 3 zeigen, dass gilt $\text{Gram}(v_1, \dots, v_k) = 0$. Wir haben also das Lemma in diesem Spezialfall bewiesen.

²²Insbesondere ist also $\text{Gram}(v_1 \dots v_k) \geq 0$.

Wir betrachten nun den Fall, dass v_1, \dots, v_k linear unabhängig sind. Nach Satz 4.2 gibt es eine Matrix $A \in O(n)$ und Vektoren $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \in \mathbb{R}^k$ mit $Av_i = \begin{pmatrix} \tilde{v}_i \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}_k(P(v_1, \dots, v_k))^2 &= \text{Vol}_k(\underbrace{A \cdot P(v_1, \dots, v_k)}_{\subset E_k = \mathbb{R}^k})^2 = \text{Vol}_k(\underbrace{P(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)}_{\mathbb{R}^k})^2 = \det(\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_k)^2 \\ &\quad \uparrow \text{per Definition} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{Satz 3.3} \\ &= \det((\tilde{v}_i \cdot \tilde{v}_j)_{i,j=1,\dots,k}) = \det\left(\left(\begin{pmatrix} \tilde{v}_i \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{v}_j \\ 0 \end{pmatrix}\right)_{i,j=1,\dots,k}\right) \\ &\quad \uparrow \text{Lemma 4.3} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{die Skalarprodukte sind unverändert} \\ &= \det((Av_i \cdot Av_j)_{i,j=1,\dots,k}) = \det((v_i \cdot v_j)_{i,j=1,\dots,k}) = \text{Gram}(v_1 \dots v_k). \\ &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{denn } A \text{ ist orthogonal} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{per Definition} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Aussage des Lemmas durch Wurzelziehen. ■

Lemma 4.5. Es sei V eine $n \times k$ -Matrix. Es ist $\text{Gram}(V) = \det(V^T \cdot V)$.

Beweis. Das Lemma folgt, wie im Beweis von Lemma 4.3, direkt aus den Definitionen. Der Vollständigkeit halber schreiben wir das Argument noch mal aus. Es sei nun also

$V = (v_1 \dots v_k)$ eine $n \times k$ -Matrix. Für $i = 1, \dots, k$ schreiben wir $v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\underbrace{\det((v_i \cdot v_j)_{i,j=1,\dots,k})}_{=\text{Gram}(V)} = \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix} = \det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}}_{=V^T} \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}}_{=V} \right). \quad \blacksquare$$

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir auch noch folgende Eigenschaft der Gramschen Determinante benötigen.

Lemma 4.6. Es sei V eine $n \times k$ -Matrix und es sei A eine $k \times k$ -Matrix. Dann gilt

$$\text{Gram}(\underbrace{V \cdot A}_{n \times k\text{-Matrix}}) = \det(A)^2 \cdot \text{Gram}(V).$$

Beweis. Es sei V eine $n \times k$ -Matrix und es sei A eine $k \times k$ -Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Gram}(V \cdot A) &\stackrel{\text{Lemma 4.5}}{\downarrow} = \det((V \cdot A)^T \cdot V \cdot A) \qquad \qquad \qquad = \det(A^T \cdot \overbrace{V^T \cdot V}^{k \times k\text{-Matrix}} \cdot A) \\ &= \det(A^T) \cdot \det(V^T \cdot V) \cdot \det(A) \qquad \qquad \qquad = \det(A) \cdot \text{Gram}(V) \cdot \det(A). \\ &\quad \uparrow \text{Multiplikativität der Determinante,} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{folgt aus Lemma 4.5 und } \det(A^T) = \det(A) \\ &\quad \text{denn } A^T, V^T \cdot V \text{ und } A \text{ sind } k \times k\text{-Matrizen} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4.4. Das Kreuzprodukt. Wir wollen uns die Gelegenheit nicht entgehen lassen an dieser Stelle das Kreuzprodukt von zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 zu diskutieren.

Definition. Es seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 . Das Kreuzprodukt $a \times b$ ist definiert als der Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Im folgenden Lemma fassen wir drei elementare Eigenschaften des Kreuzproduktes zusammen.

Lemma 4.7.

- (1) Das Kreuzprodukt ist bilinear, das heißt, für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda u + \mu v) \times w = \lambda \cdot (u \times w) + \mu \cdot (v \times w)$ und $u \times (\mu v + \nu w) = \mu \cdot (u \times v) + \nu \cdot (u \times w)$.
- (2) Das Kreuzprodukt ist antisymmetrisch, das heißt, für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$u \times v = -v \times u.$$

- (3) Für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\underbrace{\langle u \times v, w \rangle}_{\text{Skalarprodukt}} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}}_{3 \times 3\text{-Matrix}}.$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen können mit einer elementaren Rechnung bewiesen werden. Die dritte Aussage folgt leicht aus der Laplace-Formel für die Determinante, angewandt auf die dritte Spalte der Matrix $(u \ v \ w)$. Genauer gesagt, es ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \cdot w_1 - \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \cdot w_2 + \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \cdot w_3 = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

↑
Definition der linken Seite
↑
Laplace-Formel angewandt
auf die dritte Spalte

Der nächste Satz ist deutlich interessanter.

Satz 4.8. Es seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren. Für jede orthogonale Matrix $A \in O(3)$ gilt

$$Au \times Av = \det(A) \cdot A(u \times v) \in \mathbb{R}^3.$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit folgender elementarer Behauptung.

Behauptung. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Wenn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass $\langle a, e_i \rangle = \langle b, e_i \rangle$, dann ist $a = b$.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Beobachtung, dass $\langle a, e_i \rangle$ bzw. $\langle b, e_i \rangle$ gerade die i -Koordinate von a bzw. b ist. D.h. die beiden Vektoren a und b stimmen nach Voraussetzung in allen Koordinaten überein, also sind sie gleich. \square

Es seien nun $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren und es sei $A \in O(3)$ eine orthogonale Matrix. Nach der obigen Behauptung genügt es zu zeigen, dass für alle $i = 1, 2, 3$ gilt, dass

$$\langle Au \times Av, e_i \rangle = \langle \det(A) \cdot A(u \times v), e_i \rangle.$$

Es sei also $i \in \{1, 2, 3\}$. Wir berechnen, dass gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Lemma 4.7 (3)} & \text{Definition von Matrizenmultiplikation} & \text{Multiplikativität der Determinante} & & \\ \langle Au \times Av, e_i \rangle & \stackrel{\downarrow}{=} \det \begin{pmatrix} Au & Av & AA^{-1}e_i \end{pmatrix} & \stackrel{\downarrow}{=} \det(A \cdot (u \ v \ A^{-1}e_i)) & \stackrel{\downarrow}{=} \det(A) \cdot \det(u \ v \ A^{-1}e_i) & \\ & \stackrel{\uparrow}{=} \det(A) \cdot \langle u \times v, A^{-1}e_i \rangle & \stackrel{\uparrow}{=} \det(A) \cdot \langle A(u \times v), e_i \rangle & = \langle \det(A) \cdot A(u \times v), e_i \rangle. & \\ & \text{Lemma 4.7 (3)} & \text{da } A \text{ orthogonal gilt } \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle & & \end{array}$$

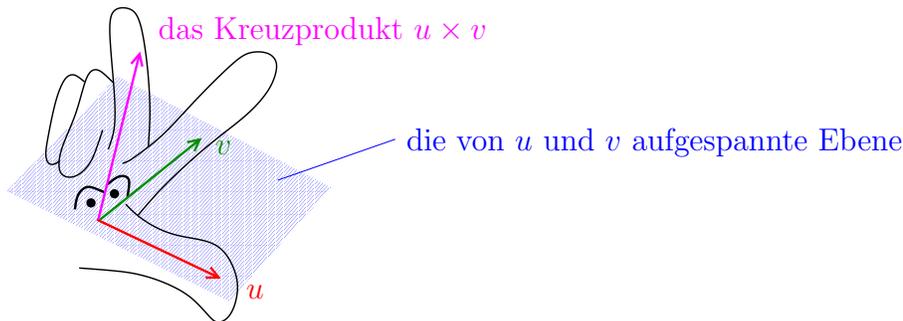
Wir haben damit also die gewünschte Aussage bewiesen. \blacksquare

Der folgende Satz gibt insbesondere eine geometrische Interpretation des Kreuzproduktes.

Satz 4.9. Es seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren. Das Kreuzprodukt $u \times v$ hat folgende drei Eigenschaften:

- (1) der Vektor $u \times v$ steht senkrecht auf u und v ,
- (2) es ist²³ $\det \underbrace{\begin{pmatrix} u & v & u \times v \end{pmatrix}}_{3 \times 3\text{-Matrix}} \geq 0$,
- (3) es ist $\|u \times v\| = \text{Flächeninhalt des Parallelogramms } P(u, v) = \sqrt{\text{Gram}(u \ v)}$
 \uparrow
wissen wir schon aus Satz 4.4

Darüber hinaus ist das Kreuzprodukt von u und v der einzige Vektor in \mathbb{R}^3 , welcher die obigen Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzt.



Beweis. Es seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ also zwei Vektoren. Wir zeigen zuerst, dass $u \times v$ die drei Eigenschaften besitzt.

- (1) Wir müssen zeigen, dass $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$. In der Tat ist

$$\langle u \times v, u \rangle \stackrel{\uparrow}{=} \det \begin{pmatrix} u & v & u \end{pmatrix} \stackrel{\uparrow}{=} 0.$$

Lemma 4.7 (3) denn die erste und dritte Spalte sind identisch

Genauso zeigt man natürlich auch, dass $\langle u \times v, v \rangle = 0$.

²³Wir werden in Präsenzübungsblatt sehen, dass dies gerade bedeutet, dass die Vektoren $u, v, u \times v$ gerade die rechte Handregel erfüllen.

(2) Es ist
$$\det \begin{pmatrix} u & v & u \times v \end{pmatrix} = \langle u \times v, u \times v \rangle = \|u \times v\|^2 \geq 0.$$

↑
Lemma 4.7 (3) angewandt auf $w = u \times v$

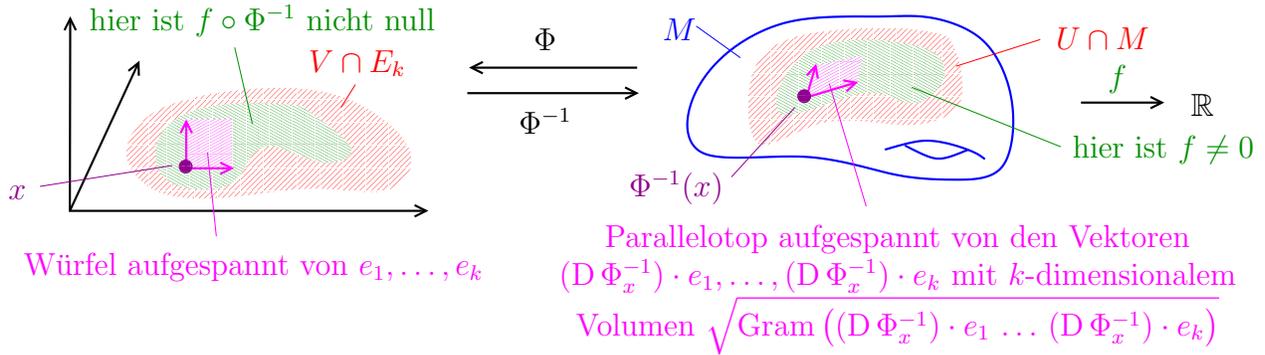
(3) Es seien also $u, v \in \mathbb{R}^3$. Wenn u und v linear abhängig sind, dann gilt $\|u \times v\| = 0$ und der Flächeninhalt von $P(u, v)$ ist per Definition ebenfalls null. Nehmen wir nun also an, dass u und v linear unabhängig sind. Nach Satz 4.2 (1) existiert eine Matrix $A \in O(3)$ mit $A \cdot u = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \cdot v = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}^2$. Wir berechnen, dass

<p style="text-align: center;">per Definition von $\text{Vol}_2(P(u, v))$</p> $\text{Vol}_2(P(u, v)) \stackrel{\downarrow}{=} \text{Vol}_2(P(\tilde{u}, \tilde{v}))$ $\stackrel{\uparrow}{=} \left\ \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix} \right\ $ <p style="text-align: center;">Definition des Kreuzprodukts</p> $\stackrel{\uparrow}{=} \left\ A^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ 0 \end{pmatrix} \times A^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix} \right\ $ <p style="text-align: center;">Satz 4.8</p>	<p style="text-align: center;">Satz 3.3</p> $\stackrel{\downarrow}{=} \det(\tilde{u} \ \tilde{v}) = \left\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det(\tilde{u} \ \tilde{v}) \end{pmatrix} \right\ $ $\stackrel{\uparrow}{=} \left\ \det(A^{-1}) \cdot A^{-1} \left(\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\ $ <p style="text-align: center;">aus Lemma 4.1 (2) folgt, dass $\ A^{-1}w\ = \ w\$ und aus Lemma 4.1 (3) folgt, dass $\det(A^{-1}) = \pm 1$</p> $\stackrel{\uparrow}{=} \ u \times v\ .$ <p style="text-align: center;">Wahl von A</p>
---	---

In Übungsblatt 3 beweisen wir die Eindeutigkeit des Kreuzproduktes. ■

5. INTEGRATION UND UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

5.1. Integration auf Untermannigfaltigkeiten I. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten erst einmal den Spezialfall, dass es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ gibt, so dass f außerhalb von $U \cap M$ verschwindet.



Wir können jetzt natürlich die Funktion $f \circ \Phi^{-1}$ auf $V \cap E_k$ betrachten. Allerdings hatten wir in Satz 4.4 gesehen, dass die Abbildung Φ^{-1} das k -dimensionale Volumen an einem Punkt $x \in V \cap E_k$ um den Faktor

$$\sqrt{\text{Gram}((D\Phi_x^{-1}) \cdot e_1 \dots (D\Phi_x^{-1}) \cdot e_k)}$$

“verzerrt”. Dies führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte. Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche außerhalb von $U \cap M$ verschwindet. Wir sagen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar, wenn die Funktion

$$\begin{aligned} V \cap E_k &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(\Psi(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}((D\Psi_x) \cdot e_1 \dots (D\Psi_x) \cdot e_k)} \end{aligned}$$

die ersten k Spalten von $D\Psi_x$

integrierbar ist, und wir definieren²⁴²⁵

$$\int_M f := \int_{x \in V \cap E_k} f(\Psi(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}((D\Psi_x) \cdot e_1 \dots (D\Psi_x) \cdot e_k)} dx.$$

Satz 5.1. Die Definition oben hängt nicht von der Wahl der Karte Φ ab.

Beweis. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M . Zudem seien $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ zwei Karten, so dass f außerhalb von $U \cap \tilde{U}$ verschwindet. Wir müssen zeigen, dass wir mit Φ und $\tilde{\Phi}$ das gleiche Ergebnis erzielen.

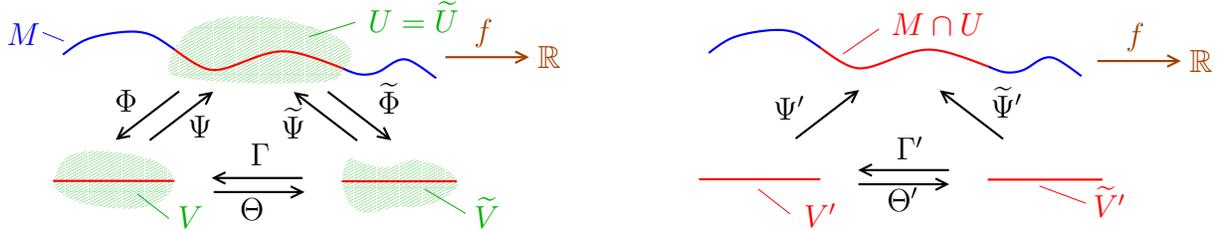
Indem wir zu $U \cap \tilde{U}$, $\Phi(U \cap \tilde{U})$ und $\tilde{\Phi}(U \cap \tilde{U})$ übergehen, können wir gleich annehmen, dass $U = \tilde{U}$. Wir bezeichnen mit Ψ und $\tilde{\Psi}$ die Umkehrabbildungen von Φ und $\tilde{\Phi}$. Wir

²⁴Die Notation $\int_M f$ „ohne ein dx “ ist kein Tippfehler, sondern beabsichtigt.

²⁵Wir fassen hierbei $V \cap E_k$ natürlich als Teilmenge von \mathbb{R}^k auf, d.h. das Integral auf der rechten Seite ist das Integral einer Funktion auf einer Teilmenge von \mathbb{R}^k .

betrachten die Diffeomorphismen $\Theta = \tilde{\Phi} \circ \Psi$ und $\Gamma = \Phi \circ \tilde{\Psi}$. (Zur Orientierung hilft es vielleicht die Abbildung unten zu studieren.)

Wir schreiben $V' = V \cap E_k$ und $\tilde{V}' = \tilde{V} \cap E_k$. Wir fassen V' und \tilde{V}' als Teilmengen von \mathbb{R}^k auf. Wir bezeichnen nun mit Ψ' und Θ' die Einschränkungen von Ψ und Θ auf $V' = V \cap E_k \subset \mathbb{R}^k$ und wir bezeichnen mit $\tilde{\Psi}'$ und Γ' die Einschränkungen von $\tilde{\Psi}$ und Γ auf $\tilde{V}' = \tilde{V} \cap E_k \subset \mathbb{R}^k$. Die Abbildung $\Gamma': \tilde{V}' \rightarrow V'$ ist dann ein Diffeomorphismus.²⁶



Es ist nun

$$\begin{aligned} \int_M f \text{ definiert mit } \Phi &= \int_{x \in V'} f(\Psi'(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\Psi'_x)} dx \\ &= \int_{y \in \tilde{V}'} f(\Psi'(\Gamma'(y))) \cdot \sqrt{\text{Gram}_\Phi(D\Psi'_{\Gamma'(y)})} \cdot |\det D\Gamma'_y| dy \\ &\quad \uparrow_{y \in \tilde{V}'} \\ &\text{Transformationssatz 3.9 angewandt auf } \Gamma': \tilde{V}' \rightarrow V \\ &= \int_{y \in \tilde{V}'} f(\tilde{\Psi}'(y)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\tilde{\Psi}'_y \cdot D\Theta'_{\Gamma'(y)})} \cdot |\det D\Gamma'_y| dy \\ &\quad \uparrow_{y \in \tilde{V}'} \\ &\text{Kettenregel 2.1 angewandt auf } \Psi' = \tilde{\Psi}' \circ \Theta' \\ &= \int_{y \in \tilde{V}'} f(\tilde{\Psi}'(y)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\tilde{\Psi}'_y)} \cdot \underbrace{|\det(D\Theta'_{\Gamma'(y)})| \cdot |\det D\Gamma'_y|}_{= 1, \text{ da } \Theta' \circ \Gamma' = \text{id}} dy \\ &\quad \uparrow_{y \in \tilde{V}'} \\ &\text{Lemma 4.6 angewandt auf die } k \times k\text{-Matrix } D\Theta'_{\Gamma'(y)} \\ &= \int_{y \in \tilde{V}'} f(\tilde{\Psi}'(y)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\tilde{\Psi}'_y)} dy = \int_M f \text{ definiert mit } \tilde{\Phi}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir wollen nun in den folgenden Kapiteln die Integration von beliebigen Funktionen auf einer Untermannigfaltigkeit auf den jetzt gerade betrachteten Fall zurückführen.

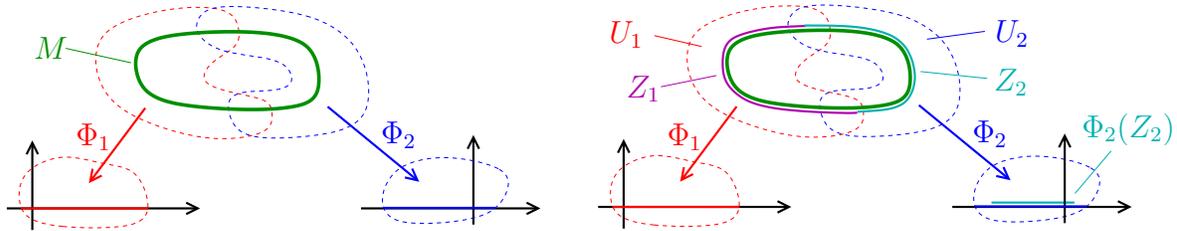
5.2. Integration auf Untermannigfaltigkeiten II. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit. Wir wollen nun das Integral von Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ einführen, selbst wenn $\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$ nicht durch eine Karte abgedeckt wird. Die Grundgedanke ist dabei ganz einfach: wir wollen die Funktion f also Summe von Funktionen schreiben, welche wir wie im vorherigen Teilkapitel integrieren können. Dies führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei zudem $\mathcal{A} = \{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas für M . Eine dem Atlas \mathcal{A} untergeordnete messbare Zerlegung von M ist eine Menge \mathcal{Z} von Teilmengen $Z_i, i \in I$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) für alle $i \in I$ gilt $Z_i \subset U_i \cap M$,
- (2) für alle $i \in I$ ist $\Phi_i(Z_i)$ eine messbare Teilmenge von $E_k = \mathbb{R}^k$,

²⁶In der Tat, denn Γ' ist offensichtlich bijektiv, und als Einschränkung einer glatten Abbildung wieder glatt. Das gleiche Argument zeigt aber auch, dass auch die Umkehrabbildung von Γ' , nämlich Θ' glatt ist.

(3) M ist die disjunkte Vereinigung der Z_i , d.h. es ist $M = \bigcup_{i \in I} Z_i$ und für alle $i \neq j$ gilt $Z_i \cap Z_j = \emptyset$.



Im Folgenden schränken wir uns ein auf Untermannigfaltigkeiten, welche einen endlichen Atlas besitzen, d.h. einen Atlas, welcher aus endlich vielen Karten besteht. Beispielsweise ist es offensichtlich, dass jede kompakte Untermannigfaltigkeit einen endlichen Atlas besitzt.

Satz 5.2. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit. Dann existiert zu jedem endlichen Atlas \mathcal{A} eine dem Atlas \mathcal{A} untergeordnete messbare Zerlegung von M .

Beweis. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit und es sei $\mathcal{A} = \{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i = 1, \dots, m\}$ ein endlicher Atlas für M . Wir setzen $Z_1 = U_1 \cap M$ und für $i = 2, \dots, m$ definieren wir iterativ

$$Z_i := (U_i \cap M) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} Z_j.$$

Es ist nun offensichtlich, dass die Mengen Z_1, \dots, Z_m die Eigenschaften (1) und (3) besitzen. Der Beweis, dass (2) gilt, ist eine freiwillige Übungsaufgabe. ■

Definition. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit, welche einen endlichen Atlas $\mathcal{A} = \{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i = 1, \dots, m\}$ besitzt. Wir wählen eine dem Atlas \mathcal{A} untergeordnete messbare Zerlegung $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\}$ von M . Wir sagen f ist integrierbar, wenn für alle $i = 1, \dots, m$ die Funktion^{27,28} $f \cdot \chi_{Z_i}: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist. Wenn dies der Fall ist, dann definieren wir das Integral von $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\int_M f := \sum_{i=1}^m \int_M \chi_{Z_i} \cdot f.$$

die Funktion $\chi_{Z_i} \cdot f$ verschwindet außerhalb von $Z_i \subset U_i$, also ist das Integral Kapitel 5.1 definiert

Wir müssen nun noch zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl eines endlichen Atlanten und der Wahl der untergeordneten messbaren Zerlegung ist. Dies erfolgt im folgenden Lemma.

Lemma 5.3. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit M . Außerdem seien $\mathcal{A} = \{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i = 1, \dots, m\}$ sowie $\mathcal{A}' = \{\Phi'_i: U'_i \rightarrow V'_i \mid i = 1, \dots, m'\}$ zwei endliche Atlanten und es es seien $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\}$ sowie $\mathcal{Z}' = \{Z'_1, \dots, Z'_{m'}\}$ den

²⁷Zur Erinnerung, für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die charakteristische Funktion $\chi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\chi_A(x) = 1$, falls $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$, falls $x \notin A$.

²⁸Die Funktion $f \cdot \chi_{Z_i}$ hat die Eigenschaft, dass es eine Karte, nämlich $\Phi_i: U_i \rightarrow V_i$ gibt, so dass sie außerhalb von $U_i \cap M$ verschwindet. Also ist die Integrierbarkeit dieser Funktion schon in Kapitel 5.1 definiert.

Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{A}' untergeordnete messbare Zerlegungen. Dann gilt

für alle $i = 1, \dots, m$ ist die Funktion $f \cdot \chi_{Z_i}: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar \iff für alle $i = 1, \dots, m'$ ist die Funktion $f \cdot \chi_{Z'_i}: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

Wenn dies der Fall ist, dann gilt zudem

$$\sum_{i=1}^m \int_M \chi_{Z_i} \cdot f = \sum_{i=1}^{m'} \int_M \chi_{Z'_i} \cdot f.$$

Beweisskizze. In dem wir zu den Schnittmengen $U_i \cap U'_j$ und $Z_i \cap Z'_j$ übergehen können wir annehmen, dass $m = m'$ und $Z_i = Z'_j$ für $i = 1, \dots, m$. Die Aussage des Lemmas folgt nun aus der schon bewiesenen Wohldefiniertheit von Integrierbarkeit und Integral von Funktionen, welche „durch eine Karte abgedeckt“ werden. ■

Beispiel. Wir betrachten die beiden Extremfälle, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 0 beziehungsweise eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n ist.

- (1) Wenn M eine kompakte 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, besteht M aus endlich vielen Punkten. Für eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int_M f = \sum_{P \in M} f(P),$$

d.h. das Integral ist die Summe der Funktionswerte.²⁹

- (2) Wenn M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n von Kodimension 0³⁰ ist, dann ist die Identitätsabbildung schon eine Karte. Offensichtlich ist dann für jedes $x \in m$ die Gramsche Determinante = 1. Also folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$\underbrace{\int_M f}_{\text{Integral auf Untermannigfaltigkeit}} = \underbrace{\int_M f d\lambda}_{\text{Integral auf Teilmenge von } \mathbb{R}^n}.$$

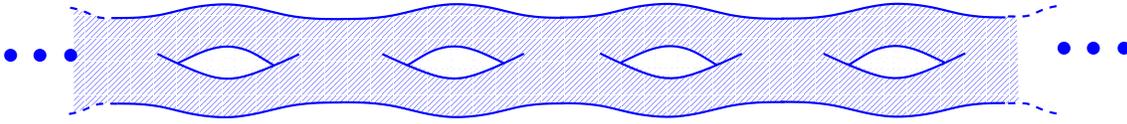
Im Prinzip könnten wir jetzt schon Integrale von stetigen Funktionen über S^1 und S^2 bestimmen. Aber die Definition des Integrals ist umständlich und in der Anwendung unangenehm. Wir werden demnächst einen allgemeinen Satz beweisen, welcher die Berechnung von Integralen in den meisten Fällen vereinfacht. Insbesondere werden wir damit problemlos hübsche Formeln für die Integrale von stetigen Funktionen auf S^1 und S^2 bestimmen. Um diesen allgemeinen Satz zu beweisen müssen wir aber erst die allgemeine Theorie von Integralen von Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten weiter entwickeln.

5.3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten III. Wenn M eine Untermannigfaltigkeit ist, welche einen endlichen Atlas besitzt, dann hatten wir gerade in Kapitel 5.2 für eine beliebige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ die Integrierbarkeit und das Integral eingeführt. Allerdings

²⁹Dies folgt aus der Tatsache, dass für eine Funktion $f: \mathbb{R}^0 = \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ das Lebesgue-Integral gegeben ist durch $f(0)$.

³⁰Wir sagen eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n besitzt Kodimension $n - k$.

ist es nicht klar, ob jede Untermannigfaltigkeit einen endlichen Atlas besitzt. Beispielsweise ist es nicht klar, ob die Fläche mit unendlich vielen „Löchern“ einen endlichen Atlas besitzt.³¹



Um mit dieser Situation umgehen zu können benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 5.4. Für jeden Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ einer Untermannigfaltigkeit M gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$, so dass auch schon $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in J}$ ein Atlas ist.

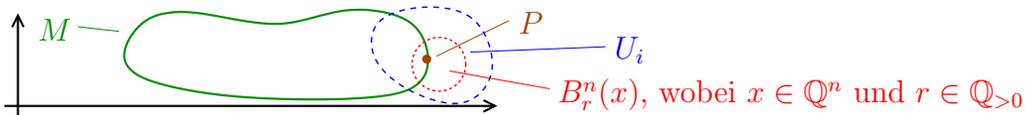
Beweis. Es sei also $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas einer Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^n . Es sei $x \in \mathbb{Q}^n$ und $r \in \mathbb{Q}_{>0}$. Wenn es ein U_i mit $B_r^n(x) \subset U_i$ gibt, dann wählen wir solch ein $i \in I$ und bezeichnen es als $i(x, r) \in I$. Wir bezeichnen mit $J \subset I$ die Menge aller solcher $i(x, r)$. Da \mathbb{Q}^n und $\mathbb{Q}_{>0}$ abzählbar sind, ist auch J abzählbar.

Wir müssen noch zeigen, dass jedes $P \in M$ in einem $U_{i(x,r)}$ enthalten ist. Es sei nun $P \in M$. Da $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas ist gibt es ein $i \in I$ mit $P \in U_i$.

Behauptung. Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}^n$ und ein $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, so dass $P \in B_r^n(x) \subset U_i$.

Beweis. Da $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon^n(P) \subset U_i$. Dann existiert ein $x \in B_{\frac{\epsilon}{3}}^n(P) \cap \mathbb{Q}^n$. Wir wählen zudem ein $r \in (\frac{\epsilon}{3}, \frac{2\epsilon}{3}) \cap \mathbb{Q}$. Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass $P \in B_r^n(x) \subset U_i$. □

Es gilt nun $P \in B_r^n(x) \subset U_i$, also ist auch $P \in B_r^n(x) \subset U_{i(x,r)}$. ■



Satz 5.5. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit. Dann existiert zu jedem abzählbaren Atlas $\mathcal{A} = \{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine dem Atlas \mathcal{A} untergeordnete messbare Zerlegung von M .

Beweis. Der Beweis des Satzes ist fast identisch zum Beweis von Satz 5.2, nämlich wir setzen $Z_1 = U_1 \cap M$, $Z_2 = (U_2 \cap M) \setminus Z_1$, ... ■

Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es folgt aus Lemma 5.4, dass ein abzählbarer Atlas $\mathcal{A} = \{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von M existiert. Zudem folgt aus Satz 5.5, dass eine dem Atlas \mathcal{A} untergeordnete messbare Zerlegung $\mathcal{Z} = \{Z_i\}_{i \in I}$ von M existiert. Es sei nun $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wir sagen f ist integrierbar, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) für alle $i \in I$ ist die Funktion $f \cdot \chi_{Z_i}: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar,
- (2) die Reihe³²

$$\sum_{i \in I} \left| \int_M \chi_{Z_i} \cdot f \right|$$

über die *Absolutbeträge* der einzelnen Integrale konvergiert.

³¹Ein noch einfacheres Beispiel ist gegeben durch $M = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Dies ist eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit, welche keinen endlichen Atlas besitzt (warum?).

Wenn dies der Fall ist, dann definieren wir das Integral von $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ als³³³⁴

$$\int_M f := \sum_{i \in I} \int_M \chi_{Z_i} \cdot f.$$

5.4. Das k -dimensionale Volumen.

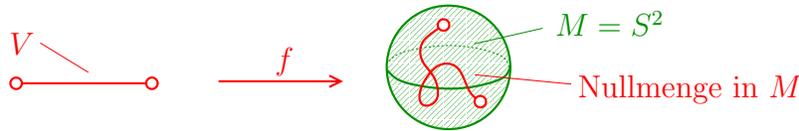
Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir sagen $A \subset M$ ist messbar mit endlichen Volumen, wenn die Funktion $\chi_A: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist. In diesem Fall bezeichnen wir

$$\text{Vol}_k(A) := \int_M \chi_A$$

als das k -dimensionale Volumen von A . Im Fall $k = 2$ bezeichnen wir $\text{Vol}_k(A)$ auch als den Flächeninhalt von A . Wenn $\text{Vol}_k(A) = 0$, dann bezeichnen wir A als Nullmenge in M .

Es gelten die offensichtlichen Verallgemeinerungen der Aussagen aus der Analysis III über Nullmengen. Beispielsweise ist die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wiederum eine Nullmenge. Zudem gilt folgender Satz.

Satz 5.6. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wenn $l < k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ eine offene Teilmenge ist und $f: V \rightarrow M$ eine glatte Abbildung ist, dann ist $f(V)$ eine Nullmenge in M .



Beweis. Dieser Satz folgt ziemlich problemlos aus der entsprechenden Aussage in Analysis III, siehe [Fr3, Satz II.5.5]. ■

Wir beschließen dieses kurze Teilkapitel mit folgendem Lemma.

Lemma 5.7. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wenn zwei Funktionen $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen, dann ist f integrierbar genau

³²Es sei I eine abzählbare unendliche Menge und für jedes $i \in I$ sei $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gewählt. Wir wählen eine Bijektion $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow I$ und wir setzen

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

Wir müssen zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl von φ abhängt. Dies folgt sofort aus dem Umordnungssatz 6.13 aus der Analysis I. Dieser besagt, dass für eine Folge $b_k, k \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergiert absolut} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_{\psi(k)} \text{ konvergiert absolut und } \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\psi(k)}.$$

³³Es sei I eine abzählbare unendliche Menge und für jedes $i \in I$ sei $a_i \in \mathbb{R}$ gewählt. Wir nehmen an, dass die Reihe $\sum_{i \in I} |a_i|$ konvergiert. Wir wählen eine Bijektion $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow I$ und wir setzen

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

Es folgt wiederum aus dem Umordnungssatz 6.13 aus der Analysis I, siehe Fußnote 32, dass diese Definition nicht von der Wahl von φ abhängt.

³⁴Wir müssen nun natürlich wiederum zeigen, dass diese Definition unabhängig ist von der Wahl eines endlichen Atlanten und der untergeordneten messbaren Zerlegung. Der Beweis dazu wird beispielsweise in [K2, Kapitel 11.5] ausgeführt.

dann, wenn g integrierbar ist. Im integrierbaren Fall gilt zudem

$$\int_M f = \int_M g.$$

Beweis. Das Lemma kann man relativ leicht mit der analogen Aussage aus Analysis III, nämlich [Fr3, Satz II.7.7], beweisen. ■

5.5. Integrale und Parametrisierungen. In diesem Teilkapitel formulieren und beweisen wir einen Satz, welcher es uns in vielen Fällen erlaubt das Integral auf einer Untermannigfaltigkeit zu bestimmen. Um diesen Satz zu Formulieren führen wir noch folgende Definition ein, welche wir immer wieder in der Vorlesung verwenden werden.

Definition.

- (1) Ein abgeschlossener k -dimensionaler Quader (oder oft auch nur kurz Quader) ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^k der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k], \text{ wobei } a_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

- (2) Ein offener k -dimensionaler Quader ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^k der Form

$$Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k), \text{ wobei } a_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

Bemerkung. Das Innere eines abgeschlossenen Quaders ist offensichtlich der entsprechende offene Quader. Der Abschluss eines offenen Quaders ist zudem der entsprechende abgeschlossene Quader.

Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Eine Parametrisierung von M ist eine Abbildung $\Psi: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei gilt:

- (1) $Q \subset \mathbb{R}^k$ ist ein abgeschlossener oder ein offener k -dimensionaler Quader,
 (2) es ist $\Psi(Q) = M$,
 (3) die Einschränkung von Ψ auf das Innere $\overset{\circ}{Q}$ ist injektiv und es gilt $\Psi(\underbrace{\partial Q}_{\text{Rand von } Q}) \cap \Psi(\overset{\circ}{Q}) = \emptyset$,
 (4) Ψ ist glatt (im Sinne der Definition auf Seite 34),
 (5) für jeden Punkt $P \in \overset{\circ}{Q}$ ist der Rang des Differentials $D\Psi_P$ gleich k .

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

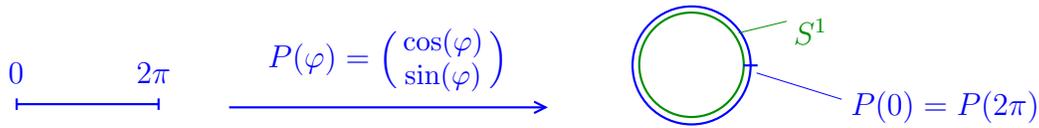
$$\begin{aligned} P: [0, 2\pi] &\rightarrow S^1 \\ \varphi &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass dies eine Parametrisierung von S^1 ist. Aus Erfahrung wissen wir, dass (1)-(4) erfüllt sind. Es verbleibt (5) zu überprüfen. Es gilt

$$DP_{(\varphi)} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

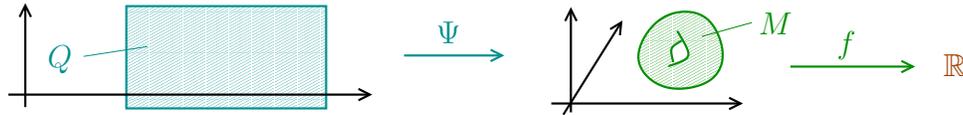
Eine Möglichkeit zu zeigen, dass eine 2×1 -Matrix (u) Rang 1 hat ist zu zeigen, dass $\|u\| \neq 0$. Dies in unserem Fall natürlich der Fall.

In vielen Fällen in denen man explizit ein Integral über eine Untermannigfaltigkeit bestimmen will, gibt einem der folgende Satz einen bequemen Zugang.



Satz 5.8. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei zudem $\Psi: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von M . Für jede stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_M f = \int_{x \in Q} f(\Psi(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(\underbrace{D\Psi_x}_{n \times k\text{-Matrix}})} \, dx.$$



Beweis. Wir beweisen den Satz für den Fall, dass Q ein abgeschlossener Quader ist. Der Fall, dass Q ein offener Quader ist, wird ganz ähnlich bewiesen. Wir beginnen mit folgender Behauptung.

Behauptung. Für jedes $P \in \overset{\circ}{Q}$ gibt es eine Karte $\Phi_P: U_P \rightarrow V_P$ mit $\Psi(P) \in U_P$, mit $(P, 0) \subset V_P$, so dass $U_P \subset M \setminus \Psi(\partial Q)$, und so dass $\Phi_P^{-1}: V_P \cap E_k \rightarrow M = \Psi|_{V_P \cap E_k}$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $D\Psi_P$ eine $n \times k$ -Matrix von Rang k . Dies bedeutet, dass die Spalten linear unabhängig sind. Es gibt also, nach dem Basisergänzungssatz, eine $n \times (n-k)$ -Matrix B , so dass die Spalten der $n \times n$ -Matrix $(D\Psi_P \ B)$ linear unabhängig sind, d.h. die Matrix ist invertierbar. Wir betrachten jetzt die Abbildung³⁵

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}: \overset{\circ}{Q} \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto \Psi(x) + B \cdot y. \end{aligned}$$

Am Punkt $(P, 0)$ ist das Differential von $\tilde{\Psi}$ gegeben durch die invertierbare Matrix $(D\Psi_P \ B)$. Es folgt also aus dem Satz 2.3 über die Umkehrabbildung, dass es eine offene Umgebung \tilde{V}_P von $(P, 0)$ und eine offene Umgebung \tilde{U}_P von $\tilde{\Psi}(P, 0) = \Psi(P)$ gibt, so dass $\tilde{\Psi}: \tilde{V}_P \rightarrow \tilde{U}_P$ ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen mit $\tilde{\Phi}: \tilde{U}_P \rightarrow \tilde{V}_P$ die Umkehrabbildung.

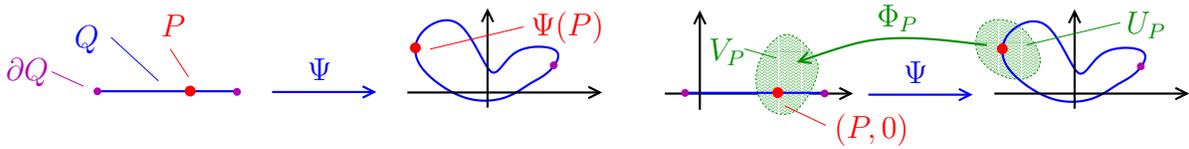
Es folgt aus der Definition, dass $\tilde{\Psi}(\tilde{V}_P \cap E_k) \subset M$. Es ist aber a priori nicht klar, dass $\tilde{\Psi}(\tilde{V}_P \cap E_k) = \tilde{U}_P \cap M$. Um dies zu erreichen müssen wir die offenen Umgebungen \tilde{U}_P und \tilde{V}_P noch einschränken.

Aus Eigenschaft (3) einer Parametrisierung folgt (siehe Übungsblatt 4), dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $\Psi(B_\epsilon^n(P)) \cap \Psi(Q \setminus B_\epsilon^n(P)) = \emptyset$. Wir setzen nun

$$U_P := \tilde{U}_P \setminus \underbrace{\Psi(Q \setminus B_\epsilon^n(P))}_{\text{kompakt, also abgeschlossen}} \quad \text{und} \quad V_P := \tilde{\Phi}(U_P)$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass $\Phi: U_P \rightarrow V_P$ eine Karte mit den gewünschten Eigenschaften ist. □

³⁵Der Beweis dieser Behauptung hat eine nicht zu übersehende Ähnlichkeit mit dem Beweis des Satzes 2.7 vom regulären Wert.



Wir machen nun noch folgende Beobachtungen und Vorbereitungen:

- (1) Der Rand ∂Q ist eine Vereinigung von endlich vielen offenen Quadern der Dimension $< k$. Es folgt aus Satz 5.6, dass $\Psi(\partial Q) \subset M$ eine Nullmenge in M ist.
- (2) Es folgt aus Satz 1.11, dass $\Psi(\partial Q) \subset M$ kompakt, und damit abgeschlossen in M ist. Also ist $\widetilde{M} := M \setminus \Psi(\partial Q)$ eine offene Teilmenge von M , und damit selber eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit.
- (3) Die Karten $\Phi_P: U_P \rightarrow V_P$ bilden einen Atlas von \widetilde{M} . Es folgt aus Lemma 5.4, dass es abzählbar viele Punkte $P_i, i \in I$ in \widetilde{M} gibt, so dass die U_{P_i} die Untermannigfaltigkeit \widetilde{M} überdecken. Wir schreiben $U_i := U_{P_i}, V_i := V_{P_i}$ und $\Phi_i := \Phi_{P_i}$.
- (4) Wir wählen eine diesem Atlas untergeordnete messbare Zerlegung $\{Z_i\}_{i \in I}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_M f &= \int_{\widetilde{M}} f = \sum_{i \in I} \int_{\widetilde{M}} \chi_{Z_i} \cdot f = \sum_{i \in I} \int_{x \in \Phi_i(Z_i) \cap E_k} f(\Phi_i^{-1}(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D(\Phi_i^{-1})_x \cdot e_1 \dots D(\Phi_i^{-1})_x \cdot e_k)} dx \\
 &\begin{array}{l} \text{folgt aus} \\ \text{Lemma 5.7} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{per Definition} \\ \text{auf Seite 48} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{folgt aus der Definition auf Seite 44 und der Beobachtung,} \\ \text{dass } \chi_{Z_i} \circ \Phi_i^{-1} = \chi_{\Phi_i(Z_i)} \end{array} \\
 &= \sum_{i \in I} \int_{x \in \Psi^{-1}(Z_i)} f(\Psi(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\Psi_x)} dx = \int_{x \in \overset{\circ}{Q}} f(\Psi(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\Psi_x)} dx \\
 &\begin{array}{l} \uparrow \\ \text{denn } \Phi_i^{-1}|_{E_k} = \Psi \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{denn } \overset{\circ}{Q} = \sqcup \Psi^{-1}(Z_i) \end{array} \\
 &= \int_{x \in Q} f(\Psi(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\Psi_x)} dx. \\
 &\begin{array}{l} \uparrow \\ \text{denn } Q \setminus \overset{\circ}{Q} \text{ ist eine Nullmenge} \end{array} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Als erste Anwendung von Satz 5.8 wollen wir nun Integrale von stetigen Funktionen auf S^1 bestimmen:

Satz 5.9. Es sei $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{S^1} f = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} f\left(\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}\right) d\varphi.$$

Beweis. Es sei $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die Parametrisierung

$$\begin{aligned}
 P: [0, 2\pi] &\rightarrow S^1 \\
 \varphi &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

welche wir oben gerade entdeckt hatten. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{S^1} f &= \int_{\varphi \in [0, 2\pi]} f(P(\varphi)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(DP_\varphi)} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} f\left(\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}\right) \cdot \underbrace{\sqrt{\text{Gram}\left(\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}\right)}}_{= \sqrt{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)} = 1, \text{ dies folgt aus } \text{Gram}(V) = \det(V^T V)} d\varphi. \\
 \uparrow &\quad \uparrow \\
 \text{Satz 5.8} &\quad \text{folgt durch Einsetzen und aus Satz 3.4}
 \end{aligned}$$

Wir haben also die gewünschte Gleichheit bewiesen. ■

Im Folgenden wollen wir das Integral von stetigen Funktionen auf S^2 , oder auch allgemeiner, von stetigen Funktionen auf 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^3 bestimmen. Wir führen dazu folgende harmlose Notation ein.

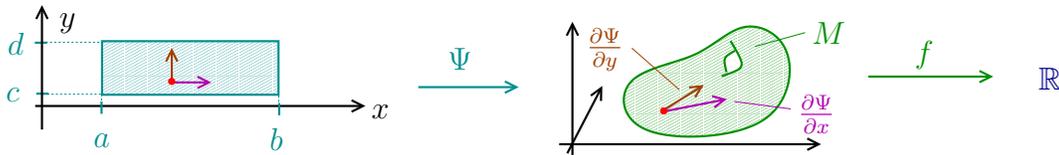
Notation. Es sei $Q \subset \mathbb{R}^k$ ein Quader. Für eine glatte Funktion $\Psi: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_i} \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte des Differentials } D\Psi.$$

Dann gilt $D\Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right)$.

Satz 5.10. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es zudem $\Psi: [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ eine Parametrisierung von M . Für jede stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_M f = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(\Psi(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \times \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\| dy dx.$$



Im Beweis von Satz 5.10 und dem darauffolgenden Beispiel werden wir mehrmals mit 3×2 -Matrizen arbeiten. Folgendes einfache Lemma wird uns das Leben erleichtern.

Lemma 5.11. Es seien $u, v \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

- (1) Es gilt $\text{Gram}(u \ v) = \|u \times v\|^2$.
- (2) Die 3×2 -Matrix $(u \ v)$ hat Rang 2 genau dann, wenn $u \times v \neq 0$.

Beweis von Lemma 5.11.

- (1) Diese Aussage folgt aus Satz 4.4 und Satz 4.9.
- (2) Diese Aussage ist ein Spezialfall der Aussage in Übungsblatt 3. ■

Beweis von Satz 5.10. Es sei $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_M f = \int_{(x,y) \in Q} f(\Psi(x, y)) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\Psi_{(x,y)})} d\lambda = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(\Psi(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \times \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\| dy dx.$$

Satz 5.8

folgt aus dem Satz 3.8 von Fubini und Satz 3.4 sowie Lemma 5.11 (1) angewandt auf $D\Psi_{(x,y)} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)$ ■

Als Beispiel wollen wir nun noch stetige Funktionen auf S^2 betrachten.

Satz 5.12. Es sei $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{S^2} f = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} f \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Punkt mit sphärischen} \\ \text{Koordinaten } (\varphi, \theta)}} \cdot \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$S: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Wir behaupten, dass dies eine Parametrisierung von S^2 ist. Aus Erfahrung wissen wir, dass die Bedingungen (1)-(4), welche wir auf Seite 50 eingeführt hatten, erfüllt sind. Es verbleibt (5) zu überprüfen. Es gilt

$$DS_{(\varphi, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial \varphi} & \frac{\partial S}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) & \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) & \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Wir müssen zeigen, dass die 3×2 -Matrix $DS_{(\varphi, \theta)}$ Rang 2 besitzt. Motiviert durch Lemma 5.11 (2) führen wir dazu folgende Berechnung durch:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin^2(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors berechnet sich leicht zu $\sin(\theta)$. Dies ist $\neq 0$ im Inneren des Quaders $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Es folgt also aus Lemma 5.11 (2), dass der Rang von $DS_{(\varphi, \theta)} = 2$ im Inneren des Quaders. Also ist S in der Tat eine Parametrisierung.

Es sei nun $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{S^2} f = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} f(S(\varphi, \theta)) \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial S}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S}{\partial \theta} \right\|}_{=\sin(\theta)} d\theta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} f \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

↑ Satz 5.10
 ↑ folgt durch Einsetzen von S und die obige Berechnung

Wir haben also die gewünschte Gleichheit bewiesen. ■

Beispiel. Wir wollen nun den Flächeninhalt von S^2 bestimmen. Dieser ist gegeben durch

$$\text{Flächeninhalt}(S^2) = \int_{S^2} 1 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 1 \cdot \sin(\theta) d\theta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 2 d\varphi = 4\pi.$$

↑ Definition von Flächeninhalt auf Seite 49
 ↑ Satz 5.12

6. UNTERMANNIGFALTIGKEITEN MIT RAND

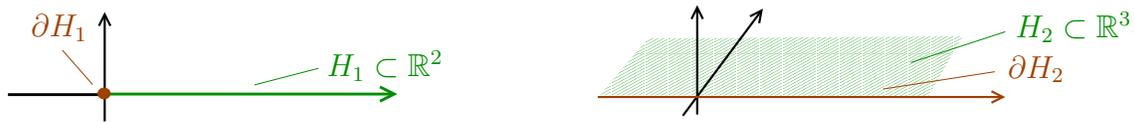
6.1. Definition von Untermannigfaltigkeiten mit Rand. In diesem Kapitel wollen wir Begriff von Untermannigfaltigkeiten etwas erweitern. Wir führen dazu erst einmal folgende Notation ein.

Notation. Für $k \leq n$ bezeichnen wir

$$H_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} \text{ und } x_k \geq 0\},$$

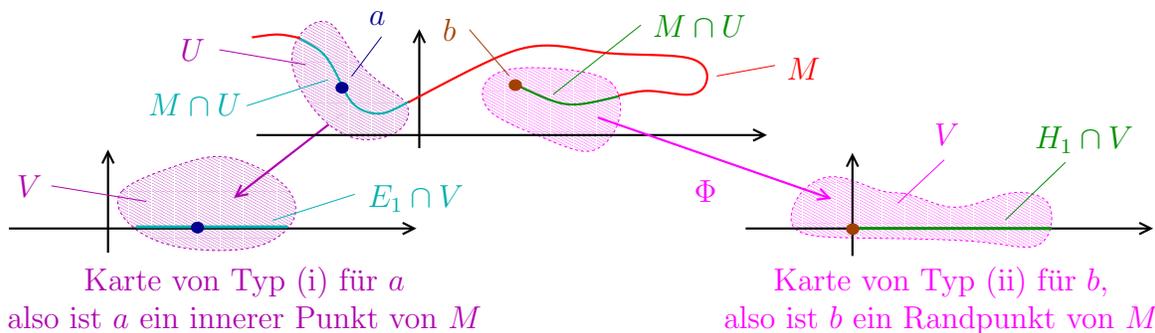
als k -dimensionale Halbebene und wir schreiben

$$\partial H_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} \text{ und } x_k = 0\}.$$



Definition.

- (1) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine Karte um a gibt, d.h. einen Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass³⁶
 - (i) $\Phi(U \cap M) = V \cap E_k$, oder
 - (ii) $\Phi(U \cap M) = V \cap H_k$ mit $\Phi(a) \in \partial H_k$.
- (2) Wir sagen $a \in M$ ist ein innerer Punkt, wenn es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um a vom Typ (i) gibt. Wir sagen $a \in M$ ist ein Randpunkt, wenn es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um a vom Typ (ii) gibt.
- (3) Ein Atlas von M ist eine Familie $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von Karten mit $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.



Satz 6.1. Jeder Punkt auf einer Untermannigfaltigkeit ist entweder ein innerer Punkt oder ein Randpunkt.

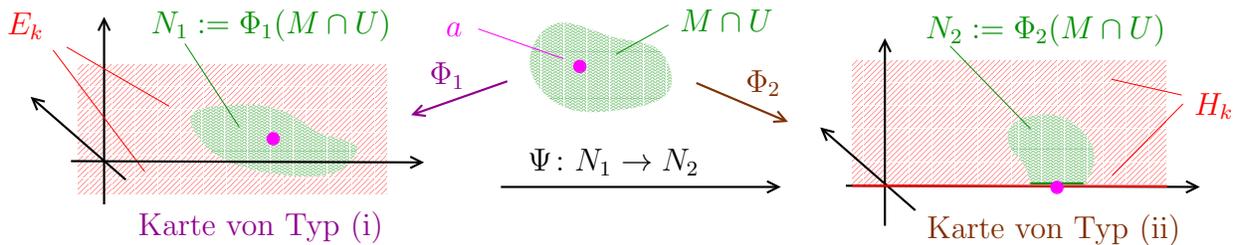
Beweis (*).³⁷ Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Nehmen wir also an, dass es einen Punkt $a \in M$ gibt, welcher sowohl ein innerer Punkt als auch ein

³⁶Eine Karte von Typ (i) ist also der gleiche Typ von Karte, wie wir in schon auf Seite 20 eingeführt hatten. Die Karten von Typ (ii) sind neu.

³⁷Beweise, welche mit (*) markiert sind, wurden in der Vorlesung ausgelassen und sind damit nicht offizieller Teil der Vorlesung.

Randpunkt ist. Dann gibt es also eine Karte $\Phi_1: U_1 \rightarrow V_1$ um a von Typ (i) und es gibt eine Karte $\Phi_2: U_2 \rightarrow V_2$ um a von Typ (ii). Indem wir zu $U_1 \cap U_2$ übergehen können wir annehmen, dass $U_1 = U_2 =: U$.

Wir schreiben $N_1 := \Phi_1(U \cap M) \subset E_k = \mathbb{R}^k$ und $N_2 := \Phi_2(U \cap M) \subset H_k \subset E_k = \mathbb{R}^k$. Wir bezeichnen mit $\Psi: N_1 \rightarrow N_2$ die Einschränkung der Abbildung $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ auf die offene Teilmenge N_1 . Dies ist eine glatte, bijektive Abbildung. Zudem ist an jedem Punkt $P \in N_1$ das Differential $D\Psi_P$ invertierbar.³⁸ Es folgt aus dem Satz 2.3 über die Umkehrabbildung, dass $\Psi(N_1)$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k ist. Aber dies ist nicht der Fall, denn $N_2 \subset H_k$ und $\Phi_2(a)$ liegt in ∂H_k , besitzt also keine offene Umgebung, welche in N_2 enthalten ist. Wir haben damit einen Widerspruch erhalten. ■



Definition. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit.

- (1) Wir bezeichnen mit ∂M die Menge aller Randpunkte und wir nennen ∂M den Rand von M .
- (2) Wir sagen M ist eine geschlossene Untermannigfaltigkeit, wenn $\partial M = \emptyset$, und wenn M kompakt ist.

Beispiel.

- (1) Jede Karte im Sinne der Definition auf Seite 20 ist eine Karte von Typ (i) im obigen Sinn. Insbesondere ist jede Untermannigfaltigkeit im Sinne der Definition auf Seite 20 auch eine Untermannigfaltigkeit im obigen Sinne. Zudem folgt sofort aus Satz 6.1, dass in diesem Fall $\partial M = \emptyset$.
- (2) Die offene Kugel

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit mit $\partial X = \emptyset$, aber X ist keine geschlossene Untermannigfaltigkeit, denn X ist nicht kompakt. Andererseits sind beispielsweise S^n und der auf Seite 27 eingeführte Torus geschlossene Untermannigfaltigkeiten.

Bemerkung. Unglücklicherweise gibt es nun zwei verschiedene Definitionen von „Rand“. Auf Seite 10 hatten wir den Rand ∂A einer Teilmenge A eines topologischen Raums X eingeführt. Beispielsweise ist der Rand der offenen Kugel

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

aufgefasst als Teilmenge von \mathbb{R}^3 , die Einheitsphäre. Der Rand von X aufgefasst als Untermannigfaltigkeit ist hingegen die leere Menge. Wenn wir ab jetzt vom „Rand“ einer Untermannigfaltigkeit reden, meinen wir immer den „Untermannigfaltigkeitsrand“.

³⁸In der Tat, denn Ψ ist die Einschränkung des Diffeomorphismus $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}: V_1 \rightarrow V_2$ auf die Teilmenge $N_1 = V_1 \cap E_k$. Nachdem $D(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1})_P$ invertierbar ist, ist auch die Einschränkung auf jeden Teilraum, in diesem Fall E_k , weiterhin invertierbar.

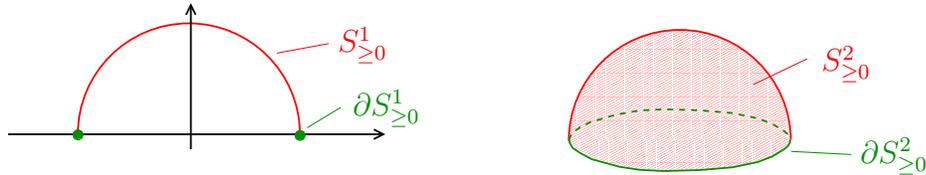
6.2. Beispiele. Wir formulieren unser erstes Beispiel einer Untermannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand als Lemma.

Lemma 6.2. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Halbsphäre

$$S_{\geq 0}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \text{ und } x_{n+1} \geq 0\}.$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial S_{\geq 0}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \text{ und } x_{n+1} = 0\}.$$



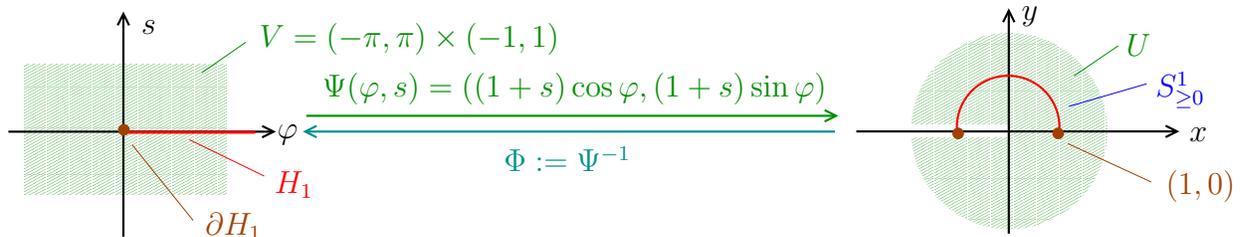
Beweisskizze. Wir beweisen das Lemma nur für den Fall $n = 1$. Die anderen Fälle sind Verallgemeinerungen dieses Arguments. Für alle Punkte $(x, y) \in S_{\geq 0}^1$ kann man leicht, wie auf Seite 21, Karten von Typ (i) finden. Wir betrachten nun den Punkt $(1, 0)$. Ganz analog zur Diskussion auf Seite 21 betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: V := (-\pi, \pi) \times (-1, 1) &\rightarrow U := \Psi(V) \subset \mathbb{R}^2 \\ (\varphi, s) &\mapsto \begin{pmatrix} (1+s) \cdot \cos(\varphi) \\ (1+s) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist eine glatte bijektive Abbildung mit $\Psi(V \cap E_1) = U \cap S^1$. Es folgt leicht aus Korollar 2.4, dass dies sogar ein Diffeomorphismus ist. Zudem gilt $\Psi(V \cap E_1) = U \cap S_{\geq 0}^1$. Also definiert

$$\Phi := \Psi^{-1}: U \rightarrow V$$

eine Karte. Dies ist eine Karte von Typ (ii) für den Punkt $(1, 0)$. Ganz analog kann man auch noch zeigen, dass es eine Karte von Typ (ii) für den Punkt $(-1, 0)$ gibt. Wir haben also gezeigt, dass $S_{\geq 0}^1$ eine Untermannigfaltigkeit ist, deren Rand gegeben ist durch $(\pm 1, 0)$. ■



Beispiele. Mit fast dem gleichen Argument wie in Lemma 6.2 kann man leicht zeigen, dass der „abgeschlossene“ Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z \in [-1, 1]\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist mit Rand

$$\partial Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = \pm 1\}.$$

Zudem ist der „halboffene“ Zylinder

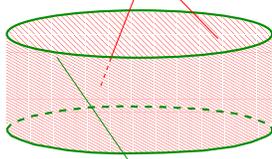
$$Z' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z \in (-1, 1]\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand

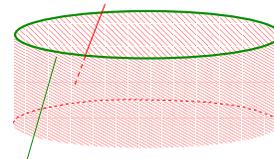
$$\partial Z' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 1\}.$$

$$Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [-1, 1]\}$$

$$Z' = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \in (-1, 1]\}$$



$$\partial Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = \pm 1\}$$



$$\partial Z' = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

Satz 6.3. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und es seien $z_1 < z_2 \in \mathbb{R}$ reguläre Werte. Dann ist

$$M := f^{-1}([z_1, z_2]) \subset \mathbb{R}^n$$

eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0 mit

$$\partial M = f^{-1}(\{z_1\}) \cup f^{-1}(\{z_2\}).$$

Beweisskizze. Der Beweis des Satzes 2.7 kann leicht abgewandelt um zu zeigen, dass jeder Punkt in $f^{-1}(\{z_1\}) \cup f^{-1}(\{z_2\})$ eine Karte von Typ (ii) besitzt. Die Teilmenge $f^{-1}((z_1, z_2))$ ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n , also ist die Identitätsabbildung eine Karte von Typ (i). ■

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

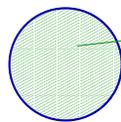
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2. \end{aligned}$$

Dann sind 1 und -1 reguläre Werte³⁹. Es folgt aus Satz 6.3, dass

$$f^{-1}([-1, 1]) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \in [-1, 1]\} = \overline{B}^n$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist mit Rand

$$f^{-1}(\{-1\}) \cup f^{-1}(\{1\}) = \emptyset \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = S^{n-1}.$$



die Scheibe \overline{B}^2 ist eine 2-dimensionale
Untermannigfaltigkeit mit
Rand $\partial \overline{B}^2 = S^1$

Ein weiteres Beispiel von Untermannigfaltigkeiten mit Rand ist wie folgt gegeben.

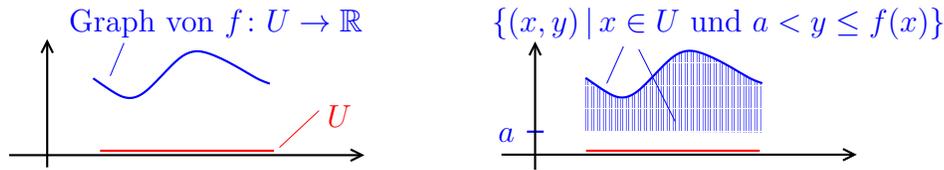
Beispiel. Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Teilmenge und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Man kann leicht zeigen, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \mid a < y \leq f(x)\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0, wobei der Rand gegeben ist durch den Graphen

$$\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \mid y = f(x)\}.$$

³⁹Warum ist -1 ein regulärer Wert?



Der folgende Satz besagt, dass jede Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0 am Rand lokal⁴⁰ von diesem Typ ist. Die Aussage des Satzes besitzt eine nicht zu übersehende Ähnlichkeit mit Satz 2.6.

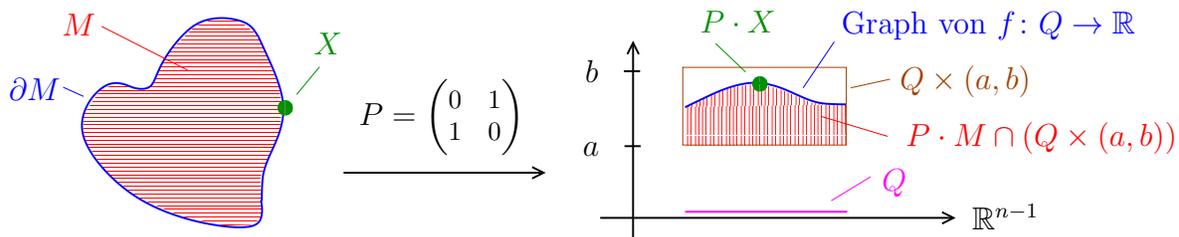
Satz 6.4. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0 und es sei zudem $X \in \partial M$. Dann existieren eine Permutationsmatrix P , ein offener Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$, zwei reelle Zahlen $a < b$, sowie eine glatte Funktion $f: Q \rightarrow (a, b)$, so dass $P \cdot X \in Q \times (a, b)$, so dass

$$P \cdot M \cap (Q \times (a, b)) = \{(x, y) \mid x \in Q \text{ und } a < y \leq f(x)\}.$$

und so dass

$$P \cdot \partial M \cap (Q \times (a, b)) = \underbrace{\{(x, y) \mid x \in Q \text{ und } y = f(x)\}}_{\text{Graph von } f: Q \rightarrow \mathbb{R}}.$$

Beweis. Der Satz kann in der Tat mithilfe von Satz 2.6 bewiesen werden. Wir überlassen die Durchführung des Beweises als freiwillige Übungsaufgabe. ■



Satz 6.5. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist ∂M eine $(k - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit leerem Rand.

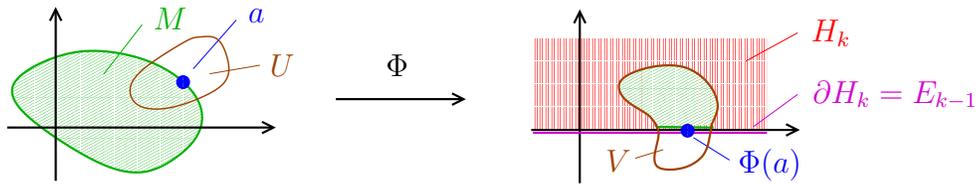
Beweis. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und es sei zudem $a \in \partial M$. Dann existiert eine Karte um a vom Typ (ii), d.h. ein Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\Phi(U \cap M) = V \cap H_k,$$

wobei $\Phi(a) \in \partial H_k$. Es folgt leicht aus Satz 6.1, dass $U \cap \partial M = \Phi^{-1}(\partial H_k)$. Nachdem $\partial H_k = E_{k-1}$ sehen wir also, dass Φ auch eine Karte vom Typ (i) für ∂M um den Punkt a ist. Wir haben also bewiesen, dass ∂M eine $(k - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, so dass alle Punkte eine Karte vom Typ (i) besitzen. D.h. die $(k - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ∂M besitzt keine Randpunkte. ■

6.3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten mit Rand. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit, möglicherweise mit nichtleerem Rand. Für eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ können wir die Integrierbarkeit und das Integral ganz analog zu Kapitel 5 definieren. Zudem gelten die (hoffentlich) absichtlichen Abwandlungen der Sätze aus Kapitel 5.

⁴⁰Wir sagen ein topologischer Raum X besitzt *lokal* eine Eigenschaft P , wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt, so dass U diese Eigenschaft besitzt.

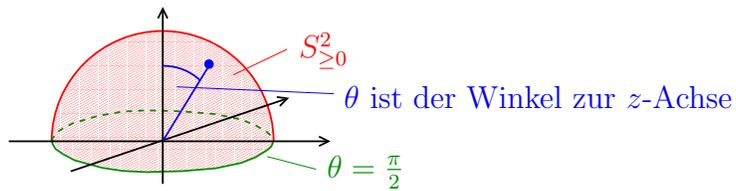


Beispiel. Wir betrachten die Halbkugel

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}.$$

Ganz analog zu Satz 5.12 gilt für eine stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$\int_M f = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} f \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi.$$

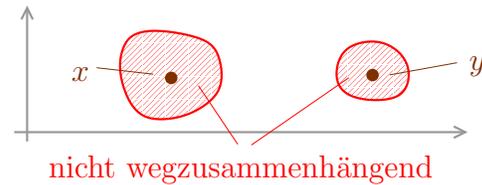
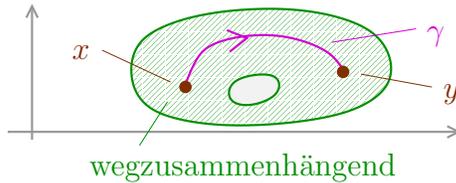


7. ZUSAMMENHÄNGENDE TOPOLOGISCHE RÄUME

In Analysis III hatten wir den Begriff von (weg-) zusammenhängenden metrischen Räumen eingeführt. In diesem sehr kurzen Kapitel verallgemeinern wir jetzt diese Begriffe zu topologischen Räumen. Diese Begriffe werden im weiteren immer wieder eine Rolle spielen.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Es seien $x, y \in X$. Ein **Weg von x nach y** ist eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.
- (2) Wir sagen X ist **wegzusammenhängend**, wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg von x nach y gibt.



Beispiel. In Übungsblatt 5 werden wir zeigen, dass S^n wegzusammenhängend ist.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen X ist **zusammenhängend**, wenn gilt: wenn immer $X = U \sqcup V$ die Vereinigung von zwei disjunkten offenen Mengen U und V ist, dann gilt $U = X$ oder $V = X$.

Bemerkung.

- (1) Ein topologischer Raum X ist also *nicht zusammenhängend*, wenn es disjunkte offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $X = U \cup V$ gibt, so dass $U \neq X$ und $V \neq X$.
- (2) Man kann leicht zeigen, dass X *zusammenhängend* ist, genau dann, wenn gilt: wenn immer $X = U \sqcup V$ die Vereinigung von zwei disjunkten offenen Mengen U und V ist, dann gilt $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

Beispiele.

- (1) Wir betrachten den topologischen Raum

$$X = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}.$$

Dieser ist nicht zusammenhängend, denn $U = [0, 1]$ und $V = [2, 3]$ sind zwei disjunkte offene nichtleere Teilmengen von X , welche X überdecken.

- (2) Es sei X eine Menge. Wenn wir X mit der trivialen Topologie betrachten, dann ist dies ein zusammenhängender topologischer Raum. Wenn wir hingegen X mit der diskreten Topologie betrachten, dann ist dies nur dann ein zusammenhängender Raum, wenn X höchstens ein Element besitzt.

Lemma 7.1. Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist auch zusammenhängend.

Beweis. In [Fr3, Lemma II.7.3] hatten wir die Aussage für metrische Räume bewiesen. Der Beweis für topologische Räume ist wort-wörtlich der Gleiche. ■

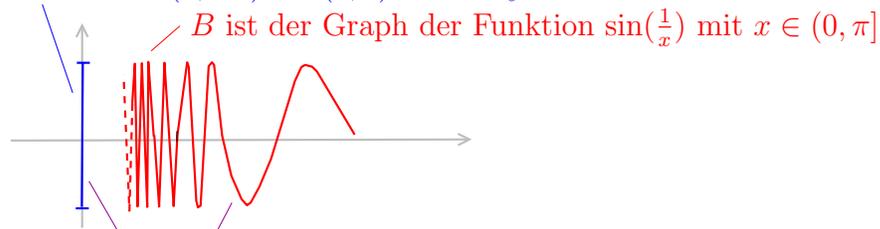
Bemerkung. In Analysis III hatten wir gesehen, dass im Allgemeinen die Umkehrung von Lemma 7.1 nicht gilt, d.h. es gibt topologische Räume, welche zusammenhängend sind,

aber nicht wegzusammenhängend sind. Genauer gesagt hatten wir gezeigt, dass

$$X := \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0, \pi]\} \subset \mathbb{R}^2$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

A ist das Intervall von $(0, -1)$ bis $(0, 1)$ auf der y -Achse



$X = A \cup B$ ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend

Für Untermannigfaltigkeiten gilt aber netterweise die Umkehrung von Lemma 7.1.

Satz 7.2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gilt:

$$M \text{ ist zusammenhängend} \iff M \text{ ist wegzusammenhängend.}$$

Beweis. Wir werden diesen Satz in Übungsblatt 5 beweisen. ■

Folgende Definition hatten wir ganz ähnlich schon in [Fr3, Kapitel I.12.3] kennen gelernt.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Für $x, y \in X$ definieren wir⁴¹

$$x \sim y \iff \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y.$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen von \sim als die **Komponenten von X** .⁴²

Beispiel. Die Komponenten von $[0, 1] \cup [2, 3]$ sind gegeben durch $[0, 1]$ und $[2, 3]$.

Wir erinnern auch noch an den Begriff der diskreten Teilmengen.

Definition. Wir sagen eine Teilmenge D eines topologischen Raums X ist **diskret**, wenn die Teilraumtopologie auf D gerade die diskrete Topologie ist.

Bemerkung. Es folgt leicht aus den Definition, dass eine Teilmenge D eines topologischen Raums X diskret ist, genau dann, wenn jeder Punkt $x \in D$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $U \cap D = \{x\}$.

Beispiel.

- (1) Jede endliche Teilmenge von \mathbb{R}^n ist diskret. In der Tat, denn für eine endliche Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in A$ setzen wir $\epsilon := \min\{\|x - y\| \mid y \in A \setminus \{x\}\}$. Dann ist $B_\epsilon(x) \cap A = \{x\}$.
- (2) Die Teilmenge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist diskret.

Lemma 7.3. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Wenn X zusammenhängend ist und wenn $f(X)$ diskret ist, dann ist f eine konstante Abbildung.

⁴¹Es ist leicht zu zeigen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

⁴²Wenn X aus nur einer Äquivalenzklasse besteht, dann ist X per Definition wegzusammenhängend.

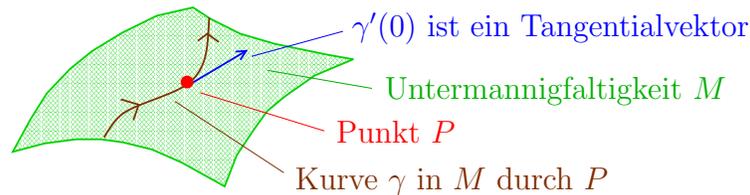
Beweis. Wir hatten das Lemma als [Fr3, Lemma I.7.7] für metrische Räume bewiesen. Der Beweis für topologische Räume ist auch hier wieder wort-wörtlich der Gleiche. Wir führen das Argument noch einmal in Präsenzübungsblatt 5 aus. ■

8. DER GAUSSSCHE INTEGRALSATZ

8.1. Tangentialvektoren zu Untermannigfaltigkeiten. In [Fr2, Kapitel 15] hatten wir schon mal kurz den Begriff von Tangentialvektoren und den Tangentialraum einer Teilmenge von \mathbb{R}^n eingeführt. Wir werden diesen Begriff nun ausführlich für Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n studieren.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und P ein Punkt auf M .

- (1) Ein **nichttriviales** Intervall ist ein Intervall, welches nicht aus nur einem Punkt besteht.
- (2) Eine **Kurve in M durch P** ist eine glatte Abbildung $\gamma: I \rightarrow M$ auf einem nichttrivialen Intervall I mit $0 \in I$ und mit $\gamma(0) = P$.
- (3) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** an M im Punkt P , wenn es eine Kurve γ in M durch P gibt, so dass $\gamma'(0) = v$.
- (4) Die Menge aller Tangentialvektoren am Punkt P wird mit $T_P M$ bezeichnet. Wir nennen $T_P M$ den **Tangentialraum** am Punkt P .



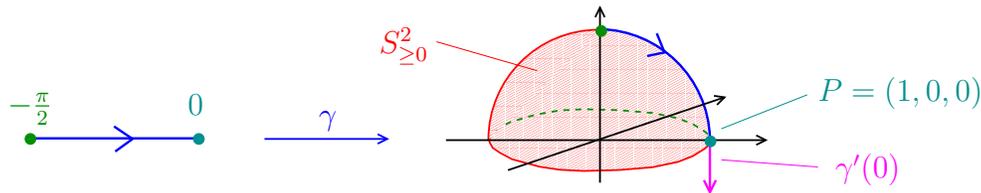
Beispiel. Wir betrachten den Punkt $P = (1, 0, 0)$ auf der Untermannigfaltigkeit

$$S_{\geq 0}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma: [-\frac{\pi}{2}, 0] &\rightarrow M \\ t &\mapsto (\cos(t), 0, -\sin(t)) \end{aligned}$$

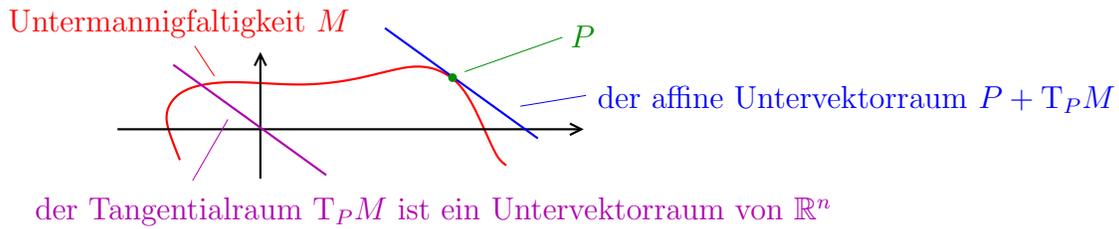
eine Kurve in M durch P . Also ist $\gamma'(0) = (0, 0, -1)$ ein Tangentialvektor am Punkt P .



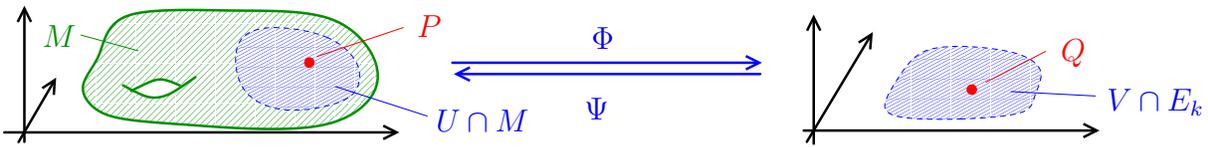
Satz 8.1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für jeden Punkt P auf M ist $T_P M$ ein k -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

Bemerkung. Der Tangentialraum $T_P M$ hat folgende geometrische Bedeutung: wenn wir $T_P M$ um den Vektor P in den Punkt P verschieben, dann erhalten wir den affinen Untervektorraum $P + T_P M$, welcher die Untermannigfaltigkeit M im Punkt P am besten approximiert. In den Bildern zeichnen wir oft den Tangentialraum $T_P M$ in den Punkt P verschoben.

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $P \in M$. Wir müssen zeigen, dass $T_P M$ ein k -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist.



Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass $P \in M \setminus \partial M$. Der Fall, dass $P \in \partial M$ wird ganz ähnlich behandelt. Da $P \in M \setminus \partial M$ existiert eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$, wobei U eine offene Umgebung von $P \in \mathbb{R}^n$ ist und wobei $\Phi(U \cap M) = V \cap E_k$. Wir setzen $\Psi := \Phi^{-1}: V \rightarrow U$ und $Q := \Phi(P)$. Es genügt folgende Behauptung zu beweisen.



Behauptung. Es ist
$$T_P M = \underbrace{(D\Psi_Q)}_{\substack{\text{invertierbare} \\ \text{Matrix}}} \cdot (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Inklusion „ \supset “. Es sei also $v \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Da $V \subset \mathbb{R}^n$ offen ist existiert ein $\epsilon > 0$, so dass die Kurve

$$\begin{aligned} \beta: (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto Q + t \cdot v \end{aligned}$$

Werte in V annimmt. Dann ist

$$D\Psi_Q \cdot v = D\Psi_Q \cdot \beta'(0) = (\Psi \circ \beta)'(0) \in T_P M.$$

Kettenregel 2.1 \uparrow da β in $V \cap E_k$ verläuft sehen wir, \uparrow dass $\Psi \circ \beta$ eine Kurve in M durch P ist

Wir zeigen nun die Inklusion „ \subset “. Es sei also $v \in T_P M$. Per Definition gibt es ein nicht-triviales Intervall I mit $0 \in I$ und eine glatte Abbildung $\gamma: I \rightarrow M$, so dass $\gamma'(0) = v$. Die Kurve $\Phi \circ \gamma$ verläuft dann in $V \cap E_k \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} v = \gamma'(0) &= (\Psi \circ \Phi \circ \gamma)'(0) \stackrel{\text{Kettenregel 2.1}}{=} D\Psi_Q \circ \underbrace{(\Phi \circ \gamma)'(0)}_{\substack{\in \mathbb{R}^k \times \{0\}, \text{ da } \Phi \circ \gamma \\ \text{in } \mathbb{R}^k \times \{0\} \text{ verläuft}}} \in \mathbb{R}^k \times \{0\} \end{aligned}$$

Notation. Für $v \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir im Folgenden

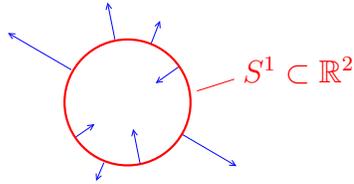
$$v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid w \text{ ist orthogonal zum Vektor } v\}.$$

Allgemeiner schreiben wir für $A \subset \mathbb{R}^n$

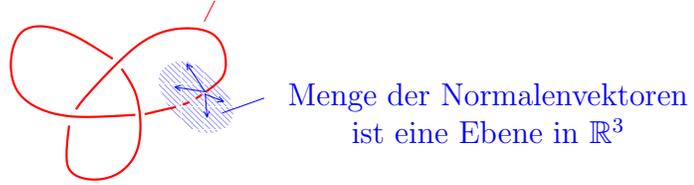
$$A^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid w \text{ ist orthogonal zu allen } v \in A\}.$$

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und P ein Punkt auf M . Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Normalenvektor von M in P , wenn $v \in (T_P M)^\perp$.

Normalenvektoren zu $S^1 \subset \mathbb{R}^2$



Untermannigfaltigkeit $K \subset \mathbb{R}^3$



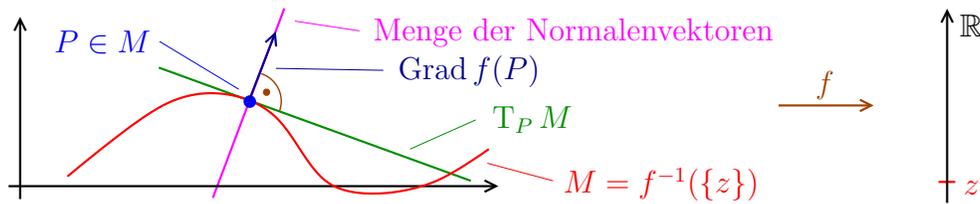
Wenn wir Untermannigfaltigkeiten betrachten, welche als Urbild eines regulären Wertes einer Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind, gibt uns folgender Satz eine besonders einfache Methode um die Tangentialräume und die Normalenvektoren zu bestimmen.

Satz 8.2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und es sei $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Der Satz 2.7 vom regulären Wert besagt, dass $M := f^{-1}(\{z\}) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Für jeden Punkt $P \in M$ gilt:

$$T_P M = (\text{Grad } f(P))^\perp.$$

Also gilt

$$(T_P M)^\perp = \mathbb{R} \cdot \text{Grad } f(P).$$



Beweis. Die erste Aussage hatten wir schon als [Fr2, Satz 15.4] bewiesen und die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten durch die elementare Beobachtung, welche wir in [Fr2, Lemma 15.7] bewiesen hatten, dass für jeden Untervektorraum V gilt $(V^\perp)^\perp = V$.

Wir geben noch mal einen Beweis der Gleichheit $T_P M = (\text{Grad } f(P))^\perp$. Aus Satz 8.1 wissen wir, dass $T_P M$ ein $(n - 1)$ -dimensionaler Vektorraum ist. Da z ein regulärer Wert ist, und da $P \in M = f^{-1}(\{z\})$ sehen wir, dass $\text{Grad } f(P) \neq 0$. Also ist auch $(\text{Grad } f(P))^\perp$ ein $(n - 1)$ -dimensionaler Vektorraum. Es genügt also zu zeigen, dass $T_P M \subset (\text{Grad } f(P))^\perp$. Es sei also $v = \gamma'(0) \in T_P M$. Dann gilt

$$\langle \text{Grad } f(P), v \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt direkt aus den Definitionen}}}{Df_P \cdot v} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel 2.1}}}{Df_P \cdot \gamma'(0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \gamma \text{ Werte in } f^{-1}(\{z\}) \text{ annimmt, ist } f \circ \gamma \text{ konstant}}}{(f \circ \gamma)'(0)} = 0. \quad \blacksquare$$

Beispiel. Wir betrachten die Untermannigfaltigkeit

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \underbrace{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}_{=f(x_1, \dots, x_{n+1})} = 1\}$$

Dann gilt $\text{Grad } f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) = 2(x_1, \dots, x_{n+1})$. Es folgt aus Satz 8.2, dass

$$\begin{aligned} T_P M &= P^\perp \\ (T_P M)^\perp &= \mathbb{R} \cdot P. \end{aligned}$$



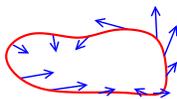
8.2. Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine stetige Abbildung $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ein **glattes Vektorfeld** ist natürlich eine glatte Abbildung $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.⁴³

Etwas salopp gesprochen ordnet ein Vektorfeld jedem Punkt in M einen Vektor zu. Vektorfelder (z.B. das magnetische Feld, Gravitationsfeld, aber auch Windrichtung etc.) spielen eine wichtige Rolle in der Physik.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf M .

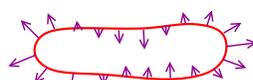
- (1) F heißt **Tangentialvektorfeld**, wenn $F(P) \in T_P M$ für alle $P \in M$,
- (2) F heißt **Normalenfeld**, wenn $F(P) \perp T_P M$ für alle $P \in M$,
- (3) F heißt **normiert**, wenn $\|F(P)\| = 1$ für alle $P \in M$,
- (4) ein normiertes Normalenfeld heißt **Einheitsnormalenfeld**.



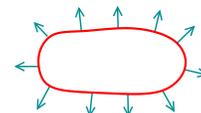
Vektorfeld



Tangentialvektorfeld

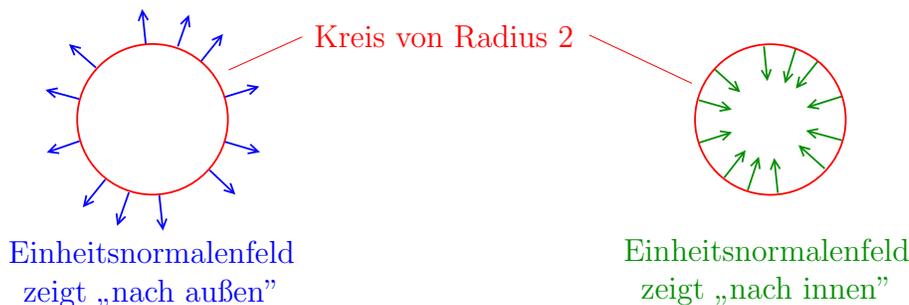


Normalenfeld



Einheitsnormalenfeld

Beispiel. In der Abbildung skizzieren wir zwei Einheitsnormalenfelder auf dem Kreis X von Radius zwei. Eines davon zeigt „nach außen“ und das andere „nach innen“. Wir werden gleich sehen, dass X genau zwei Einheitsnormalenfelder besitzt.



Definition.

- (1) Eine⁴⁴ **Hyperfläche** in \mathbb{R}^n ist eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Kodimension 1, d.h. eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ in \mathbb{R}^n .

⁴³Wir hatten in Kapitel 2.5 definiert, was es heißt, dass eine Abbildung auf einer Untermannigfaltigkeit stetig bzw. glatt ist.

- (2) Es sei N eine Hyperfläche. Eine Orientierung von N ist ein Einheitsnormalenfeld auf N . Wir sagen N ist orientierbar, wenn N eine Orientierung besitzt.
- (3) Eine orientierte Hyperfläche ist ein Paar (N, ν) , wobei N eine Hyperfläche und ν eine Orientierung von N ist.

Beispiele.

- (1) Wir betrachten wiederum die n -Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Es folgt aus der Diskussion der Normalenvektoren auf Seite 66, dass es zwei Orientierungen gibt, diese sind gegeben durch die beiden Einheitsnormalenfelder

$$\begin{array}{ccc} F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} & & F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x \mapsto x & \text{und} & x \mapsto -x. \end{array}$$

- (2) Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Teilmenge und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir betrachten die Hyperfläche

$$M = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

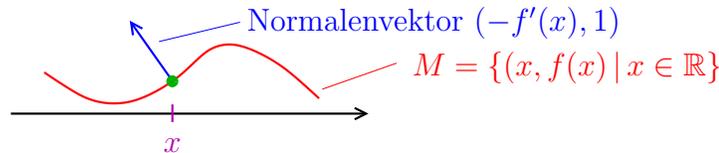
Für einen Punkt $P = (x, f(x)) \in \partial M$ werden wir in Übungsblatt 5 sehen, dass

$$\chi(P) = (-\text{Grad } f(x), 1)$$

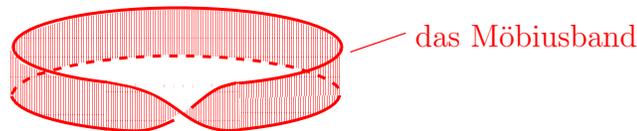
ein Normalenvektor ist. (Dieser Normalenvektor wird für $n = 2$ in der Abbildung unten skizziert.) Also ist dann durch

$$\nu(P) = \frac{\chi(P)}{\|\chi(P)\|} = \frac{(-\text{Grad } f(x), 1)}{\sqrt{\|\text{Grad } f(x)\|^2 + 1}}$$

ein Einheitsnormalenfeld auf M definiert.



- (3) Es sei $N \subset \mathbb{R}^3$ das Möbiusband, welches in der Abbildung unten skizziert ist. Dies ist eine Hyperfläche, aber N besitzt kein Einheitsnormalenfeld, d.h. das Möbiusband ist nicht orientierbar. Diese Aussage ist bildlich klar, ein sauberer Beweis ist allerdings etwas aufwändig.⁴⁵



Satz 8.3. Eine zusammenhängende nichtleere Hyperfläche besitzt entweder keine oder genau zwei Orientierungen.

Beweis. Es sei N eine zusammenhängende nichtleere Hyperfläche. Wir nehmen an F besitzt eine Orientierung $\nu: N \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $-\nu: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Orientierung. Da

⁴⁴Der Name ist vielleicht etwas unglücklich, weil es sich im Allgemeinen *nicht* um eine Fläche handelt. Aber nachdem sich der Name so eingebürgert hat, werden wir ihn auch verwenden.

⁴⁵Was ist überhaupt eine mathematische saubere Beschreibung vom Möbiusband? Wie kann man zeigen, dass dies in der Tat eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 ist?

N nichtleer ist, sind diese beiden Orientierungen verschieden. Es sei nun $\mu: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere Orientierung. Wir wollen zeigen, dass entweder $\mu = \nu$ oder $\mu = -\nu$. Für jeden Punkt $P \in N$ gibt es genau zwei Normalenvektoren zum Vektorraum $T_P N$ der Länge eins. Es gilt also entweder $\mu(P) = \nu(P)$ oder $\mu(P) = -\nu(P)$. Wir betrachten die Abbildung

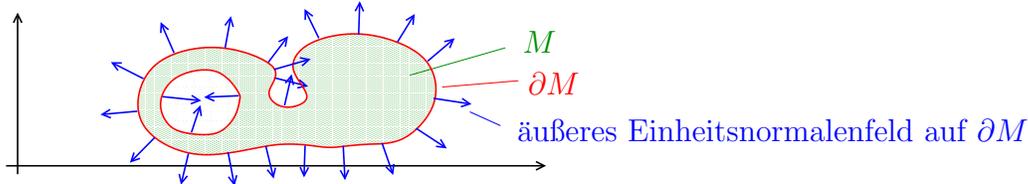
$$\begin{aligned} \varphi: N &\rightarrow \{-1, 1\} \\ P &\mapsto \begin{cases} +1, & \text{wenn } \mu(P) = \nu(P), \\ -1, & \text{wenn } \mu(P) = -\nu(P). \end{cases} \end{aligned}$$

Nachdem ν und μ stetig sind ist auch die Funktion φ stetig. Nachdem N zusammenhängend ist und nachdem $\{-1, 1\}$ eine diskrete Teilmenge von \mathbb{R} ist, folgt nun aus Lemma 7.3, dass φ konstant ist. Es ist also entweder $\mu = \nu$ oder $\mu = -\nu$. Wir haben damit bewiesen, dass N genau zwei Orientierungen besitzt. ■

Satz 8.4. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. Dann gibt es auf dem Rand ∂M genau ein Einheitsnormalenfeld $\nu: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft: für jedes $P \in \partial M$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $P + t \cdot \nu(P) \notin M$ für alle $t \in (0, \epsilon)$.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. Wir nennen das in Satz 8.4 eindeutig bestimmte Einheitsnormalenfeld auf dem Rand ∂M , das **äußere Einheitsnormalenfeld**.

Bemerkung. Anschaulich gesprochen ist das äußere Einheitsnormalenfeld an jedem Punkt $P \in \partial M$ gegeben durch den Einheitsnormalenvektor, welcher „nach außen“ zeigt.



Beweis (*). Es sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0. Außerdem sei $P \in \partial M$. Im Hinblick auf Satz 6.4 können wir, eventuell nach Anwendung einer Permutationsmatrix, annehmen, dass es einen offenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und reelle Zahlen $a < b$ gibt mit $P \in Q \times (a, b)$, und, dass es eine glatte Funktion $f: Q \rightarrow (a, b)$ gibt mit

$$M \cap (Q \times (a, b)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in Q \text{ und } y \leq f(x)\}$$

und

$$\partial M \cap (Q \times (a, b)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in Q \text{ und } y = f(x)\}.$$

Wir wählen $x \in Q$, so dass $P = (x, f(x))$. Es folgt dann aus dem Beispiel auf Seite 68, dass

$$\nu(P) := \frac{\chi(P)}{\|\chi(P)\|} \quad \text{mit } \chi(P) := (-\text{Grad } f(x), 1)$$

ein normierter Normalenvektor zu ∂M ist.

Behauptung. Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (0, \epsilon)$ gilt $P + t \cdot \nu(P) \notin M$ und $P + t \cdot (-\nu(P)) \in M$.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: Q \times (a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x) - y. \end{aligned}$$

Für $z \in Q \times (a, b)$ gilt per Definition $z \in M$ genau dann, wenn $\varphi(z) \geq 0$. Wir müssen also zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $\varphi(P + t \cdot \nu(P)) < 0$ für alle $t \in (0, \epsilon)$ und $\varphi(P + t \cdot \nu(P)) \geq 0$ für alle $t \in (-\epsilon, 0)$. Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\begin{aligned} & \text{denn } P + t \cdot \nu(P) = \left(x - t \cdot \frac{\text{Grad } f(x)}{\|\chi(P)\|}, f(x) + \frac{t}{\|\chi(P)\|}\right) \\ & \quad \downarrow \\ \frac{d}{dt} \varphi(P + t \cdot \nu(P)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left(f\left(x - \frac{t \cdot \text{Grad } f(x)}{\|\chi(P)\|}\right) - f(x) - \frac{t}{\|\chi(P)\|} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\|\chi(P)\|} \cdot \underbrace{\left(\langle \text{Grad } f(x), -\text{Grad } f(x) \rangle - 1 \right)}_{=-\|\text{Grad } f(x)\|^2} < 0. \\ & \quad \uparrow \\ & \text{Kettenregel} \end{aligned}$$

Da $\varphi(P) = 0$ und da die Ableitung < 0 erhalten wir nun das gewünschte $\epsilon > 0$ aus dem Monotoniesatz der Analysis I. \square

Es folgt außerdem direkt aus der Definition, dass die gerade konstruierte Abbildung $\nu: \partial M \cap (Q \times (a, b)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist. Also definiert ν ein Vektorfeld auf $\partial M \cap (Q \times (a, b))$. Es folgt aus der Behauptung, dass es die gewünschte Eigenschaft besitzt, und dass es das einzige Einheitsnormalenfeld mit der gewünschten Eigenschaft ist. \blacksquare

8.3. Formulierung des Gaußschen Integralsatzes. Bevor wir den Gaußschen Integralsatz formulieren können, benötigen wir noch zwei weitere Definitionen:

Definition. Es sei (N, ν) eine orientierte kompakte Hyperfläche in \mathbb{R}^n und es sei zudem $F: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Die Funktion

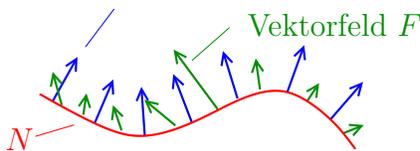
$$\begin{aligned} F \cdot \nu: N &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \underbrace{F(P) \cdot \nu(P)}_{\text{Skalarprodukt}} \end{aligned}$$

ist dann eine stetige Funktion auf der kompakten Untermannigfaltigkeit N , insbesondere integrierbar. Das Integral

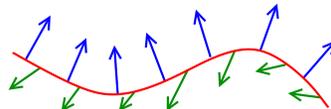
$$\int_N F \cdot \nu$$

wird der Fluss des Vektorfeldes F durch die orientierte Hyperfläche (N, ν) genannt.

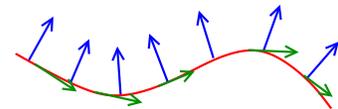
Orientierung ν der Hyperfläche



der Fluss ist positiv,
denn $F \cdot \nu > 0$



der Fluss ist negativ,
denn $F \cdot \nu < 0$



der Fluss ist null,
denn $F \cdot \nu = 0$

Definition. Es sei U eine Kodimension-0 Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Wir definieren die Divergenz von $F = (F_1, \dots, F_n)$ als die Funktion⁴⁶

$$\begin{aligned} \text{div } F: U &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \text{div } F(P) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(P). \end{aligned}$$

Wir können nun endlich den berühmten Gaußschen Integralsatz formulieren:

Satz 8.5. (Gaußscher Integralsatz) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0. Wir bezeichnen mit ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf dem Rand ∂M . Es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\partial M} F \cdot \nu = \int_M \operatorname{div} F.$$

In Worten ausgedrückt besagt der Gaußsche Integralsatz 8.5 Folgendes: für ein glattes Vektorfeld F auf einer kompakten Untermannigfaltigkeit M der Kodimension Null gilt

$$\begin{array}{l} \text{Fluss von } F \text{ durch die} \\ \text{“Oberfläche” von } M \end{array} = \begin{array}{l} \text{Integral über die} \\ \text{Divergenz von } F \text{ auf } M. \end{array}$$

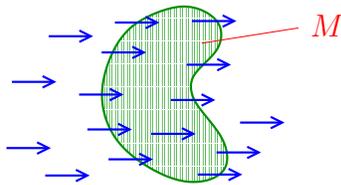
Beispiel. Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir betrachten die Vektorfelder F , G und H , welche gegeben sind durch

$$F(x, y) = (1, 0) \quad G(x, y) = (x, y) \quad H(x, y) = (-y, x).$$

Hierbei ist $\operatorname{div} F(x, y) = 0$ $\operatorname{div} G(x, y) = 2$ $\operatorname{div} H(x, y) = 0$.

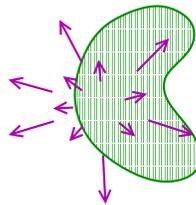
Es folgt also aus dem Gaußschen Integralsatz 8.5, dass der Fluss von F und H durch ∂M null ist, während der Fluss von G durch ∂M positiv ist.

Vektorfeld $F(x, y) = (1, 0)$



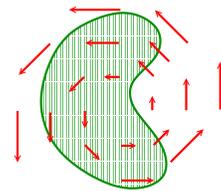
Vektorfeld mit $\operatorname{div}(F) = 0$
der Fluss durch ∂M ist null

Vektorfeld $G(x, y) = (x, y)$



Vektorfeld mit $\operatorname{div}(G) = 2$
der Fluss durch ∂M ist positiv

Vektorfeld $H(x, y) = (-y, x)$



Vektorfeld mit $\operatorname{div}(H) = 0$
der Fluss durch ∂M ist null

Beispiel. Wir wollen die Aussage des Gaußschen Integralsatz 8.5 im Spezialfall $n = 1$ nachvollziehen. Dann gilt:

- (1) eine kompakte eindimensionale zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R} ist ein kompaktes Intervall $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$, wobei $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$,
- (2) ein glattes Vektorfeld auf M ist eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow \mathbb{R}$,
- (3) die Divergenz von F ist die Ableitung F' von F ,
- (4) der äußere Einheitsnormalenvektor in a ist -1 und der äußere Einheitsnormalenvektor in b ist 1 .

⁴⁶Diese Definition erscheint vielleicht auf den ersten Blick etwas willkürlich. Eine alternative Definition wäre, dass $\operatorname{div} F(P) = \operatorname{Spur}(DF(P))$ die Spur des Differentials der Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Dann gilt

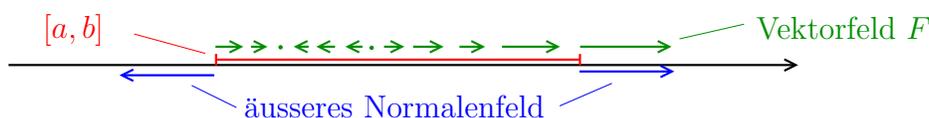
$$\int_a^b F'(x) dx = \int_{[a,b]} \operatorname{div} F = \int_{\partial[a,b]} F \cdot \nu = \int_{\{a\}} F \cdot \nu + \int_{\{b\}} F \cdot \nu = \int_{\{a\}} F \cdot (-1) + \int_{\{b\}} F \cdot 1$$

denn $\operatorname{div} F = F'$ Gaußscher Integralsatz 8.5 folgt aus (4)

$$= F(a) \cdot (-1) + F(b) \cdot 1 = F(b) - F(a).$$

für eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit $N = \{P_1, \dots, P_l\}$
 von \mathbb{R}^n und $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion gilt $\int_N f = f(P_1) + \dots + f(P_l)$

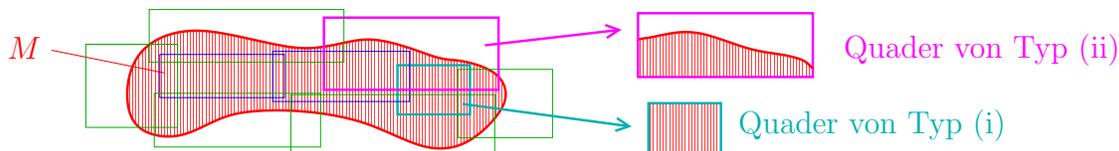
Im Falle $n = 1$ ist der Gaußsche Integralsatz 8.5 also äquivalent zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis I.



Die Beweisidee für den Beweis vom Gaußschen Integralsatz 8.5 ist nun wie folgt: wir überdecken die Untermannigfaltigkeit M mit zwei Typen von offenen Quadern:

- (i) offene Quader, welche ganz in M liegen,
- (ii) offene Quader, so dass der Schnitt mit ∂M , eventuell nach Anwendung einer Permutationsmatrix, ein Graph ist.

Ganz analog zur Definition vom Integral einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit führen wir am Ende den Beweis zurück auf die Betrachtung von Vektorfeldern auf solchen Quadern. In den Fällen (i) und (ii) folgt die Aussage mithilfe einer expliziten, wenn auch im Fall (ii) langwierigen, Rechnung. Wir führen nun diese Beweisidee in den folgenden Kapiteln aus.



8.4. Beweis des Gaußschen Integralsatzes I: Quader.

Satz 8.6. Es sei F ein glattes Vektorfeld auf einem n -dimensionalen Quader Q in \mathbb{R}^n , welches auf dem Rand ∂Q verschwindet. Dann gilt⁴⁷

$$\int_Q \operatorname{div} F d\lambda = 0.$$

Beweis. Es sei also $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein n -dimensionaler Quader in \mathbb{R}^n und es sei $F = (F_1, \dots, F_n): Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld, welches auf dem Rand ∂Q verschwindet.

⁴⁷Nachdem Q keine Untermannigfaltigkeit ist, ist dies kein Spezialfall vom Gaußschen Integralsatz. Nichtsdestotrotz ist diese Aussage ganz im Sinne vom Gaußschen Integralsatz: der Fluß durch die „Oberfläche von Q “ verschwindet, denn das Vektorfeld ist dort nach Voraussetzung null, also muss auch das Integral über die Divergenz verschwinden.

Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\begin{aligned}
 \int_Q \operatorname{div} F \, d\lambda &\stackrel{\text{Definition der Divergenz}}{=} \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, d\lambda \stackrel{\text{Linearität des Integrals}}{=} \sum_{i=1}^n \int_Q \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, d\lambda \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{x_n=a_n}^{x_n=b_n} \dots \int_{x_i=a_i}^{x_i=b_i} \dots \int_{x_1=a_1}^{x_1=b_1} \underbrace{\int_{x_i=a_i}^{x_i=b_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \, dx_i}_{\substack{\text{aus dem HDI folgt, dass dies} \\ = F_i(x_1 \dots b_i \dots x_n) - F_i(x_1 \dots a_i \dots x_n), \text{ da} \\ \text{die Punkte auf } \partial Q \text{ liegen ist dies } 0-0=0}} \, dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n = 0.
 \end{aligned}$$

folgt aus dem Satz 3.8 von Fubini wobei wir die i -Koordinate als die letzte Koordinate wählen

8.5. Beweis des Gaußschen Integralsatzes II: Stempel.

Definition. Es sei $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein $(n-1)$ -dimensionaler Quader und es sei $g: Q \rightarrow (0, \infty)$ eine glatte Funktion.

(1) Wir nennen
$$S := \{(x, y) \mid x \in Q \text{ und } y \in [0, g(x)]\}$$

einen **n -dimensionalen Stempel** und wir bezeichnen

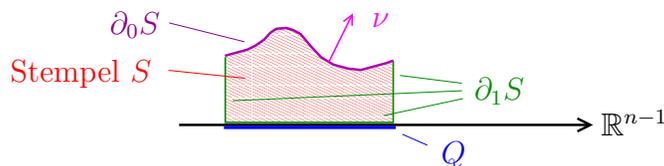
$$\partial_0 S := \{(x, y) \mid x \in Q \text{ und } y = g(x)\}$$

als die **Stempelfläche**. Wir bezeichnen mit $\partial_1 S := \partial S \setminus \partial_0 S$ den Rest des Randes von S .

(2) Es sei nun S ein Stempel und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, wir nennen dann

$$P + S := \{P + Q \mid Q \in S\}$$

einen **verschobenen Stempel**.



Der folgende Satz behandelt nun Ausschnitte von Untermannigfaltigkeiten von Typ (ii), welche wir auf Seite 72 eingeführt hatten.

Satz 8.7. Es sei S ein n -dimensionaler verschobener Stempel und es sei $F: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld, so dass F auf $\partial_1 S$ verschwindet. Dann gilt

$$\int_S \operatorname{div} F = \int_{\partial_0 S} F \cdot \nu$$

das äussere Normalenvektorfeld auf $\partial_0 S$

Der Beweis von Satz 8.7 besteht aus einer heroischen Rechnung und beruht, wie auf Seite 71, darauf, die Aussage von Satz 8.7 auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis I zurückzuführen. In dem Beweis werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 8.8. Es seien

$$\begin{aligned} \varphi: [a, b] \times [0, c] &\rightarrow \mathbb{R} & \text{und} & & h: [a, b] &\rightarrow [0, c] \\ (z, t) &\mapsto \varphi(z, t) & & & z &\mapsto h(z) \end{aligned}$$

glatte Funktionen. Dann gilt die Gleichheit⁴⁸

$$\frac{d}{dz} \int_{t=0}^{t=h(z)} \varphi(z, t) dt = \int_{t=0}^{t=h(z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t) dt + \varphi(z, h(z)) \cdot \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Beweis. Wir betrachten die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \Phi: [0, c] \times [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} & \Psi: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \Phi(x, y) := \int_{t=0}^{t=x} \varphi(y, t) dt & z &\mapsto \Psi(z) := \begin{pmatrix} h(z) \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann ist in der Tat

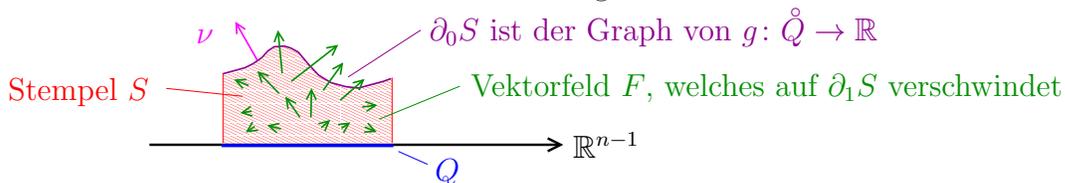
$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{t=0}^{t=h(z)} \varphi(z, t) dt &= \frac{d}{dz} (\Phi \circ \Psi)(z) \stackrel{\text{Kettenregel 2.1}}{=} D\Phi(\Psi(z)) \cdot D\Psi(z) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{t=0}^{t=x} \varphi(y, t) dt \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{t=0}^{t=x} \varphi(y, t) dt \right) \Big|_{(x,y)=\Psi(z)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial z} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\varphi(y, x) \quad \int_{t=0}^{t=x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, t) dt \right) \Big|_{(x,y)=(h(z),z)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial z} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{die beiden partiellen Ableitungen folgen aus dem HDI und Satz 3.10}}{=} \varphi(z, h(z)) \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + \int_{t=0}^{t=h(z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t) dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beweis von Satz 8.7. Wir beweisen den Satz für „unverschobene Stempel“, der Beweis für „verschobene Stempel“ ist im Prinzip identisch, der einzige Unterschied ist, dass man etwas mehr Notation mit sich schleift.

Es sei also $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein $(n-1)$ -dimensionaler Quader und zudem sei $g: Q \rightarrow (0, \infty)$ eine glatte Funktion. Wir bezeichnen mit $S \subset \mathbb{R}^n$ den dazugehörigen Stempel. Darüber hinaus sei $F = (F_1, \dots, F_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld auf S , welches auf $\partial_1 S$ verschwindet. Wie wir auf Seite 68 und im Beweis von Satz 8.4 gesehen hatten ist das äußere Einheitsnormalenfeld auf $\partial_0 S$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n): \quad \partial_0 S &\mapsto \mathbb{R}^n \\ (x', g(x')) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{Grad } g(x')\|^2}} \cdot (-\text{Grad } g(x'), 1). \end{aligned}$$

Wir wollen zuerst einen Ausdruck für das Integral einer Funktion auf der Untermannig-



⁴⁸Beide Seiten sind Funktionen in z auf $[a, b]$.

faltigkeit $\partial_0 S$ bestimmen. Wir betrachten dazu die Parametrisierung

$$\Psi: \overset{\circ}{Q} \rightarrow \partial_0 S$$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} \quad \text{dabei gilt: } D\Psi_{x'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}}_{n \times (n-1)\text{-Matrix}}$$

Für eine Funktion f auf $\partial_0 S$ gilt dann:

$$\int_{\partial_0 S} f = \int_{\substack{\uparrow \\ x' \in \overset{\circ}{Q}}} f(\Psi(x')) \cdot \sqrt{\text{Gram}(D\Psi_{x'})} dx' = \int_{\substack{\uparrow \\ x' \in \overset{\circ}{Q}}} f(\Psi(x')) \cdot \sqrt{1 + \|\text{Grad } g(x')\|^2} dx'.$$

folgt aus Satz 5.8 folgt aus der Berechnung von $D\Psi_{x'}$ und einer Berechnung in Übungsblatt 5

Nachdem $\text{div}(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ und $F \cdot \nu = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \nu_i$ genügt es folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Für $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\int_S \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \int_{\partial_0 S} F_i \cdot \nu_i.$$

Beweis. Wir unterscheiden jetzt folgende drei Fälle im Beweis der Behauptung:

Fall (A). Es sei zuerst $i = n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial F_n}{\partial x_n} & \stackrel{\text{Satz 3.8 von Fubini}}{\downarrow} \int_{x' \in Q} \int_{x_n=0}^{x_n=g(x')} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n dx' \stackrel{\text{da } F_n \text{ Stammfunktion von } \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \text{ bezüglich } x_n}{\downarrow} \int_{x' \in Q} F_n(x', g(x')) - \underbrace{F_n(x', 0)}_{=0, \text{ da } F_n|_{\partial_1 S} = 0} dx' \\ & = \int_{x' \in Q} F_n(\Psi(x')) dx' \\ & = \int_{x' \in \overset{\circ}{Q}} F_n(\Psi(x')) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{Grad } g(x')\|^2}}}_{=\nu_n(\Psi(x'))} \cdot \sqrt{1 + \|\text{Grad } g(x')\|^2} dx' = \int_{\substack{\uparrow \\ \partial_0 S}} F_n \cdot \nu_n. \end{aligned}$$

siehe oben

Fall (B). Wir betrachten nun den Fall $i = 1$. Wir zerlegen den Quader Q als $Q = [a, b] \times P$, wobei $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein $(n-1)$ -dimensionaler Quader ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \stackrel{\text{Satz 3.8 von Fubini}}{\downarrow} \int_{x'' \in P} \int_{x_1=a}^{x_1=b} \int_{x_n=0}^{x_n=g(x_1, x'')} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, x'', x_n) dx_n dx_1 dx'' \stackrel{\text{wir wollen mithilfe von Lemma 8.8 das } x_1\text{-Integral und die } \frac{\partial}{\partial x_1}\text{-Ableitung zusammenbringen}}{\downarrow} \\ & \stackrel{\text{Lemma 8.8 angewandt auf } \varphi(x_1, x_n) = F_1(x_1, x'', x_n) \text{ und } h(x_1) = g(x_1, x''), \text{ mit } x'' \in P \text{ fest gewählt}}{\downarrow} \\ & = \int_{x'' \in P} \int_{x_1=a}^{x_1=b} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_n=0}^{x_n=g(x_1, x'')} F_1(x_1, x'', x_n) dx_n - F_1(x_1, x'', g(x_1, x'')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x'') dx_1 dx'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x'' \in P} \int_{x_1=a}^{x_1=b} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_n=0}^{x_n=g(x_1, x'')} F_1(x_1, x'', x_n) dx_n dx_1 dx'' - \int_{x' \in Q} F_1(\Psi(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x') dx' \\
 &= \int_{x'' \in P} \underbrace{\int_{x_n=0}^{x_n=g(x')} F_1(b, x'', x_n) dx_n}_{=0, \text{ da } F_1|_{\partial_1 S} = 0} - \underbrace{\int_{x_n=0}^{x_n=g(x')} F_1(a, x'', x_n) dx_n dx''}_{=0, \text{ da } F_1|_{\partial_1 S} = 0} - \int_Q F_1(\Psi(x')) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x') dx' \\
 &\uparrow \\
 &\text{folgt aus } \int_{x_1=a}^{x_1=b} h(x_1) dx_1 = h(b) - h(a) \\
 &= \int_{x' \in \overset{\circ}{Q}} F_1(\Psi(x')) \cdot \underbrace{\left(- \frac{\partial g}{\partial x_1}(x') \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{Grad } g(x')\|^2}} \right)}_{= \nu_1(\Psi(x'))} \cdot \sqrt{1 + \|\text{Grad } g(x')\|^2} dx' \\
 &= \int_{\partial_0 S} F_1 \cdot \nu_1. \\
 &\uparrow
 \end{aligned}$$

siehe obige Berechnung des Integrals einer Funktion auf $\partial_0 S$

Fall (C). Es sei nun $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ beliebig. Dieser Fall wird genau wie Fall (B) bewiesen, man zerlegt dabei den Quader Q in ein Intervall, welches der i -ten Koordinate entspricht und einen $(n - 1)$ -dimensionalen Quader. ■

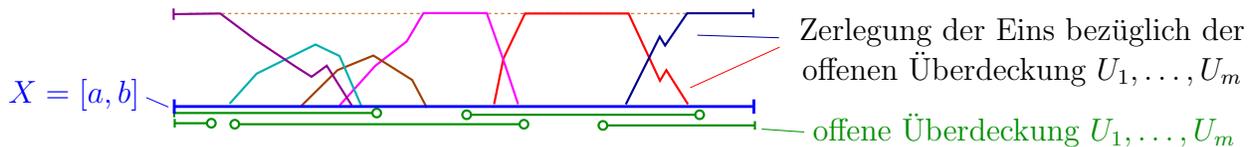
8.6. Beweis des Gaußschen Integralsatzes III: Der allgemeine Fall. In Satz 8.6 und Satz 8.7 hatten wir zwei „Spezialfälle“ des Gaußschen Integralsatzes bewiesen. Wir wollen nun den allgemeinen Fall auf „Spezialfälle“ zurückführen, in dem wir ein glattes Vektorfeld F als Summe von endlich vielen *glatten* Vektorfeldern schreiben, welche durch die beiden „Spezialfälle“ abgedeckt sind. Dies ist die gleiche Logik wie bei der Definition des Integrals einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit. Dies führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Der Träger einer Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als die Menge

$$\text{Träger}(f) := \text{Abschluss der Menge } \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

- (2) Es sei $\{U_i\}_{i=1, \dots, m}$ eine offene Überdeckung von X . Eine Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i=1, \dots, m}$ sind stetige Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m: X \rightarrow [0, 1]$, welche folgende Eigenschaften besitzen:
 - (a) für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ist $\text{Träger}(\varphi_i) \subset U_i$,
 - (b) für jedes $x \in X$ gilt $\varphi_1(x) + \dots + \varphi_m(x) = 1$.



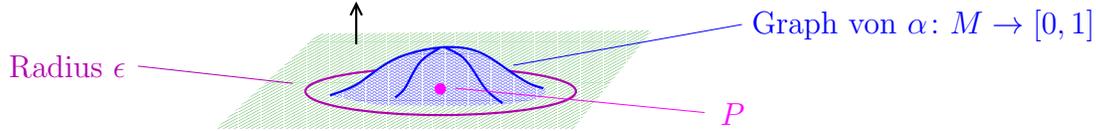
Lemma 8.9. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Zu jeder offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=1, \dots, m}$ von M gibt es eine glatte Zerlegung der Eins $\varphi_1, \dots, \varphi_m: M \rightarrow [0, 1]$.

Bemerkung. Die Aussage des Lemmas hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Aussage von Satz 5.2. Allerdings müssen wir im jetzigen Fall glatte Funktionen und nicht nur messbare Funktionen zu finden.

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit folgender Behauptung.

Behauptung. Für jedes $P \in M$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine glatte Funktion $\alpha: M \rightarrow [0, 1]$ mit $\alpha(P) > 0$ und mit $\text{Träger}(\alpha) \subset B_\epsilon^n(P)$.

Beweis. Wir werden die Behauptung in Übungsblatt 6 beweisen. \square



Es sei nun $P \in M$ beliebig. Da die U_i 's eine Überdeckung von M bilden gibt es ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $P \in U_i$. Da U_i offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon^n(P) \cap M \subset U_i$. Wir wählen α_P wie in der Behauptung und wir setzen $V_P := \{x \in M \mid \alpha_P(x) \neq 0\}$.

Die Mengen $\{V_P\}_{P \in M}$ bilden eine offene Überdeckung von M . Es folgt aus der Kompaktheit von M , dass es endlich viele $P_1, \dots, P_k \in M$ gibt, so dass

$$M = \bigcup_{j=1}^k V_{P_j}.$$

Für $j = 1, \dots, k$ setzen wir $\alpha_j := \alpha_{P_j}$. Für alle $x \in M$ gilt dann $\alpha_1(x) + \dots + \alpha_k(x) > 0$. Deshalb können wir für $j = 1, \dots, k$ folgende Funktion einführen:

$$\begin{aligned} \beta_j: M &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \frac{\alpha_j(x)}{\alpha_1(x) + \dots + \alpha_k(x)}. \end{aligned}$$

Diese Funktionen β_1, \dots, β_k erfüllen Eigenschaft (2) einer Zerlegung der Eins, aber noch nicht Eigenschaft (1). Für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ wählen wir nun ein $i(j) \in \{1, \dots, m\}$ mit $\text{Träger}(\beta_j) \in U_{i(j)}$. Für $i = 1, \dots, m$ setzen wir

$$\begin{aligned} \varphi_i: M &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \sum_{\text{alle } j \text{ mit } i(j) = i} \beta_j. \end{aligned}$$

Diese Funktionen besitzen die gewünschten Eigenschaften. \blacksquare

Wir sind jetzt in der Lage den Gaußschen Integralsatz 8.5 zu beweisen.

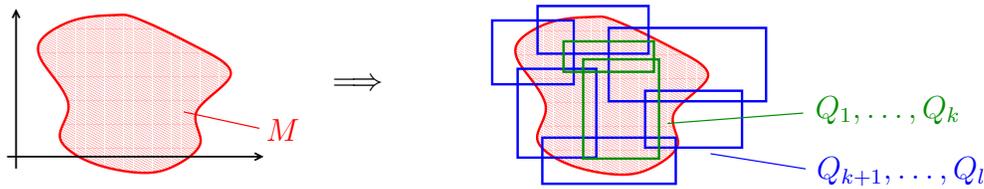
Beweis des Gaußschen Integralsatz. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit von Kodimension Null und es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Wir wollen zuerst folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Es gibt Quader Q_1, \dots, Q_l und $k \in \{1, \dots, l\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) es ist $M \subset \overset{\circ}{Q}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{Q}_l$,
- (2) für $i = 1, \dots, k$ ist $Q_i \subset M \setminus \partial M$,
- (3) für $i = k + 1, \dots, l$ gibt es eine Permutationsmatrix P_i , so dass $P_i \cdot (Q_i \cap M)$ ein verschobener Stempel mit Stempelfläche $P_i \cdot (\overset{\circ}{Q}_i \cap \partial M)$ ist.

Beweis. Es sei $X \in M$ beliebig.

- (A) Wenn $X \in M \setminus \partial M$ liegt, dann gibt es offensichtlich einen Quader Q_X mit $X \in \overset{\circ}{Q}_X$, so dass $Q_X \subset M \setminus \partial M$.



(B) Es sei nun $X \in \partial M$. Es folgt aus Satz 6.4, dass es eine Permutationsmatrix P_X und einen Quader Q_X mit $X \in \overset{\circ}{Q}_X$ gibt, so dass $P_X \cdot (Q_X \cap M)$ ein verschobener Stempel ist mit Stempelfläche $P_X \cdot (\overset{\circ}{Q}_X \cap \partial M)$.

Nachdem die offene Menge $\{\overset{\circ}{Q}_X\}_{X \in M}$ die Untermannigfaltigkeit M überdecken, und nachdem M kompakt ist, gibt es endliche viele $X_1, \dots, X_l \in M$, so dass $M \subset \overset{\circ}{Q}_{X_1} \cup \dots \cup \overset{\circ}{Q}_{X_l}$. Die dazugehörigen Quader besitzen nun (möglicherweise nach einer Ummummerierung) die gewünschten Eigenschaften. \square

Nach Lemma 8.9 gibt es glatte Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_l: M \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\varphi_1 + \dots + \varphi_l = 1$,
- (2) für alle $i \in \{1, \dots, l\}$ gilt $\text{Träger}(\varphi_i) \subset \overset{\circ}{Q}_i$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_M \text{div } F & \stackrel{\text{denn } \varphi_1 + \dots + \varphi_l = 1}{=} \int_M \text{div} \left(\sum_{i=1}^l \varphi_i \cdot F \right) = \sum_{i=1}^l \int_M \text{div}(\varphi_i \cdot F) & \stackrel{\text{denn } \text{Träger}(\varphi_i) \subset \overset{\circ}{Q}_i}{=} \sum_{i=1}^l \int_{M \cap \overset{\circ}{Q}_i} \text{div}(\varphi_i \cdot F), \\
 & \underbrace{\sum_{i=1}^k \int_{M \cap \overset{\circ}{Q}_i} \text{div}(\varphi_i \cdot F)}_{= 0, \text{ nach Satz 8.6, denn } \varphi_i \cdot F \text{ verschwindet auf } \partial \overset{\circ}{Q}_i} + \sum_{i=k+1}^l \int_{M \cap \overset{\circ}{Q}_i} \text{div}(\varphi_i \cdot F) & = \sum_{i=k+1}^l \int_{\partial M \cap \overset{\circ}{Q}_i} (\varphi_i \cdot F) \cdot \nu \\
 & \stackrel{\text{folgt aus Satz 8.7, denn } \varphi_i \cdot F \text{ verschwindet auf } \partial \overset{\circ}{Q}_i}{=} \sum_{i=k+1}^l \int_{\partial M} (\varphi_i \cdot F) \cdot \nu = \int_{\partial M} \left(\sum_{i=k+1}^l \varphi_i \cdot F \right) \cdot \nu & = \int_{\partial M} F \cdot \nu. \\
 & \stackrel{\text{denn } \text{Träger}(\varphi_i) \subset \overset{\circ}{Q}_i}{\uparrow} & \stackrel{\text{denn } \varphi_{k+1} + \dots + \varphi_l = 1 \text{ auf } \partial M}{\uparrow}
 \end{aligned}$$

Wir haben damit den Gaußschen Integralsatz bewiesen. \blacksquare

8.7. Der Gaußsche Integralsatz für Untermannigfaltigkeiten mit Kanten. In diesem Kapitel formulieren wir den Gaußschen Integralsatz 8.5 für Untermannigfaltigkeiten mit Kanten. Dieser ist sehr hilfreich für Berechnungen, aber wir werden diesen im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht mehr verwenden. Wir erlauben uns daher gewisse Freiheiten in den Formulierungen und wir werden den Beweis nur sehr schemenhaft skizzieren.

Definition.

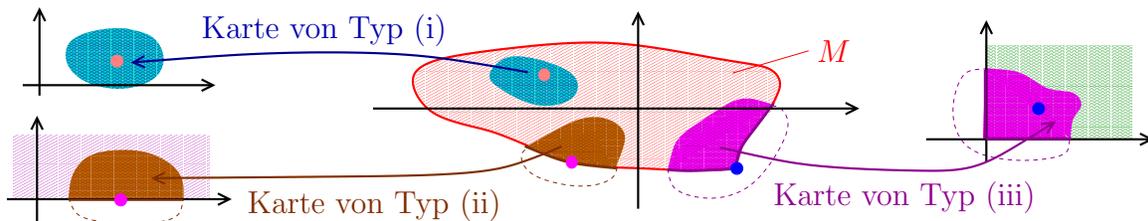
- (1) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Kante, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine Karte gibt, also einen Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow$

V zwischen einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass

- (i) $\Phi(U \cap M) = V \cap E_k$, oder
- (ii) $\Phi(U \cap M) = V \cap H_k$ mit $\Phi(a) \in \partial H_k$, oder
- (iii) es gibt ein $m \geq 2$, so dass

$$\begin{aligned} \Phi(U \cap M) &= V \cap \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_{k-m+1}, \dots, x_k > 0\} \\ \Phi(a) &\in \mathbb{R}^{k-m} \times \{0\}. \end{aligned}$$

- (2) Der Rand ∂M ist definiert als die Menge aller Punkte, welche eine Karte von Typ (ii) besitzen. Die Kante $\angle M$ ist definiert als die Menge aller Punkte, welche eine Karte von Typ (iii) besitzen.



Beispiel.

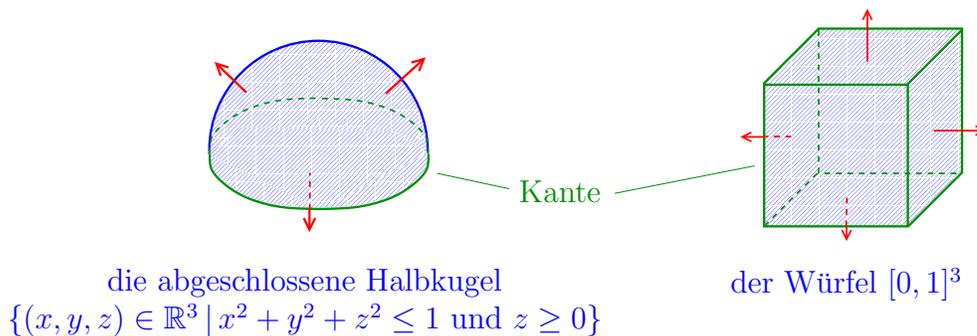
- (1) Die abgeschlossene Halbkugel

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$$

ist eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit der Kante

$$\angle M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z = 0\}.$$

- (2) Der Würfel $M = [0, 1]^3$ ist eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Kante.



Wir können nun folgende Verallgemeinerung des Gaußschen Integralsatz 8.5 formulieren.

Satz 8.10. (Gaußscher Integralsatz für Untermannigfaltigkeiten mit Kante) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Kante und es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Dann gilt

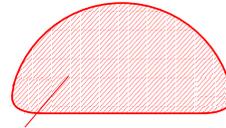
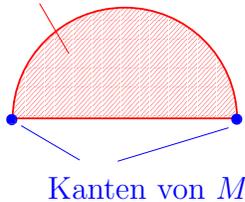
$$\text{Fluss von } F \text{ durch } \partial M = \int_M \text{div } F.$$

Plausibilitätsargument. Der Satz wird in [L, Theorem 16.25] bewiesen. Wir geben im Folgenden nur ein Plausibilitätsargument. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ also eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Kante und es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Dann ist

es halbwegs plausibel, dass es eine Folge von kompakten n -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten W_k , $k \in \mathbb{N}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

- (1) für alle k ist $W_k \subset M$,
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(M \setminus W_k) = 0$,
- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(\partial M \Delta \partial W_k) = 0$.⁴⁹

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } y \geq 0\}$$



W_k erhält man durch "Rundung" der Kanten in einer kleinen Umgebung

Wir bezeichnen mit ν das äußere Einheitsnormalenfeld von M und von allen W_k 's. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Fluss von } F \text{ durch } \partial M &= \int_{\partial M} F \cdot \nu \stackrel{\text{da } \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(\partial M \Delta \partial W_k) = 0}{\downarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial W_k} F \cdot \nu \stackrel{\text{Gaußscher Integralsatz 8.5}}{\uparrow} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{W_k} \text{div } F \stackrel{\text{da } \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(M \setminus W_k) = 0}{\downarrow} \int_M \text{div } F. \end{aligned}$$

■

Beispiel. Es sei

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}$$

die obere Hälfte der Sphäre S^2 . Wir betrachten A mit dem Einheitsnormalenfeld, welches „nach außen“ zeigt, also gegeben ist durch $\nu(x, y, z) = (x, y, z)$. Wir wollen den Fluss des konstanten Vektorfelds $F = (1, 5y, 3)$ durch A bestimmen. Man kann natürlich versuchen direkt mit der Definition zu arbeiten, allerdings ist es normalerweise unangenehm über A zu integrieren. Wir werden jetzt den Gaußschen Integralsatz 8.10 verwenden um die Berechnung zu vereinfachen.

Wir betrachten dazu die Untermannigfaltigkeit

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}.$$

Es gilt $\partial M = A \cup B$, wobei B die „untere Kreisscheibe“ ist, d.h.

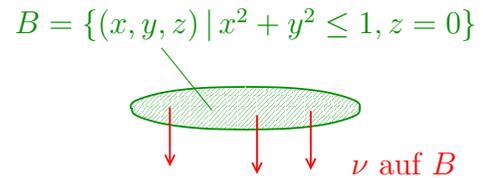
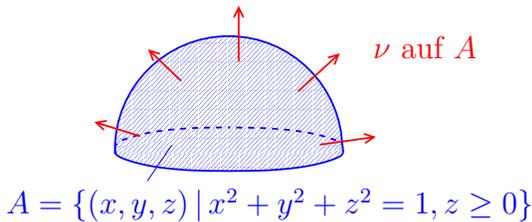
$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 0\}.$$

Es sei ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M . Auf A entspricht das gerade dem Einheitsnormalenfeld, welches wir schon eingeführt hatten. Auf B ist dies das Einheitsnormalenfeld

⁴⁹Hier bezeichnen wir, wie in Analysis III, mit $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz von zwei Teilmengen A und B von \mathbb{R}^n .

welches auch „nach oben“ zeigt. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \text{Fluss von } F \text{ durch } A &= \underbrace{\text{Fluss von } F \text{ durch } A + \text{Fluss von } F \text{ durch } B}_{\text{Fluss von } F \text{ durch } \partial M} - \text{Fluss von } F \text{ durch } B \\
 &= \int_M \operatorname{div} \begin{pmatrix} 1 \\ 5y \\ 3 \end{pmatrix} - \int_B \begin{pmatrix} 1 \\ 5y \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \int_M 5 - \int_B -3 \\
 &\stackrel{\text{Gaußsche Integralsatz 8.10}}{\uparrow} \\
 &= 5 \cdot \operatorname{Vol}(M) + 3 \cdot \text{Flächeninhalt von } B = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi + 3 \cdot \pi = \pi.
 \end{aligned}$$



8.8. Ausblick. Der *klassische* Satz von Stokes, vielen bekannt aus der Physik, besagt, dass für eine orientierte kompakte Fläche $(M, \vec{\nu})$ in \mathbb{R}^3 und ein glattes Vektorfeld $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ auf M die Gleichheit⁵⁰

$$\int_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{\nu} = \int_{\gamma=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$$

gilt. Hierbei ist die *Rotation* von \vec{F} definiert als das Vektorfeld

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Unser Ziel ist es die „korrekte“ Verallgemeinerung dieser Aussage auf den höherdimensionalen Fall zu finden, und diese dann für alle Dimensionen zu beweisen. Wir müssen dazu erst einmal relativ viele neue mathematische Objekte einführen. Der allgemeine Satz von Stokes (welcher den klassischen Fall einschließt) wird dann jedoch eine sehr kurze und elegante Formulierung besitzen, und der Beweis wird am Ende erstaunlich kurz sein.

⁵⁰Auf der rechten Seite integrieren wir über das Skalarprodukt von F mit dem Ableitungsvektor einer Parametrisierung der Kurve $\gamma = \partial M$.

9. KATEGORIEN UND FUNKTOREN

9.1. Induzierte Abbildungen auf Tangentialräumen.

Definition. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit und es sei $P \in M$. Wir sagen zwei Kurven $\alpha: I \rightarrow M$ und $\beta: J \rightarrow M$ durch P sind äquivalent, wenn $\alpha'(0) = \beta'(0)$. Für eine Kurve α in M durch P bezeichnen wir mit $[\alpha]$ die Äquivalenzklasse von α . Die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Menge der Äquivalenzklassen} \\ \text{von Kurven in } M \text{ durch } P \end{array} \right\} \rightarrow T_P M$$

$$[\gamma] \rightarrow \gamma'(0)$$

ist offensichtlich eine Bijektion. Wir verwenden diese Bijektion im Folgenden um $T_P M$ mit der Menge der Äquivalenzklassen von Kurven in M durch P zu identifizieren.⁵¹

Dieser Gesichtspunkt scheint auf den ersten Blick etwas verwirrend, aber er erleichtert oft die Notation:

Definition. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten und es sei $P \in M$. Wir betrachten die Abbildung⁵²

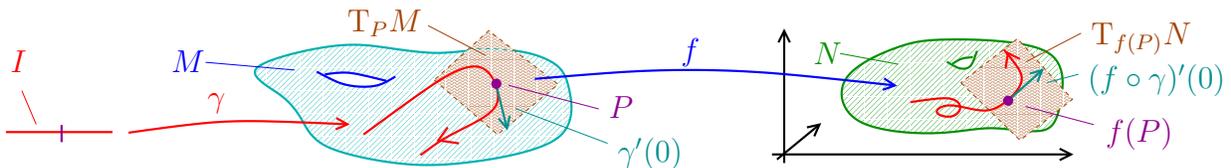
$$Df_P: T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$$

$$[\gamma: I \rightarrow M] \rightarrow [f \circ \gamma: I \rightarrow N].$$

Wir bezeichnen die Abbildung $Df_P: T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$ oft auch nur mit f_* und wir nennen $f_* = Df_P$ die induzierte Abbildung. In der ursprünglichen Betrachtungsweise von Tangentialräumen ist die Abbildung also gegeben durch

$$Df_P: T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$$

$$\gamma'(0) \rightarrow (f \circ \gamma)'(0).$$



Lemma 9.1. Die obige Abbildung $f_* = Df_P: T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$ ist wohldefiniert.

Beweis (*). Wir bezeichnen mit m die Dimension von M . Es seien $\gamma: I \rightarrow M$ und $\delta: J \rightarrow M$ zwei äquivalente Kurven durch P . Indem wir I und J auf ein kleineres Intervall einschränken können wir annehmen, dass $I = J$, und dass es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um P gibt, so dass das Bild von γ und δ in $U \cap M$ liegt. Wir schreiben $g := f \circ \Phi^{-1}$ und wir setzen $Q := \Phi(P)$. Wir betrachten nun also folgende Abbildungen

$$I \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} U \cap M \xrightarrow{f} N$$

$$\downarrow \Phi \nearrow g = f \circ \Phi^{-1}$$

$$V \cap E_m.$$

⁵¹Wir verwenden insbesondere diese Bijektion um die Vektorraumstruktur auf der Menge der Äquivalenzklassen einzuführen.

⁵²Mit der ursprünglichen Definition des Tangentialraumes wäre diese Abbildung deutlich umständlicher hinzuschreiben.

Wie immer fassen wir $V \cap E_m$ als offene Teilmenge von \mathbb{R}^m auf. Dann ist

$$(f \circ \gamma)'(0) = (g \circ \Phi \circ \gamma)'(0) = Dg_Q \cdot D\Phi_P \cdot \gamma'(0) = Dg_Q \cdot D\Phi_P \cdot \delta'(0) = (f \circ \delta)'(0).$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 denn $g = f \circ \Phi^{-1}$ Kettenregel 2.1 denn $\gamma'(0) = \delta'(0)$ das gleiche Argument rückwärts

Wir haben also gezeigt, dass $f \circ \gamma$ und $f \circ \delta$ ebenfalls äquivalent sind. ■

Bemerkung. Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ erhalten wir für jedes $P \in U$ eine Abbildung

$$f_* = Df_P: T_P U = \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(P)} \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m.$$

Es folgt aus der Kettenregel, dass diese Abbildung gegeben ist durch die Multiplikation mit dem üblichen Differential $Df_P \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Insbesondere ist in diesem Fall die Abbildung $f_* = Df_P$ eine lineare Abbildung.

Satz 9.2.

- (1) Es seien $f: L \rightarrow M$ und $g: M \rightarrow N$ glatte Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten und es sei $P \in L$. Dann ist⁵³

$$D(g \circ f)_P = Dg_{f(P)} \circ Df_P.$$

Mit anderen Worten:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

- (2) Für jede Untermannigfaltigkeit M und jeden Punkt $P \in M$ gilt

$$(D \text{id}_M)_P = \text{id}_{T_P M},$$

oder kürzer:

$$(\text{id}_M)_* = \text{id}_{T_P M}.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die erste Aussage. Es sei also $[\gamma: I \rightarrow L] \in T_P L$. Dann ist $D(g \circ f)_P([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = Dg_{f(P)}([f \circ \gamma]) = (Dg_{f(P)} \circ Df_P)([\gamma])$. In der alternativen Schreibweise ist der Beweis noch kürzer, denn es ist

$$(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f \circ \gamma]) = g_*(f_*([\gamma])).$$

Die zweite Aussage des Satzes ist trivial. ■

Korollar 9.3. Es sei $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zwischen Untermannigfaltigkeiten. Für alle $P \in M$ gilt

$$D(f^{-1})_{f(P)} = (Df_P)^{-1}.$$

Mit anderen Worten, es ist

$$(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*.$$

Insbesondere ist $Df_P = f_*: T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$ eine Bijektion.

Beweis. Es ist

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = \text{id}_* = \text{id}_{T_{f(P)} N}.$$

\uparrow \uparrow
 Satz 9.2 (1) Satz 9.2 (2)

Ganz analog zeigt man auch, dass $(f^{-1})_* \circ f_* = \text{id}$, also sind $(f^{-1})_*$ und f_* zueinander inverse Abbildungen. Insbesondere ist f_* eine Bijektion. ■

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgendem Satz.

⁵³Dies ist also eine Gleichheit von Abbildung $T_P L \rightarrow T_{g(f(P))} N$.

Satz 9.4. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten. Für jedes $P \in M$ ist

$$f_* = Df_P: T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$$

eine lineare Abbildung.

Beweis (*). Es sei also $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen einer m -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M und einer n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit N . Es sei nun $P \in M$. Wir wählen eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um P und wir wählen zudem eine Karte $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ um $\tilde{P} := f(P)$ mit $f(U) \subset \tilde{U}$. Wir bezeichnen mit $\Psi := \Phi^{-1}$ und $\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}^{-1}$ die Umkehrabbildungen und wir setzen $Q := \Phi(P)$ und $\tilde{Q} := \tilde{\Phi}(\tilde{P})$. Wir betrachten die folgenden Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} U \cap M & \xrightarrow{f} & \tilde{U} \cap N \\ \Phi \downarrow \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \Psi \end{array} \right. & & \tilde{\Psi} \left(\begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ \tilde{\Phi} \end{array} \right. \\ V \cap E_m & \xrightarrow{\tilde{\Phi} \circ f \circ \Psi} & \tilde{V} \cap E_n. \end{array}$$

Dies ist ein kommutatives Diagramm von Abbildungen.⁵⁴ Wir erhalten das entsprechende Diagramm von induzierten Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} T_P M & \xrightarrow{Df_P} & T_Q N \\ D\Phi_P \downarrow \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ D\Psi_Q \end{array} \right. & & D\tilde{\Psi}_{\tilde{Q}} \left(\begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ D\tilde{\Phi}_{\tilde{P}} \end{array} \right. \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\tilde{\Phi} \circ f \circ \Psi)_Q} & \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Es folgt aus Satz 9.2, dass auch dieses Diagramm kommutiert.⁵⁵ Es folgt aus der Bemerkung auf Seite 83, dass die Abbildungen $D\Psi_Q$ und $D\tilde{\Psi}_{\tilde{Q}}$ sowie $D(\tilde{\Phi} \circ f \circ \Psi)_Q$ linear sind. Zudem folgt aus Korollar 9.3, dass $D\Psi_Q = (D\Phi_P)^{-1}$ und $D\tilde{\Psi}_{\tilde{Q}} = (D\tilde{\Phi}_{\tilde{P}})^{-1}$. Insbesondere sind die vertikalen Abbildungen links beziehungsweise rechts zueinander inverse Homomorphismen von Vektorräumen. Es folgt nun, dass

$$Df_P = D\tilde{\Psi}_{\tilde{Q}} \circ D(\tilde{\Phi} \circ f \circ \Psi)_Q \circ D\Phi_P$$

die Verknüpfung von drei linearen Abbildungen ist. Also ist auch Df_P selber eine lineare Abbildung. ■

9.2. Duale Vektorräume.

Definition. Es sei \mathbb{K} ein Körper und es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(1) Wir bezeichnen

$$V^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$$

als den zu V dualen Vektorraum. Dies ist wiederum ein \mathbb{K} -Vektorraum.

⁵⁴Wir sagen ein Diagramm von Abbildungen ist kommutativ, wenn es egal ist, in welcher Reihenfolge wir die Abbildungen durchlaufen. In diesem Fall bedeutet das, dass die Verknüpfung der Abbildungen oben und rechts, die gleiche Abbildung ergibt wie die Verknüpfung der Abbildungen links und unten.

⁵⁵In der Tat, denn es ist

$$D(\tilde{\Phi} \circ f \circ \Psi)_Q \circ D\Phi_P = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 9.2}}}{D(\tilde{\Phi} \circ f \circ \Psi \circ D\Phi)_P} = D(\tilde{\Phi} \circ f)_P = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 9.2}}}{D\tilde{\Phi}_{\tilde{P}} \circ Df_P}.$$

- (2) Wir nehmen nun an, dass V endlich dimensional ist. Es sei v_1, \dots, v_k eine Basis von V . Jeder Vektor $w \in V$ kann also eindeutig als Linearkombination

$$w = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$$

geschrieben werden. Für $i = 1, \dots, k$ betrachten wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned} v_i^*: V &\rightarrow \mathbb{K} \\ w &\mapsto v_i^*(w) := \text{Koeffizient von } v_i \text{ in der eindeutigen Darstellung} \\ &\quad \text{von } w \text{ als Linearkombination von } v_1, \dots, v_k. \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, die Abbildungen $v_1^*, \dots, v_k^*: V \rightarrow \mathbb{K}$ sind die eindeutig bestimmten Abbildungen, welche die Eigenschaft besitzen, dass

$$w = v_1^*(w) \cdot v_1 + \dots + v_k^*(w) \cdot v_k \quad \text{für alle } w \in V.$$

Man kann nun leicht zeigen, dass v_1^*, \dots, v_k^* lineare Abbildungen sind. Es folgt aus dem nächsten Lemma, dass $\{v_1^*, \dots, v_k^*\}$ eine Basis von V^* bilden, insbesondere ist also V^* ein \mathbb{K} -Vektorraum der Dimension $k = \dim(V)$ ist. Wir nennen $\{v_1^*, \dots, v_k^*\}$ die zu $\{v_1, \dots, v_k\}$ **duale Basis**.

Lemma 9.5. Es sei \mathbb{K} ein Körper und es sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum V . Dann ist $\{v_1^*, \dots, v_k^*\}$ eine Basis von V^* .

Beweis. Wir werden das Lemma in Übungsblatt 6 beweisen. ■

Bemerkung. Wenn V endlich dimensional ist, dann gibt es zu jeder *Basis* von V eine eindeutig bestimmte *duale Basis* von V^* . Allerdings kann man nicht jedem einzelnen *Vektor* in V einen eindeutig bestimmten *Vektor* in V^* zuordnen.

Definition. Es sei \mathbb{K} ein Körper und es sei $f: U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen beliebiger Dimension. Wir erhalten dann eine Abbildung

$$\begin{aligned} f^*: V^* &\rightarrow U^* \\ (\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}) &\mapsto (\varphi \circ f: U \rightarrow \mathbb{K}), \end{aligned}$$

welche wir als die **induzierte Abbildung** bezeichnen. Die Abbildung f^* geht hierbei in die „umgekehrte Richtung“.

Das folgende elementare Lemma faßt einige grundlegende Eigenschaften von induzierten Abbildungen zusammen.

Lemma 9.6. Es seien U, V und W reelle Vektorräume.

- (1) Es seien $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann gilt ⁵⁶

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

- (2) Für die Identitätsabbildung $\text{id}: V \rightarrow V$ ist auch $\text{id}^*: V^* \rightarrow V^*$ die Identitätsabbildung, d.h. es gilt

$$\text{id}^* = \text{id}.$$

Beweis. Wir geben den elementaren Beweis in Übungsblatt 6. ■

⁵⁶Mit anderen Worten, das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & V^* & \\ g^* \nearrow & & \searrow f^* \\ W^* & \xrightarrow{(g \circ f)^*} & U^* \end{array}$$

Korollar 9.7. Es sei \mathbb{K} ein Körper und es sei $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen. Dann ist auch $f^*: W^* \rightarrow V^*$ ein Isomorphismus mit $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Beweis. Der Beweis von Korollar 9.7 ist ganz ähnlich dem Beweis von Korollar 9.3. Es sei also $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen. Es ist

$$f^* \circ (f^{-1})^* = (f^{-1} \circ f)^* = \text{id}^* = \text{id}.$$

\uparrow Lemma 9.6 (1) \uparrow Lemma 9.6 (2)

Ganz analog zeigt man auch, dass $(f^{-1})^* \circ f^* = \text{id}$, also sind $(f^{-1})^*$ und f^* zueinander inverse Abbildungen. Insbesondere ist f^* ein Isomorphismus. ■

9.3. Kategorien. Die Aussagen von Satz 9.2 und von Lemma 9.6 besitzen eine große formale Ähnlichkeit und wir hatten diese Ähnlichkeit benützt, um für Korollar 9.3 und Korollar 9.7 fast identische Beweise anzugeben.

In diesem kurzen Kapitel führen wir nun „Kategorien“ und „Funktoren“ ein. Diese Begriffe geben uns eine Sprache um die formalen Gemeinsamkeiten der Aussagen der vorherigen beiden Kapitel herauszuarbeiten. Die Begriffe „Kategorie“ und „Funktork“ werden in sehr vielen Bereichen der reinen Mathematik verwendet und wir wollen uns daher in diesem Kapitel nicht nur auf Beispiele aus der Analysis beschränken.

Definition. Eine Kategorie \mathcal{C} besteht aus folgenden Daten:

- (1) Einer Klasse⁵⁷ $\text{Ob}(\mathcal{C})$, die Elemente von $\text{Ob}(\mathcal{C})$ werden die Objekte der Kategorie genannt,
- (2) zu jedem Paar (X, Y) von Objekten gibt es eine Menge $\text{Mor}(X, Y)$,
- (3) zu je drei Objekten X, Y und Z gibt es eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) &\rightarrow \text{Mor}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

genannt Verknüpfungsabbildung, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

(K1) (Assoziativität): Es seien $f \in \text{Mor}(W, X)$, $g \in \text{Mor}(X, Y)$ und $h \in \text{Mor}(Y, Z)$, dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

(K2) (Identität): Zu jedem Objekt X gibt es einen Morphismus⁵⁸ $\text{id}_X \in \text{Mor}(X, X)$ mit der Eigenschaft, dass gilt

$$\begin{aligned} \text{id}_X \circ f &= f \quad \text{für alle } W \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \text{ und alle } f \in \text{Mor}(W, X), \text{ sowie} \\ f \circ \text{id}_X &= f \quad \text{für alle } Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \text{ und alle } f \in \text{Mor}(X, Y). \end{aligned}$$

Beispiele.

⁵⁷Ich gehe hier jetzt nicht weiter auf das Wort „Klasse“ ein. Anschaulich gesprochen ist eine „Klasse“ eine Verallgemeinerung des Begriffs der „Menge“. Zum Beispiel macht es keinen Sinn von der „Menge aller Gruppen“ zu reden, genau so wenig wie es Sinn macht von der „Menge aller Mengen“ zu reden. Aber es macht Sinn von der „Klasse aller Gruppen“ zu reden, siehe beispielsweise

https://de.wikipedia.org/wiki/Klasse_Mengenlehre

Wir überlassen diese heikle Geschichte lieber den Logikern.

⁵⁸Wir werden in Übungsblatt 6 sehen, dass id_X eindeutig bestimmt ist.

- (a) Wir nennen die Kategorie **Menge** mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathbf{Menge}) &:= \text{alle Mengen,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \text{alle Abbildungen von } X \text{ nach } Y,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die **Kategorie aller Mengen**.

- (b) Wir betrachten die Kategorie **C** mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathbf{C}) &:= \text{alle Mengen,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \begin{cases} \{\text{id}_X\}, & \text{wenn } X = Y \\ \emptyset, & \text{wenn } X \neq Y. \end{cases}\end{aligned}$$

Die Verknüpfungsabbildung muss nur definiert werden, wenn $X = Y = Z$, und in diesem Fall definieren wir $\text{id}_X \circ \text{id}_X := \text{id}_X$. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass dies eine Kategorie definiert.

- (c) Es sei \mathbb{K} ein Körper. Wir nennen die Kategorie **Vekt $_{\mathbb{K}}$** mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathbf{Vekt}_{\mathbb{K}}) &:= \text{alle } \mathbb{K}\text{-Vektorräume,} \\ \text{Mor}(V, W) &:= \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \text{alle } \mathbb{K}\text{-Homomorphismen von } V \text{ nach } W,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Homomorphismen die **Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume**.

- (d) Wir nennen die Kategorie **Gr** mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathbf{Gr}) &:= \text{alle Gruppen,} \\ \text{Mor}(G, H) &:= \text{Hom}(G, H) = \text{alle Gruppenhomomorphismen von } G \text{ nach } H,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Gruppenhomomorphismen die **Kategorie der Gruppen**. Ganz analog kann man auch die Kategorie der abelschen Gruppen einführen.

- (e) Wir nennen die Kategorie **Top** mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathbf{Top}) &:= \text{alle topologischen Räume,} \\ \text{Mor}(X, Y) &:= \text{alle stetigen Abbildungen von } X \text{ nach } Y,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die **Kategorie der topologischen Räume**.

- (f) Wir nennen die Kategorie **UM** mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathbf{UM}) &:= \text{alle Untermannigfaltigkeiten,} \\ \text{Mor}(M, N) &:= \text{alle glatten Abbildungen von } M \text{ nach } N,\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die **Kategorie der Untermannigfaltigkeiten**.

- (g) Eine **punktierte Untermannigfaltigkeit** ist ein Paar (M, P) , wobei M eine Untermannigfaltigkeit ist und $P \in M$. Wir nennen die Kategorie **PUM** mit

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathbf{PUM}) &:= \{\text{alle punktierten Untermannigfaltigkeiten}\}, \\ \text{Mor}((M, P), (N, Q)) &:= \left\{ \begin{array}{l} \text{alle glatten Abbildungen } f \\ \text{von } M \text{ nach } N \text{ mit } f(P) = Q \end{array} \right\}\end{aligned}$$

mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen die **Kategorie der punktierten Untermannigfaltigkeiten**.

Der Name „Morphismus“ suggeriert, dass es sich bei Morphismen um Abbildungen handelt. Dies ist aber nicht notwendigerweise der Fall, wie wir im folgenden Beispiel sehen.

(h) Es sei G eine beliebige Gruppe. Wir betrachten

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\mathcal{C}) &:= \{\text{eine Menge mit einem einzigen Element } *\}, \\ \text{Mor}(*, *) &:= G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{und wir definieren} \quad \text{Mor}(*, *) \times \text{Mor}(*, *) &\rightarrow \text{Mor}(*, *) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f := gf\end{aligned}$$

mittels der Gruppenstruktur auf $\text{Mor}(*, *) = G$. Die Axiome einer Kategorie folgen dann aus den Gruppenaxiomen von G .

9.4. Funktoren.

Definition. Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Ein **kovarianter Funktor** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung

$$F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$$

für alle $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es zudem eine Abbildung

$$\begin{aligned}\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ \phi &\mapsto F(\phi),\end{aligned}$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind:

(F1) Für alle $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und alle $\psi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, gilt folgende Gleichheit in $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Z))$:

$$F(\psi \circ \phi) = F(\psi) \circ F(\phi).$$

(F2) Für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ gilt

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$$

Konvention. Für einen kovarianten Funktion $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und einen Morphismus ϕ schreiben wir oft ϕ_* anstatt $F(\phi)$. Die beiden Axiome (F1) und (F2) verkürzen sich dann zu $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ und $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{F(X)}$.

Beispiele.

(1) Es sei \mathbb{K} ein Körper und $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{K}}$ die Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume und es sei W ein Vektorraum, dann ist

$$\begin{aligned}F: \text{Ob}(\mathcal{Vekt}_{\mathbb{K}}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{Vekt}_{\mathbb{K}}) \\ V &\mapsto \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V),\end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned}\text{Mor}(U, V) &\mapsto \text{Mor}(F(U), F(V)) \\ (\phi: U \rightarrow V) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \phi_*: \text{Hom}(W, U) &\rightarrow & \text{Hom}(W, V) \\ & f &\mapsto \phi \circ f \end{array} \right)\end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor.⁵⁹ Folgendes Diagramm illustriert die Aussage von Axiom (F1):

⁵⁹In der Tat, denn sei $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$ und $\psi \in \text{Mor}(Y, Z)$ und es sei $f \in \text{Hom}(W, X)$, dann gilt

$$F(\psi \circ \phi)(f) = (\psi \circ \phi)(f) = \psi \circ (\phi \circ f) = \psi \circ F(\phi)(f) = F(\psi)(F(\phi)(f)) = (F(\psi) \circ F(\phi))(f).$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & \psi \circ \phi & & \\
& \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\
X & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & Y & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & Z \\
\downarrow \text{wavy} & & \downarrow \text{wavy} & & \downarrow \text{wavy} \\
\text{Hom}(W, X) & \xrightarrow{\quad \phi_* \quad} & \text{Hom}(W, Y) & \xrightarrow{\quad \psi_* \quad} & \text{Hom}(W, Z) \\
& \xrightarrow{\quad (\psi \circ \phi)_* \quad} & & &
\end{array}$$

- (2) Es sei \mathcal{PUM} die Kategorie der punktierten Untermannigfaltigkeiten und es sei $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}$ die Kategorie der reellen Vektorräume. Es folgt aus Satz 9.2 zusammen mit Satz 9.4, dass

$$\begin{aligned}
F: \text{Ob}(\mathcal{PUM}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}) \\
(M, P) &\mapsto T_P M,
\end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned}
\text{Mor}((M, P), (N, Q)) &\mapsto \text{Mor}(T_P M, T_Q N) \\
f &\mapsto f_* = Df_P
\end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor von der Kategorie der punktierten Untermannigfaltigkeiten zu der Kategorie der reellen Vektorräume ist.

- (3) Es sei \mathcal{AbGr} die Kategorie der abelschen Gruppen, es sei \mathbb{K} ein Körper und es sei $\mathcal{Vect}_{\mathbb{K}}$ die Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume. Dann ist⁶⁰

$$\begin{aligned}
F: \text{Ob}(\mathcal{AbGr}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{Vect}_{\mathbb{K}}) \\
G &\mapsto G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K},
\end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned}
\text{Mor}(G, H) &\mapsto \text{Mor}(G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}, H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}) \\
(f: G \rightarrow H) &\mapsto (f_* := f \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id}: G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K} \rightarrow H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K})
\end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppe zu der Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume. Wir werden dieses Beispiel im weiteren Verlauf nicht verwenden.

Definition. Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Ein **kontravarianter Funktor** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung

$$F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$$

und für alle $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es zudem eine Abbildung

$$\begin{aligned}
\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X)) \\
\phi &\mapsto F(\phi)
\end{aligned}$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind:

- (F1) Für alle $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und alle $\psi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, gilt folgende Gleichheit in $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(Z), F(X))$:

$$F(\psi \circ \phi) = F(\phi) \circ F(\psi).$$

- (F2) Für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ gilt

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$$

⁶⁰Hierbei bezeichnet $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ das Tensorprodukt von G und \mathbb{K} , wobei wir beide als \mathbb{Z} -Moduln auffassen.

Konvention. Für einen kontravarianten Funktion $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und einen Morphismus ϕ schreiben wir oft ϕ^* anstatt $F(\phi)$. Die beiden Axiome (F1) und (F2) verkürzen sich dann zu $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ und $(\text{id}_X)^* = \text{id}_{F(X)}$.

Bemerkung. Die Verknüpfung von zwei kovarianten Funktoren ist wiederum ein kovarianter Funktor. Eine Verknüpfung von einem kovarianten mit einem kontravarianten Funktor ist ein kontravarianter Funktor, nachdem sich „die Richtung genau einmal ändert“. Die Verknüpfung von zwei kontravarianten Funktoren ist hingegen ein kovarianter Funktor, denn „die Richtung ändert sich zwei Mal“.

Der Unterschied zur Definition eines kovarianten Funktors liegt darin, dass sich die „Richtung des Morphismus“ umdreht. Dies erscheint auf den ersten Blick sehr unnatürlich, dies kommt aber durchaus desöfteren vor, wie wir jetzt in den Beispielen sehen werden.

Beispiel.

- (1) Es sei \mathbb{K} ein Körper und es sei $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{K}}$ die Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume. Wir hatten in Lemma 9.6 gezeigt, dass

$$\begin{aligned} F: \text{Ob}(\mathcal{Vekt}_{\mathbb{K}}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{Vekt}_{\mathbb{K}}) \\ V &\mapsto V^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) := \text{Dualraum von } V, \end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Mor}(U, V) &\mapsto \text{Mor}(V^*, U^*) \\ (\phi: U \rightarrow V) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \phi^*: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) &\rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \mathbb{K}) \\ f &\mapsto & f \circ \phi \end{array} \right) \end{aligned}$$

ein kontravarianter Funktor ist. Folgendes Diagramm illustriert die Aussage von Axiom (F1):

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi \circ \phi & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ U & \xrightarrow{\phi} & V & \xrightarrow{\psi} & W \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ U^* & \xleftarrow{\phi^*} & V^* & \xleftarrow{\psi^*} & W^* \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & (\psi \circ \phi)^* & & \end{array}$$

- (2) Es sei \mathcal{Top} die Kategorie der topologischen Räume und es sei $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ die Kategorie der reellen Vektorräume, dann ist

$$\begin{aligned} F: \text{Ob}(\mathcal{Top}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}) \\ X &\mapsto C(X, \mathbb{R}) := \text{stetige reellwertige Funktionen auf } X, \end{aligned}$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Mor}(X, Y) &\mapsto \text{Mor}(C(Y, \mathbb{R}), C(X, \mathbb{R})) \\ (\phi: X \rightarrow Y) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} C(Y, \mathbb{R}) &\rightarrow & C(X, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto & f \circ \phi \end{array} \right) \end{aligned}$$

ein kontravarianter Funktor.



10. DIFFERENTIALFORMEN ERSTER ORDNUNG

10.1. Definition von Differentialformen erster Ordnung.

Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $P \in M$. Wir schreiben

$$T_P^*M := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_P M, \mathbb{R})$$

für den zum Tangentialraum $T_P M$ dualen Vektorraum. Es folgt aus Satz 8.1 und Lemma 9.5, dass dies ebenfalls ein k -dimensionaler Vektorraum ist. Wir nennen Elemente in T_P^*M Kotangentialvektoren.

Bemerkung. Es sei wiederum \mathcal{PUM} die Kategorie der punktierten Untermannigfaltigkeiten und es sei $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ die Kategorie der reellen Vektorräume. Es folgt leicht aus Definitionen, dass

$$F: \text{Ob}(\mathcal{PUM}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}) \\ (M, P) \mapsto T_P^*M,$$

zusammen mit den Abbildungen

$$\text{Mor}((M, P), (N, Q)) \mapsto \text{Mor}(T_Q^*N, T_P^*M) \\ f \mapsto f^* = \underbrace{(Df_P)^*}_{\uparrow}$$

ein kontravarianter Funktor ist.⁶¹ die zu $Df_P: T_P M \rightarrow T_Q N$ duale Abbildung

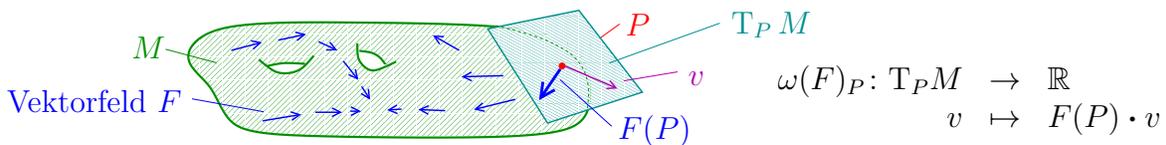
Definition. Eine Differentialform erster Ordnung auf einer Untermannigfaltigkeit M ist eine Abbildung ω , welche jedem Punkt P in M einen Kotangentialvektor $\omega_P \in T_P^*M$ zuordnet.⁶² Im Folgenden werden wir oft auch nur kurz 1-Form anstatt Differentialform erster Ordnung schreiben.⁶³⁶⁴

Beispiel.

- (1) Es sei F ein Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit M . Dann ist die Abbildung $\omega(F)$, welche jedem Punkt P in M den Kotangentialvektor

$$\omega(F)_P: T_P M \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \underbrace{F(P) \cdot v}_{\text{Skalarprodukt}}$$

zuordnet, eine 1-Form auf M .



⁶¹Genauer gesagt handelt es sich bei F um die Verknüpfung des kovarianten Funktors $(M, P) \mapsto T_P M$ mit dem kontravarianten Funktor $V \mapsto V^*$, also ist F nach der Bemerkung auf Seite 90 ein kontravarianter Funktor.

⁶²Genauer gesagt ist eine Differentialform ω erster Ordnung eine Abbildung $\omega: M \rightarrow \bigcup_{P \in M} T_P^*M$, so dass für $P \in M$ gilt: $\omega_P \in T_P^*M$.

⁶³In der Literatur werden Differentialformen erster Ordnung manchmal auch Pfaffsche Formen genannt.

⁶⁴In späteren Kapiteln werden wir dann die Differentialformen höherer Ordnung kennenlernen.

- (2) Es sei M eine Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n . Für $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnen wir mit dx^i die 1-Form, welche jedem Punkt $P \in M$ den folgenden Kotangentialvektor zuordnet:

$$\begin{aligned} dx^i: T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

- (3) Es seien $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-Formen auf einer Untermannigfaltigkeit M . Für beliebige Funktionen $g_1, \dots, g_k: M \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir dann die 1-Form $g_1 \cdot \omega_1 + \dots + g_k \cdot \omega_k$, welche an jedem Punkt $P \in M$ gegeben ist durch die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto g_1(P) \cdot \underbrace{\omega_1(P)(v)}_{\in \mathbb{R}} + \dots + g_k(P) \cdot \underbrace{\omega_k(P)(v)}_{\in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Das nächste Beispiel einer 1-Form führen wir gleich als Definition ein.

Definition. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit M . Dann ist die Abbildung, welche jedem Punkt P in M den Kotangentialvektor⁶⁵

$$\begin{aligned} T_P M &\rightarrow \mathbb{R} = T_{f(P)} \mathbb{R} \\ v &\mapsto Df_P(v) \end{aligned}$$

zuordnet eine 1-Form auf M . Diese 1-Form heißt das **totale Differential von f** und wird mit⁶⁶ df bezeichnet.

Beispiel. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} x^i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

die Projektion auf die i -te Koordinate. Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Das totale Differential der Funktion x^i auf M ist dann gerade die oben eingeführte 1-Form dx^i .

Lemma 10.1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0.

- (1) Für jede 1-Form ω auf M gibt es eindeutige Funktionen $g_1, \dots, g_n: M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\omega = g_1 \cdot dx^1 + \dots + g_n \cdot dx^n.$$

- (2) Für jede glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt folgende Gleichheit von 1-Formen auf M :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx^n.$$

Beispiel.

- (1) Es sei $F = (F_1, \dots, F_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $P \in M$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_P M = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \omega(F)_P(v) &= F(P) \cdot v = \sum_{i=1}^n F_i(P) \cdot v_i = (F_1 \cdot dx^1 + \dots + F_n \cdot dx^n)(v). \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad \text{Definition von } \omega(F) \qquad \text{folgt aus } dx^i(v) = v_i \end{aligned}$$

⁶⁵Wir hatten in Satz 9.4 gezeigt, dass $Df_P = f_*: T_P M \rightarrow \mathbb{R}$ in der Tat eine lineare Abbildung ist, d.h. Df_P ist ein Element in $T_P^* M$.

⁶⁶Eigentlich hatten wir diese Abbildung schon mit Df bezeichnet, aber in diesem Zusammenhang hat sich die Notation df eingebürgert.

Also ist $\omega(F) = F_1 \cdot dx^1 + \dots + F_n \cdot dx^n$.

- (2) Wir betrachten die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ auf $M = \mathbb{R}^2$. Lemma 10.1 besagt, dass
- $$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx^2 = 2x_1 \cdot dx^1 + 2x_2 \cdot dx^2.$$

Beweis.

- (1) Es sei ω eine 1-Form auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ von Kodimension 0. Für $P \in M$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ setzen wir $g_i(P) := \omega_P(e_i)$.⁶⁷ Für alle Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_P M = \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\omega_P(v) = \omega_P\left(\sum_{i=1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Einheitsvektor}}}{e_i} \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \omega_P \text{ linear}}}{\omega_P(e_i)} \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } g_i \text{ und da } dx^i(v) = v_i}}{g_i(P)} \cdot dx^i(v) = \left(\sum_{i=1}^n g_i \cdot dx^i\right)_P(v).$$

Wir müssen zeigen, dass die Funktionen g_1, \dots, g_n eindeutig sind. Es seien also $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n$ Funktionen mit $g_1 \cdot dx^1 + \dots + g_n \cdot dx^n = \tilde{g}_1 \cdot dx^1 + \dots + \tilde{g}_n \cdot dx^n$. Dann gilt also für alle $P \in M$, dass

$$(g_1 \cdot dx^1 + \dots + g_n \cdot dx^n)_P = (\tilde{g}_1 \cdot dx^1 + \dots + \tilde{g}_n \cdot dx^n)_P: T_P M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$. Da M von Kodimension 0 ist gilt $T_P M = \mathbb{R}^n$, also liegt e_i in $T_P M = \mathbb{R}^n$. Wir können die obige Gleichheit also auf e_i anwenden und erhalten

$$g_i(P) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } dx^j(e_i) = \delta_{ij}}}{(g_1 \cdot dx^1 + \dots + g_n \cdot dx^n)_P(e_i)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus der obigen Gleichheit angewandt auf } e_i \in T_P M = \mathbb{R}^n}}{(\tilde{g}_1 \cdot dx^1 + \dots + \tilde{g}_n \cdot dx^n)_P(e_i)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } dx^j(e_i) = \delta_{ij}}}{\tilde{g}_i(P)}.$$

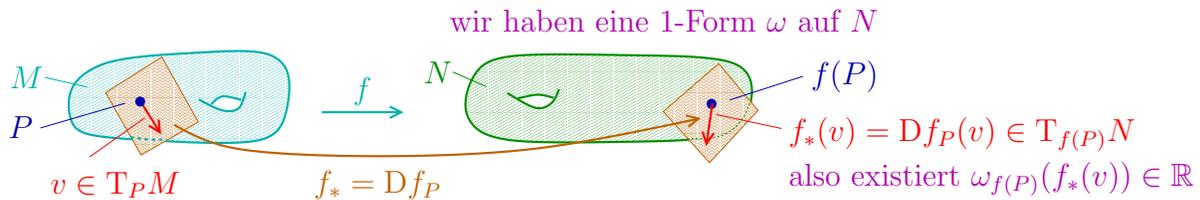
Wir haben also gezeigt, dass für $i = 1, \dots, n$ gilt: $g_i = \tilde{g}_i$.

- (2) Wir werden das Lemma in Übungsblatt 7 beweisen. Der Beweis ist elementar, sobald man sich durch die Definitionen gewählt hat. ■

Definition. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten und es sei ω eine 1-Form auf N . Wir bezeichnen mit $f^*\omega$ die 1-Form auf M , welche an jedem Punkt $P \in M$ gegeben ist durch

$$(f^*\omega)_P: T_P M \xrightarrow{f_* = Df_P} T_{f(P)} N \xrightarrow{\omega_{f(P)}} \mathbb{R}.$$

Man nennt $f^*\omega$ manchmal die zurückgezogene 1-Form.



⁶⁷Da M von Kodimension 0 ist, liegt $e_i \in T_P M = \mathbb{R}^n$, also ist $\omega_P(e_i)$ definiert.

Lemma 10.2. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten, es sei ω eine 1-Form auf N , es sei $P \in M$ und es sei $v \in T_P M$. Dann gilt

$$(f^*\omega)_P(v) = \omega_{f(P)}(\underbrace{f_*(v)}_{\in T_{f(P)}N}).$$

Beweis. Die Aussage ist nur die Definition von $f^*\omega$ noch mal hingeschrieben. Obwohl (oder gerade weil?) das Lemma so einfach ist, werden wir es erstaunlich oft verwenden. ■

Definition.

- (1) Es sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k oder eine offene Teilmenge des Halbraums H_k . Wir sagen eine 1-Form⁶⁸ $\omega = f_1 \cdot dx^1 + \dots + f_k \cdot dx^k$ auf W ist **glatt**, wenn f_1, \dots, f_k glatt sind.
- (2) Es sei ω eine 1-Form auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M .
 - (a) Es sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte für M . Wir sagen **ω ist glatt bezüglich der Karte Φ** , wenn $(\Phi^{-1})^*(\omega)$ eine glatte 1-Form auf $V \cap E_k$ beziehungsweise auf $V \cap H_k$ ist.⁶⁹
 - (b) Wir sagen **ω ist glatt auf M** , wenn ω glatt ist bezüglich jeder Karte Φ von M .

Der folgende Satz spielt nun eine ähnliche Rolle wie Satz 2.8.

Satz 10.3. Es sei ω eine 1-Form auf einer Untermannigfaltigkeit M . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Die 1-Form ω ist glatt.
- (2) Es gibt einen Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von M , so dass ω glatt ist bezüglich jeder Karte Φ_i des Atlas.
- (3) Für alle glatten Tangentialvektorfelder F auf M ist folgende Funktion glatt:

$$\begin{array}{ccc} M & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \underbrace{\omega_P}_{\in T_P^* M} \left(\underbrace{F(P)}_{\in T_P M} \right). \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}} \end{array}$$

Beweis. Wir lagern den Beweis von Satz 10.3 in das nächste Teilkapitel aus. Wir werden diesen Beweis in der Vorlesung nicht behandeln. ■

Satz 10.4. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten und es sei ω eine glatte 1-Form auf N . Dann ist $f^*\omega$ eine glatte 1-Form auf M .

Beweis. Die Aussage des Satzes kann man mithilfe von Karten problemlos auf Lemma 10.6, welches wir im Rahmen des Beweises von Satz 10.3 beweisen werden, zurückführen. ■

Notation. Für eine Untermannigfaltigkeit M definieren wir nun

$$\Omega_1(M) := \text{Vektorraum der glatten 1-Formen auf } M.$$

Bemerkung. Es folgt leicht aus Satz 10.4, dass die Abbildungen

$$\text{Untermannigfaltigkeit } M \mapsto \Omega_1(M),$$

⁶⁸Wie wir gerade in Lemma 10.1 angemerkt hatten ist jede 1-Form auf W eindeutig von dieser Form.

⁶⁹Wie immer fassen wir hierbei $V \cap E_k$ als offene Teilmenge von $E_k = \mathbb{R}^k$ auf.

zusammen mit den Abbildungen

$$\text{glatte Abbildung } f: M \rightarrow N \mapsto (f^*: \Omega_1(N) \rightarrow \Omega_1(M))$$

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie \mathcal{PUM} der Untermannigfaltigkeiten zu der Kategorie $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume bildet.

Lemma 10.5. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit.

- (1) Für jedes glatte Tangentialvektorfeld F auf M ist die zugehörige 1-Form $\omega(F)$, welche wir auf Seite 91 eingeführt hatten, glatt.
- (2) Zu jeder glatten 1-Form ω auf M gibt es genau ein glattes Tangentialvektorfeld F auf M mit $\omega = \omega(F)$.

Beweis.

- (1) Wir verwenden das (3) \Rightarrow (1) Kriterium von Satz 10.3. Es sei also G ein glattes Tangentialvektorfeld auf M . Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \omega(F)_P(G(P)) := F(P) \cdot G(P). \end{aligned}$$

Da F und G glatt sind, ist auch die Abbildung $P \mapsto F(P) \cdot G(P)$ glatt. Also folgt aus Satz 10.3 (3) \Rightarrow (1), dass $\omega(F)$ eine glatte 1-Form ist.

- (2) Die Aussage wird in Übungsblatt 7 bewiesen. ■

Bemerkung. Für eine Untermannigfaltigkeit M setzen wir nun

$$\tau(M) = \text{Menge der glatten Tangentialvektorfelder auf } M.$$

Dies ist ein Vektorraum und es folgt aus Lemma 10.5, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau(M) &\rightarrow \Omega_1(M) \\ F &\mapsto \omega(F) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Wir hatten gerade angemerkt, dass $M \mapsto \Omega_1(M)$ und $f \mapsto f^*$ einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Untermannigfaltigkeiten zu der Kategorie der Vektorräume bildet. Es stellt sich nun die Frage, ob die Abbildungen $M \mapsto \tau(M)$ ebenfalls auf eine „natürliche“ Weise einen Funktor ergeben. Aber dies ist nicht der Fall, denn eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ induziert weder eine Abbildung $\tau(M) \rightarrow \tau(N)$ noch eine Abbildung $\tau(N) \rightarrow \tau(M)$.⁷⁰

10.2. Beweis von Satz 10.3 (*). Für den Beweis von Satz 10.3 benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 10.6. Es sei $\varphi: V \rightarrow W$ eine glatte Abbildung von einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n . Zudem sei ω eine glatte 1-Form auf W . Dann ist die 1-Form $\varphi^*\omega$ auf V ebenfalls glatt.

Beweis. Es sei also $\omega = g_1 \cdot dx^1 + \cdots + g_n \cdot dx^n$ eine glatte 1-Form auf einer offenen Teilmenge W von \mathbb{R}^n . Zudem sei V eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^m . Darüber hinaus sei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): V \rightarrow W$ eine glatte Abbildung. Wir schreiben

$$\varphi^*\omega = f_1 \cdot dx^1 + \cdots + f_m \cdot dx^m,$$

⁷⁰Warum nicht? Probieren Sie mal, solche Abbildungen hinzuschreiben. Woran scheitert das?

wobei $f_1, \dots, f_m: V \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen sind. Wir müssen zeigen, dass f_1, \dots, f_m glatt sind. Es sei nun $k \in \{1, \dots, m\}$. Für $P \in V$ ist

$$\begin{aligned} f_k(P) &= \underbrace{(f_1(P) \cdot dx^1 + \dots + f_m(P) \cdot dx^m)}_{=\omega_{\varphi(P)}}(e_k) &= (\varphi^*\omega)_P(e_k) &= \omega_{\varphi(P)}(\varphi_*(e_k)) \\ &\uparrow &&\uparrow \\ &\text{denn } dx^i(e_j) = \delta_{ij}, \text{ wobei } \delta_{ij} \text{ das Kroneckersymbol ist} &&\text{Lemma 10.2} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n (g_i \circ \varphi)(P) \cdot dx^i \right)}_{=\omega_{\varphi(P)}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(P) \cdot e_j \right)}_{=(D\varphi_P)(e_k)=\varphi_*(e_k)} &= \sum_{i=1}^n (g_i \circ \varphi)(P) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(P). \\ &&&\uparrow \\ &&&\text{denn } dx^i(e_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass f_k eine Verknüpfung von glatten Funktionen ist. Also ist f_k auch selber glatt. ■

Das folgende Lemma beweist die Aussagen von Satz 10.3 im Spezialfall, dass M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k ist.

Lemma 10.7. Es sei ω eine 1-Form auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^k . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) die 1-Form ω ist glatt,
- (2) für jeden Diffeomorphismus $\varphi: V \rightarrow W$ ist die 1-Form $\varphi^*\omega$ auf V glatt,
- (3) für alle glatten Vektorfelder $F: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist folgende Funktion glatt:

$$\begin{aligned} W &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \omega_P(F(P)). \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $\omega = g_1 \cdot dx^1 + \dots + g_k \cdot dx^k$ eine 1-Form auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k . Die Aussage „(1) \Rightarrow (2)“ folgt aus Lemma 10.6. Die Umkehrung „(2) \Rightarrow (1)“ ist natürlich trivial, wir müssen nur $\varphi = \text{id}$ setzen.

Wir beweisen nun noch die Äquivalenz „(1) \Leftrightarrow (3)“. Wir machen dazu folgende Vorbemerkung: Für ein beliebiges glattes Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_k): W \rightarrow \mathbb{R}^k$ gilt

$$\omega_P(F(P)) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^k g_i(P) \cdot dx^i \right)}_{=\omega_P} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^k F_j(P) \cdot e_j \right)}_{=F(P)} \underset{\text{denn } dx^i(e_j) = \delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^k g_i(P) \cdot F_i(P).$$

Aus dieser Rechnung folgt, dass wenn die Funktionen g_1, \dots, g_k glatt sind, dann ist auch $P \mapsto \omega_P(F(P))$ glatt. Wir haben damit „(1) \Rightarrow (3)“ bewiesen. Umgedreht, wenn wir die konstanten Vektorfelder $G(P) = e_i$ betrachten, dann erhalten wir $g_i(P) = \omega_P(G(P))$. Nach Voraussetzung ist die Funktion $P \mapsto \omega_P(G(P))$ glatt. Es folgt also, dass auch g_i glatt ist. Dies beweist „(3) \Rightarrow (1)“. ■

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis von Satz 10.3 zu.

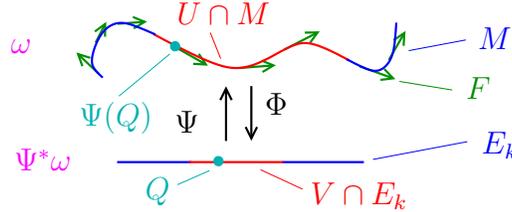
Beweis von Satz 10.3. Es sei also ω eine 1-Form auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M . Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall, dass $\partial M = \emptyset$.

Die Aussage „(1) \Rightarrow (2)“ ist natürlich trivial. Die Umkehraussage „(2) \Rightarrow (1)“ kann man, ganz ähnlich wie im Beweis von Satz 2.8, mithilfe von Karten auf den in Lemma 10.7 betrachteten Spezialfall zurückführen. Wir überlassen das Ausführen von diesem Argument als freiwillige Übungsaufgabe.

Wir beweisen nun die Aussage „(1) \Rightarrow (3)“. Es sei also F ein glattes Tangentialvektorfeld auf M . Für $P \in M$ definieren wir $g(P) := \omega_P(F(P))$. Wir müssen nun zeigen, dass die Funktion g auf der Untermannigfaltigkeit M glatt ist. Wir verwenden dazu die Definition von „glatt“ aus Kapitel 2.5. Es sei also $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte um P . Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung. Wir müssen nun also zeigen, dass die Funktion $g \circ \Psi: V \cap E_k \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist. Für $Q \in V \cap E_k$ gilt

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Definition von } g & \text{denn } \Psi \circ \Phi = \text{id} & \\
 (g \circ \Psi)(Q) \stackrel{\downarrow}{=} \omega_{\Psi(Q)}(F(\Psi(Q))) & \stackrel{\downarrow}{=} ((\Psi \circ \Phi)^*\omega)_{\Psi(Q)}(F(\Psi(Q))) & \\
 & = (\Phi^*(\Psi^*\omega))_{\Psi(Q)}(F(\Psi(Q))) & = (\Psi^*\omega)_Q(\Phi_*(F(\Psi(Q)))) \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 & \text{denn } (\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^* & \text{Lemma 10.2}
 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist $\Psi^*\omega$ eine glatte 1-Form auf $V \cap E_k$ und zudem ist $Q \mapsto \Phi_*(F(\Psi(Q)))$ ein glattes Vektorfeld auf $V \cap E_k$. Es folgt nun aus Lemma 10.7, dass die Funktion $g \circ \Psi$ glatt ist.



Wir beweisen nun die Aussage „(3) \Rightarrow (2)“. Wir nehmen also an, dass für alle glatten Tangentialvektorfelder F auf M die Funktion $P \mapsto \omega_P(F(P))$ glatt ist. Wir müssen jetzt beweisen, dass es um jeden Punkt $P \in M$ eine Karte $\Phi: S \rightarrow T$ gibt, so dass $(\Phi^{-1})^*\omega$ eine glatte 1-Form auf $T \cap E_k$ ist. Es sei $P \in M$ und es sei zuerst einmal $\Phi: U \rightarrow V$ eine beliebige Karte um P . Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung. Für $i \in \{1, \dots, k\}$ sei nun $G_i: V \cap E_k \rightarrow E_k = \mathbb{R}^k$ das konstante Vektorfeld, welches jedem Punkt den Standardbasisvektor e_i zuordnet. Dann ist $P \mapsto \Psi_*(G_i(P))$ ein Tangentialvektorfeld auf $U \cap M$. Dieses läßt sich jedoch im Allgemeinen nicht zu einem glatten Vektorfeld auf M fortsetzen. Um dieses Problem zu umschiffen benötigen wir folgende Behauptung.

Behauptung. Es existiert eine offene Umgebung S von P in M und es existiert eine glatte Funktion $z: M \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $z(x) = 1$ für alle $x \in S$,
- (2) $\text{Träger}(z) \subset U \cap M$.

Beweis. Der Beweis der Behauptung verläuft ähnlich zum Beweis von Lemma 8.9. Der genaue Beweis der Behauptung ist eine freiwillige Übungsaufgabe. \square

Wir betrachten nun auf M das Tangentialvektorfeld, welches definiert ist durch

$$F(x) = \begin{cases} z(x) \cdot \Psi_*(G_i(\Phi(x))), & \text{wenn } x \in U \cap M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist ein glattes Vektorfeld auf M . Wir setzen $T := \Phi(S)$. Für $Q \in T \cap E_k$ gilt nun

$$(\Psi^*\omega)_Q(G_i(Q)) \stackrel{\uparrow}{=} \omega_{\Psi(Q)}(\Psi_*(G_i(Q))) \stackrel{\uparrow}{=} \omega_{\Psi(Q)}(F(\Psi(Q))).$$

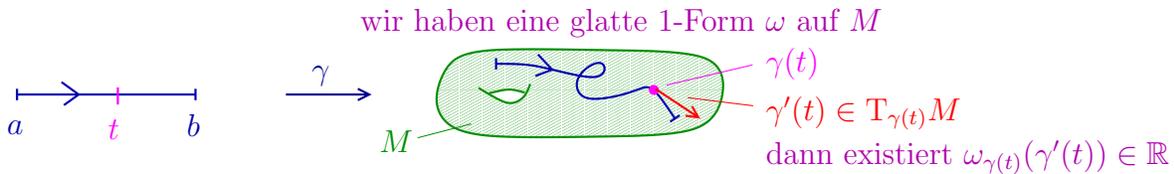
Lemma 10.2
denn $z(Q) = 1$, da $\Psi(Q) \in S$

Nach Voraussetzung ist die Funktion $P \mapsto \omega_P(F(P))$ glatt, also ist nun auch die Funktion $Q \mapsto (\Psi^*\omega)_Q(G_i(Q))$ auf $T \cap E_k$ glatt. Es folgt aus dem Beweis der Aussage „(3) \Rightarrow (1)“ in Lemma 10.7, dass $\Psi^*\omega$ auf T glatt ist. ■

10.3. Integrierbarkeit von 1-Formen.

Lemma 10.8. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit, es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve auf M und es sei ω eine glatte 1-Form auf M . Dann ist folgende Funktion glatt, insbesondere stetig:⁷¹

$$\begin{aligned}
 [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\
 t &\mapsto \underbrace{\omega_{\gamma(t)}}_{\in T_{\gamma(t)}^* M} \left(\underbrace{\gamma'(t)}_{\in T_{\gamma(t)} M} \right). \\
 &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}}
 \end{aligned}$$



Beweis. Wir bezeichnen mit $e = 1$ den Einheitsvektor in \mathbb{R} . Für $t \in [a, b]$ ist nun

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \omega_{\gamma(t)}(\gamma_*(e)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 10.2}}}{=} (\gamma^*\omega)_t(e).$$

Die 1-Form ω auf M ist nach Voraussetzung glatt. Also ist die 1-Form $\gamma^*\omega$ auf $[a, b]$ nach Satz 10.4 ebenfalls glatt. Zudem ist das konstante Vektorfeld e auf \mathbb{R} offensichtlich glatt. Daher folgt nun aus Satz 10.3 (1) \Rightarrow (3), dass die Funktion $t \mapsto (\gamma^*\omega)_t(e)$ glatt ist. ■

Definition. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve auf einer Untermannigfaltigkeit M und es sei ω eine glatte 1-Form auf M . Wir definieren das Integral der 1-Form ω über die Kurve γ wie folgt:^{72,73}

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{t=a}^{t=b} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Beispiel. Es sei F ein glattes Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit M und es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve. Wir betrachten wieder die 1-Form $\omega(F)$, welche an jedem Punkt $P \in M$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
 \omega(F)_P: T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\
 v &\mapsto \omega(F)_P(v) := F(P) \cdot v.
 \end{aligned}$$

Es folgt nun, dass

⁷¹Die Funktion ist also wie folgt definiert: die Kurve γ definiert für $t \in [a, b]$ einen Vektor $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, eine 1-Form auf M ordnet solch einem Vektor eine reelle Zahl zu.

⁷³Das Integral ist definiert, denn nach Lemma 10.8 ist der Integrand eine stetige Funktion.

⁷³Man kann anstatt von glatten 1-Form auch „stetige 1-Formen“ einführen, für die Definition des Integrals benötigt man nur, dass die 1-Form stetig ist.

$$\int_{\gamma} \omega(F) \stackrel{\text{Definition des Integrals}}{\downarrow} = \int_a^b \omega(F)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \stackrel{\text{Definition von } \omega(F)}{\downarrow} = \int_a^b \underbrace{F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\text{Skalarprodukt der Vektoren } F(\gamma(t)) \text{ und } \gamma'(t)} dt.$$

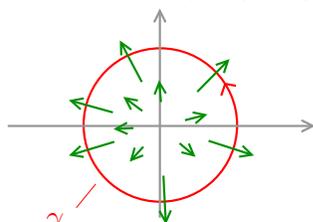
In der Abbildung betrachten wir anschaulich einige Spezialfälle mit $M = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten insbesondere das Vektorfeld in der Mitte, welches gegeben ist durch $G(x, y) = (-y, x)$. Zudem betrachten wir die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)). \end{aligned}$$

Dann gilt

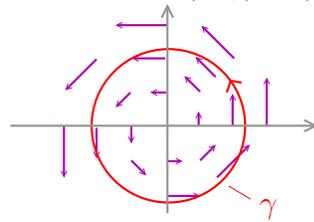
$$\int_{\gamma} \omega(G) = \int_0^{2\pi} G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Vektorfeld $F(x, y) = (x, y)$



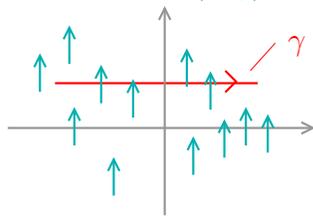
$$\int_{\gamma} \omega(F) = 0, \text{ denn } F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

Vektorfeld $G(x, y) = (-y, x)$



$$\int_{\gamma} \omega(G) > 0, \text{ denn } G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) > 0$$

Vektorfeld $H(x, y) = (0, 1)$



$$\int_{\gamma} \omega(H) = 0, \text{ denn } H(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

Beispiel. Es sei F ein glattes Kraftfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$, z.B. das Gravitationsfeld oder ein Magnetfeld, welches auf einen gegebenen punktförmigen Körper K wirkt. Wir bezeichnen mit $\omega(F)$ die zugehörige 1-Form auf U . Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ zudem eine Kurve. Dann ist

$$\int_{\gamma} -\omega(F)$$

die Energie die aufgewendet werden muss (bzw. freigesetzt wird), um den Körper K in diesem Kraftfeld auf der Bahn γ zu bewegen.

Der folgende Satz kann als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aufgefasst werden:⁷⁴

Satz 10.9. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit, es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und zudem sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve auf M . Dann gilt⁷⁵

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

⁷⁴In welchem Sinne ist dies eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung? Wie kann man diesen aus Satz 10.9 herleiten?

Insbesondere wenn γ eine geschlossene Kurve ist, d.h. wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$, dann gilt

$$\int_{\gamma} df = 0.$$

Beweis. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve auf M , dann gilt

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b \underbrace{(df_{\gamma(t)})(\gamma'(t))}_{=(f \circ \gamma)'(t), \text{ nach der Kettenregel}} dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

↑
folgt aus dem HDI aus Analysis I

Wenn γ geschlossen ist, dann gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$ und es folgt sofort, dass

$$\int_{\gamma} df = 0. \quad \blacksquare$$

Definition. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine glatte 1-Form auf M . Wir sagen, ω ist **exakt**⁷⁶, wenn es eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega = df$ gibt.

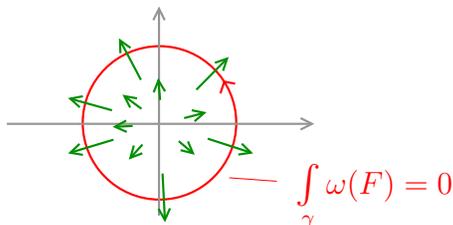
Beispiel. Wir betrachten wieder die Untermannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^2$.

- (1) Wir betrachten das Tangentialvektorfeld $F(x, y) = (x, y)$. Es sei $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. In Präsenzübungsblatt 7 werden wir sehen, dass $df = \omega(F)$. Also ist $\omega(F)$ eine exakte 1-Form.
- (2) Auf Seite 99 hatten wir gezeigt, dass es auf $M = \mathbb{R}^2$ mit dem Tangentialvektorfeld $G(x, y) = (-y, x)$ eine geschlossene Kurve γ gibt, so dass

$$\int_{\gamma} \omega(G) \neq 0.$$

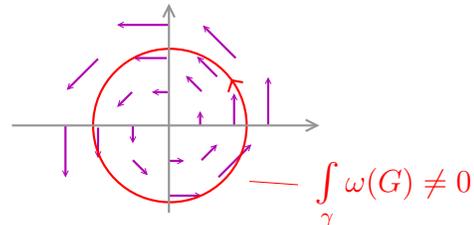
Es folgt also aus Satz 10.9, dass die 1-Form $\omega(G)$ auf $M = \mathbb{R}^2$ nicht exakt ist.

Vektorfeld $F(x, y) = (x, y)$



die 1-Form $\omega(F)$ ist exakt

Vektorfeld $G(x, y) = (-y, x)$



die 1-Form $\omega(G)$ ist nicht exakt

Beispiele.

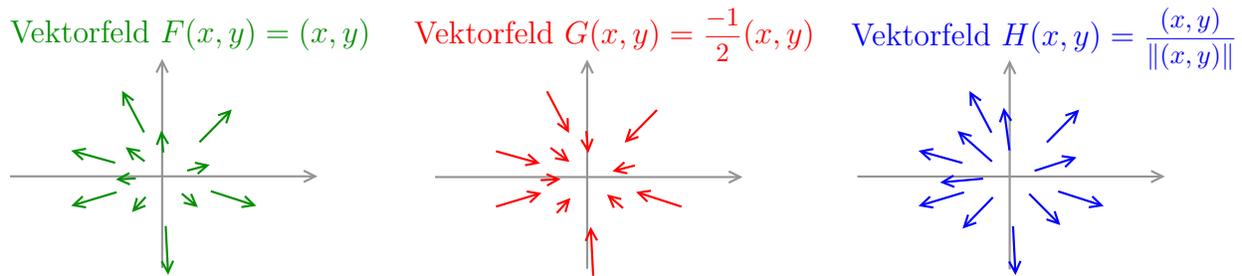
- (1) Ein Vektorfeld $G: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **radial**, wenn es eine Funktion $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$G(x) = f(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

In Übungsblatt 8 werden wir beweisen, dass für jedes beliebige glatte radiale Vektorfeld $G: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die zugehörige 1-Form $\omega(G)$ exakt ist.

⁷⁵Zur Erinnerung, df bezeichnet das totale Differential, welches wir auf Seite 92 eingeführt hatten.

⁷⁶Exakte 1-Formen werden manchmal auch *integrierbar* genannt.



- (2) Das Gravitationsfeld G eines sich im Ursprung befindlichen punktförmigen Körpers in \mathbb{R}^3 ist ein radiales Vektorfeld. Es gibt also nach(1) eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $df = \omega(G)$. Diese Funktion f wird in der Physik das „Potential“ des Gravitationsfeldes genannt.
- (3) Die Diskussion in (2) gilt ganz analog auch für das elektrische Feld eines sich im Ursprung befindlichen elektrisch geladenen Körpers.

10.4. Integration und Parametertransformationen. Wir erinnern an folgende Definition aus [Fr2, Kapitel 4] und [Fr3, Kapitel 4].

Definition. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und es sei $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein Diffeomorphismus. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma \circ \varphi: [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(\varphi(t)) \end{aligned}$$

ebenfalls eine Kurve. Diese Kurve nimmt die gleichen Punkte wie die ursprüngliche Kurve γ an. Wir sagen $\gamma \circ \varphi$ ist eine **Umparametrisierung**, welche durch die **Parametertransformation** φ aus γ hervorgeht. Wir nennen die Parametertransformation φ **orientierungserhaltend**, wenn $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ und wir nennen sie **orientierungsumkehrend**, wenn $\varphi(c) = b$ und $\varphi(d) = a$.

Beispiel. Wir betrachten die geschlossene Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)), \end{aligned}$$

d.h. γ durchläuft den Einheitskreis „in der Zeit 2π “ „gegen den Uhrzeigersinn“. Die Kurve

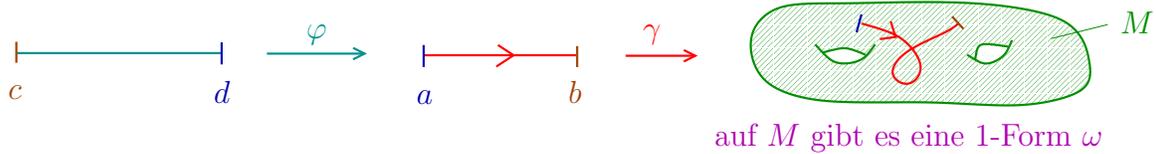
$$\begin{aligned} \beta: [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{2}t\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{2}t\right) \right) \end{aligned}$$

ist eine Umparametrisierung von γ , wobei die Parametertransformation orientierungsumkehrend ist. Die Kurve β durchläuft den Einheitskreis „in der Zeit 4π “ nun aber „im Uhrzeigersinn“.

Satz 10.10. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine glatte 1-Form auf M . Es sei γ eine Kurve auf M und es sei δ eine Kurve, welche aus γ durch eine Parametertransformation φ hervorgeht. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\delta} \omega &= \int_{\gamma} \omega && \text{wenn } \varphi \text{ orientierungserhaltend} \\ \int_{\delta} \omega &= - \int_{\gamma} \omega, && \text{wenn } \varphi \text{ orientierungsumkehrend.} \end{aligned}$$

Der Satz besagt also, dass das Integral einer 1-Form über eine Kurve nicht davon abhängt, „wie schnell wir die Punkte auf der Kurve durchlaufen“, so lange wir die Kurve „in der gleichen Richtung“, d.h. vom Endpunkt $\gamma(a) = \delta(c)$ zum Endpunkt $\gamma(b) = \delta(d)$ durchlaufen. Wenn wir die Kurve in der „entgegengesetzten Richtung“ durchlaufen, dann erhalten wir bis auf ein Vorzeichen, ebenfalls das gleiche Integral.



Beweis. ⁷⁷ Es sei M eine Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine glatte 1-Form auf M . Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve auf M und es sei $\delta: [c, d] \rightarrow M$ eine Kurve, welche aus γ durch eine Parametertransformation $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ hervorgeht. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{\delta} \omega &= \int_{t=c}^{t=d} \omega_{\delta(t)}(\delta'(t)) dt &= \int_{t=c}^{t=d} \omega_{(\gamma \circ \varphi)(t)}((\gamma \circ \varphi)'(t)) dt \\
 &= \int_{t=c}^{t=d} \omega_{\gamma(\varphi(t))}(\underbrace{\gamma'(\varphi(t))}_{\in T_{\gamma(\varphi(t))}M} \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{\in \mathbb{R}}) dt &= \int_{t=c}^{t=d} \omega_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) dt \\
 &\uparrow \text{ Kettenregel} &\uparrow \text{ Linearität von } \omega_{\gamma(\varphi(t))}: T_{\gamma(\varphi(t))}M \rightarrow \mathbb{R} \\
 &= \int_{s=\varphi(c)}^{s=\varphi(d)} \omega_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) ds &= \begin{cases} \int_{\gamma} \omega, & \text{wenn } \varphi(c) = a \text{ und } \varphi(d) = b, \\ -\int_{\gamma} \omega, & \text{wenn } \varphi(c) = b \text{ und } \varphi(d) = a. \end{cases} \\
 &\uparrow \text{ Substitution } s = \varphi(t) &\uparrow \text{ Vertauschen der Grenzen ändert das Vorzeichen}
 \end{aligned}$$

10.5. Orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeiten. Auf Seite 68 hatten wir den Begriff einer Orientierung auf einer Hyperfläche eingeführt. Wir wollen nun den Begriff einer Orientierung einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit einführen.

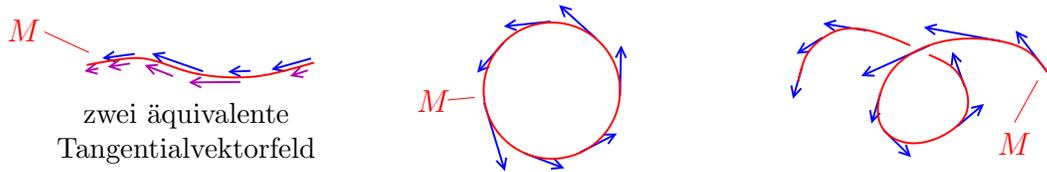
Definition. Es sei M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit.

- (1) Wir sagen zwei Tangentialvektorfelder σ und τ auf M , welche nirgendwo verschwinden, sind äquivalent, wenn es eine positive Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $\sigma(P) = f(P) \cdot \tau(P)$ für alle $P \in M$.
- (2) Eine **Orientierung** von M ist eine Äquivalenzklasse von Tangentialvektorfeldern⁷⁸, welche nirgendwo verschwinden.
- (3) Eine **orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeit** ist ein Paar (M, \mathcal{O}) , wobei M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit und \mathcal{O} eine Orientierung von M ist.⁷⁹

⁷⁷Der Satz erinnert an die Diskussion von Wegintegralen aus der Analysis III. In der Tat ist auch der Beweis fast der gleiche wie der Beweis von Lemma 4.4 in Analysis III.

⁷⁸Zur Erinnerung, ein Tangentialvektorfeld ist per Definition, siehe Seite 67 stetig.

⁷⁹Wie so oft in der Mathematik unterschlagen wir die Orientierung oft in der Notation



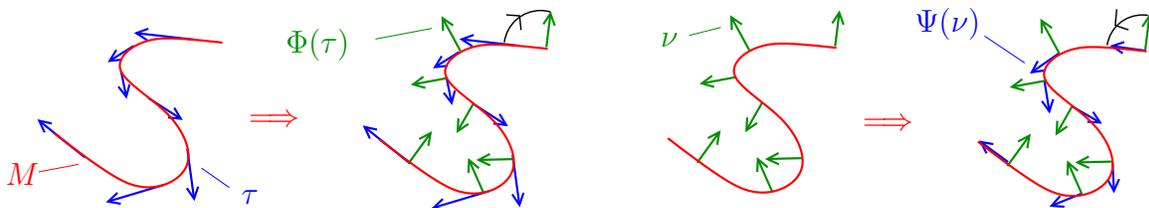
Bemerkung. Eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^2 ist insbesondere auch eine Hyperfläche. In diesem Fall haben wir also zwei Begriffe von Orientierungen:

- (1) Auf Seite 68 hatten wir eine Orientierung von M definiert als ein Einheitsnormalenfeld.
- (2) Gerade eben hatten wir eine Orientierung von M definiert als eine Äquivalenzklasse von Tangentialvektorfeldern, welche nirgendwo verschwinden.

Die folgenden Abbildungen geben eine kanonische Bijektion zwischen diesen beiden Orientierungsbegriffen:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Äquivalenzklassen von nirgendwo} & \leftrightarrow & \text{Einheitsnormalenfelder auf } M \\
 \text{verschwindenden Tangentialvektorfeldern} & & \\
 [\tau] \xrightarrow{\Phi} \tau \text{ um } -\frac{\pi}{2} \text{ gedreht}^{80} \text{ und} & & \\
 \text{auf Länge 1 normiert} & & \\
 [\nu \text{ um } \frac{\pi}{2} \text{ gedreht}] \xleftarrow{\Psi} \nu & &
 \end{array}$$

Diese beiden Abbildungen sind offensichtlich zu einander invers. Im Folgenden werden wir kommentarlos zwischen diesen beiden Gesichtspunkten hin- und herwechseln.



Im Folgenden wollen wir das Integral einer glatten 1-Form über bestimmte orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeiten einführen.

Definition. Es sei M eine zusammenhängende kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit nichtleerem Rand und es sei \mathcal{O} eine Orientierung auf M . Eine **orientierungserhaltende Parametrisierung** von M ist eine Parametrisierung

$$\gamma: [a, b] \rightarrow M,$$

im Sinne der Definition auf Seite 50, welche die Eigenschaft besitzt, dass das Vektorfeld, welches an jedem Punkt $\gamma(t) \in M$ durch $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ gegeben ist, der Orientierung \mathcal{O} entspricht.

Nun können wir zur eigentlichen Definition schreiten.

Definition. Es sei M eine zusammenhängende kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit nichtleerem Rand. Es sei \mathcal{O} eine Orientierung auf M und es sei ω eine glatte

⁸⁰Wir drehen hierbei, wie üblich, gegen den Uhrzeigersinn.

1-Form auf M . Wenn M eine orientierungserhaltende Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ besitzt, dann definieren wir das Integral von ω auf der orientierten eindimensionalen Untermannigfaltigkeit M wie folgt:

$$\int_M \omega := \int_\gamma \omega = \int_{t=a}^{t=b} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Wie üblich müssen wir an dieser Stelle noch folgendes Lemma beweisen.

Lemma 10.11. Die Definition von $\int_M \omega$ hängt nicht von der Wahl von γ ab.

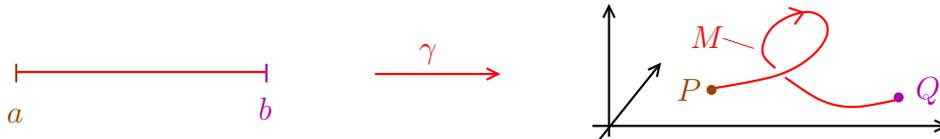
Beweisskizze. Es sei also M eine zusammenhängende kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n mit nichtleerem Rand, es sei \mathcal{O} eine Orientierung auf M und es sei ω eine glatte 1-Form auf M . Es seien zudem $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ und $\delta: [c, d] \rightarrow M$ zwei orientierungserhaltende Parametrisierungen von M .

Wir bezeichnen mit $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ die Abbildung, welche gegeben ist durch die Gleichung $\varphi(t) := \gamma^{-1}(\delta(t))$. Dies ist ein Diffeomorphismus.⁸¹ Aus unserer Voraussetzung, dass γ und δ orientierungserhaltend sind, folgt, dass φ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung ist. Es folgt nun also aus Satz 10.10, dass die Integrale über γ und δ übereinstimmen. ■

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 10.12. Es sei M eine kompakte zusammenhängende orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit „Anfangspunkt P “ und „Endpunkt Q “. Wir nehmen an, dass M eine orientierungserhaltende Parametrisierung besitzt. Es sei zudem $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\int_M df = f(Q) - f(P).$$



Beweis. Wir wählen eine orientierungserhaltende Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$. Dann gilt

$$\int_M df = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(Q) - f(P).$$

per Definition Satz 10.9

Bemerkung. Wir haben jetzt also einen Orientierungsbegriff für Hyperflächen und für eindimensionale Untermannigfaltigkeiten. Wir werden später der Frage nachgehen, was denn eine Orientierung einer beliebigen Untermannigfaltigkeit sein soll.

⁸⁰Anschaulich gesprochen ist es ziemlich klar, dass M eine orientierungserhaltende Parametrisierung besitzt. Aber der Beweis der Existenz ist nicht trivial.

⁸¹Diese Aussage ist gar nicht so leicht zu beweisen. Die Abbildungen γ und δ sind Parametrisierungen. Im Beweis von Satz 5.8 hatten wir gesehen, dass wir um jeden Punkt im Definitionsbereich die Parametrisierungen zu Inversen von Karten Γ und Δ fortsetzen können. Diese sind insbesondere Diffeomorphismen zwischen offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n , also ist auch $\Gamma^{-1} \circ \Delta$ ein Diffeomorphismus, also auch die Einschränkung von $\Gamma^{-1} \circ \Delta$ auf E_1 . Aber diese Einschränkung ist gerade die Abbildung $\varphi = \gamma^{-1} \circ \delta$.

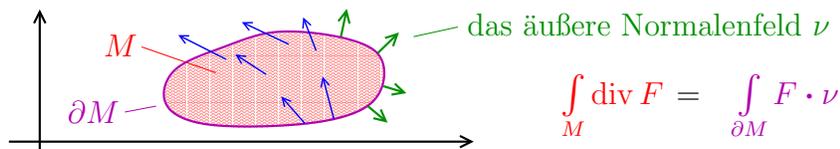
Zudem haben wir das Integral einer 1-Form über einer orientierten eindimensionalen Untermannigfaltigkeit eingeführt, und wir wollen im Folgenden Kapitel das „richtige“ mathematische Objekt finden, welches wir sinnvoll auf einer orientierten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit integrieren können.

11. DIFFERENTIALFORMEN HÖHERER ORDNUNG

11.1. Motivation. Erinnern wir uns noch einmal an den Gaußschen Integralsatz 8.5 und an Satz 10.12:

Satz 10.9. (Gaußscher Integralsatz) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M . Für jedes glatte Vektorfeld $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

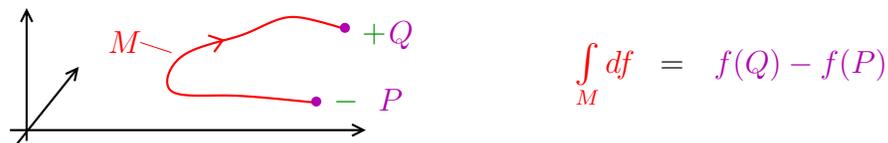
$$\int_M \operatorname{div} F = \int_{\partial M} F \cdot \nu.$$



Satz 10.12. Es sei M eine kompakte zusammenhängende orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit „Anfangspunkt P “ und „Endpunkt Q “. Wir nehmen an, dass M eine orientierungserhaltende Parametrisierung besitzt. Es sei zudem $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\int_M df = f(Q) - f(P).$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 1-Form Randpunkte von M



Diese beiden Sätze sind auf den ersten Blick sehr unterschiedlich, aber sie besitzen gewisse formale Übereinstimmungen:

- (1) Beide Sätze können auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis I zurückgeführt werden. Zudem können beide Sätze auch als Verallgemeinerung eben dieses Satzes aufgefasst werden, indem Sinne, dass wir für $M = [a, b]$ gerade die Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten.
- (2) Wir betrachten also entweder

M eine n -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und f ein Vektorfeld auf M , oder
 M eine 1-Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und f eine Funktion auf M .

Dann besagen die obigen Sätze, dass⁸²

$$\int_M \text{„Ableitung von } f\text{“} = \text{geeignetes Integral von } f \text{ auf dem Rand von } M.$$

Für eine beliebige k -dimensionale Untermannigfaltigkeit wollen wir jetzt eine analoge Aussage (nämlich den Satz von Stokes) formulieren und beweisen. Dazu müssen wir uns aber zuerst überlegen, was ist das „richtige mathematische Objekt“, welches wir auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit integrieren können.

⁸²Der „klassische Satz von Stokes“, den wir schon auf Seite 81 formuliert hatten, ist übrigens von der gleichen Form.

Wir erinnern uns noch einmal an die Situation von 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten. Für eine glatte 1-Form ω auf einer orientierten 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit, welche eine orientierungserhaltende Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ besitzt, hatten wir definiert

$$\int_M \omega := \int_{[a,b]} \underbrace{\omega_{\gamma(t)}}_{\in T_{\gamma(t)}^* M} \underbrace{(\gamma'(t))}_{\in T_{\gamma(t)} M}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}}$

Diese Definition macht Sinn, denn

- (1) eine Parametrisierung gibt für jeden Punkt auf M genau einen Tangentialvektor,
- (2) eine 1-Form auf M antwortet auf genau einen Tangentialvektor mit einer reellen Zahl,
- (3) wir erhalten also eine reellwertige Funktion, welche wir integrieren können,
- (4) und wir hatten gesehen, dass das Integral unabhängig von der Parametrisierung ist.

Es sei nun M eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Parametrisierung $\Psi: T \rightarrow M$ liefert nun für jedes $Q \in T$ genau k Tangentialvektoren in $T_{f(Q)}M$. Wenn wir das obige Prozedere für höherdimensionale Untermannigfaltigkeiten durchziehen wollen, brauchen wir nun also auf M ein mathematisches Objekt, welches auf genau k Tangentialvektoren an einem Punkt mit einer reellen Zahl antwortet. Diese mathematischen Objekte sind die Multilinearformen, welche schon in der Linearen Algebra eingeführt wurden. Wir werden diese im nächsten Kapitel noch einmal einführen und genauer studieren.

11.2. Alternierende Multilinearformen I: Definition. Wir erinnern an folgende Definition aus der linearen Algebra [Na1, Kapitel 12].

Definition. Es seien V und W reelle Vektorräume und es sei

$$\omega: V^k = \overbrace{V \times \dots \times V}^{k\text{-Mal}} \rightarrow W$$

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \omega(v_1, \dots, v_k)$$

eine Abbildung.

- (i) Wir sagen ω ist **multilinear**, falls ω in jedem Argument linear ist. Genauer gesagt, für alle $v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt⁸³

$$\begin{aligned} \omega(\dots, v + v', \dots) &= \omega(\dots, v, \dots) + \omega(\dots, v', \dots) \\ \omega(\dots, \lambda \cdot v, \dots) &= \lambda \cdot \omega(\dots, v, \dots), \end{aligned}$$

- (ii) Wir sagen ω ist **alternierend**, wenn gilt: vertauscht man zwei verschiedene Argumente, so ändert sich das Vorzeichen. Genauer gesagt, wenn für alle $v, v' \in V$ gilt

$$\omega(\dots, v, \dots, v', \dots) = -\omega(\dots, v', \dots, v, \dots).$$

Wir erinnern nun an die Charakterisierung von Determinanten von Matrizen.

Satz 11.1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt *genau* eine Abbildung, genannt die Determinante,

$$\det: M(n \times n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$$

⁸³Hierbei sollen die nicht genannten Argumente auf beiden Seiten gleich sein.

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Abbildung ist multilinear, d.h. die Abbildung ist linear in jeder Spalte.
- (ii) die Abbildung ist alternierend, d.h. vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen.
- (iii) Die Abbildung ist normiert, d.h. wenn e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{R}^n bezeichnen, dann gilt $\det(e_1 \dots e_n) = 1$.

Beweis. Der Satz wurde in [Na1, Satz 12.5 und 12.9] bewiesen. ■

Im Folgenden betrachten wir Verallgemeinerungen von Determinanten.

Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine alternierende k -Form auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega: V^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto \omega(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

welche sowohl multilinear als auch alternierend ist.

Beispiele. Wir geben im Folgenden viele Beispiele von alternierenden k -Formen auf reellen Vektorräumen.

- (1) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt aus Satz 11.1, dass

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto \lambda \cdot \det(\underbrace{v_1 \dots v_n}_{n \times n\text{-Matrix}}) \end{aligned}$$

eine alternierende n -Form auf \mathbb{R}^n . Es folgt ziemlich leicht aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 11.1, dass jede alternierende n -Form auf \mathbb{R}^n von dieser Form ist.

- (2) Eine alternierende 1-Form ist per Definition eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. ein Element im Dualraum $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$. Wir nennen alternierende 1-Formen **Linearformen**.

- (3) Es sei $w \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor. Es folgt leicht aus der Diskussion des Kreuzprodukts in Kapitel 4.4, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto w \cdot (\underbrace{v_1 \times v_2}_{\text{Kreuzprodukt}}) \end{aligned}$$

eine alternierende 2-Form auf \mathbb{R}^3 ist.

- (4) Es sei $w \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Es folgt leicht aus Satz 11.1, dass

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det(\underbrace{w \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}}_{n \times n\text{-Matrix}}) \end{aligned}$$

eine alternierende $(n-1)$ -Form auf \mathbb{R}^n ist. Im Fall $n = 3$ erhalten wir nach Lemma 4.7 die gleiche alternierende 2-Form wie im vorherigen Beispiel.

- (5) In Übungsblatt 8 werden wir sehen, dass wenn V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum ist, dann gibt es für $k > n$ nur eine alternierende k -Form auf V , nämlich die Nullabbildung.

⁸³Hierbei sollen die nicht genannten Spalten auf beiden Seiten gleich sein.

⁸³Die Summe zweier alternierender k -Forme ω, ω' ist definiert als die alternierende k -Form $\omega + \omega'$, welche gegeben ist durch

$$(\omega + \omega')(v_1, \dots, v_k) = \omega(v_1, \dots, v_k) + \omega'(v_1, \dots, v_k).$$

Ganz ähnlich können wir auch das Produkt einer alternierenden k -Form mit einem Skalar definieren.

- (6) Es sei V ein reeller Vektorraum. Per Definition ist $V^0 = \{0\}$. In diesem Fall ist jede Abbildung $V^0 \rightarrow \mathbb{R}$ multilinear und alternierend, weil es nichts zu überprüfen gibt. Eine alternierende 0-Form ist also nichts anderes als eine *beliebige* Abbildung $\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Folgendes elementare Lemma wird später eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 11.2. Es sei η eine alternierende k -Form auf \mathbb{R}^k und es sei A eine $k \times k$ -Matrix. Dann gilt für alle $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$, dass

$$\eta(A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_k) = \det(A) \cdot \eta(v_1, \dots, v_k).$$

Beweis. Nach der Diskussion auf Seite 108 gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\eta(v_1, \dots, v_k) = \lambda \cdot \det(v_1 \dots v_k),$$

für alle $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$. Für beliebige $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$ folgt also, dass

$$\begin{aligned} \eta(A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_k) &= \lambda \cdot \det(A \cdot v_1 \dots A \cdot v_k) \\ &= \lambda \cdot \det(A \cdot (v_1 \dots v_k)) \\ &= \lambda \cdot \det(A) \cdot \det(v_1 \dots v_k) = \det(A) \cdot \eta(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

↑
Multiplikativität der Determinante ■

11.3. Alternierende Multilinearformen II: Das Dachprodukt von Linearformen.

Die folgende Definition erlaubt es nun ganz leicht alternierende k -Formen zu konstruieren.

Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum. Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ Linearformen. Wir definieren

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k: V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \det \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}}_{\text{reelle } k \times k\text{-Matrix}}.$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ eine alternierende k -Form ist. Wir bezeichnen diese als das **Dachprodukt**⁸⁴⁸⁵ von $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

Beispiel. Wir betrachten jetzt den Fall $V = \mathbb{R}^n$. Für $i = 1, \dots, n$ betrachten wir wiederum die Abbildung

$$\begin{aligned} dx^i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (w_1, \dots, w_n) &\mapsto w_i. \end{aligned}$$

Dann gilt für Vektoren $v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, n$, dass

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} dx^1(v_1) & \dots & dx^1(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ dx^n(v_1) & \dots & dx^n(v_n) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} = \det \underbrace{(v_1 \dots v_n)}_{n \times n\text{-Matrix}}.$$

Wir haben also gezeigt, dass die alternierende n -Form

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n: (\mathbb{R}^n)^n = M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

⁸⁴Der eigenwillige Name kommt von der Form des Symbols „ \wedge “. Im Englischen wird dieses Produkt das „wedge-product“ genannt, nachdem das Symbol „ \wedge “ dort als wedge = Keil interpretiert wird.

⁸⁵In der Literatur wird oft auch der Name *äußeres Produkt* verwendet.

gerade der Determinante entspricht.

Notation. Es sei V ein reeller Vektorraum. Die Menge der alternierenden k -Formen auf V bildet einen reellen Vektorraum, welchen wir mit $\wedge^k V^*$ bezeichnen.

Bemerkung. Es sei V ein reeller Vektorraum. In Übungsblatt 8 werden wir sehen, dass *nicht* jede alternierende k -Form als Dachprodukt von k Linearformen geschrieben werden kann.⁸⁶

Lemma 11.3. Es V ein reeller Vektorraum. Die Abbildung

$$\begin{aligned} (V^*)^k &= \overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^{k\text{-Mal}} \rightarrow \wedge^k V^* \\ (\varphi_1, \dots, \varphi_k) &\mapsto \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \end{aligned}$$

ist multilinear und alternierend.

Beispiel. Für alle Linearformen φ und ψ in V^* gilt insbesondere folgende Gleichheit von 2-Formen:

$$\varphi \wedge \psi = -\psi \wedge \varphi.$$

Mit $\varphi = \psi$ folgt insbesondere für Linearformen, dass $\varphi \wedge \varphi = 0$.

Beweis. Diese Aussage leicht folgt leicht aus den Definitionen und der Tatsache, dass die Determinante auch multilinear in den Zeilen und alternierend in den Zeilen ist. ■

Satz 11.4. Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis für V^* . Es sei $k \in \{0, \dots, n\}$. Dann bilden die Dachprodukte

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \quad \text{mit} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

eine Basis von $\wedge^k V^*$.

Beweis (*). Wir müssen folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Es sei $\omega \in \wedge^k V^*$.

- (1) Wir können ω als Linearkombination $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1 \dots i_k} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$ schreiben.
- (2) Die Koeffizienten $c_{i_1 \dots i_k}$ sind eindeutig.

Beweis. Es sei b_1, \dots, b_n eine Basis von V , welche zur Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von V^* dual ist, d.h. es gilt

$$\varphi_i(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Aus der Definition des Dachproduktes folgt leicht, dass für $i_1 < \dots < i_k$ und $j_1 < \dots < j_k$ gilt

$$(*) \quad (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k), \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Es sei nun $\omega \in \wedge^k V^*$.

- (1) Für $i_1 < \dots < i_k$ setzen wir

$$c_{i_1 \dots i_k} := \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dann

$$\eta := \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1 \dots i_k} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}.$$

⁸⁶Dies ist analog zum gerne gemachten Fehler zu denken, dass in einem Tensorprodukt $V \otimes W$ jedes Element von der Form $v \otimes w$ sein muss.

Wir wollen nun zeigen, dass $\eta = \omega$.

- (a) Es folgt aus (*), dass ω und η die gleichen Werte auf allen $(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) \in V^k$ mit $j_1 < \dots < j_k$ annehmen.
- (b) Da η und ω alternierend sind, folgt nun aus (a), dass ω und η die gleichen Werte auf $(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) \in V^k$ für beliebige j_1, \dots, j_k annehmen.
- (c) Da η und ω multilinear sind, folgt nun aus (b), dass ω und η die gleichen Werte auf $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ für beliebige $v_1, \dots, v_k \in V$ annehmen.⁸⁷
- (2) Aus (*) folgt sofort die Eindeutigkeit, denn $c_{i_1 \dots i_k} = \omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_k})$. ■

Korollar 11.5. Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$, gilt

$$\dim(\wedge^k V^*) = \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Beweis. Es ist

$$\dim(\wedge^k V^*) = \#\{(j_1, \dots, j_k) \mid j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } j_1 < \dots < j_k\} = \binom{n}{k}.$$

die Anzahl der Möglichkeiten k verschiedene Elemente aus einer Menge von n Elementen zu wählen beträgt gerade $\binom{n}{k}$. ■

Satz 11.6. Es sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und es seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es genau eine Abbildung

$$\begin{aligned} \wedge^k V^* \times \wedge^l V^* &\rightarrow \wedge^{k+l} V^* \\ (\omega, \sigma) &\mapsto \omega \wedge \sigma \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Abbildung ist bilinear, d.h. für alle $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \wedge^k V^*$, für alle $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \wedge^l V^*$ sowie für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2) \wedge \sigma &= \omega_1 \wedge \sigma + \omega_2 \wedge \sigma, \\ \omega \wedge (\sigma_1 + \sigma_2) &= \omega \wedge \sigma_1 + \omega \wedge \sigma_2 \end{aligned}$$

und

$$(\lambda \cdot \omega) \wedge \sigma = \lambda \cdot (\omega \wedge \sigma) = \omega \wedge (\lambda \cdot \sigma).$$

- (2) Für alle Linearformen $\psi_1, \dots, \psi_k, \eta_1, \dots, \eta_l \in V^*$ gilt

$$\underbrace{(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k)}_{\text{definiert auf Seite 109}} \wedge \underbrace{(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l)}_{\text{definiert auf Seite 109}} = \underbrace{\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l}_{\text{definiert auf Seite 109}}.$$

⁸⁷In der Tat, denn für $i = 1, \dots, k$ schreiben wir $v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij} \cdot b_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, v_k) &= \omega\left(\sum_{j_1=1}^n v_{1j_1} \cdot b_{j_1}, \dots, \sum_{j_k=1}^n v_{kj_k} \cdot b_{j_k}\right) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n v_{1j_1} \dots v_{kj_k} \cdot \omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n v_{1j_1} \dots v_{kj_k} \cdot \omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) \stackrel{\uparrow}{=} \eta(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

siehe (b) oben gleiche Argument rückwärts

Definition. Im Folgenden bezeichnen wir für $\omega \in \wedge^k V^*$ und $\eta \in \wedge^l V^*$ die alternierende $(k+l)$ -Form $\omega \wedge \sigma \in \wedge^{k+l} V^*$ als das **Dachprodukt** von ω und σ .

Beweis (*). Es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von V^* . Es sei $\omega \in \wedge^k V^*$ und es sei $\sigma \in \wedge^l V^*$. Nach Satz 11.4 können wir schreiben

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \quad \text{und} \quad \sigma = \sum_{j_1 < \dots < j_l} b_{j_1, \dots, j_l} \cdot \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l},$$

wobei die Koeffizienten $a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$ und $b_{j_1, \dots, j_l} \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind. Wir definieren⁸⁸

$$\omega \wedge \sigma := \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot b_{j_1, \dots, j_l} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l}.$$

Man kann nun leicht zeigen, dass diese Abbildung die Eigenschaften (1) und (2) besitzt. Zudem ist es ebenso leicht zu sehen, dass dies die einzige Abbildung ist, welche die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt. ■

Der folgende Satz ist die Fortsetzung von Satz 11.6. Der Satz besagt, dass das Dachprodukt assoziativ ist, und dass es bis auf ein geeignetes Vorzeichen kommutativ ist.

Lemma 11.7. Das Dachprodukt auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum V besitzt auch folgende Eigenschaften:

(1) Für alle $\alpha \in \wedge^k V^*$, $\beta \in \wedge^l V^*$ und $\gamma \in \wedge^m V^*$ gilt

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

(2) Für alle $\alpha \in \wedge^k V^*$ und $\beta \in \wedge^l V^*$ gilt

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{\text{Grad}(\alpha) \cdot \text{Grad}(\beta)} \cdot \alpha \wedge \beta.$$

Beweis. Die Aussage (1) folgt leicht aus Satz 11.6 (2) unter Verwendung von Satz 11.4 und Satz 11.6 (1). Aussage (2) folgt nun aus Satz 11.4, aus Satz 11.6 (2) und aus folgender Behauptung:

Behauptung. Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_l \in V^*$. Dann gilt:

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = (-1)^{kl} \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l.$$

Beweis. Aus Lemma 11.3 folgt, dass $\psi_i \wedge \varphi_j = -\varphi_j \wedge \psi_i$. Mithilfe dieser Beobachtung erhalten wir

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = (-1)^k \cdot \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_{l-1} \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_l$$

↑
denn wir benötigen k Transpositionen um ψ_l „nach hinten“ zu schieben

$$= (-1)^{kl} \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l.$$

↑

wir führen das gleiche Argument insgesamt l mal durch ■

Wir beschließen diese Diskussion von linearer Algebra mit folgender Definition.

⁸⁸Wir definieren $\omega \wedge \sigma$ also durch den Ausdruck, in dem wir die Ausdrücke für ω und σ naiv „ausmultiplizieren“. Wenn die Aussage des Satzes so gilt, dann folgt aus den Eigenschaften (1) und (2), dass diese Gleichheit gelten muss.

Definition. Eine lineare Abbildung $f: U \rightarrow V$ zwischen reellen Vektorräumen induziert für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung

$$f^*: \wedge^k V^* \rightarrow \wedge^k U^*$$

$$(\omega: V^k \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto \left(\begin{array}{l} f^*\omega: U^k \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_k) \mapsto \omega(f(u_1), \dots, f(u_k)) \end{array} \right).$$

Man kann mithilfe der Definitionen leicht zeigen, dass diese Abbildungen das Dachprodukt erhalten, d.h. für alle $\alpha \in \wedge^k V^*$ und $\beta \in \wedge^l V^*$ gilt

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta \in \wedge^{k+l} U^*.$$

Bemerkung. Man kann nun leicht verifizieren, dass die Abbildungen $V \mapsto \wedge^k V^*$ und $f \mapsto f^*$ einen kontravarianten Funktor von der Kategorie $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume zu der Kategorie $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume definieren.

11.4. Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit.

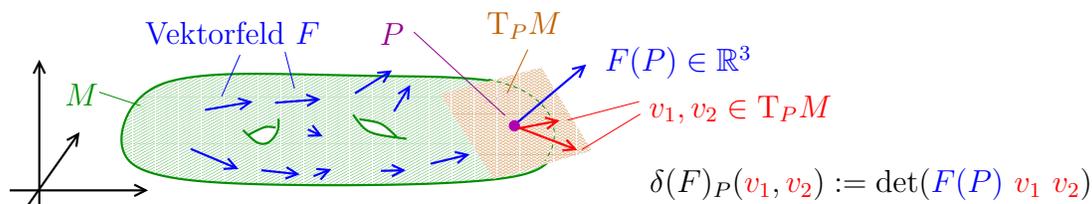
- (1) Eine Differentialform k -ter Ordnung ω auf M (oder auch kurz k -Form ω auf M) ordnet jedem Punkt $P \in M$ eine alternierende k -Form ω_P auf dem Tangentialraum $T_P M$ zu.
- (2) Für zwei Differentialformen ω und σ auf M definieren wir die Differentialform $\omega \wedge \sigma$ punktweise, d.h. für jedes $P \in M$ setzen wir $(\omega \wedge \sigma)_P := \omega_P \wedge \sigma_P$.

Beispiele. Aus den Beispielen von alternierenden k -Formen auf Seite 108 können wir problemlos Beispiele von k -Formen auf Untermannigfaltigkeiten basteln.

- (1) Nachdem $\wedge^1 V^* = V^*$ entspricht die obige Definition einer k -Form für $k = 1$ gerade der Definition auf Seite 91.
- (2) Auf Seite 109 hatten wir gesehen, dass $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$. Also ist eine 0-Form auf einer Untermannigfaltigkeit M das Gleiche wie eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.
- (3) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit beliebiger Dimension. Darüber hinaus sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf M . Wir erhalten eine $(n-1)$ -Form $\delta(F)$ auf M , welche für $P \in M$ durch folgende alternierende $(n-1)$ -Form gegeben ist:⁸⁹

$$\delta(F)_P: (T_P M)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v_1, \dots, v_{n-1}) \mapsto \det \underbrace{(F(P) \ v_1 \ \dots \ v_{n-1})}_{n \times n\text{-Matrix}}.$$



⁸⁹Zur Erinnerung, $T_P M$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , die Vektoren $F(P), v_1, \dots, v_{n-1}$ bilden also in der Tat eine reelle $n \times n$ -Matrix.

- (4) Ein interessanter Spezialfall von (3) ist gegeben durch eine orientierte Hyperfläche (M, ν) in \mathbb{R}^3 . Dann definieren die alternierenden 2-Formen

$$\begin{aligned} T_P M \times T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \nu(P) \cdot (v \times w) = \det(\nu(P) \ v \ w) \end{aligned}$$

eine 2-Form auf M .

In Kapitel 10.1 hatten wir schon diskutiert, was es heißen soll, dass eine Differentialform erster Ordnung glatt ist. Wir werden im nächsten Teilkapitel diesen Begriff auf Differentialformen beliebiger Ordnung verallgemeinern.

11.5. Glatte Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten.

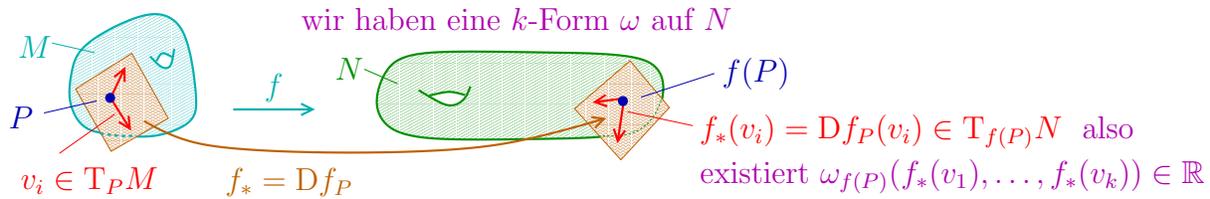
- (1) Es sei $P \in M$. Wir hatten schon in Kapitel 9.1 gesehen, dass f eine lineare Abbildung

$$f_*: T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$$

induziert. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit f^* die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} f^*: \wedge^k T_{f(P)}^* N &\rightarrow \wedge^k T_P^* M \\ \omega &\mapsto \left(\begin{array}{l} f^* \omega: (T_P M)^k \rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) \mapsto \omega(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k)) \end{array} \right). \end{aligned}$$

- (2) Für eine k -Form ω auf N bezeichnen wir mit $f^* \omega$ die k -Form auf M , welche gegeben ist durch $(f^* \omega)_P$. Wir bezeichnen $f^* \omega$ manchmal als die zurückgezogene k -Form.



Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} (M, P) &\mapsto \wedge^k T_P^* M \\ (f: (M, P) \rightarrow (N, Q)) &\mapsto (f^*: \wedge^k T_Q^* N \rightarrow \wedge^k T_P^* M) \end{aligned}$$

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie \mathcal{PUM} der punktierten Untermannigfaltigkeiten zu der Kategorie $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume bilden.⁹⁰

Wir wollen nun definieren, was es heißt, dass eine Differentialform auf einer Untermannigfaltigkeit M glatt ist. Für Differentialformen erster Ordnung hatten wir dies schon auf Seite 94 ausgeführt. Die Definitionen für Differentialformen höherer Ordnung verlaufen nun ganz analog.

Definition.

- (1) Es sei ω eine m -Form auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^k$ beziehungsweise einer offenen Teilmenge $W \subset H_k$. Nach Satz 11.4 bilden die Dachprodukte $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$ mit

⁹⁰Beispielsweise folgt dies aus der Tatsache, dass dies die Verknüpfung des kovarianten Funktors $(M, P) \rightarrow T_P M$ mit dem kontravarianten Funktor $V \mapsto \wedge^k V^*$ ist.

$i_1 < i_2 < \dots < i_m$ eine Basis von $\wedge^m(\mathbb{R}^k)^*$. Wir können also ω als Linearkombination betrachten:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_m} f_{i_1 \dots i_m} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m},$$

wobei $f_{i_1 \dots i_m}: W \rightarrow \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte reellwertige Funktionen auf W sind. Wir sagen nun, die m -Form ω ist glatt, wenn alle Funktionen $f_{i_1 \dots i_m}$ glatt sind.

- (2) Es sei ω eine m -Form auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M .
- (a) Es sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte für M . Wir sagen ω ist glatt bezüglich der Karte Φ , falls die m -Form $(\Phi^{-1})^*\omega$ auf $V \cap E_k$ beziehungsweise auf $V \cap H_k$ glatt ist.
- (b) Wir sagen ω ist glatt, wenn ω bezüglich jeder Karte von M glatt ist.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 10.3.

Satz 11.8. Es sei ω eine m -Form auf einer Untermannigfaltigkeit M . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Die m -Form ω ist glatt auf M .
- (2) Es gibt einen Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von M , so dass die m -Form bezüglich jeder Karte Φ_i des Atlanten glatt ist.
- (3) Für alle glatten Tangentialvektorfelder F_1, \dots, F_m auf M ist folgende Funktion glatt:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \omega_P(F_1(P), \dots, F_m(P)). \end{aligned}$$

Beweis. Der Satz wird ganz ähnlich wie Satz 10.3 bewiesen. ■

Notation. Für eine Untermannigfaltigkeit M und $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir nun:

$$\Omega_m(M) := \text{Vektorraum der glatten } m\text{-Formen auf } M.$$

Beispiel.

- (1) $\Omega_0(M)$ ist gerade der Vektorraum aller glatten Funktionen $M \rightarrow \mathbb{R}$.
- (2) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld auf M . Wir betrachten die $(n-1)$ -Form $\delta(F)$ auf M , welche jedem Punkt $P \in M$ folgende alternierende $(n-1)$ -Form zuordnet:

$$\begin{aligned} \delta(F)_P: (T_P M)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det \underbrace{(F(P) \ v_1 \ \dots \ v_{n-1})}_{n \times n\text{-Matrix}}. \end{aligned}$$

Mithilfe von Satz 11.8 (1) \Rightarrow (3) kann man leicht zeigen, dass dies eine glatte $(n-1)$ -Form auf M ist.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 10.4.

Satz 11.9. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten und es sei ω eine m -Form auf N . Wenn ω glatt ist, dann ist auch die zurückgezogene m -Form $f^*\omega$ auf M glatt.

Beweis. Der Beweis ist ganz analog zum Beweis von Satz 10.4. ■

Bemerkung. Zusammenfassend haben wir also insbesondere gezeigt, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Untermannigfaltigkeit } M &\mapsto \Omega_m(M), \\ \text{glatte Abbildung } f: M \rightarrow N &\mapsto (f^*: \Omega_m(N) \rightarrow \Omega_m(M)) \end{aligned}$$

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie \mathcal{UM} der Untermannigfaltigkeiten zu der Kategorie $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume bilden.

11.6. Integration von Differentialformen I. In Kapitel 10.5 hatten wir gesehen, dass wir eine glatte 1-Form auf einer orientierten kompakten 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit mit nichtleerem Rand integrieren können. Wir wollen nun versuchen diese Aussage zu verallgemeinern.

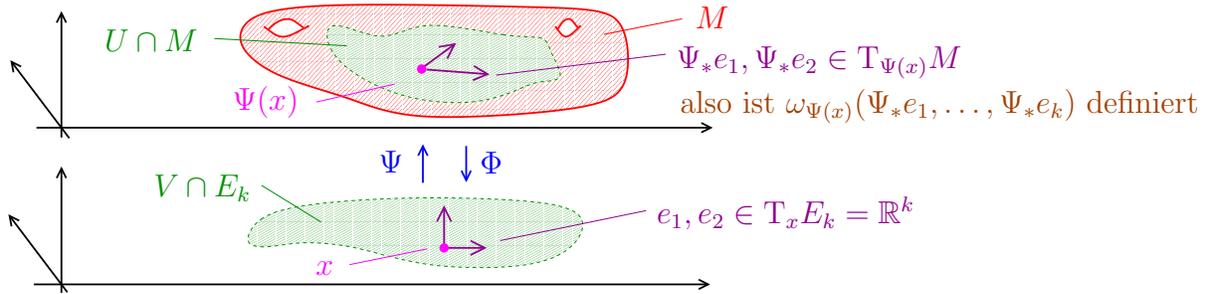
Notation. Es sei M eine kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei zudem ω eine glatte k -Form auf M . In diesem Kapitel nehmen wir erst einmal an, dass es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ gibt mit $\text{Träger}(\omega) \subset U$.⁹¹ Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ . Wir betrachten nun, ganz analog zur Diskussion in Kapitel 10.3, die Funktion

$$V \cap E_k \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \underbrace{\omega_{\Psi(x)}}_{\in \wedge^k T_{\Psi(x)}^* M} \left(\underbrace{\Psi_* e_1, \dots, \Psi_* e_k}_{k \text{ Vektoren in } T_{\Psi(x)} M} \right).$$

Dies ist eine glatte Funktion mit kompakten Träger, also Lebesgue-integrierbar.⁹² Wir können nun diese Funktion integrieren, d.h. wir betrachten

$$I(\Psi) := \int_{x \in V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}(\Psi_* e_1, \dots, \Psi_* e_k) dx.$$



Es stellt sich die Frage, ob dieser Ausdruck $I(\Psi)$ von der Wahl der Karte Φ abhängt oder nicht.

Frage 11.10. Es sei M eine k -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine glatte k -Form auf M . Zudem seien $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ Karten mit Träger $\text{Träger}(\omega) \subset U \cap \tilde{U}$. Wir bezeichnen die Umkehrabbildungen von Φ und $\tilde{\Phi}$ mit Ψ und $\tilde{\Psi}$. Die Frage ist nun wie folgt: Unter welchen Voraussetzungen stimmen die Integrale

$$I(\Psi) = \int_{x \in V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}(\Psi_* e_1, \dots, \Psi_* e_k) dx$$

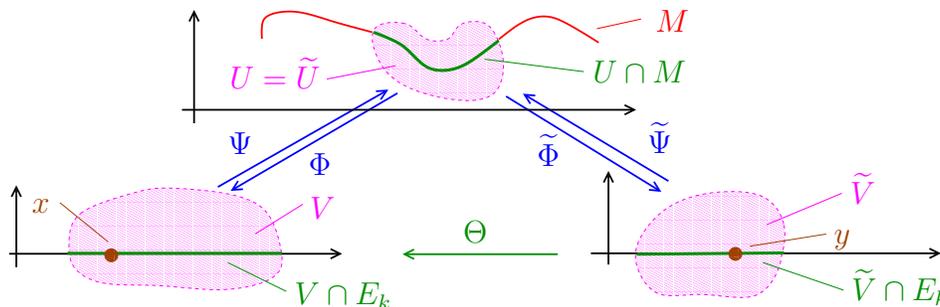
und

⁹¹Hierbei bezeichnen wir mit $\text{Träger}(\omega) \subset M$ den Abschluss der Menge aller Punkte $P \in M$, auf denen die Differentialform auf $T_P M$ nicht die Nullform ist.

⁹²Für $x \in V \cap E_k$ ist $\omega_{\Psi(x)}(\Psi_* e_1, \dots, \Psi_* e_k) = (\Psi^* \omega)_x(e_1, \dots, e_k)$. Die k -Form $\Psi^* \omega$ ist nach Satz 11.9 glatt, also ist die Funktion $x \mapsto \omega_{\Psi(x)}(\Psi_* e_1, \dots, \Psi_* e_k)$ nach Satz 11.8 glatt. Da M kompakt ist, ist auch der Träger von ω und damit auch der Träger von $\Psi^* \omega$ kompakt.

$$I(\tilde{\Psi}) = \int_{y \in \tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(y)}(\tilde{\Psi}_* e_1, \dots, \tilde{\Psi}_* e_k) dy$$

überein?



Antwort. Indem wir zu $U \cap \tilde{U}$ übergehen können wir annehmen, dass $U = \tilde{U}$. Wir bezeichnen mit Θ den Diffeomorphismus $\Theta := \Phi \circ \tilde{\Psi}: \tilde{V} \cap E_k \rightarrow V \cap E_k$. Zum einen gilt

$$\begin{aligned} I(\tilde{\Psi}) &= \int_{y \in \tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(y)}(D\tilde{\Psi}_y(e_1), \dots, D\tilde{\Psi}_y(e_k)) dy \\ &= \int_{y \in \tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(y)}(D\Psi_{\Theta(y)}(D\Theta_y \cdot e_1), \dots, D\Psi_{\Theta(y)}(D\Theta_y \cdot e_k)) dy \\ &\quad \uparrow y \in \tilde{V} \cap E_k \end{aligned}$$

aus der Kettenregel 2.1 folgt, dass für $y \in \tilde{V} \cap E_k$ gilt:

$$D\tilde{\Psi}_y = D(\Psi \circ \Theta)_y = D\Psi_{\Theta(y)} \cdot D\Theta_y$$

$$\begin{aligned} &= \int_{y \in \tilde{V} \cap E_k} \omega_{\Psi(\Theta(y))}(D\Psi_{\Theta(y)}(e_1), \dots, D\Psi_{\Theta(y)}(e_k)) \cdot \det(D\Theta_y) dy. \\ &\quad \uparrow y \in \tilde{V} \cap E_k \end{aligned}$$

Lemma 11.2 angewandt auf die alternierende k -Form

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \eta(v_1, \dots, v_k) := \omega_{\tilde{\Psi}(y)}(D\Psi_{\Theta(y)}(v_1), \dots, D\Psi_{\Theta(y)}(v_k))$$

und die $k \times k$ -Matrix $D\Theta_y$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} I(\Psi) &= \int_{x \in V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}((D\Psi_x)(e_1), \dots, (D\Psi_x)(e_k)) dx \\ &= \int_{x \in \tilde{V} \cap E_k} \omega_{\Psi(\Theta(y))}((D\Psi_{\Theta(y)})(e_1), \dots, (D\Psi_{\Theta(y)})(e_k)) \cdot |\det D\Theta_y| dy. \\ &\quad \uparrow x \in \tilde{V} \cap E_k \end{aligned}$$

der Transformationssatz 3.9 besagt, dass für eine Funktion g auf $V \cap E_k$ gilt

$$\int_{x \in V \cap E_k} g(x) dx = \int_{y \in \tilde{V} \cap E_k} g(\Theta(y)) \cdot |\det D\Theta_y| dy$$

Wir sehen also, dass die beiden Integrale $I(\Psi)$ und $I(\tilde{\Psi})$ übereinstimmen, wenn

$$\det(D\Theta_y) = |\det(D\Theta_y)| \quad \text{für alle } y \in \tilde{V} \cap E_k,$$

d.h. beide Integrale stimmen überein, wenn

$$\det(D\Theta_y) > 0 \quad \text{für alle } y \in \tilde{V} \cap E_k.$$

Wir haben damit unsere Frage beantwortet.

Wir fassen jetzt diese Rechnung als folgenden Satz zusammen.

Satz 11.11. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine glatte k -Form auf M . Zudem seien $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: U \rightarrow \tilde{V}$ Karten mit $\text{Träger}(\omega) \subset U$. Wir nehmen an, dass $U \cap M$ zusammenhängend ist. Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$\Theta := \Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}: \tilde{V} \cap E_k \rightarrow V \cap E_k.$$

Wir setzen⁹³

$$\epsilon := \begin{cases} +1, & \text{wenn } \det(D\Theta_y) > 0 \text{ für alle } y \in \tilde{V} \cap E_k, \\ -1, & \text{wenn } \det(D\Theta_y) < 0 \text{ für alle } y \in \tilde{V} \cap E_k. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{x \in V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}(\Psi_*e_1, \dots, \Psi_*e_k) dx = \epsilon \cdot \int_{y \in \tilde{V} \cap E_k} \omega_{y \in \tilde{\Psi}(y)}(\tilde{\Psi}_*e_1, \dots, \tilde{\Psi}_*e_k) dy.$$

Nachdem also im Allgemeinen das Integral

$$I(\Psi) := \int_{V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}(\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) dx$$

von der Wahl der Karte abhängt, können wir den Ausdruck nicht als Definition des Integrals von einer k -Form auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit verwenden. Andererseits haben wir gesehen, dass wir „nahe dran“ sind, d.h. wir müssen noch versuchen, das „Vorzeichenproblem“ unter Kontrolle zu kriegen. Um dies zu erreichen benötigen wir noch den Begriff des orientierten Vektorraumes und der orientierten Untermannigfaltigkeit.

Bemerkung. Bei der Diskussion des Integrals einer Differentialform auf einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit M hatten wir ebenfalls gesehen, dass das Integral von der Wahl einer Orientierung von M abhängt. Es ist also nicht überraschend, dass diese Problematik auch bei der Integration von k -Formen auf k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten auftritt.

11.7. Orientierte Vektorräume und Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum von Dimension $k \in \mathbb{N}$.

- (1) Es seien $X = (x_1, \dots, x_k)$ und $Y = (y_1, \dots, y_k)$ zwei Basen⁹⁴ von V . Nach [Na1, Definition 10.8] ist die **Basiswechsellmatrix** $A_{X,Y} = (a_{ij})$ definiert als die $k \times k$ -Matrix, welche eindeutig bestimmt ist durch $x_i = \sum_{j=1}^k a_{ji} \cdot y_j$.
- (2) Wir sagen zwei Basen X und Y von V sind **äquivalent**, wenn die Determinante der Basiswechsellmatrix $A_{X,Y}$ positiv ist.

Bemerkung. Wir werden in Präsenzübungsblatt 9 sehen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von V ist, und dass es genau zwei Äquivalenzklassen von Basen gibt.

⁹³Warum tritt genau einer der beiden Fälle in der Definition von ϵ auf?

⁹⁴Als *Basis* von V betrachten wir eine „angeordnete Menge von Vektoren“, d.h. wir unterscheiden zwischen (v_1, \dots, v_k) und einer Permutation der Vektoren. Beispielsweise sind (e_1, e_2) und (e_2, e_1) *nicht* äquivalente Basen von \mathbb{R}^2 .

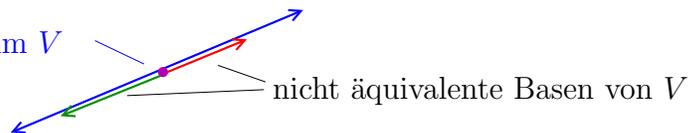
Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum von Dimension $k \in \mathbb{N}$.

- (1) Eine Äquivalenzklasse von Basen heißt **Orientierung** für V .
- (2) Wir bezeichnen V zusammen mit einer Orientierung als **orientierten Vektorraum**.
- (3) Es sei (V, \mathcal{O}) ein orientierter Vektorraum. Wir nennen eine Basis (v_1, \dots, v_k) eine **positive Basis**, wenn (v_1, \dots, v_k) in \mathcal{O} liegt, andernfalls sagen wir, dass (v_1, \dots, v_k) eine **negative Basis** ist.

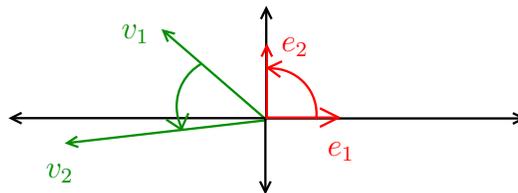
Beispiele.

- (1) Es sei V ein eindimensionaler reeller Vektorraum. Dann ist jeder von 0 verschiedene Vektor eine Basis, und zwei Vektoren v und w geben die gleiche Orientierung, genau dann, wenn $w = a \cdot v$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

1-dimensionaler Vektorraum V



- (2) Wenn wir nichts anderes sagen, dann betrachten wir \mathbb{R}^n immer mit der Orientierung, in der die "kanonische" Basis (e_1, \dots, e_n) eine positive Basis ist.
- (3) Wir betrachten \mathbb{R}^2 mit der kanonischen Orientierung, welche durch die Basis (e_1, e_2) festgelegt ist. Es sei nun (v_1, v_2) eine beliebige Basis für \mathbb{R}^2 . Es sei $\varphi \in (-\pi, \pi)$ der



Winkel um den man v_1 gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, so dass v_1 in die gleiche Richtung wie v_2 zeigt.⁹⁵ In Übungsblatt 9 werden wir sehen, dass die Basis (v_1, v_2) genau dann eine positive Basis von \mathbb{R}^2 ist, wenn $\varphi \in (0, \pi)$.

- (4) Es sei V ein 2-dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^3 und es sei $u \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ ein Normalenvektor zu V . Dann legt u eine Orientierung auf V wie folgt fest:⁹⁶

$$\text{eine Basis } (v, w) \text{ ist positiv für } V \iff \det(u \ v \ w) > 0.$$

Die geometrische Bedeutung der Definition ist wie folgt: eine Basis (v, w) ist positiv, wenn man den Vektor w aus v durch Drehung um die u -Achse um einen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ erhält. Wir können diese Beobachtung noch anschaulicher formulieren:

(v, w) ist eine positive Basis von v , wenn gilt:

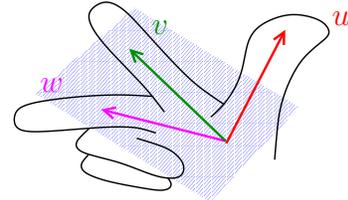
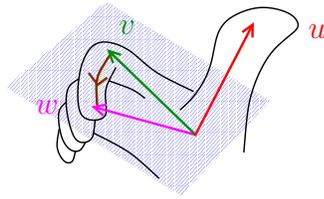
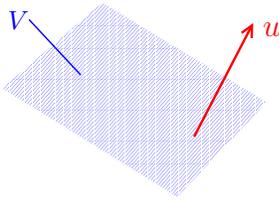
- (a) der Daumen zeigt in die u -Richtung,
- (b) der Zeigefinger zeigt in die v -Richtung,

⁹⁵Etwas genauer gesagt, es sei $\varphi \in (-\pi, \pi)$ der Winkel, so dass es ein $\lambda > 0$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} v_1 = \lambda \cdot v_2$$

⁹⁶Wenn man genau hinschaut, dann ist hier folgende Aussage versteckt: wenn (v, w) und (v', w') positiv sind, d.h. wenn $\det(u \ v \ w) > 0$ und $\det(u \ v' \ w') > 0$, dann sind (v, w) und (v', w') äquivalente Basen von V . Diese Aussage wird in Übungsblatt 9 bewiesen.

(c) der Mittelfinger zeigt in die w -Richtung.

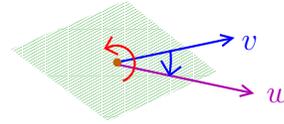
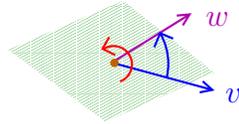
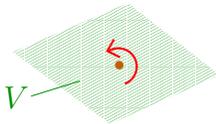


den zweiten Basisvektor w erhalten wir durch Drehung „entlang der Finger“

der Daumen zeigt in die u -Richtung
der Zeigefinger zeigt in die v -Richtung
der Mittelfinger zeigt in die w -Richtung

Notation. Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum. In Bildern spezifizieren wir eine Orientierung wie folgt:

- (1) Wir zeichnen einen orientierten Kreisabschnitt um den Ursprung.
- (2) Wir sagen eine Basis (v, w) ist positiv, wenn man den zweiten Vektor v durch Streckung und Drehung um einen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ in Richtung des Kreisabschnitts erhält.



(v, w) ist positive Basis von V

(v, w) ist **keine** positive Basis von V

Definition. Es seien V und W orientierte Vektorräume.⁹⁷ Wir sagen ein Isomorphismus $\Phi: V \rightarrow W$ ist **orientierungserhaltend**, wenn das Bild einer positiven Basis von V eine positive Basis von W ist. Andernfalls sagen wir, dass Φ **orientierungsumkehrend** ist.⁹⁸

Lemma 11.12.

- (1) Die Verknüpfung von zwei orientierungserhaltenden Isomorphismen ist wiederum orientierungserhaltend.
- (2) Das Inverse eines orientierungserhaltenden Isomorphismus ist wiederum orientierungserhaltend.

Beweis. Die Aussagen des Lemmas folgen problemlos aus den Definitionen und elementaren Eigenschaften der Determinante. Wir werden die Aussagen in Präsenzübungsblatt 9 beweisen. ■

Definition. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit von Dimension $k \in \mathbb{N}$.

- (1) Eine **Prä-Orientierung** für M ist eine Abbildung, welche jedem Tangentialraum $T_P M$ eine Orientierung zuordnet.

⁹⁷Genauer gesagt, müsste man schreiben, es seien (V, \mathcal{O}) und (W, \mathcal{P}) orientierte Vektorräume, aber wir unterdrücken „ \mathcal{O} “ und „ \mathcal{P} “ in der Notation, genauso wie wir sagen „Sei K ein Körper“, anstatt zu schreiben „Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper“.

⁹⁸Es seien B und C positive Basen von V . Wenn $\Phi(B)$ eine positive Basis von W ist, warum folgt dann auch, dass $\Phi(C)$ eine positive Basis von W ist?

- (2) Wir sagen eine Prä-Orientierung ist stetig bezüglich einer Karte $\Phi: U \rightarrow V$, wenn auf jeder Komponente K von $U \cap M$ entweder gilt⁹⁹¹⁰⁰

$$\Phi_*: T_x M \rightarrow T_{\Phi(x)} E_k = \mathbb{R}^k \text{ ist orientierungserhaltend für alle } x \in K$$

$$\text{oder } \Phi_*: T_x M \rightarrow T_{\Phi(x)} E_k = \mathbb{R}^k \text{ ist orientierungsumkehrend für alle } x \in K.$$

- (3) Wir sagen eine Prä-Orientierung ist eine Orientierung, wenn die Prä-Orientierung bezüglich allen Karten stetig ist.
- (4) Eine Untermannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung heißt orientierte Untermannigfaltigkeit. Eine Untermannigfaltigkeit, für die man eine Orientierung finden kann, heißt orientierbare Untermannigfaltigkeit.

Bevor wir uns den Beispielen zuwenden erwähnen wir noch folgendes Lemma, welches die gleiche Rolle spielt wie Satz 2.8, Satz 10.3 und Satz 11.8.

Lemma 11.13. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit. Eine Prä-Orientierung von M ist eine Orientierung, wenn es einen Atlas für M gibt, so dass die Prä-Orientierung bezüglich allen Karten des Atlanten stetig ist.

Beweis. Der Beweis des Lemmas ist ähnlich wie der Beweis von Satz 2.8. ■

Beispiele.

- (1) In Kapitel 8.2 hatten wir den Begriff der Orientierung einer Hyperfläche mithilfe von Einheitsnormalenfeldern eingeführt. Man kann leicht zeigen, dass die Definition in Kapitel 8.2 äquivalent ist zur obigen Definition. In der Tat, sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, dann gilt:

- (A) Es sei ν ein Einheitsnormalenfeld, d.h. ein normiertes Normalenfeld auf M . Es sei $P \in M$. Wie aus Seite 119 sagen wir, dass eine Basis (v_1, \dots, v_{n-1}) von $T_P M$ ist *positiv*, wenn

$$\det(\nu(P) \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}) > 0.$$

Mithilfe von Satz 2.6 kann man zeigen, dass dies eine Orientierung auf M definiert.

- (B) Umgekehrt, nehmen wir an, wir hätten eine Orientierung für jeden Tangentialraum $T_P M$, welche die Stetigkeitsbedingung erfüllt. Wir wollen nun ein stetiges normiertes Normalenfeld auf M konstruieren. Sei also $P \in M$. Es gibt dann genau einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$, welche folgende Eigenschaften besitzt:

- $w \in \perp T_P M$,
- $\|w\| = 1$, und
- für eine positive Basis v_1, \dots, v_{n-1} , von $T_P M$ gilt $\det(w \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}) > 0$.

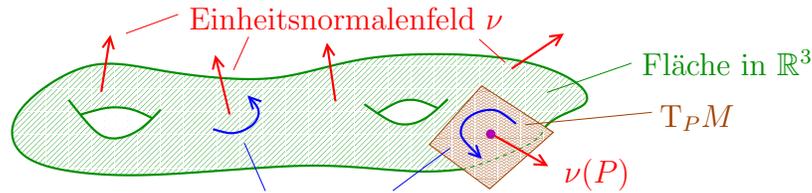
erfüllt. Mithilfe von Satz 2.6 kann man nun zeigen, dass dieses normierte Normalenfeld stetig ist.

Wir werden im Folgenden zwischen diesen beiden Gesichtspunkten kommentarlos hin- und herwechseln.

⁹⁹Hierbei betrachten wir \mathbb{R}^k mit der kanonischen Orientierung, welche durch e_1, \dots, e_k gegeben ist.

¹⁰⁰Anders ausgedrückt, im Hinblick auf Lemma 11.12 (2) gilt für $\Psi = \Phi^{-1}$ entweder

oder für alle $x \in \Phi(K)$ ist $\{\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)\}$ ist eine positive Basis von $T_{\Psi(x)} M$
für alle $x \in \Phi(K)$ ist $\{\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)\}$ ist eine negative Basis von $T_{\Psi(x)} M$.

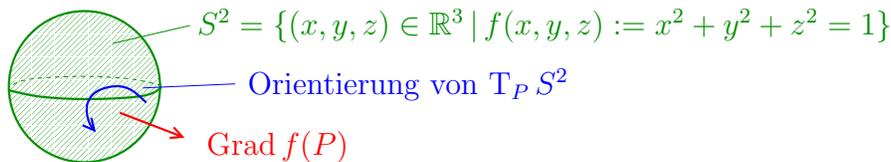


Orientierung des Tangentialraums, d.h. der erste Basisvektor wird in diese Richtung um einen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ zum zweiten gedreht, um eine positive Basis zu erhalten

- (2) Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Wir betrachten die $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M := f^{-1}(\{z\})$. Es sei nun $P \in M$. Wir sagen eine Basis (v_1, \dots, v_{n-1}) von $T_P M$ ist positiv, wenn¹⁰¹

$$\det(\text{Grad } f(P) \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}) > 0.$$

Dies definiert eine Orientierung für jeden Tangentialraum $T_P M$. Es folgt nun aus Satz 8.2 und dem vorherigen Beispiel, dass diese Orientierungen tatsächlich eine Orientierung für M definieren.



- (3) Es sei M eine zusammenhängende eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand. In Kapitel 10.5 hatten wir schon den Begriff einer Orientierung auf M eingeführt. Die beiden Gesichtspunkte sind äquivalent, denn auf einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit ist ein Tangentialvektor $v \neq 0$ auf $T_P M$ das Gleiche wie eine Basis für $T_P M$.



- (4) Es sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , z.B. eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann gilt für jeden Punkt $P \in M$, dass $T_P M = \mathbb{R}^n$. Die Standardbasis des \mathbb{R}^n definiert nun eine Orientierung von M . Wenn wir nichts anderes sagen, dann betrachten wir eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n immer mit dieser Orientierung.

Das folgende Lemma besagt nun insbesondere, dass nicht jede Untermannigfaltigkeit orientierbar ist.

Lemma 11.14. Das Möbiusband ist nicht orientierbar.

¹⁰¹Zur Erinnerung, nach Satz 8.2 gilt für $P \in M$, dass $T_P M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \perp \text{Grad } f(P)\}$. Es sei nun (v_1, \dots, v_{n-1}) eine Basis von $T_P M$, es folgt dass $(\text{Grad } f(P), v_1, \dots, v_{n-1})$ eine Basis von \mathbb{R}^n bildet, insbesondere gilt $\det(\text{Grad } f(P) \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}) \neq 0$.



Beweis (*). Wir geben zuerst eine mathematisch saubere Beschreibung des Möbiusbands. Für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$ und $r \in (-1, 1)$ setzen wir

$$A(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v(r, \psi) := \begin{pmatrix} 2 + r \sin \psi \\ 0 \\ r \cos \psi \end{pmatrix} \text{ und } w_\epsilon(\psi) := \begin{pmatrix} \sin(\psi + \epsilon \frac{\pi}{2}) \\ 0 \\ \cos(\psi + \epsilon \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

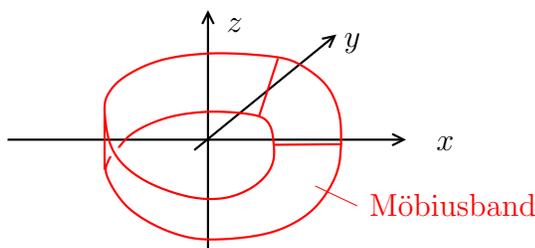
Wir beschreiben das Möbiusband als

$$M := \{A(\varphi) \cdot v(r, \frac{1}{2}\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi] \text{ und } r \in (-1, 1)\}.$$

Wir erhalten also das Möbiusband in dem wir ein offenes Intervall entlang des Kreises

$$K := \{A(\varphi) \cdot u \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

verdrillen. An einem Punkt $K(\varphi) = A(\varphi) \cdot u$ ist die Menge der normierten Normalenvektoren



gegeben durch $\tilde{K}(\varphi) := \{A(\varphi) \cdot w_\epsilon(\frac{\varphi}{2}) \mid \epsilon \in \{-1, 1\}\}$. Nehmen wir an, es gäbe doch ein Einheitsnormalenfeld ν . In dem wir ν auf K einschränken erhalten wir insbesondere eine stetige Abbildung

$$\nu: K \rightarrow \tilde{K} := \{\tilde{K}(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

mit $\nu(K(\varphi)) \in \tilde{K}(\varphi)$. Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ bezeichnen wir mit $\epsilon(\varphi) \in \{-1, 1\}$ das eindeutig bestimmte Element mit $\nu(K(\varphi)) = A(\varphi) \cdot w_{\epsilon(\varphi)}(\frac{\varphi}{2})$. Die Abbildung $\epsilon: [0, 2\pi) \rightarrow \{-1, 1\}$ ist stetig, also nach Lemma 7.3 konstant. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{da } K(0) = K(2\pi) \quad \text{da } \nu \text{ stetig} \\ A(0) \cdot w_{\epsilon(0)}(0) &= \nu(K(0)) \stackrel{\downarrow}{=} \nu(K(2\pi)) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} \nu(K(\varphi)) = \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} A(\varphi) \cdot w_{\epsilon(\varphi)}(\frac{\varphi}{2}) \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} A(\varphi) \cdot w_{\epsilon(0)}(\frac{\varphi}{2}) = A(2\pi) \cdot w_{\epsilon(0)}(\pi) = A(0) \cdot (-w_{\epsilon(0)}(0)). \\ \uparrow \text{da } \epsilon \text{ konstant} \quad \quad \quad \uparrow \text{da } A(2\pi) = A(0) \text{ und } w_\epsilon(\psi) = -w_\epsilon(\psi + \pi) \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $A(0) \cdot w_{\epsilon(0)}(0) = -A(0) \cdot w_{\epsilon(0)}(0)$. Aber dieser Vektor ist nicht der Nullvektor. Wir haben also einen Widerspruch erhalten. ■

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgender Definition.

Definition. Es sei nun M eine orientierte Untermannigfaltigkeit von Dimension $k \in \mathbb{N}$.¹⁰² Wir bezeichnen dann mit $-M$ die Untermannigfaltigkeit mit der entgegengesetzten Orientierung, d.h. eine Basis (v_1, \dots, v_k) eines Tangentialraumes ist positiv für $-M$, genau dann, wenn sie negativ für M ist.

Bemerkung. Wenn M eine zusammenhängende orientierte nichtleere Untermannigfaltigkeit von Dimension > 0 ist, dann kann man ähnlich zu Satz 8.3 zeigen, dass M genau zwei verschiedene Orientierungen besitzt, nämlich M und $-M$.

11.8. Integration von Differentialformen II.

Definition. Es sei M eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir nennen eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ orientierungserhaltend, wenn für alle $x \in U \cap M$ der Isomorphismus

$$\Phi_* = D\Phi_x: T_x M \rightarrow T_x(V \cap E_k) = \mathbb{R}^k$$

orientierungserhaltend ist.

Lemma 11.15. Jede orientierte Untermannigfaltigkeit besitzt einen Atlas, welcher nur aus orientierungserhaltenden Karten besteht.

Beweis. In der Tat, es sei $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas. Durch Einschränken auf die Komponenten der U_i können wir annehmen, dass alle U_i zusammenhängend sind. Wenn $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte ist, so dass V zusammenhängend ist, aber so dass Φ nicht orientierungserhaltend ist, dann ist $\Theta \circ \Phi$ mit $\Theta(x_1, \dots, x_n) := (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine orientierungserhaltende Karte mit dem gleichen Definitionsbereich. ■

Definition. Es sei ω eine glatte k -Form auf einer orientierten kompakten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit. Wir nehmen zuerst an, dass es eine orientierungserhaltende Karte $\Phi: U \rightarrow V$ von Typ (i) mit Träger(ω) $\subset U$ gibt. Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ . Wir definieren nun

$$\int_M \omega := \int_{x \in V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}(\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) dx.$$

Das folgende Lemma besagt nun, dass diese Definition nicht von der Wahl der orientierungserhaltenden Karte abhängt:

Lemma 11.16. Es sei M eine orientierte kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine glatte k -Form auf M . Es seien zudem $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ zwei orientierungserhaltende Karten mit Träger(ω) $\subset U \cap \tilde{U}$. Wir bezeichnen mit Ψ und $\tilde{\Psi}$ die Umkehrabbildungen von Φ und $\tilde{\Phi}$. Dann gilt

$$\int_{x \in V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}(\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) dx = \int_{x \in \tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(x)}(\tilde{\Psi}_*(e_1), \dots, \tilde{\Psi}_*(e_k)) dx.$$

Beweis. Indem wir die Karten auf $U \cap \tilde{U}$ einschränken können wir annehmen, dass $U = \tilde{U}$. Wir betrachten den Diffeomorphismus

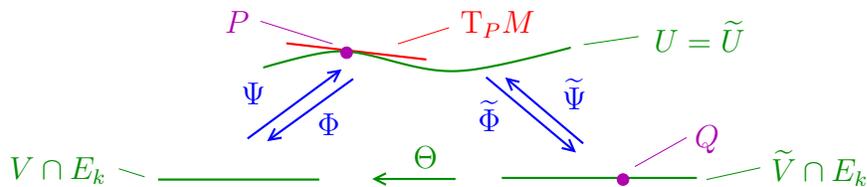
$$\Theta := \Phi \circ \tilde{\Psi}: \tilde{V} \cap E_k \rightarrow V \cap E_k.$$

¹⁰²Genauer gesagt, müsste man schreiben, es sei (M, O) eine orientierte Untermannigfaltigkeit, aber wir unterdrücken „ O “ in der Notation.

Es folgt nun aus Satz 11.11, dass es genügt zu zeigen, dass für jedes $Q \in \tilde{V} \cap E_k$ gilt $\det(D\Theta_Q) > 0$, d.h. dass $D\Theta_Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ orientierungserhaltend ist. Es sei also $Q \in \tilde{V} \cap E_k$. Wir wollen zeigen, dass $D\Theta_Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ orientierungserhaltend ist. Wir setzen $P = \tilde{\Psi}(Q)$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Kettenregel 2.1} & \\
 (D(\Phi \circ \tilde{\Psi})_Q = D\Theta_Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k) & \stackrel{\downarrow}{=} & \underbrace{(D\Phi_P: T_P M \rightarrow \mathbb{R}^k)}_{\substack{\text{orientierungserhaltend, da} \\ \Phi \text{ orientierungserhaltende} \\ \text{Karte ist}}} \circ \underbrace{(D\tilde{\Psi}_Q: \mathbb{R}^k \rightarrow T_P M)}_{\substack{\text{orientierungserhaltend, da} \\ \tilde{\Phi} \text{ orientierungserhaltende} \\ \text{Karte ist}}}.
 \end{array}$$

Es folgt nun aus Lemma 11.12, dass die lineare Abbildung $D\Theta_Q$ selber orientierungserhaltend ist. ■



11.9. Integration von Differentialformen III. In diesem Kapitel wollen wir das Integral von einer beliebigen glatten k -Form auf einer orientierten kompakten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit einführen. Wir wollen die Definition, ganz analog zu Kapitel 5.2, auf den im vorherigen Teilkapitel diskutierten Fall zurückführen. Wir erinnern dazu an folgende Definition von Seite 76

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Es sei $\{U_i\}_{i=1,\dots,m}$ eine offene Überdeckung von X . Eine Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\dots,m}$ sind stetige Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m: X \rightarrow [0, 1]$, welche folgende Eigenschaften besitzen:

- (1) für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ist $\text{Träger}(\varphi_i) \subset U_i$,
- (2) für jedes $x \in X$ gilt $\varphi_1(x) + \dots + \varphi_m(x) = 1$.

Satz 11.17. Es sei M eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Zu jedem endlichen Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i=1,\dots,r}$ gibt es eine glatte Zerlegung der Eins $z_1, \dots, z_r: M \rightarrow [0, 1]$.

Beweis. Der Beweis von Satz 11.17 ist ganz ähnlich zum Beweis von Lemma 8.9. ■

Definition. Es sei M eine orientierte kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei außerdem ω eine glatte k -Form auf M . Nach Lemma 11.15 existiert ein Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i=1,\dots,r}$ aus orientierungserhaltenden Karten. Nach Satz 11.17 existiert zudem eine glatte Zerlegung der Eins $z_1, \dots, z_r: M \rightarrow [0, 1]$. Wir definieren nun

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^r \underbrace{\int_M z_i \cdot \omega}_{\text{definiert in Kapitel 11.8}}.$$

Das folgende Lemma besagt nun, dass diese Definition nicht von den getroffenen Wahlen abhängt. Dieses Lemma spielt die gleiche Rolle wie Lemma 5.3.

Lemma 11.18. Das Integral einer glatten k -Form auf einer orientierten kompakten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit ist wohldefiniert.

Beweis (*). Es sei ω eine glatte k -Form auf einer orientierten kompakten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M . Es seien y_1, \dots, y_q und z_1, \dots, z_r zwei glatte Zerlegungen der Eins. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \sum_{i=1}^p \int_M y_i \cdot \omega & = & \sum_{i=1}^p \int_M \left(\sum_{j=1}^r z_j \right) y_i \cdot \omega & = & \sum_{i=1}^p \int_M \sum_{j=1}^r z_j \cdot y_i \cdot \omega & = & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \int_M z_j \cdot y_i \cdot \omega & = & \sum_{j=1}^r \int_M z_j \cdot \omega. \\ & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{denn } \sum_{j=1}^r z_j = 1 & & \text{Linearität} & & \text{das gleiche Argument} & & \text{rückwärts} \quad \blacksquare \\ & & & & \text{des Integrals} & & & & \end{array}$$

Bemerkung. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass für das Integral von k -Formen die „üblichen“ Aussagen gelten. Beispielsweise, gilt für alle glatten k -Formen ω, ω' auf M und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\int_M (\eta + \omega) = \int_M \eta + \int_M \omega \quad \text{und} \quad \int_M \lambda \cdot \omega = \lambda \cdot \int_M \omega.$$

Satz 11.19. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine glatte k -Form auf M . Dann gilt:

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

Beweis. Es folgt direkt aus der Definition des Integrals von k -Formen, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass es eine orientierungserhaltende Karte $\tilde{\Phi}: U \rightarrow \tilde{V}$ für M mit $\text{Träger}(\omega) \subset U$ gibt. Wir betrachten die durch

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) := (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

definierte Abbildung. Für alle $x \in \tilde{V}$ gilt offensichtlich, dass $\det D\Theta_x = -1$. Die Karte $\tilde{\Phi} := \Theta \circ \Phi: U \rightarrow \tilde{V} := \Theta(\tilde{V})$ ist dann eine orientierungsumkehrende Karte für M , oder anders ausgedrückt, eine orientierungserhaltende Karte für $-M$.

Wir bezeichnen nun mit $\Psi: V \rightarrow U$ und $\tilde{\Psi}: \tilde{V} \rightarrow U$ die Umkehrabbildungen von Φ und $\tilde{\Phi}$. Wir erhalten nun, dass

$$\begin{array}{ccccccc} \text{denn } \Psi \text{ ist orientierungs-} & & \text{denn } \tilde{\Psi} \text{ ist orientierungs-} & & & & \\ \text{erhaltend für } -M & & \text{erhaltend für } M & & & & \\ \int_{-M} \omega & \stackrel{\downarrow}{=} & \int_{\tilde{V}} \tilde{\Psi}^* \omega & = & - \int_V \Psi^* \omega & \stackrel{\downarrow}{=} & - \int_M \omega. \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \text{siehe Satz 11.11} & & & & \blacksquare \end{array}$$

Folgender Satz gibt uns die Transformationsformel für das Integral von k -Formen auf orientierten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten.

Satz 11.20. Es sei $f: M \rightarrow N$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus zwischen zwei orientierten kompakten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten. Zudem sei ω eine glatte k -Form auf N . Dann gilt

$$\int_M f^* \omega = \int_N \omega.$$

Beweis. Der Beweis des Satzes ist, wenn man die Definitionen verdaut hat, völlig elementar und wird in Übungsblatt 9 ausgeführt. ■

Wir betrachten im Folgenden noch ein paar Spezialfälle des Integrals einer k -Form, welche wir später verwenden werden.

Lemma 11.21. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0.

(1) Es sei ω eine glatte n -Form auf M . Dann gilt

$$\underbrace{\int_M \omega}_{\text{Integral von } n\text{-Form}} = \underbrace{\int_{x \in M} \omega_x(e_1, \dots, e_n)}_{\text{Integral von Funktion}}$$

(2) Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\underbrace{\int_M f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}_{\text{Integral von } n\text{-Form}} = \underbrace{\int_{x \in M} f(x)}_{\text{Integral von Funktion}}$$

Beweisskizze. Nachdem ∂M eine Nullmenge ist, genügt es wenn wir die Gleichheiten der Integrale über der offenen Teilmenge $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$ von \mathbb{R}^n zu beweisen.

(1) Die erste Aussage folgt aus der Definition angewandt auf die orientierungserhaltende Karte $\Phi = \text{id}$.

(2) Die zweite Aussage folgt aus (1) und der Tatsache, welche wir auf Seite 110 bewiesen hatten, dass $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(e_1, \dots, e_n) = 1$. ■

Der folgende Satz besagt, dass wir den Fluß von einem Vektorfeld durch eine orientierte Hyperfläche als Integral über eine Differentialform interpretieren können.

Satz 11.22. Es sei $n \geq 2$, es sei N eine kompakte Hyperfläche in \mathbb{R}^n und es sei $\nu: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Einheitsnormalenfeld. Es folgt aus der Diskussion auf Seite 121, dass wir N als orientierte Untermannigfaltigkeit auffassen können. Es sei zudem $F: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Wir bezeichnen mit $\delta(F)$ die zu F zugehörige glatte $(n-1)$ -Form auf N , welche an jedem Punkt $P \in N$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \delta(F)_P: (\mathbb{T}_P M)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det(F(P) \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}). \end{aligned}$$

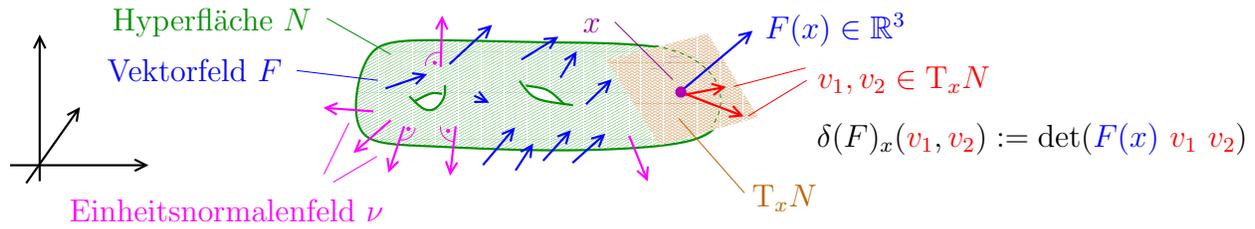
Dann gilt¹⁰³

$$\underbrace{\int_N \delta(F)}_{\text{Integral von } (n-1)\text{-Form}} = \underbrace{\int_N F \cdot \nu}_{\text{Fluss von } F \text{ durch } (N, \nu)}$$

Für den Beweis von Satz 11.22 benötigen wir die folgende Verallgemeinerung des Kreuzprodukts.

Definition. Es seien $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $v_1 \times \dots \times v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ das verallgemeinerte Kreuzprodukt von v_1, \dots, v_{n-1} , d.h. den Vektor in \mathbb{R}^n der festgelegt ist

¹⁰³Auf der linken Seite betrachten wir also das Integral der Differentialform $\delta(F)$, hierbei betrachten wir N als orientierte Untermannigfaltigkeit mit der durch ν festgelegten Orientierung, siehe Kapitel 11.7. Auf der rechten Seite betrachten wir das Integral der reellwertigen Funktion $x \mapsto F(x) \cdot \nu(x)$.



durch¹⁰⁴

$$k\text{-te Koordinate von } v_1 \times \cdots \times v_{n-1} := (-1)^{k+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \text{die } (n-1) \times (n-1)\text{-Matrix, welche man} \\ \text{erhält, indem man aus der Matrix} \\ (v_1 \ \dots \ v_{n-1}) \text{ die } k\text{-te Zeile streicht} \end{pmatrix}.$$

Lemma 11.23. Es seien $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Das Kreuzprodukt $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ besitzt folgende Eigenschaften:

- (a) $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ steht senkrecht zu v_1, \dots, v_{n-1} ,
- (b) $\|v_1 \times \cdots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\text{Gram}(v_1, \dots, v_{n-1})}$,
- (c) $\det \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \times \cdots \times v_{n-1} & v_1 & \dots & v_{n-1} \end{pmatrix}}_{n \times n\text{-Matrix}} \geq 0$.

Zudem ist das Kreuzprodukt der einzige Vektor in \mathbb{R}^n , welche (a), (b) und (c) erfüllt.

Beweis von Lemma 11.23. Der Beweis von Satz 4.9 kann leicht verallgemeinert werden um diese allgemeine Aussage zu beweisen. ■

Beweis von Satz 11.22. Es sei $n \geq 2$, es sei N eine kompakte Hyperfläche in \mathbb{R}^n es sei $\nu: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Einheitsnormalenfeld und es sei $F: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Es folgt aus den Definitionen, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass es eine orientierungserhaltende Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $\text{Träger}(F) \subset U$ gibt. Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ .

Es sei nun $x \in V \cap E_k$. Wir schreiben $F := F(\Psi(x))$ sowie $\nu = \nu(\Psi(x))$, und für $i = 1, \dots, n-1$ schreiben wir $v_i := (D\Psi_x)(e_i)$. Wir erhalten, dass

$$\begin{array}{ccc} \text{denn } \text{Träger}(F) \subset U & \text{Definition von } \delta(F) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \int_N \delta(F) & = \int_{V \cap E_{n-1}} \delta(F)(v_1, \dots, v_{n-1}) & = \int_{V \cap E_{n-1}} \det(F \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}) \\ & = \int_{V \cap E_{n-1}} F \cdot (v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) & = \int_{V \cap E_{n-1}} F \cdot \nu \cdot \sqrt{\text{Gram}(v_1, \dots, v_{n-1})} = \int_N F \cdot \nu. \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{folgt aus der Definition des} & \text{es ist } v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \nu \cdot \sqrt{\text{Gram}(v_1, \dots, v_{n-1})}, & \text{Definition} \\ \text{Kreuzprodukts } v_1 \times \cdots \times v_{n-1} & \text{denn beide Vektoren erfüllen (a), (b) und (c)}^{105} & \text{auf Seite 44} \\ \text{und der Laplace-Entwicklung} & & \\ \text{nach der ersten Spalte} & & \end{array}$$

¹⁰⁴Für zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 ist dies gerade das übliche Kreuzprodukt.

¹⁰⁵In der Tat, beide Vektoren haben offensichtlich die Eigenschaften (a) und (b). Es verbleibt zu zeigen, dass $\det(\nu \ v_1, \dots, v_{n-1}) > 0$. Dies sieht man wie folgt. Da e_1, \dots, e_{n-1} eine positive Basis von \mathbb{R}^{n-1} ist, und da die Karte orientierungserhaltend ist, wissen wir, dass v_1, \dots, v_{n-1} eine positive Basis des Tangentialraums $T_{\Psi(x)}M$ ist. Aber nach Definition unserer Orientierung, siehe Seite 121, bedeutet das gerade, dass $\det(\nu \ v_1, \dots, v_{n-1}) > 0$.

Für explizite Berechnung des Integrals von k -Formen wollen wir nun noch ein Analogon von Satz 5.8 formulieren.

Definition. Es sei M eine kompakte orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $\Psi: Q \rightarrow M$ eine Parametrisierung im Sinne der Definition von Seite 50. Wir nennen die Parametrisierung **orientierungserhaltend**, wenn für alle $P \in \mathring{Q}$ gilt, dass $(D\Psi_P \cdot e_1, \dots, D\Psi_P \cdot e_k)$ eine positive Basis von $T_{\Psi(P)}M$ ist.

Satz 11.24. Es sei M eine kompakte orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine glatte k -Form auf M . Es sei zudem $\Psi: Q \rightarrow M$ eine orientierungserhaltende Parametrisierung von M . Dann gilt

$$\int_M \omega = \int_{x \in Q} \omega_{\Psi(x)}(\underbrace{D\Psi_x \cdot e_1, \dots, D\Psi_x \cdot e_k}_{\text{d.h. die } k \text{ Spalten von } D\Psi_x}).$$



Beweisskizze. Es gilt:¹⁰⁶

$$\begin{array}{ccccc} \text{da } \partial M \text{ Nullmenge in } M & \text{wie in Satz 11.20} & \text{analog zu Lemma 11.21} & & \\ \int_M \omega & \stackrel{\downarrow}{=} & \int_{M \setminus \partial M} \omega & \stackrel{\downarrow}{=} & \int_{Q \setminus \partial Q} \Psi^* \omega & \stackrel{\downarrow}{=} & \int_{x \in Q \setminus \partial Q} (\Psi^* \omega)_x(e_1, \dots, e_k) \\ & = & \int_{x \in Q \setminus \partial Q} \omega_{\Psi(x)}(D\Psi_x \cdot e_1, \dots, D\Psi_x \cdot e_k) & = & \int_{x \in Q} \omega_{\Psi(x)}(D\Psi_x \cdot e_1, \dots, D\Psi_x \cdot e_k). & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{Definition von } \Psi^* \omega & & & & \text{da } \partial Q \text{ Nullmenge in } Q & & \blacksquare \end{array}$$

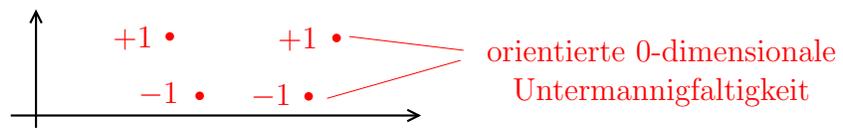
11.10. Null-dimensionale Untermannigfaltigkeiten. Wir haben bisher nur Untermannigfaltigkeiten der Dimension *größer Null* behandelt. Um diese Diskriminierung zu beenden führen wir noch folgende Definition ein.

Definition. Es sei M eine kompakte *null-dimensionale* Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , d.h. M besteht aus endlich vielen Punkten P_1, \dots, P_k .

- (1) Wir definieren eine **Orientierung** für M als eine Funktion $M \rightarrow \{-1, 1\}$. Mit anderen Worten, eine Orientierung besteht aus der Wahl eines Vorzeichens ϵ_i für jeden Punkt P_i .
- (2) Es sei nun ω eine 0-Form auf M , d.h. ω ist eine Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}$. Im Hinblick auf die Diskussion auf Seite 47 definieren wir

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^k \epsilon_i \cdot f(P_i).$$

¹⁰⁶Genauer hinschauen zeigt, dass einige Schritte nicht ganz genau begründet sind. Für einen exakten Beweis müsste man die Beweisstrategie von Satz 11.24 verwenden.



12. VORBEREITUNGEN FÜR DEN SATZ VON STOKES

Wir sind immer noch auf dem Weg zur Formulierung des Satzes von Stokes. Dieser ist die in Kapitel 11.1 versprochene Verallgemeinerung des Gaußschen Integralsatz 8.5 und von Satz 10.12. In Kapitel 11.1 hatten wir schon angedeutet, dass diese Verallgemeinerung in etwa von folgender Form sein soll:

Es sei M eine k -dimensionale kompakte orientierte Untermannigfaltigkeit und es sei ω ein „mathematisches Objekt“ auf M , welches auf ∂M integriert werden kann. Dann soll gelten

$$\int_M \text{„Differential“ oder „Ableitung“ von } \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Die Diskussion des vorherigen Kapitels legt nahe, dass dieses mathematische Objekt und dessen „Differential“ wohl Differentialformen sein sollen.

Bevor wir zu diesem Punkt gelangen, müssen wir noch zwei Fragestellungen klären:

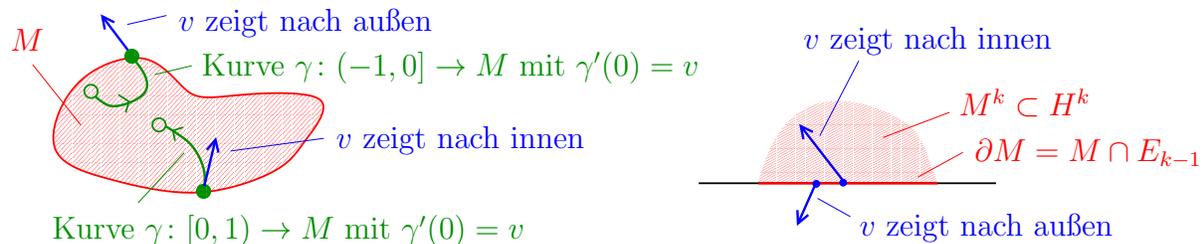
- (1) Das Integral von Differentialformen macht Sinn über *orientierten* Untermannigfaltigkeiten. Wenn M eine orientierte Untermannigfaltigkeit ist, dann müssen wir uns davon überzeugen, dass dann auch ∂M eine orientierte Untermannigfaltigkeit ist.
- (2) Wenn ω eine $(k-1)$ -Form auf M ist, dann müssen wir das Differential $d\omega$ einführen. Dieses Differential muss ein mathematisches Objekt sein, welches wir über der k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M integrieren können. Es liegt nahe, dass es sich bei $d\omega$ um eine k -Form handeln soll.

In diesem Kapitel behandeln wir diese beide Themen. Im darauf folgenden Kapitel werden wir dann den Satz von Stokes formulieren und beweisen.

12.1. Orientierte Untermannigfaltigkeiten mit Rand.

Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es sei $P \in \partial M$ und es sei $v \in T_P M$.

- (1) Wir sagen der Vektor v zeigt nach außen, wenn $v \notin T_P \partial M$ und wenn es eine Kurve $\gamma: (a, 0] \rightarrow M$ durch P gibt, so dass $\gamma'(0) = v$.
- (2) Wir sagen der Vektor v zeigt nach innen, wenn $v \notin T_P \partial M$ und wenn es eine Kurve $\gamma: [0, a) \rightarrow M$ durch P gibt, so dass $\gamma'(0) = v$.



Beispiel. Es sei $M \subset H^k$ eine offene Teilmenge, dann ist M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = M \cap E_{k-1}$. Man kann leicht zeigen, dass für $P \in \partial M$ und $(v_1, \dots, v_k) \in T_P M$ gilt

$$(v_1, \dots, v_k) \text{ zeigt nach außen} \iff v_k < 0,$$

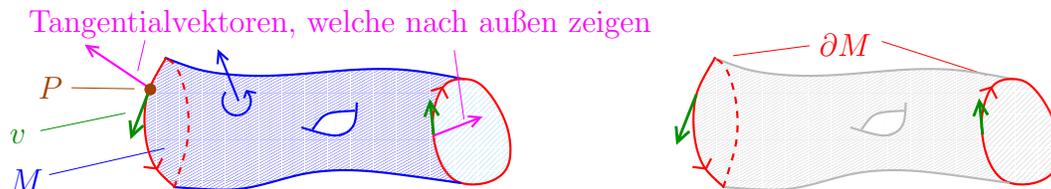
und

$$(v_1, \dots, v_k) \text{ zeigt nach innen} \iff v_k > 0.$$

Wir wollen nun zeigen, dass der Rand einer orientierten Untermannigfaltigkeit eine kanonische Orientierung besitzt.

Definition. Es sei $k > 1$ und es sei M eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es sei $P \in \partial M$ und v_1, \dots, v_{k-1} eine Basis von $T_P \partial M$. Wir definieren nun

(v_1, \dots, v_{k-1}) ist eine positive Basis von $T_P \partial M$ \iff es gibt einen Vektor w der nach außen zeigt, so dass (w, v_1, \dots, v_{k-1}) eine positive Basis von $T_P M$ ist.



Wir müssen nun noch zeigen, dass diese Orientierungen der Tangentialräume $T_P \partial M$ in der Tat eine Orientierung der Untermannigfaltigkeit ∂M ergeben. Dies ist die Aussage des nächsten Lemmas.

Lemma 12.1. Es sei M eine orientierte Untermannigfaltigkeit. Die gerade eingeführten Orientierungen der Tangentialräume $T_P \partial M$ bilden eine Orientierung der Untermannigfaltigkeit ∂M .

Beweis (*). Wir zeigen zuerst folgende Behauptung.

Behauptung. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es sei $P \in \partial M$ und es sei $v \in T_P M$. Zudem sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte um P . Wir setzen $Q = \Phi(P)$. Dann gilt

$$v \text{ zeigt nach außen} \iff \text{letzte Koordinate von } \Phi_*(v) \in T_Q E_k = \mathbb{R}^k \text{ ist negativ.}$$

Beweis. Die Karte $\Phi: U \rightarrow V$ gibt insbesondere einen Diffeomorphismus zwischen der Untermannigfaltigkeit $U \cap M$ mit Rand $U \cap (\partial M)$ und der Untermannigfaltigkeit $V \cap H_k$ mit Rand $V \cap E_{k-1}$. Ein Diffeomorphismus zwischen Untermannigfaltigkeiten mit Rand schickt offensichtlich¹⁰⁷ Vektoren die nach außen zeigen wieder auf Vektoren die nach außen zeigen. Die Behauptung folgt nun aus dem obigen Beispiel. \square

Für eine Karte der Untermannigfaltigkeit M kann man nun die Stetigkeit der Prä-Orientierung auf ∂M leicht mit der obigen Behauptung beweisen. Es folgt nun aus Lemma 11.13, dass die Prä-Orientierung eine Orientierung auf ∂M ist. \blacksquare

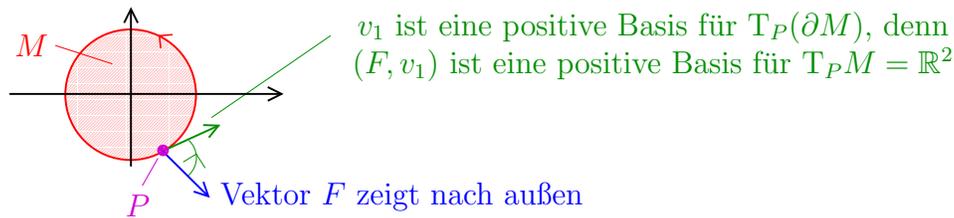
Konvention. Wenn M eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ist, dann betrachten wir ∂M immer mit der gerade eingeführten Orientierung.

Beispiele.

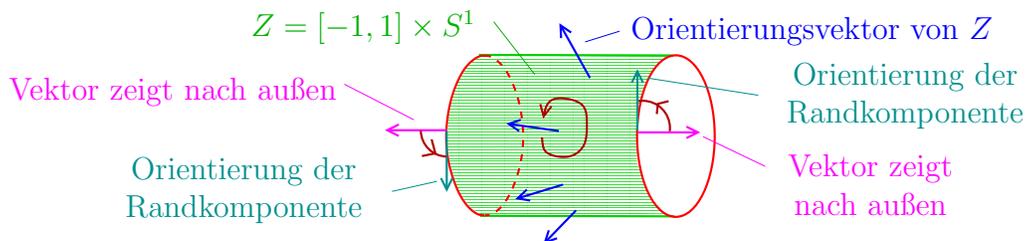
(1) Es sei
$$M := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

die Einheitskreis im \mathbb{R}^2 . Dies ist eine Kodimension-Null Untermannigfaltigkeit. Wie auf Seite 122 angemerkt, betrachten wir M als orientierte Untermannigfaltigkeit, wobei die Orientierung durch die übliche Orientierung von \mathbb{R}^2 gegeben ist. Die Untermannigfaltigkeit ∂M , d.h. der Einheitskreis, hat dann die Orientierung, welche „entgegen dem Uhrzeigersinn zeigt“.

¹⁰⁷Warum ist das offensichtlich?



- (2) Wir betrachten den Zylinder $Z = [-1, 1] \times S^1 \subset S^3$ mit der Orientierung, welche durch die Normalenvektoren gegeben ist, welche „nach außen“ zeigen. Die Orientierungen auf den Randkomponenten $\{-1\} \times S^1$ und $\{1\} \times S^1$ sind in der Abbildung skizziert.



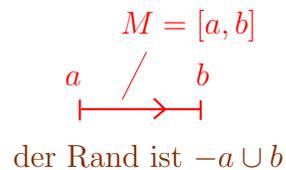
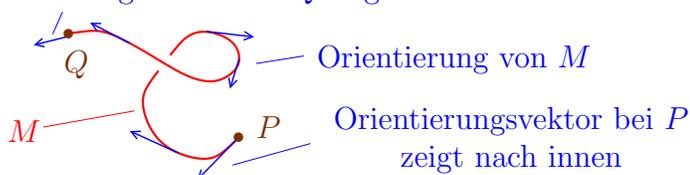
- (3) Es sei M eine kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k . Wie auf Seite 122 fassen wir M als orientierte Untermannigfaltigkeit auf. Wir hatten auf Seite 69 das *äußere Einheitsnormalenfeld* auf ∂M eingeführt. Auf Seite 121 hatten wir gesehen, dass ein solches äußere Einheitsnormalenfeld eine Orientierung auf ∂M definiert. Man kann nun leicht nachvollziehen, dass diese Orientierung gerade der Orientierung von ∂M auf Seite 131 entspricht.

Wir betrachten zum Abschluß noch den Fall, dass M eine eindimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit ist.

Definition. Es sei M eine eindimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit. Wir definieren eine Orientierung für jeden Punkt $P \in \partial M$ wie folgt:

- (1) Wir setzen $\epsilon_P := +1$, wenn der Orientierungsvektor in $T_P M$ nach außen zeigt.
- (2) Wir setzen $\epsilon_P := -1$, wenn der Orientierungsvektor in $T_P M$ nach innen zeigt.

Orientierungsvektor bei Q zeigt nach außen



der Rand der orientierten 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M ist $-P \cup Q$

Beispiel. Für die Untermannigfaltigkeit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit der üblichen Orientierung gilt¹⁰⁸

$$\partial[a, b] = (-a) \cup b.$$

¹⁰⁸Streng genommen müsste man hier $-\{a\} \cup \{b\}$ schreiben, aber der besseren Lesbarkeit halber lassen wir die Klammern weg.

12.2. Das Differential von Differentialformen. Wir führen nun das Differential einer Differentialform ein. Wie üblich führen wir diesen Begriff erst für Differentialformen auf offenen Mengen von \mathbb{R}^k und H_k ein, und definieren dann den Begriff für Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten mithilfe von Karten.

Definition. Es sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k oder H_k . Zudem sei ω eine glatte m -Form auf U . Nach Satz 11.4 bilden die Dachprodukte $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ eine Basis von $\wedge^m(\mathbb{R}^k)^*$. Wir können also ω wie folgt als Linearkombination betrachten:

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} f_{i_1 \dots i_m} \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m},$$

wobei $f_{i_1 \dots i_m}$ reellwertige glatte Funktionen auf U sind. Wir definieren jetzt das Differential von ω ¹⁰⁹ als die $(m+1)$ -Form

$$d\omega := \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \underbrace{df_{i_1 \dots i_m}}_{\uparrow} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}.$$

das totale Differential der Funktion $f_{i_1 \dots i_m} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ¹¹⁰

Beispiele.

- (1) Wenn $\omega \in \Omega_0(U)$, d.h. wenn ω eine glatte Funktion auf U ist, dann ist $d\omega$ per Definition gerade das totale Differential dieser glatten Funktion.
- (2) Wir betrachten auf \mathbb{R}^2 die 1-Form $\omega = 3x^2y \cdot dx + x^3 \cdot dy$. Dann gilt

obige Definition des Differentials einer 1-Form

$$\begin{aligned} d\omega &= d(3x^2y \cdot dx + x^3 \cdot dy) \stackrel{\downarrow}{=} d(3x^2y) \wedge dx + d(x^3) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial 3x^2y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial 3x^2y}{\partial y} \cdot dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial x^3}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial x^3}{\partial y} \cdot dy \right) \wedge dy \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \text{Lemma 10.1} \\ &= 6xy \cdot \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + 3x^2 \cdot \underbrace{dy \wedge dx}_{=-dx \wedge dy} + 3x^2 \cdot dx \wedge dy + 0 \cdot \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

- (3) Wir betrachten auf $U = \mathbb{R}^n$ die 2-Form $\omega = dx^i \wedge dx^j$. Dann gilt:

$$d\omega = d(dx^i \wedge dx^j) = d(1 \cdot dx^i \wedge dx^j) = \underbrace{d1}_{=0} \wedge dx^i \wedge dx^j = 0.$$

Satz 12.2. Es sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k oder von H^k . Es seien $\omega, \omega' \in \Omega_l(U)$, $\sigma \in \Omega_m(U)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (1) $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$,
- (2) $d(\lambda \cdot \omega) = \lambda \cdot d\omega$,

¹⁰⁹In der Literatur wird das Differential von ω manchmal auch die *äußere Ableitung von ω* genannt.

¹¹⁰Auf Seite 92 hatten wir für eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Untermannigfaltigkeit M das totale Differential df eingeführt. Dies ist eine 1-Form auf M . In dem Fall, dass M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k oder H_k ist folgt aus Lemma 10.1, dass

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx^k.$$

- (3) die $(l+1)$ -Form $d\omega$ ist eine glatte Form,
 (4) es gilt die „Produktregel“ für die Differentiation von Differentialformen¹¹¹

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^{\text{Grad}(\omega)} \cdot \omega \wedge d\sigma,$$

- (5) es ist $d(d\omega) = 0$.

Beispiel. Wir betrachten auf \mathbb{R}^2 die Funktion $f(x, y) = x^3y$. Es folgt aus Lemma 10.1, dass $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = 3x^2y \cdot dx + x^3 \cdot dy$. Dies ist gerade die 1-Form auf \mathbb{R}^2 , welche wir oben betrachtet hatten. Also folgt aus Satz 12.2 direkt, dass $d\omega = d(df) = 0$.

Beispiele. Wir betrachten die Aussagen (4) und (5) von Satz 12.2 für 0-Formen, d.h. für reellwertige Funktionen.

- (1) Es seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$. Wir können f und g als 0-Formen auffassen. Dann gilt

Lemma 10.1

$$\begin{aligned} d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg &\iff \sum_{i=1}^k \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} \cdot dx^i = \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx^i \right) \cdot g + f \cdot \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot dx^i \right) \\ &\iff \sum_{i=1}^k \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} \cdot dx^i = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \cdot dx^i \\ &\iff \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass für 0-Formen die Aussage von Satz 12.2 (4) gerade der Produktregel für partielle Ableitungen entspricht.

- (2) Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \right) &&= \sum_{i=1}^k d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \wedge dx^i \\ &\uparrow \text{Lemma 10.1} &&\uparrow \text{Definition von } d \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \right) \wedge dx^i &&= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot dx^i \wedge dx^j. \\ &\uparrow \text{Lemma 10.1} &&\uparrow \text{denn } dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \text{ und } dx^i \wedge dx^i = 0 \end{aligned}$$

Die 2-Formen $dx^i \wedge dx^j$ mit $i < j$ sind nach Satz 11.4 linear unabhängig. Wir sehen also, dass die Aussage $d(df) = 0$ äquivalent ist zum Satz von Schwarz aus Analysis II, welcher besagt, dass die partiellen Ableitungen einer glatten Funktion vertauschbar sind.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 12.2 zuwenden führen wir noch folgende Notation ein.

Notation. Für eine aufsteigende Folge $I = 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ schreiben wir

$$dx^I := dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Wir bezeichnen mit $|I| = k$ die Anzahl der Elemente in der aufsteigenden Folge. Es sei nun U eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei ω eine k -Form auf U . Wir

¹¹¹Die Produktregel ist also ganz ähnlich der üblichen Produktregel für Ableitungen, allerdings taucht noch ein extra Vorzeichen auf.

können dann ω schreiben als

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I \cdot dx^I,$$

hierbei summieren wir über alle aufsteigenden Folgen $I = 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ der Länge k .

Beweis von Satz 12.2. Die ersten beiden Aussagen von Satz 12.2 sind trivial. Die dritte Aussage folgt leicht aus den Definitionen und aus Lemma 10.1.

Wir wenden uns der Aussage (4) zu. Im obigen Beispiel hatten wir gesehen, dass die Produktformel für 0-Formen gerade der üblichen Produktformel für partielle Ableitungen entspricht, welche wir schon in Analysis II bewiesen hatten. Wir wollen nun den allgemeinen Fall auf den Fall von 0-Formen zurückführen. Es sei also $\omega \in \Omega_l(U)$ und es sei $\sigma \in \Omega_m(U)$. Wir schreiben

$$\omega = \sum_{|I|=l} f_I \cdot dx^I \quad \text{und} \quad \sigma = \sum_{|J|=m} g_J \cdot dx^J$$

und erhalten

$$d\omega = \sum_{|I|=l} df_I \wedge dx^I \quad \text{und} \quad d\sigma = \sum_{|J|=m} dg_J \wedge dx^J.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d\left(\sum_{|I|=l} f_I \cdot dx^I \wedge \sum_{|J|=m} g_J \cdot dx^J\right) \stackrel{\text{Multilinearität des Dachprodukts}}{=} d\left(\sum_{I,J} f_I \cdot g_J \cdot dx^I \wedge dx^J\right) \\ &= \sum_{I,J} d(f_I \cdot g_J) \cdot dx^I \wedge dx^J \stackrel{\text{die Produktregel für Produkte von 0-Formen, welche wir im vorherigen Beispiel diskutiert hatten}}{=} \sum_{I,J} (g_J \cdot df_I + f_I \cdot dg_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &\stackrel{\text{Definition des Differentials}}{\uparrow} = \sum_{I,J} (df_I \wedge dx^I) \wedge g_J \cdot dx^J + (-1)^{\text{Grad}(\omega)} \cdot \sum_{I,J} f_I \cdot dx^I \wedge (dg_J \wedge dx^J) \\ &\stackrel{\text{nach Lemma 11.7 gilt } dg^J \wedge dx^I = -(1)^l \cdot dx^I \wedge dg^J}{\uparrow} = d\omega \wedge \sigma + (-1)^{\text{Grad}(\omega)} \cdot \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

Wir beweisen nun Aussage (5). Im obigen Beispiel hatten wir gesehen, dass die Aussage für 0-Formen gerade der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen entspricht, welche wir schon in Analysis II bewiesen hatten. Wir wollen nun auch dieses Mal den allgemeinen Fall auf den Fall von 0-Formen zurückführen. Es sei also $\omega \in \Omega_l(U)$. Wir schreiben wiederum $\omega = \sum_{|I|=l} f_I \cdot dx^I$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(d(\omega)) &= d\left(\sum_{|I|=l} df_I \wedge dx^I\right) \stackrel{= 0 \text{ nach obigem Beispiel}}{=} \sum_{|I|=l} \left(\overbrace{d(df_I)}^{\downarrow} \wedge dx^I + (-1) \cdot df_I \wedge \underbrace{d(dx^I)}_{\uparrow}\right) = 0. \\ &\stackrel{\text{die Produktregel aus Aussage (4)}}{\uparrow} \qquad \qquad \qquad d(dx^I) = d(1 \cdot dx^I) = d1 \wedge dx^I = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Zudem gilt auch folgender wichtiger Satz:

Satz 12.3. Es seien $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offenen Mengen und es sei $\Theta: U \rightarrow V$ eine glatte Abbildung. Für jede glatte k -Form ω auf V gilt

$$d(\Theta^*\omega) = \Theta^*(d\omega).$$

Die analoge Aussage gilt auch für offene Teilmengen $U \subset H_m$ und $V \subset H_n$.

Bemerkung. Der Satz besagt also, dass folgendes Diagramm von Abbildungen kommutiert.¹¹²

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k(V) & \xrightarrow{\Theta^*} & \Omega_k(U) \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ \Omega_{k+1}(V) & \xrightarrow{\Theta^*} & \Omega_{k+1}(U). \end{array}$$

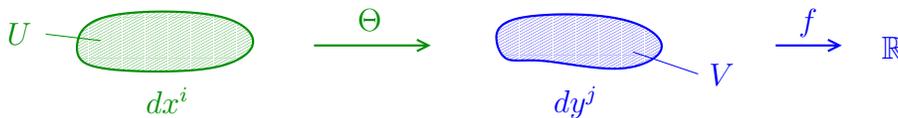
Beispiel. Im Beweis von Satz 12.3 werden wir sehen, dass für eine 0-Form ω die Aussage eine Umformulierung der üblichen Kettenregel 2.1 ist.

Beweis. Es seien also $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene Mengen und es sei außerdem $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n): U \rightarrow V$ eine glatte Abbildung. Wir betrachten zuerst den Spezialfall einer 0-Form, d.h. einer glatten Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Behauptung. Für jede glatte Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $d(\Theta^* f) = \Theta^*(df)$.

Beweis. Wir bezeichnen mit dx^1, \dots, dx^m die üblichen 1-Formen auf \mathbb{R}^m und wir bezeichnen mit dy^1, \dots, dy^n die üblichen 1-Formen auf \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\begin{array}{ccc} \text{Lemma 10.1 angewandt auf } f \circ \Theta & & \text{Kettenregel} \\ \downarrow & & \downarrow \\ d(\Theta^* f) = d(f \circ \Theta) & = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \Theta)}{\partial x_i} \cdot dx^i & = \sum_{i=1}^m \underbrace{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \circ \Theta \right) \cdot \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_i}}_{\text{unabhängig von } i} dx^i \\ & = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \circ \Theta \right) \cdot d\Theta_j & = \Theta^* \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot dy^j \right) = \Theta^*(df). \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Lemma 10.1 angewandt auf } \Theta_i & \text{denn } (g \circ \Theta) \cdot d\Theta_j = \Theta^*(g \cdot dy^j) & \text{Lemma 10.1} \quad \square \end{array}$$



Es sei nun ω eine beliebige glatte k -Form auf V . Wir schreiben

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Nun folgt:

$$\begin{array}{ccc} & \text{auf Seite 113 hatten wir erwähnt, dass immer gilt } \Theta^*(\alpha \wedge \beta) = \Theta^*\alpha \wedge \Theta^*\beta & \\ d(\Theta^*\omega) & = d\left(\Theta^*\left(\sum_{|I|=k} f_I \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right)\right) & \downarrow \\ & = d\left(\sum_{|I|=k} \Theta^* f_I \cdot \Theta^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \Theta^* dx^{i_k}\right) & = d\left(\sum_{|I|=k} \Theta^* f_I \cdot \Theta^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \Theta^* dx^{i_k}\right) \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{aus der Behauptung folgt } \Theta^* dx^i = d\Theta^* x^i & \text{Produktformel 12.2 (4) und } dd\varphi = 0 \\ & = \sum_{|I|=k} \Theta^* df_I \cdot \Theta^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \Theta^* dx^{i_k} & = \Theta^*\left(\sum_{|I|=k} df_I \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = \Theta^*(d\omega). \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{folgt aus der Behauptung} & \text{denn } \Theta^*(\alpha \wedge \beta) = \Theta^*\alpha \wedge \Theta^*\beta \quad \blacksquare \end{array}$$

¹¹²D.h. die Verknüpfung der Abbildung oben mit der Abbildung rechts ergibt die Verknüpfung der Abbildung links und der Abbildung unten.

¹¹³Dies folgt aus

$$(g \circ \Theta) \cdot d\Theta_j = (g \circ \Theta) \cdot d(y^j \circ \Theta) = (g \circ \Theta) \cdot dy^j \circ \Theta^* = \Theta^* g \cdot \Theta^* dy^j = \Theta^*(g \cdot dy^j).$$

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgender amüsanten Rechnung:

Lemma 12.4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und es sei F ein glattes Vektorfeld auf U . Wir hatten in Kapitel 11.4 gesehen, dass F eine $(n-1)$ -Form $\delta(F)$ auf U wie folgt definiert, nämlich wir ordnen $P \in U$ die alternierende $(n-1)$ -Form

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_P U)^{n-1} = (\mathbb{R}^n)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det(F(P) \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}) \end{aligned}$$

zu. Dann gilt folgende Gleichheit von n -Formen auf U :

$$d\delta(F) = \operatorname{div} F \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Beweis. Es sei also U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Zudem sei $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld auf U . Wir müssen nun die n -Form $d\delta(F)$ auf U bestimmen. Wir müssen dazu erst einmal $\delta(F)$ in die Form bringen, auf die wir die Definition des Differentials anwenden können.

Behauptung.

$$\delta(F) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot F_i \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

↑
der Term ist ausgelassen

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass die linke Seite und die rechte Seite auf beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ ausgewertet das gleiche Ergebnis liefern. Dies ist in der Tat der Fall, denn für $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}), i = 1, \dots, n-1$ gilt:

$$\begin{aligned} \delta(F)(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \det \begin{pmatrix} F_1 & v_{11} & \dots & v_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_n & v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte}}{\downarrow} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot F_i \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{n-1} \\ \text{mit } i\text{-ter Zeile} \\ \text{entfernt} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot F_i \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n)(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

↑
folgt dabei sofort aus der Definition von dx^j und der Definition des Dachprodukts \square

Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned} d\delta(F) &= \sum_{i=1}^n d((-1)^{i-1} \cdot F_i \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot dF_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &\stackrel{\text{Lemma 10.1}}{\uparrow} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_i} (-1)^{i-1} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &\stackrel{\text{denn } dx^j \wedge dx^j = 0 \text{ und } dx^j \wedge dx^k = -dx^k \wedge dx^j}{\uparrow} \\ &= \operatorname{div}(F) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

■

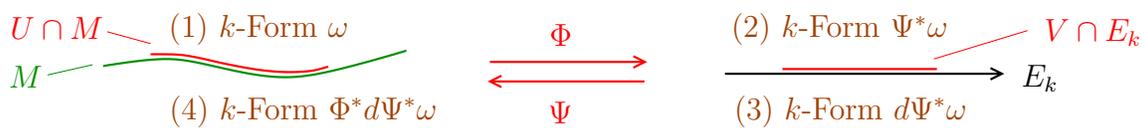
12.3. Das Differential von Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten. Wir wollen nun das Differential von Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten einführen.

Die Idee, wie üblich, ist dabei die Betrachtung von Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten mithilfe von Karten auf den oben behandelten Fall von Differentialformen auf offenen Teilmengen von \mathbb{R}^k und auf offenen Teilmengen von H^k zurückzuführen.

Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\omega \in \Omega_l(M)$. Es sei zuerst $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte für M von Typ (i). Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ . Dann ist $\Psi^*\omega$ eine l -Form auf $V \cap E_k$, also auf einer offenen Teilmenge von $E_k = \mathbb{R}^k$. Wir definieren nun $d\omega$ auf der offenen Teilmenge $U \cap M$ wie folgt:

$$d\omega|_{U \cap M} := \Phi^*(d(\Psi^*\omega)).$$

(Es folgt aus Lemma 12.5, dass diese Definition nicht von der Wahl der Karte abhängt.) Ganz analog definieren wir auch $d\omega|_U$ für Karten $\Phi: U \rightarrow V$ von Typ (ii). Wir haben also jetzt $d\omega$ auf den Definitionsbereichen von Karten von M , also auf ganz M , definiert.



Lemma 12.5. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\omega \in \Omega_l(M)$. Es seien $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ zwei Karten für M mit Umkehrabbildungen Ψ und $\tilde{\Psi}$. Dann gilt auf $U \cap \tilde{U}$

$$\Phi^*(d(\Psi^*\omega)) = \tilde{\Phi}^*(d(\tilde{\Psi}^*\omega)).$$

Beweis (*). Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall, dass sowohl Φ als auch $\tilde{\Phi}$ Karten von Typ (i) sind. Indem wir zu $U \cap \tilde{U}$ übergehen können wir annehmen, dass $U = \tilde{U}$. Wir bezeichnen mit Θ den Diffeomorphismus $\Theta := \tilde{\Phi} \circ \Psi: V \cap E_k \rightarrow \tilde{V} \cap E_k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{denn } \tilde{\Phi}^* \circ \tilde{\Psi}^* &= (\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})^* = \text{id} & \text{denn } \Theta^* &= \Psi^* \circ \tilde{\Phi} & \text{Satz 12.3} \\ \Phi^*(d(\Psi^*\omega)) &\stackrel{\downarrow}{=} \Phi^*(d(\Psi^*(\tilde{\Phi}^*\tilde{\Psi}^*\omega))) &\stackrel{\downarrow}{=} \Phi^*(d(\Theta^*(\tilde{\Psi}^*\omega))) &\stackrel{\downarrow}{=} \Phi^*(\Theta^*d(\tilde{\Psi}^*\omega)) \\ &= \Phi^*(\Psi^*(\tilde{\Phi}^*(\tilde{\Psi}^*\omega))) &= \tilde{\Phi}^*(d(\tilde{\Psi}^*\omega)). & \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel. Es sei $\omega \in \Omega_0(M)$, dies bedeutet, dass ω eine glatte Funktion auf M ist. In diesem Fall ist $d\omega \in \Omega_1(M)$ genau die 1-Form, welche wir in Kapitel 10.1 eingeführt hatten.¹¹⁴

¹¹⁴Es genügt diese Aussage zu überprüfen, für 0-Formen ω deren Träger in einer Karte $\Phi: U \rightarrow V$ enthalten ist. In diesem Fall gilt für jedes $v \in T_P M$ mit $P \in U \cap M$, dass

$$\begin{aligned} d\omega(v) &= \Phi^*(d(\Psi^*\omega))(v) = d(\Psi^*\omega)(\Phi_*v) = D(\Psi^*\omega)(\Phi_*v) = D(\omega \circ \Psi)(\Phi_*v) = D\omega(\Psi_*\Phi_*v) = D\omega_P(v). \\ &\uparrow \text{Definition von } d & \uparrow \text{Lemma 10.2} & \uparrow \text{da } \Psi^*\omega = \omega \circ \Psi & \uparrow \text{da } d = D \text{ für} & \uparrow \text{Kettenregel} & \uparrow \text{da } \Psi \circ \Phi = \text{id} \\ & \text{einer } k\text{-Form auf } M & & & \text{Funktion auf } \mathbb{R}^k & & \end{aligned}$$

Satz 12.6. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit.

- (1) Es gelten die gleichen Aussagen wie in Satz 12.2, insbesondere gilt für $\omega \in \Omega_l(M)$ und $\sigma \in \Omega_m(M)$ die Produktregel

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^{\text{Grad}(\omega)} \cdot \omega \wedge d\sigma.$$

Zudem gilt für alle $\omega \in \Omega_l(M)$, dass

$$d(d\omega) = 0.$$

- (2) Es sei $\varphi: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten. Für jede glatte k -Form ω auf N gilt

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Beweis. Der Satz folgt leicht aus den Aussagen von Satz 12.2 und Satz 12.3. ■

13. DER SATZ VON STOKES

13.1. Formulierung des Satz von Stokes. Wir haben nun alle Vorbereitungen für die Formulierung des Satzes von Stokes getroffen:

Satz 13.1. (Satz von Stokes) Es sei M eine orientierte k -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit und es sei $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Unser Ziel war es, eine Verallgemeinerung von Satz 10.12 und vom Gaußschen Integralsatz 8.5 zu finden. Es ist offensichtlich¹¹⁵¹¹⁶, dass der Satz von Stokes im Falle $k = 1$ genau der Aussage von Satz 10.12 entspricht.

Wir werden nun zeigen, dass wir den Gaußschen Integralsatz 8.5 aus dem Satz von Stokes herleiten können.

Beispiel. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0. Wir bezeichnen mit ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M . Es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Wir müssen zeigen, dass

$$\int_M \operatorname{div} F = \int_{\partial M} F \cdot \nu.$$

Wie in Kapitel 11.4 betrachten wir die zu F zugehörige $(n-1)$ -Form $\delta(F)$ auf M . Zur Erinnerung, für P ist $\delta(F)_P$ die alternierende $(n-1)$ -Form

$$\begin{aligned} (T_P M)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det(F(P) \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}). \end{aligned}$$

Es folgt nun, dass

$$\begin{array}{ccccccc} \int_M \operatorname{div} F & = & \int_M \operatorname{div} F \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n & = & \int_M d\delta(F) & = & \int_{\partial M} \delta(F) = \int_{\partial M} F \cdot \nu. \\ & & \uparrow \text{Lemma 11.21} & & \uparrow \text{Lemma 12.4} & & \uparrow \text{Satz von Stokes} \quad \uparrow \text{Satz 11.22} \end{array}$$

Wir haben damit gezeigt, dass der Satz von Stokes insbesondere den Gaußschen Integralsatz 8.5 beinhaltet.

13.2. Beweis des Satzes von Stokes. Wir wollen in diesem Teilkapitel den Satz von Stokes beweisen. Wie für den Beweis vom Gaußschen Integralsatz 8.5 wollen wir dazu erst einmal einen Spezialfall beweisen.

Definition. Wir sagen eine Teilmenge Q des Halbraums $H_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$ ist ein offener Quader in H_k , wenn es einen offenen Quader in $E_k = \mathbb{R}^k$ gibt, so dass der

¹¹³Zur Erinnerung, „geschlossene Untermannigfaltigkeit“ bedeutet eine kompakte Untermannigfaltigkeit M mit $\partial M = \emptyset$.

¹¹⁴In diesem Fall ist also $\partial M = \emptyset$, also verschwindet das Integral auf der rechten Seite der obigen Gleichheit.

¹¹⁵Hierbei verwenden wir die Konvention aus Kapitel 12.1 für die Orientierung des Randes einer orientierten eindimensionalen Untermannigfaltigkeit

¹¹⁶Diese Aussage ist zumindest offensichtlich, wenn man noch den Überblick über alle Definitionen und Konventionen besitzt.

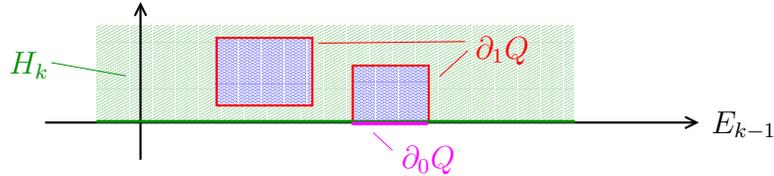
Durchschnitt mit H_k gerade Q ist. Wir schreiben

$$\partial_0 Q := Q \cap E_{k-1},$$

und¹¹⁷

$$\partial_1 Q = \partial \bar{Q} \setminus \partial_0 Q.$$

Wir sagen eine stetige Abbildung $f: Q \rightarrow V$ zu einem Vektorraum V **verschwindet auf $\partial_1 Q$** , wenn sich f stetig zu einer Abbildung auf $\bar{Q} = Q \cup \partial_1 Q$ fortsetzen läßt, welche auf $\partial_1 Q$ verschwindet.



Folgendes Lemma ist streng genommen kein Spezialfall des Satzes von Stokes, aber wir werden den Beweis des Satzes von Stokes problemlos auf dieses Lemma zurück führen.

Lemma 13.2. Es sei Q ein offener Quader in H_k und es sei ω eine glatte $(k-1)$ -Form auf Q , welche auf $\partial_1 Q := \partial \bar{Q} \setminus \partial_0 Q$ verschwindet. Dann gilt

$$\int_Q d\omega = \int_{\partial_0 Q} \omega.$$

Beweis. Nach Voraussetzung können wir ω zu einer $(k-1)$ -Form auf den Quader \bar{Q} fortsetzen, welche auf $\partial_1 Q$ verschwindet. Es gibt nun zwei Beweisansätze:

- (1) Wir hatten im vorherigen Satz gesehen, dass der Satz von Stokes für Untermannigfaltigkeiten von Kodimension 0 gerade dem Gaußschen Integralsatz 8.5 entspricht. Genau das gleiche Argument erlaubt es uns die Aussage von diesem Lemma auf den Gaußschen Integralsatz 8.7 für Stempel zurückzuführen.
- (2) Man kann das Lemma auch problemlos direkt, mit einer expliziten und kurzen Berechnung auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zurückführen. Für $k=2$ ist dies eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 10. Der Fall $k \geq 3$ wird ganz genauso bewiesen. ■

Beweis des Satzes 13.1 von Stokes. Im Folgenden betrachten wir den Fall $k \geq 2$. Der Fall $k=1$ wird ganz ähnlich, nur mit einer kleinen Abwandlung, bewiesen. Es sei nun M eine orientierte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Dimension $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und es sei zudem $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Ganz analog zum Beweis des Gaußschen Integralsatz 8.5 wollen wir den allgemeinen Fall auf den in Lemma 13.2 betrachteten Spezialfall zurückführen.

Behauptung. Es gibt einen Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i=1, \dots, r}$, so dass für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ gilt:

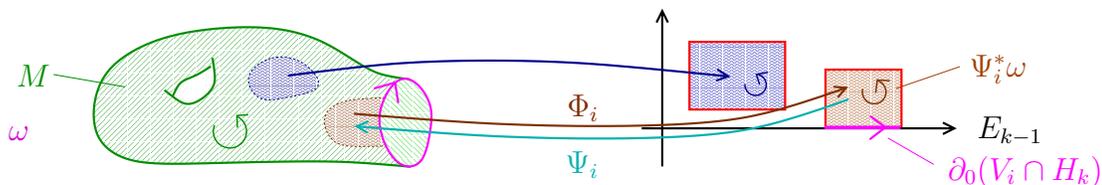
- (a) $\Phi_i(U_i \cap M) \subset H_k$ und
- (b) die Menge $V_i \cap H_k$ ist ein offener Quader in H_k ,
- (c) die Abbildung $\Phi_i: U_i \cap M \rightarrow V_i \cap E_k$ ist orientierungserhaltend.

¹¹⁷Hierbei bezeichnen wir mit $\partial \bar{Q}$ den topologischen Rand von \bar{Q} betrachtet als Teilmenge von E_k .

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass es für jedes $P \in M$ eine Karte $\Phi_P: U_P \rightarrow V_P$ um P mit den gewünschten Eigenschaften gibt.

- (1) Wenn $P \in M \setminus \partial M$, dann wählen wir zunächst eine beliebige Karte $\Phi_P: U_P \rightarrow V_P$ um P . Nach einer eventuellen Einschränkung und Verschiebung von V_P können wir annehmen, dass $V_P \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k > 0\}$, und dass V_P ein offener Quader ist. Dann ist auch $V_P \cap H_k$ ein offener Quader in H_k .
- (2) Wenn $P \in \partial M$, dann wählen wir wieder zuerst eine beliebige Karte $\Phi_P: U_P \rightarrow V_P$ um P . Nach einer eventuellen Einschränkung können wir annehmen, dass V_P ein offener Quader ist. Dann ist wiederum $V_P \cap H_k$ ein offener Quader in H_k .

Nachdem M kompakt ist, wird M schon durch endlich viele dieser Karten abgedeckt. Indem wir die Karten notfalls mit einer Spiegelung entlang der $(x_1 = 0)$ -Hyperebene verknüpfen¹¹⁸ können wir arrangieren, dass alle Karten zudem orientierungserhaltend sind. \square



Es folgt aus Satz 11.17, dass es glatte Funktionen $z_1, \dots, z_r: M \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (1) Für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ gilt $\text{Träger}(z_i) \subset U_i \cap M$.
- (2) Es ist $z_1 + \dots + z_r = 1$.

Aus (2) folgt, dass $\omega = z_1 \cdot \omega + \dots + z_r \cdot \omega$. Da beide Terme des Satzes von Stokes additiv sind, genügt es nun den Satz von Stokes für jeden Summanden $z_i \cdot \omega$ zu beweisen. Mit anderen Worten, wir können annehmen, dass es ein i gibt, so dass $\text{Träger}(\omega) \subset U_i \cap M$. Wir setzen $\Psi_i := \Phi_i^{-1}$. Nun gilt:

denn $\text{Träger}(\omega) \subset U_i \cap M$ nach Satz 12.6 können wir d mit Abbildungen vertauschen

$$\int_M d\omega \stackrel{\downarrow}{=} \int_{U_i \cap M} d\omega \stackrel{\uparrow}{=} \int_{V_i \cap H_k} \Psi_i^*(d\omega) \stackrel{\downarrow}{=} \int_{V_i \cap H_k} d(\Psi_i^*\omega) \\ \stackrel{\uparrow}{=} \int_{\partial_0(V_i \cap H_k)} \Psi_i^*\omega \stackrel{\downarrow}{=} \int_{U_i \cap \partial M} \omega \stackrel{\uparrow}{=} \int_{\partial M} \omega.$$

nach Voraussetzung ist $\text{Träger}(\omega) \subset U_i$ also verschwindet $(\Phi_i^{-1})^*\omega$ auf $\partial_1(V_i \cap H_k)$ die Gleichheit folgt also aus Lemma 13.2, da $V_i \cap H_k$ ein offener Quader ist

Wir haben damit den Satz von Stokes bewiesen. \blacksquare

Bemerkung. Wenn man den Beweis des Satzes von Stokes durchliest, und wenn man sich überzeugt hat, dass der Beweis von Lemma 13.2 ganz einfach ist, dann drängt sich der Verdacht auf, dass das ganze eigentlich elementar ist. Insbesondere ist der Beweis des Satzes von Stokes deutlich einfacher als der Beweis vom Gaußschen Integralsatz. Woran

¹¹⁸Hier verwenden wir, dass $k \geq 2$.

liegt das? Der Grund ist die harmlos ausschauende, aber eigentlich geniale Eigenschaft des Differential, dass es mit glatten Abbildungen kommutiert, d.h. dass in unserem Fall gilt $d(\Psi_i^*\omega) = \Psi_i^*(d\omega)$. Diese Eigenschaft erlaubt es uns den Beweis auf den einfachsten Fall, nämlich den Fall, dass der Rand „horizontal“ ist, zurückzuführen. Diesen Spezialfall konnten wir problemlos explizit nachweisen.

13.3. Der klassische Satz von Stokes und der Satz von Green.

Definition. Es sei $F = (F_x, F_y, F_z)$ ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 . Die **Rotation** von F ist definiert als das Vektorfeld

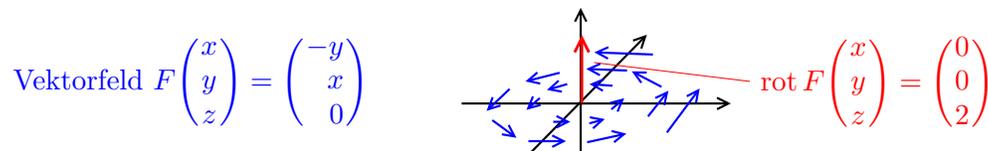
$$\text{rot } F := \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{suggestive Notation}} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y \\ -\frac{\partial}{\partial x} F_z + \frac{\partial}{\partial z} F_x \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{pmatrix}.$$

Beispiel. Für

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{rot } F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

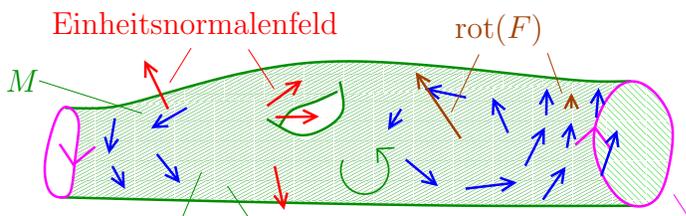
Anschaulich gesprochen gibt die Rotation $\text{rot } F$ an jedem Punkt in \mathbb{R}^3 an, „um welche Achse sich das Vektorfeld dreht“.



Der klassische Satz von Stokes lautet nun wie folgt:

Satz 13.3. (Klassische Satz von Stokes) Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte Fläche und F ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 . Dann gilt

$$\int_M \underbrace{\delta(\text{rot } F)}_{\substack{\text{zum Vektorfeld } \text{rot}(F) \\ \text{zugehörige 2-Form} \\ (v_1, v_2) \mapsto \det(\text{rot}(F) v_1 v_2)}} = \int_{\partial M} \underbrace{\omega(F)}_{\substack{\text{zum Vektorfeld } F \\ \text{zugehörige 1-Form} \\ v \mapsto F(P) \cdot v}}$$



das Integral $\int_M \text{rot}(F)$ ist positiv, da das Skalarprodukt von Rotation und Normalenfeld ist überall > 0

das Integral $\int_{\partial M} F$ ist positiv, da Skalarprodukt von Vektorfeld und Orientierung ist überall > 0

der klassische Satz von Stokes besagt $\int_M \delta(\text{rot } F) = \int_{\partial M} \omega(F)$

Beweis. Wir werden den klassischen Satz von Stokes mithilfe des allgemeinen Satz 13.1 von Stokes beweisen. Es sei also $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte Fläche und $F = (F_x, F_y, F_z)$ ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 . Der Satz von Stokes 13.1 besagt:

$$\int_M d\omega(F) = \int_{\partial M} \omega(F).$$

Der klassische Satz von Stokes folgt nun aus den Definitionen und aus der folgenden Behauptung:

Behauptung. Das Differential $d\omega(F)$ der 1-Form $\omega(F)$ ist die 2-Form $\delta(\text{rot}(F))$ auf M , welche für $P \in M$ definiert ist durch

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_P M \times \mathbb{T}_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto \det(\text{rot } F(P) \ v_1 \ v_2). \end{aligned}$$

Beweis. Da F auf \mathbb{R}^3 definiert ist können wir $\omega(F)$ also 1-Form auf \mathbb{R}^3 auffassen und wir zeigen die gewünschte Gleichheit auf \mathbb{R}^3 . Wie wir schon auf Seite 93 gesehen hatten, folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$\omega(F) = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

Wir berechnen:

Definition des Differentials

Lemma 10.1

$$\begin{aligned} d\omega(F) &= d(F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz) \stackrel{\downarrow}{=} dF_x \wedge dx + dF_y \wedge dy + dF_z \wedge dz \stackrel{\downarrow}{=} \\ &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} dy + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} dx + \frac{\partial F_y}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} dx + \frac{\partial F_z}{\partial y} dy + \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz. \\ &\quad \uparrow \\ &\text{denn } dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \text{ und } dx^i \wedge dx^i = 0 \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $d\omega(F) = \delta(\text{rot}(F))$. Die Rechnung ist fast die gleiche wie auf Seite 137, aber der Vollständigkeit halber führen wir diese noch einmal durch.

Wir zeigen die Gleichheit $d\omega(F) = \delta(\text{rot}(F))$ indem wir zeigen, dass beide Seiten auf alle Vektoren die gleichen Ergebnisse liefern. Es seien also $v_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ und $v_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ in \mathbb{R}^3 beliebig. Dann folgt aus der obigen Rechnung, dass

$$\begin{aligned} d\omega(F) \left(\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix} \right) &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) (v_{1x}v_{2z} - v_{1z}v_{2x}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} & v_{1x} & v_{2x} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} & v_{1y} & v_{2y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} & v_{1z} & v_{2z} \end{pmatrix} = \det(\text{rot } F(P) \ v_1 \ v_2) = \delta(\text{rot}(F))(v_1, v_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Der folgende Satz von Green ist ebenfalls ein klassischer Spezialfall des Satzes von Stokes.

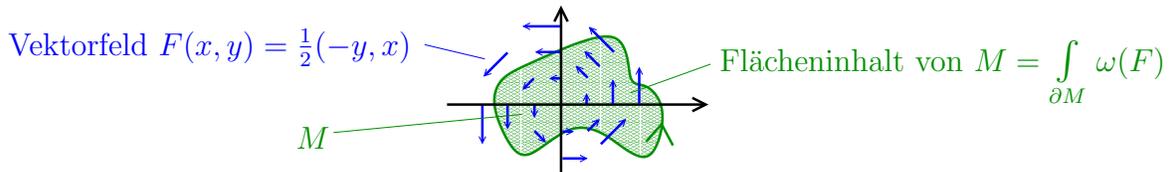
Satz 13.4. (Satz von Green) Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es seien $u, v: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Dann gilt¹¹⁹

$$\int_{\partial M} \underbrace{(v \cdot dx + u \cdot dy)}_{\text{glatte 1-Form auf } \partial M} = \int_M \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{Funktion auf } M}.$$

Beispiel. Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir betrachten das Vektorfeld $F(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\int_{\partial M} \omega(F) = \int_{\partial M} -\frac{1}{2}y \cdot dx + \frac{1}{2}x \cdot dy \underset{\text{siehe Seite 93}}{=} \int_M \frac{\partial \frac{1}{2}x}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{1}{2}y)}{\partial y} = \int_M 1 = \text{Flächeninhalt von } M. \underset{\text{Satz von Green 13.4}}{=}$$

Wir können also den Flächeninhalt von M durch ein Integral einer 1-Form entlang des Randes bestimmen.¹²⁰



Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es seien $u, v: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} v \cdot dx + u \cdot dy &= \int_M d(v \cdot dx + u \cdot dy) \underset{\text{Satz 13.1 von Stokes}}{=} \int_M \frac{\partial v}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dx}_{=-dx \wedge dy} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \wedge dy + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} \\ &= \int_M \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy \underset{\text{Lemma 10.1}}{=} \int_M \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \underset{\text{Definition des Differentials}}{=} \underset{\text{Lemma 11.21}}{=} \quad \blacksquare$$

13.4. Anwendung auf holomorphe Funktionen. Wir erinnern an einige Definitionen aus der Funktionentheorie.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn für alle $z_0 \in U$ der Grenzwert

$$\frac{d}{dz} f(z_0) := f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

¹¹⁹Hierbei betrachten wir ∂M als orientierte Untermannigfaltigkeit mit der Konvention, welche wir auf Seite 131 eingeführt hatten.

¹²⁰Diese Tatsache kann man sogar in der Praxis verwenden. Mit einem sogenannten Planimeter kann man den Flächeninhalt einer Teilmenge von \mathbb{R}^2 nur durch Abfahren der Außenlinie zu bestimmen. Details dazu kann man hier finden:

existiert. Wir schreiben nun $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$. In der Analysis III hatten wir gezeigt¹²¹

$$f \text{ ist holomorph} \iff u \text{ und } v \text{ sind glatt mit } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Die Gleichungen auf der rechten Seite hatten wir die **Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen** genannt.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für eine Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ hatten wir in Analysis III das **Wegintegral** von f über γ definiert als

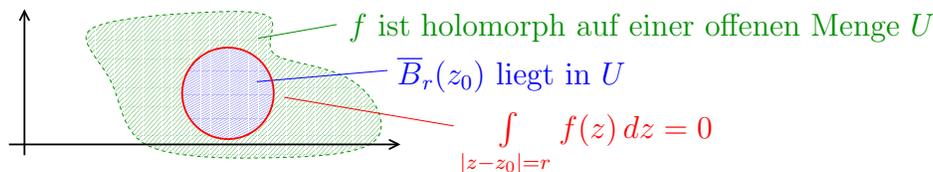
$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t=a}^{t=b} \underbrace{f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\text{Multiplikation in } \mathbb{C}} dt \in \mathbb{C}.$$

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(z_0) \subset U$ definieren wir zudem

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz := \int_{\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}} f(z) dz. \\ t \mapsto z_0 + re^{it}$$

Satz 13.5. Es sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn $\overline{B}_r(z_0)$ eine abgeschlossene Scheibe ist, welche in U enthalten ist, dann gilt

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 0.$$



Bemerkung. Wir hatten diesen Satz in Analysis III als Korollar 5.4 formuliert, und dies mithilfe des Cauchyschen Integralsatz bewiesen. In der Tat kann man den Beweis von Satz 13.5, analog zum Beweis von Satz 8.10, abwandeln und den Cauchyschen Integralsatz 5.3 für Bilder von Rechtecken in Analysis III beweisen.

Beweis. Es sei also $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und es sei $M := \overline{B}_r(z_0)$ eine abgeschlossene Scheibe, welche in U enthalten ist. Wir setzen $u := \operatorname{Re}(f)$ und $v := \operatorname{Im}(f)$, dann ist $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{C}$. Wir betrachten die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &= z_0 + re^{it} =: (\alpha(t), \beta(t)). \end{aligned}$$

Dann ist

¹²¹Wie üblich identifizieren wir in diesem Kapitel \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}
\text{Imaginärteil von } \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz &= \text{Imaginärteil von } \int_{t=0}^{t=2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \text{Imaginärteil von } \int_{t=0}^{t=2\pi} \underbrace{(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))}_{=f(\gamma(t))} \cdot \underbrace{(\alpha'(t) + i\beta'(t))}_{=\gamma'(t)} dt \\
&= \int_{t=0}^{t=2\pi} \underbrace{v(\gamma(t)) \cdot \alpha'(t)}_{=dx(\gamma'(t))} + \underbrace{u(\gamma(t)) \cdot \beta'(t)}_{=dy(\gamma'(t))} dt \\
&= \int_{t=0}^{t=2\pi} v(\gamma(t)) \cdot dx(\gamma'(t)) + u(\gamma(t)) \cdot dy(\gamma'(t)) dt \\
&= \int_{\partial M} v \cdot dx + u \cdot dy = \int_M \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ nach den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, da } f \text{ holomorph ist}} dx dy = 0
\end{aligned}$$

↑
↑

folgt aus Satz 11.24, denn γ ist eine orientierungserhaltende Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit ∂M

Satz von Green

Die Aussage, dass der Realteil des Integrals verschwindet wird ganz ähnlich bewiesen.¹²² ■

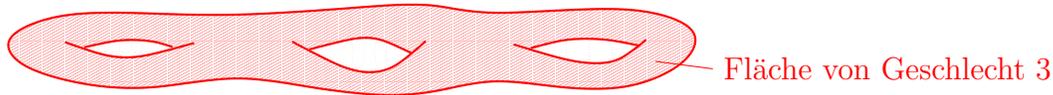
¹²²Eine andere Möglichkeit zu beweisen, dass der Realteil verschwindet, ist dass man die gleiche Rechnung auf die holomorphe Funktion $z \mapsto i \cdot f(z)$ anwendet.

14. TOPOLOGISCHE RÄUME II

Wir haben uns jetzt also ausführlich mit Untermannigfaltigkeiten beschäftigt. Die Theorie der Untermannigfaltigkeiten ist aus mehreren Gründen etwas unbefriedigend:

- (1) Unser Universum schaut zwar in unserer Umgebung aus wie eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 , und vermutlich ist dies an den meisten Orten des Universums der Fall, aber es ist nicht klar, dass unser Universum als ganzes als Teilmenge des \mathbb{R}^3 aufgefasst werden kann.¹²³ Andererseits ist unser Universum erst Recht nicht eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit eines größeren \mathbb{R}^n 's. Wir würden deshalb gerne eine Theorie von „3-dimensionalen Objekten“ aufbauen, welche nicht Teilmenge von einem \mathbb{R}^n sind.
- (2) Jede Fläche von Geschlecht g , wie in der Abbildung unten, sollte eigentlich eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit sein. Aber mit der Sprache der Untermannigfaltigkeiten ist es sehr schwierig eine mathematisch saubere Definition und Beschreibung von Flächen von Geschlecht g zu geben.

Wir werden demnächst den Begriff einer „Mannigfaltigkeit“ einführen, welcher den Begriff von „Untermannigfaltigkeit“ erweitert. Um diesen Begriff einführen zu können, müssen wir die topologischen Räume noch einmal genauer studieren. Insbesondere werden wir in diesem Kapitel verschiedene Konstruktionen von topologischen Räumen kennenlernen.



14.1. Basis einer Topologie. Wir erinnern noch einmal an die Definition eines topologischen Raums, welche wir auf Seite 6 gegeben hatten.

Definition. Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, \mathcal{T}) , wobei X eine Menge ist und \mathcal{T} eine Topologie auf X , d.h. \mathcal{T} ist eine Menge von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- (T1) die leere Menge und die ganze Menge X sind in \mathcal{T} enthalten,
- (T2) der Durchschnitt von endlich vielen Mengen in \mathcal{T} ist wiederum eine Menge in \mathcal{T} ,
- (T3) die Vereinigung von beliebig vielen Mengen in \mathcal{T} ist wiederum eine Menge in \mathcal{T} .

Die Mengen in \mathcal{T} werden als offen bezüglich \mathcal{T} , oder, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, einfach nur als offen bezeichnet.

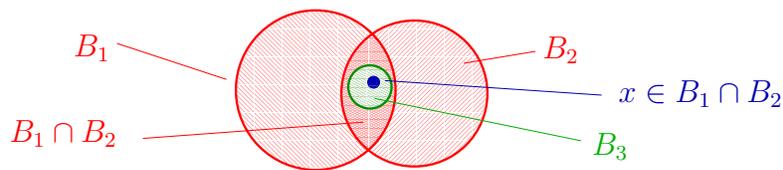
Für die Konstruktion von weiteren topologischen Räumen ist es hilfreich folgende Definition einzuführen.

Definition. Es sei X eine Menge und es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X . Wir sagen \mathcal{B} besitzt die Basiseigenschaft, wenn gilt:

- (B1) Zu jedem $x \in X$ existiert ein $i \in I$, so dass $x \in B_i$.¹²⁴
- (B2) Es seien $i, j \in I$ und es sei $x \in B_i \cap B_j$. Dann existiert ein $k \in I$, so dass $x \in B_k$ und $B_k \subset B_i \cap B_j$.

¹²³Wenn unser Universum eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 wäre und es anscheinend wohl endlich ist, was soll dann das Komplement des Universums sein? Hmm.

¹²⁴Mit anderen Worten, es ist $X = \bigcup_{i \in I} B_i$.



Lemma 14.1. Es sei X eine Menge und es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X , welche die Basiseigenschaft besitzt. Wir definieren

$$\mathcal{T} := \{V \subset X \mid \text{zu jedem } x \in V \text{ gibt es ein } i \in I, \text{ so dass } x \in B_i \subset V\}.$$

Dann ist \mathcal{T} eine Topologie auf X .

Definition. Wir fahren mit der Notation von Lemma 14.1 fort. Wir nennen \mathcal{T} die von \mathcal{B} erzeugte Topologie auf X . Umgekehrt, sagen wir, dass \mathcal{B} eine Basis der Topologie \mathcal{T} ist.

Beispiel. Es sei X ein metrischer Raum und es sei \mathcal{B} die Menge aller offenen Kugeln in X , d.h.

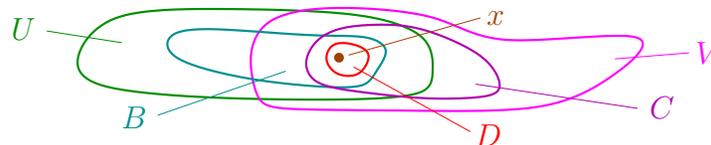
$$\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in X \text{ und } \epsilon > 0\},$$

dann besitzt \mathcal{B} die Basiseigenschaft.¹²⁵ Die von \mathcal{B} erzeugte Topologie ist dann per Definition die übliche Topologie auf einem metrischen Raum, welche wir auf Seite 6 eingeführt hatten.

Beweis von Lemma 14.1. Wir zeigen nun, dass die Axiome (T1), (T2) und (T3) erfüllt sind.

- (T1) Nach (B1) gibt es zu jedem $x \in X$ ein $i \in I$ mit $x \in B_i$. Es folgt also per Definition, dass $X \in \mathcal{T}$. Zudem ist $\emptyset \in \mathcal{T}$, nachdem die Vereinigung von null Mengen, die Nullmenge ist.
- (T2) Wir müssen zeigen, dass der Durchschnitt von endlich vielen Mengen in \mathcal{T} wieder in \mathcal{T} liegt.

Wir betrachten zuerst den Fall von zwei Mengen in \mathcal{T} . Es seien also $U, V \in \mathcal{T}$. Wir wollen zeigen, dass $U \cap V \in \mathcal{T}$ ist. Es sei also $x \in U \cap V$. Nachdem U und V in \mathcal{T} liegen, gibt es also $i, j \in I$, so dass $x \in B_i \subset U$ und $x \in B_j \subset V$. Nach Eigenschaft (B2) von \mathcal{B} existiert ein $k \in I$, so dass $x \in B_k$ und $B_k \subset B_i \cap B_j$. Insbesondere gilt dann auch, dass $x \in B_k \subset B_i \cap B_j \subset U \cap V$. Also ist $U \cap V \in \mathcal{T}$.



Es seien nun $U_1 \cap \dots \cap U_k$ offene Mengen. Es folgt aus der gerade bewiesenen Aussage und einem einfachen Induktionsargument, dass $U_1 \cap \dots \cap U_k$ auch in \mathcal{T} liegt.

- (T3) Es sei also $\{U_j\}_{j \in J}$ eine Familie von Mengen in \mathcal{T} . Wir müssen zeigen, dass die Vereinigungsmenge $\bigcup_{j \in J} U_j$ in \mathcal{T} liegt. Es sei also $x \in \bigcup_{j \in J} U_j$. Dann gibt es insbesondere ein $j \in J$, so dass $x \in U_j$. Nachdem $U_j \in \mathcal{T}$ gibt es ein $i \in I$, so dass $x \in B_i \subset U_j$. Dann gilt aber auch, dass

$$x \in B_i \subset U_k \subset \bigcup_{j \in J} U_j. \quad \blacksquare$$

¹²⁵Warum besitzt \mathcal{B} die Basiseigenschaft (B2)?

Lemma 14.2. Es sei X eine Menge und es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X , welche die Basiseigenschaft besitzt. Es sei \mathcal{T} die von \mathcal{B} erzeugte Topologie auf X . Dann gilt

$$V \subset X \text{ ist offen bezüglich } \mathcal{T} \iff V \text{ ist die Vereinigung von Mengen in } \mathcal{B}.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $V = \bigcup_{j \in J} B_j$ die Vereinigung von Mengen in \mathcal{B} ist. Nachdem die Mengen in \mathcal{B} offensichtlich offen bezüglich \mathcal{T} sind, und nachdem \mathcal{T} eine Topologie ist, folgt auch, dass $V \in \mathcal{T}$.

Nehmen wir nun an, dass $V \subset X$ offen ist bezüglich \mathcal{T} . Für jedes $x \in V$ existiert dann, per Definition von \mathcal{T} , ein $i_x \in I$, so dass $x \in B_{i_x} \subset V$. Dann folgt aber, dass

$$V = \bigcup_{x \in V} \{x\} \subset \bigcup_{x \in V} B_{i_x} \subset V, \quad \text{es folgt also, dass } V = \bigcup_{x \in V} B_{i_x}. \quad \blacksquare$$

Basen von Topologien können erstaunlich praktisch sein, beispielsweise besagt folgendes Lemma, dass es genügt die Stetigkeitseigenschaft einer Abbildung zwischen topologischen Räumen für offene Mengen in einer Basis zu überprüfen:

Lemma 14.3. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Es sei $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Basis für die Topologie von Y . Dann gilt

$$f \text{ ist stetig} \iff \text{für jedes } i \in I \text{ ist } f^{-1}(B_i) \text{ offen in } X.$$

Beispiel. Mithilfe von Lemma 14.3 kann man leicht, die schon aus Analysis II bekannte Aussage beweisen, dass eine Abbildung zwischen metrischen Räumen „ ϵ - δ “-stetig ist, genau dann, wenn Urbilder von offenen Mengen offen sind.

Beweis. Die Richtung „ \Rightarrow “ ist offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass für jedes $i \in I$ das Urbild $f^{-1}(B_i)$ offen in X ist. Wir wollen zeigen, dass f stetig ist. Es sei also $U \subset Y$ eine offene Teilmenge. Nach Lemma 14.2 gibt es eine Teilmenge J von I , so dass

$$U = \bigcup_{j \in J} B_j.$$

Dann ist

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \stackrel{\text{Lemma 1.1 (e)}}{=} \underbrace{\bigcup_{j \in J} \underbrace{f^{-1}(B_j)}_{\text{offen in } X}}_{\text{Vereinigung von offenen Mengen, also offen in } X}.$$

Lemma 14.4. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und es sei \mathcal{C} eine Familie von *offenen* Mengen in (X, \mathcal{T}) mit folgender Eigenschaft:

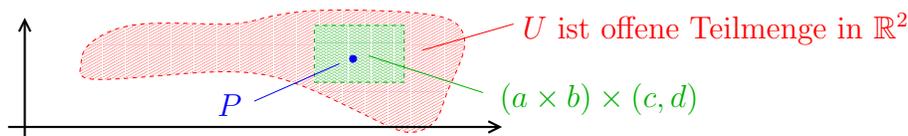
(*) Zu jeder offenen Menge U und zu jedem $x \in U$ gibt es ein $C \in \mathcal{C}$, so dass $x \in C \subset U$.

Dann ist \mathcal{C} eine Basis für die Topologie \mathcal{T} .

Beispiel. Wir betrachten den topologischen Raum $X = \mathbb{R}^2$. Es sei

$$\mathcal{C} := \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller offenen Rechtecke in \mathbb{R}^2 . Dann kann man sich leicht davon überzeugen, dass \mathcal{C} die gewünschte Eigenschaft in Lemma 14.4 besitzt, und daher eine Basis für die Standardtopologie auf \mathbb{R}^2 bildet.



Beweis (*). Wir zeigen zuerst, dass \mathcal{C} die Basiseigenschaft erfüllt:

- (B1) Wenden wir die Eigenschaft von \mathcal{C} auf $U = X$ an, dann erhalten wir sofort, dass es zu jedem $x \in X$ ein $C \in \mathcal{C}$ gibt, so dass $x \in C$.
- (B2) Es sei nun $x \in C_1 \cap C_2$, wobei $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Nachdem C_1 und C_2 offen sind, ist auch $U = C_1 \cap C_2$ offen. Wir wenden die definierende Eigenschaft von \mathcal{C} auf $U = C_1 \cap C_2$ an, und erhalten ein $C \in \mathcal{C}$, so dass $x \in C \subset C_1 \cap C_2$.

Wir bezeichnen nun mit \mathcal{S} die Topologie auf X , welche von \mathcal{C} erzeugt wird. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Wir zeigen zuerst die Inklusion $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Nachdem alle Mengen in \mathcal{C} offen bezüglich \mathcal{T} sind, folgt per Definition und aus Lemma 14.2, dass in der Tat $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Es sei also $U \in \mathcal{T}$. Wir wollen zeigen, dass $U \in \mathcal{S}$. Sei also $x \in U$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $C \in \mathcal{C}$, so dass $x \in C \subset U$. Also folgt per Definition, dass $U \in \mathcal{S}$. Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. ■

Wir erinnern nun an den Begriff der Teilraumtopologie, welchen wir schon auf Seite 9 eingeführt hatten.

Definition. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und es sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Die Teilraumtopologie auf A ist gegeben durch die Topologie

$$\mathcal{S} := \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

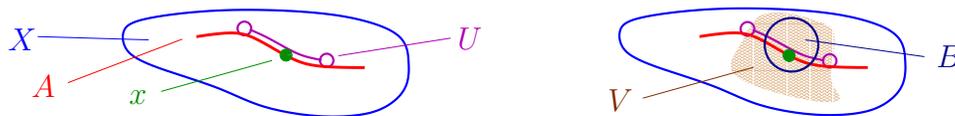
Eine Teilmenge U von A ist also offen in A , genau dann, wenn es eine offene Menge $V \subset X$ gibt, so dass $U = A \cap V$.

Lemma 14.5. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Es sei \mathcal{B} eine Basis für die Topologie von X . Dann ist

$$\{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis für die Topologie von A .

Beweis (*). Wir beweisen das Lemma mithilfe von Lemma 14.4. Es sei also $U \subset A$ eine offene Menge in A und $x \in U$. Nach Definition der Teilraumtopologie existiert eine offene Menge $V \subset X$ in X mit $U = A \cap V$. Nachdem \mathcal{B} eine Basis für die Topologie von X ist, existiert ein $B \in \mathcal{B}$, so dass $x \in B \subset V$. Dann folgt aber auch, dass $x \in A \cap B \subset A \cap V = U$. Es folgt aus Lemma 14.4, dass $\{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis für die Topologie von A ist. ■



Beispiel.

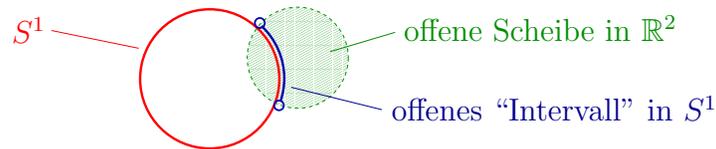
- (1) Wir betrachten

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Eine Basis für die Topologie auf \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$\mathcal{B} = \{B_r(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } r > 0\}.$$

Die Schnittmenge von einem offenen Ball in \mathbb{R}^2 mit S^1 ist ein „offenes Intervall auf S^1 “, d.h. eine Teilmenge der Form $\{\exp(i\varphi) \mid \varphi \in (a, b)\}$. Nach Lemma 14.5 bildet also die Menge \mathcal{C} der offenen Intervalle auf S^1 eine Basis der Topologie auf S^1 .



- (2) Wir betrachten jetzt wieder die „Gerade mit einem Punkt im Unendlichen“, d.h. $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie, welche wir auf Seite 7 eingeführt hatten. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass eine Basis der Topologie von X gegeben ist durch

$$\mathcal{D} := \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, C) \cup \{\infty\} \cup (D, \infty) \mid C, D \in \mathbb{R}\}.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$f: X \rightarrow S^1$$

$$x \mapsto \begin{cases} \exp(i \cdot 2 \arctan(x)), & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \\ (-1, 0), & \text{wenn } x = \infty. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich eine Bijektion. Man sieht auch leicht, dass

$$U \in \mathcal{D} \iff f(U) \in \mathcal{C}.$$

Es folgt nun aus Lemma 14.3, dass die Abbildung f ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist X homöomorph zu S^1 .

14.2. Das Produkt von topologischen Räumen.

Lemma 14.6. Es seien X und Y topologische Räume. Dann besitzt

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}$$

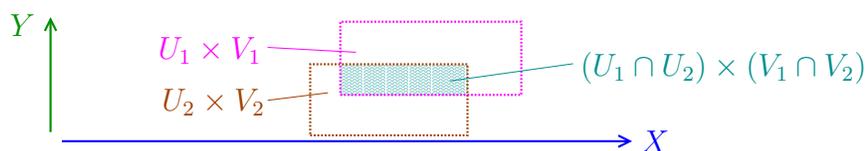
die Basiseigenschaft.

Beweis (*). Wir müssen nun also nachweisen, dass \mathcal{B} in der Tat die beiden Basiseigenschaften besitzt:

- (B1) Es ist $X \times Y \in \mathcal{B}$, also gibt es zu jedem $(x, y) \in X \times Y$ eine Teilmenge in \mathcal{B} , nämlich $X \times Y$, welche (x, y) enthält. \mathcal{B} erfüllt also die Basiseigenschaft (B1).
 (B2) Es seien nun $U_1 \times V_1$ und $U_2 \times V_2$ aus \mathcal{B} , dann gilt

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}.$$

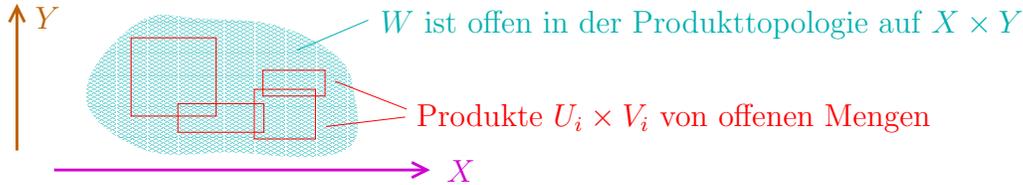
Insbesondere erfüllt also \mathcal{B} auch die Basiseigenschaft (B2). ■



Definition. Es seien X und Y topologische Räume. Die Produkttopologie auf $X \times Y$ ist die von

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}$$

erzeugte Topologie auf $X \times Y$.



Konvention. Im Folgenden, wenn X und Y topologische Räume sind, dann verstehen wir $X \times Y$ immer mit der Produkttopologie.

Satz 14.7. Es seien X und Y topologische Räume. Die Produkttopologie auf $X \times Y$ hat folgende Eigenschaften:

- (1) Die Projektionsabbildungen $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ und $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ sind stetig.
- (2) Es sei W ein topologischer Raum und $f: W \rightarrow X \times Y$ eine Abbildung. Dann gilt: f ist stetig genau dann, wenn $\pi_X \circ f: W \rightarrow X$ und $\pi_Y \circ f: W \rightarrow Y$ stetig sind.

Zudem ist die Produkttopologie die einzige Topologie auf $X \times Y$, welche diese beiden Eigenschaften erfüllt.¹²⁶

Beweis. Wir werden diesen Satz in Übungsblatt 11 beweisen. ■

Lemma 14.8. Es sei \mathcal{B} eine Basis für den topologischen Raum X und es sei \mathcal{C} eine Basis für den topologischen Raum Y . Dann ist

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ und } C \in \mathcal{C}\}$$

eine Basis für $X \times Y$.

Beispiel. Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Die offenen endlichen Intervalle bilden, per Definition, eine Basis für den topologischen Raum $X = Y = \mathbb{R}$. Es folgt also aus Lemma 14.8, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von „offenen Quadrern“ der Form $(a, b) \times (c, d)$ erzeugt wird. Wie wir auf Seite 150 gesehen hatten, erzeugen die offenen Quader gerade die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Also gilt

$$\text{Produkttopologie auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \text{übliche Topologie auf } \mathbb{R}^2.$$

Beweis (*). Wir beweisen das Lemma mithilfe von Lemma 14.4. Es sei also $W \subset X \times Y$ eine offene Menge und $(x, y) \in W$. Nach Definition der Produkttopologie existieren offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$, so dass $(x, y) \in U \times V$ und $U \times V \subset W$.

Nachdem \mathcal{B} eine Basis für X ist, folgt, dass es $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset U$ gibt. Ganz analog zeigt man, dass es $C \in \mathcal{C}$ mit $y \in C \subset V$ gibt. Es folgt, dass

$$(x, y) \in B \times C \subset U \times V \subset W.$$

Es folgt also aus Lemma 14.4, dass

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ und } C \in \mathcal{C}\}$$

¹²⁶Die Produkttopologie hat also eine universelle Eigenschaft, welche analog zur universellen Eigenschaft des direkten Produkts von Moduln, siehe [Na4, Kapitel 2.9], ist.

eine Basis für den topologischen Raum $X \times Y$ ist. ■

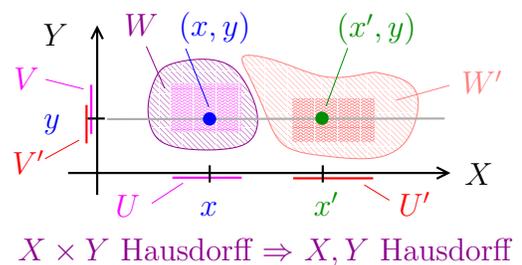
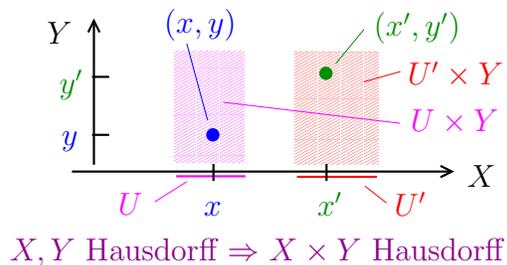
Lemma 14.9. Es seien X und Y zwei nichtleere topologische Räume. Dann gilt

- (a) X und Y sind Hausdorff¹²⁷ $\iff X \times Y$ ist Hausdorff
 (b) X und Y sind kompakt $\iff X \times Y$ ist kompakt.

Beweis. Wir beweisen Teil (a) des Lemmas, Teil (b) ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 11.

Es seien also X und Y zwei topologische Räume. Wir nehmen zuerst an, dass X und Y Hausdorff sind. Es seien nun (x, y) und (x', y') zwei verschiedene Punkte in $X \times Y$. Die Punkte unterscheiden sich also in zumindest einer der beiden Koordinaten. Wir können aus Symmetriegründen annehmen, dass $x \neq x'$. Da X nach Voraussetzung Hausdorff ist existieren offene Umgebungen U von x und U' von x' , so dass $U \cap U' = \emptyset$. Also ist $(U \times Y) \cap (U' \times Y) = \emptyset$. Per Definition der Topologie auf $X \times Y$ sind $U \times Y$ und $U' \times Y$ offen in $X \times Y$. Wir haben also disjunkte offene Umgebungen um (x, y) und (x', y') gefunden. Also ist $X \times Y$ Hausdorff. (Der Beweis ist in der Abbildung unten auf der linken Seite skizziert.)

Der Vollständigkeit halber beweisen wir die Umkehraussage, welche wir jedoch im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht verwenden werden. Wir nehmen nun also an, dass $X \times Y$ Hausdorff ist. Wir wollen zeigen, dass X Hausdorff ist. Es seien also x und x' zwei verschiedene Punkte in X . Nachdem Y nichtleer ist existiert ein $y \in Y$. Nachdem $X \times Y$ Hausdorff ist existieren disjunkte offene Umgebungen W und W' von (x, y) und (x', y) . Per Definition der Produkttopologie gibt es offene Umgebungen U von x und U' von x' sowie V von y und V' von y , so dass $(U \times V) \cap (U' \times V') = \emptyset$. Insbesondere ist dann auch $(U \times \{y\}) \cap (U' \times \{y\}) = \emptyset$. Dann gilt aber auch $U \cap U' = \emptyset$. Insbesondere sind U und U' disjunkte offene Umgebungen von x und x' . Also ist X Hausdorff. (Der Beweis ist in der Abbildung unten auf der rechten Seite skizziert.) Der Beweis, dass auch Y Hausdorff, ist natürlich genau der gleiche. ■



¹²⁷Zur Erinnerung, ein topologischer Raum Z heißt Hausdorff, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten $a \neq b$ immer *disjunkte* offene Umgebungen U von a und V von b gibt.

15. QUOTIENTENRÄUME

15.1. Äquivalenzrelationen. Es sei X eine Menge. Wir werden in diesem Kapitel ausführlich mit Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen arbeiten. Wir erinnern deshalb zuerst noch einmal an die wichtigsten Definitionen.

Definition. Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X ist eine Relation, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x &\sim x && \text{(Reflexivität)} \\ x \sim y &\implies y \sim x && \text{(Symmetrie)} \\ x \sim y \text{ und } y \sim z &\implies x \sim z && \text{(Transitivität)}. \end{aligned}$$

Beispiele.

(a) Auf $X = \mathbb{R}$ ist eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$x \sim y \iff (x - y) \in \mathbb{Z}.$$

(b) Auf $X = S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$P \sim Q \iff P = Q \text{ oder } P = -Q.$$

(c) Auf $X := \overline{B}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$P \sim Q \iff \begin{aligned} &P = Q \text{ oder} \\ &P \text{ und } Q \text{ liegen auf } S^1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

(d) Wir verallgemeinern jetzt Beispiel (c). Genauer gesagt, es sei X eine Menge und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir definieren dann

$$P \sim Q \iff P = Q \text{ oder } P \text{ und } Q \text{ liegen in } A.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation auf X .

Definition. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Eine Äquivalenzklasse ist eine Teilmenge $Y \subset X$, so dass gilt

- (1) für alle $y, y' \in Y$ gilt: $y \sim y'$,
- (2) wenn $z \sim y$ für ein $y \in Y$, dann gilt auch $z \in Y$,

Mit anderen Worten, eine Äquivalenzklasse von X ist eine Teilmenge Y , so dass je zwei Elemente in Y äquivalent sind, und welches jedes Element von X enthält, welches zu einem Element in Y äquivalent ist.

Lemma 15.1. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Dann ist X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist, d.h.

- (1) jedes $x \in X$ liegt in einer Äquivalenzklasse,
- (2) wenn A und B Äquivalenzklassen sind, dann gilt entweder $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$.

Beweis. Die Aussage wurde in [Na2, Kapitel 4] bewiesen. Das Lemma kann man aber auch leicht selber beweisen. ■

Definition. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X .

- (1) Wir bezeichnen mit X/\sim die Menge der Äquivalenzklassen.
- (2) Für $x \in X$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von x mit $[x] \in X/\sim$.

(3) Wir bezeichnen $p: X \rightarrow X/\sim$
 $x \mapsto [x]$

als die Projektionsabbildung.

Beispiele.

(a) In Beispiel (a) ist jede Äquivalenzklasse von der Form

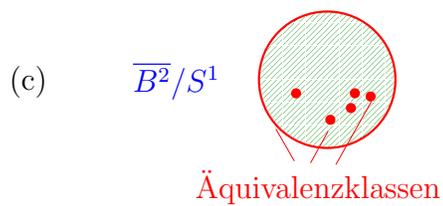
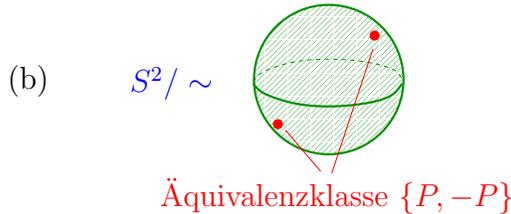
$$t + \mathbb{Z} := \{t + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$. Zudem gilt $s + \mathbb{Z} = t + \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $s - t \in \mathbb{Z}$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit \mathbb{R}/\mathbb{Z} bezeichnet. Dies ist gerade die Quotientengruppe der abelschen Gruppe \mathbb{R} bezüglich der Untergruppe \mathbb{Z} .

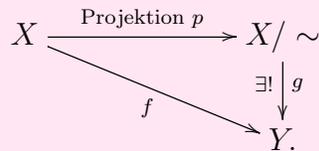
(b) In Beispiel (b) ist jede Äquivalenzklasse von der Form $\{P, -P\}$, wobei $P \in S^2$.

(c) In Beispiel (c) ist jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < 1$ eine Äquivalenzklasse, und alle Punkte in $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ bilden eine Äquivalenzklasse.

(d) In Beispiel (d) ist jeder Punkt $x \in X \setminus A$ eine Äquivalenzklasse, und A bildet eine Äquivalenzklasse. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit X/A .¹²⁹



Lemma 15.2. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X , es sei Y eine weitere Menge und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(y)$, wenn immer $x \sim y$. Dann existiert genau eine Abbildung $g: X/\sim \rightarrow Y$, so dass $f = g \circ p$, d.h. so dass das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert:



Wir bezeichnen die Abbildung $g: X/\sim \rightarrow Y$ als die induzierte Abbildung.

Beweis. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(y)$, wenn $x \sim y$. Es sei nun a ein Element in X/\sim . Dann existiert ein $x \in X$ mit $a = [x]$. Wir setzen

$$g(a) := f(x).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl von x ab, nachdem $f(x) = f(y)$, wenn immer $x \sim y$. Diese Abbildung $g: X/\sim \rightarrow Y$ hat dann offensichtlich die Eigenschaft, dass $f = g \circ p$.

¹²⁸Die Äquivalenzklasse von x ist die nach Lemma 15.1 eindeutig bestimmte Äquivalenzklasse von X , welche x enthält. Man sieht leicht, dass $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

¹²⁹Die Notation ist manchmal etwas gefährlich. Beispielsweise hat \mathbb{R}/\mathbb{Z} nun zwei verschiedene Bedeutungen, je nachdem ob wir der Notation aus Beispiel (a) oder der Notation aus Beispiel (d) folgen. Vom Kontext her sollte es aber normalerweise klar sein, welche Konvention wir verwenden.

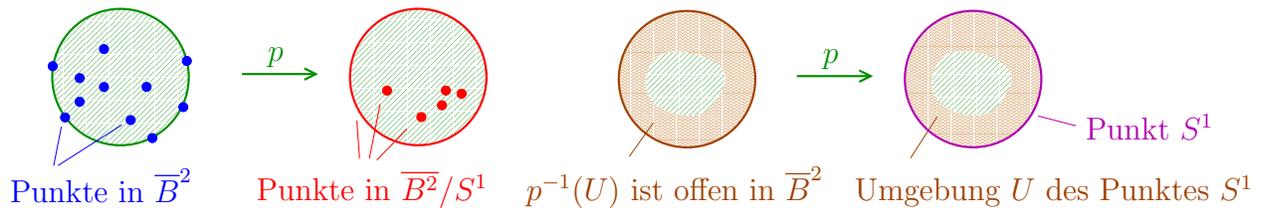
Nachdem die Projektion $X \rightarrow X/\sim$ surjektiv ist, ist die Abbildung g auch eindeutig bestimmt. ■

15.2. Die Quotiententopologie.

Definition. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Es sei $p: X \rightarrow X/\sim$ die Projektionsabbildung. Wir setzen

$$\mathcal{Q} := \{U \subset X/\sim \mid p^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}.$$

Man kann leicht überprüfen, dass \mathcal{Q} eine Topologie auf X/\sim definiert. Diese Topologie wird die Quotiententopologie auf X/\sim genannt. Wir betrachten im Folgenden X/\sim durchgehend als topologischen Raum bezüglich der Quotiententopologie.



Das folgende Lemma gibt eine Charakterisierung der Quotiententopologie.

Lemma 15.3. Es sei X ein topologischer Raum und es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Die Quotiententopologie auf X/\sim hat folgende Eigenschaften:

- (1) Die Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X/\sim$ ist stetig.
- (2) Es sei Y ein topologischer Raum und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(y)$, wenn immer $x \sim y$. Es sei $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ die induzierte Abbildung, d.h. die Abbildung, so dass das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{Projektion } p} & X/\sim \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \bar{f} \\ & & Y \end{array}$$

Wenn f stetig ist, dann ist auch die induzierte Abbildung $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ stetig.

Zudem ist die Quotiententopologie auf X/\sim die einzige Topologie auf X/\sim , welche diese beiden Eigenschaften erfüllt.

Bemerkung.

- (1) Die Charakterisierung der Projektionsabbildung und der Quotiententopologie entspricht der universellen Eigenschaft der Quotientenabbildung in der Linearen Algebra II, siehe [Na2, Satz 5.4].
- (2) Wenn X ein kompakter topologischer Raum ist, dann folgt aus Satz 1.11 und Lemma 15.3, dass auch jeder Quotientenraum X/\sim wiederum kompakt ist. In Übungsblatt 11 werden wir jedoch ein Beispiel von einem Hausdorff Raum X mit einer Äquivalenzrelation \sim sehen, so dass der Quotientenraum X/\sim nicht Hausdorff ist.

Beweis. Es sei X ein topologischer Raum und es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X .

- (1) Es folgt sofort aus der Definition der Quotiententopologie, dass die Projektionsabbildung stetig ist.

- (2) Es sei Y ein topologischer Raum und es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(y)$, wenn $x \sim y$. Nehmen wir nun an, dass f stetig ist. Wir wollen zeigen, dass die induzierte Abbildung $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ stetig ist. Es sei also $U \subset Y$ offen. Wir müssen zeigen, dass $\bar{f}^{-1}(U) \subset X/\sim$ offen ist. Per Definition der Quotiententopologie müssen wir also zeigen, dass $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$ offen in X ist. In der Tat gilt:

$$p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = (\bar{f} \circ p)^{-1}(U) = f^{-1}(U) = \text{offen.}$$

\uparrow
 da f stetig

Wir müssen nun noch zeigen, dass die Quotiententopologie \mathcal{Q} auf X/\sim durch (1) und (2) eindeutig bestimmt ist. Diese Eindeutigkeitsaussage ist, wie immer, ganz elementar zu beweisen, wenn man die Definitionen verdaut hat. Wir werden die Eindeutigkeitsaussage in Präsenzübungsblatt 11 beweisen. ■

Beispiel. Wir betrachten noch einmal Beispiel (a). Zur Erinnerung, für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \sim y \quad :\iff \quad (x - y) \in \mathbb{Z}.$$

Wir betrachten die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)). \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich, dass $\varphi(x) = \varphi(y)$, wenn immer $x \sim y$. Nach Lemmas 15.2 und 15.3 existiert daher genau eine stetige Abbildung

$$\bar{\varphi}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/\sim \rightarrow S^1,$$

mit der Eigenschaft, dass $\bar{\varphi}([x]) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass $\bar{\varphi}$ bijektiv ist. Der topologische Raum ist das Bild des kompakten Intervalls $[0, 1]$ unter der stetigen Abbildung $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Also ist nach Satz 1.11 auch \mathbb{R}/\mathbb{Z} kompakt. Nachdem \mathbb{R}/\sim kompakt ist, und nachdem S^1 Hausdorff ist, folgt nun aus Satz 1.15, dass $\bar{\varphi}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus ist.

Beispiel. Wir betrachten noch Beispiel (c). Zur Erinnerung, für $P, Q \in \overline{B}^2$ hatten wir folgende Äquivalenzrelation eingeführt:

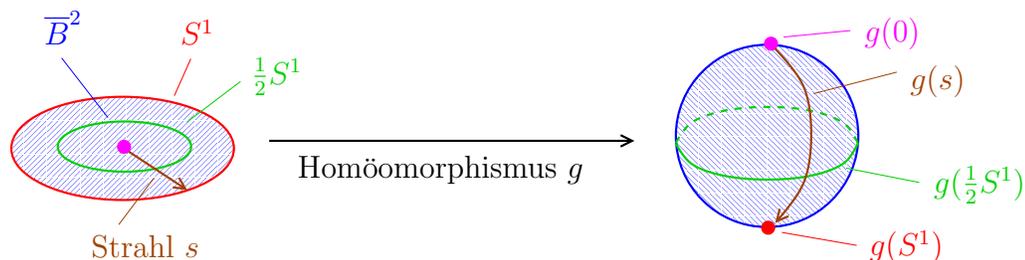
$$P \sim Q \quad :\iff \quad P = Q \text{ oder } P \text{ und } Q \text{ liegen auf } S^1.$$

Wir betrachten zuerst die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \overline{B}^2 &\rightarrow S^2 \\ \underbrace{(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))}_{\text{wobei } r \in [0, 1] \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi]} &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\pi r) \\ \sin(\varphi) \cdot \sin(\pi r) \\ \cos(\pi r) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man kann sich leicht vergewissern, dass diese Abbildung in der Tat wohldefiniert ist, d.h. dass der Ausdruck auf der rechten Seite nicht von der Wahl der Polarkoordinaten (r, φ) für einen Punkt in \overline{B}^2 abhängt, und dass der Punkt auf der rechten Seite in der Tat in S^2 liegt. Zudem kann man leicht zeigen, dass die Abbildung stetig ist.

Es gilt zudem, dass $f(x, y) = (0, 0, -1)$ für alle Punkte mit $r = 1$, d.h. für alle Punkte (x, y) in $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Es folgt also insbesondere, dass $f(P) = f(Q)$ für



alle Punkte $P, Q \in \overline{B}^2$ mit $P \sim Q$. Nach Lemmas 15.2 und 15.3 existiert daher genau eine stetige Abbildung $g: \overline{B}^2 / \sim \rightarrow S^2$, mit der Eigenschaft, dass $g([P]) = f(P)$ für alle $P \in \overline{B}^2$. Man kann sich problemlos davon überzeugen, dass $g: \overline{B}^2 / \sim \rightarrow S^2$ bijektiv ist.

Der topologische Raum \overline{B}^2 ist kompakt. Aus Satz 1.11 folgt dann auch, dass \overline{B}^2 / \sim kompakt ist. Nachdem S^2 zudem Hausdorff ist, folgt nun aus Satz 1.15, dass $g: \overline{B}^2 / \sim \rightarrow S^2$ ein Homöomorphismus ist.

Die anschauliche Darstellung des Arguments ist in der Abbildung oben skizziert. In \overline{B}^2 / \sim fassen wir alle Punkte auf dem Rand zu einem Punkt zusammen. Das „Endergebnis“ ist eine 2-dimensionale Sphäre.

15.3. Offene Abbildungen.

Definition. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologische Räumen heißt **offen**, wenn das Bild jeder offenen Menge in X offen in Y ist.

Beispiel.

- (1) Die Projektionsabbildung $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x, y) := x$ ist offen, während die Inklusionsabbildung $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i(x) = (x, 0)$ offensichtlich nicht offen ist.
- (2) Es sei $X = \mathbb{R}$ und es sei \sim die Äquivalenzrelation, welche gegeben ist durch

$$P \sim Q \quad :\iff \quad P = Q \text{ oder } P \text{ und } Q \text{ liegen in } [-2, 2].$$

Dann ist die Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X / \sim$ *nicht offen*. In der Tat, wir betrachten $U = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann ist U natürlich offen in \mathbb{R} , aber $p(U)$ ist nicht offen in \mathbb{R} / \sim , denn $p^{-1}(p(U)) = [-2, 2]$ ist nicht offen in \mathbb{R} .

Lemma 15.4. Es sei X ein topologischer Raum, es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X und es sei \mathcal{B} eine Basis der Topologie auf X . Wenn die Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X / \sim$ offen ist, dann ist¹³⁰

$$p(\mathcal{B}) = \{p(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis der Quotiententopologie auf X / \sim .

Beweis. Wir verwenden das Kriterium von Lemma 14.4 um zu zeigen, dass $p(\mathcal{B})$ eine Basis der Topologie auf X / \sim ist. Es sei also $U \subset X / \sim$ eine offene Menge und es sei $y \in U$. Wir müssen zeigen, dass es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $y \in p(B) \subset U$ gibt.

Wir wählen ein $x \in X$ mit $p(x) = y$. Nachdem \mathcal{B} eine Basis der Topologie auf X und nachdem $p^{-1}(U)$ offen in X ist, gibt es nach Lemma 14.4 ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset p^{-1}(U)$.

¹³⁰Die Mengen $p(B)$ sind offen in X / \sim , weil nach Voraussetzung die Projektionsabbildung $X \rightarrow X / \sim$ offen ist.

Dann gilt aber auch, dass $y = p(x) \in p(B) \subset p(p^{-1}(U)) = U$. Da $p(B)$ nach Voraussetzung offen ist, haben wir das Kriterium erfolgreich nachgewiesen. ■

15.4. Beispiele: Zylinder, Torus, das Möbius Band und die Kleinsche Flasche.

Wir betrachten im Folgenden noch viele weitere Beispiele von Äquivalenzrelationen auf topologischen Räumen. Bei der Beschreibung der Beispiele ist es hilfreich folgende Sprechweise einzuführen.

Definition. Es sei \sim eine Relation auf X . Wir sagen $x, y \in X$ sind äquivalent, wenn es $x = x_1, \dots, x_k = y$ in X gibt, so dass für alle $i = 1, \dots, k-1$ gilt: es ist $x_i \sim x_{i+1}$ oder es ist $x_{i+1} \sim x_i$. Wir nennen diese die von “ \sim ” erzeugte Äquivalenzrelation.¹³¹

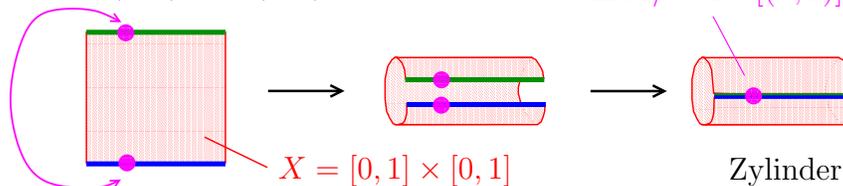
Beispiel. Die Relation $x \sim (x+1)$ mit $x \in \mathbb{R}$ auf \mathbb{R} erzeugt die schon verwendete Äquivalenzrelation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Beispiel A: Der Zylinder. Wir betrachten $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation, welche erzeugt wird von

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \text{für alle } x \in [0, 1].^{132}$$

Der Quotientenraum X/\sim entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir jeden Punkt auf der oberen Kante mit dem entsprechenden Punkt auf der unteren Kante identifizieren. Etwas anschaulicher, wir erhalten den Quotientenraum indem wir die „obere Kante orientierungserhaltend mit der unteren Kante verkleben“. Die Abbildung unten veranschaulicht diese Operation und suggeriert, dass der Quotientenraum X/\sim ein Zylinder ist.

die Punkte $(x, 0)$ und $(x, 1)$ sind äquivalent in X/\sim ist $[(x, 1)] = [(x, 0)]$ ein Punkt



Wir können diese Aussage auch leicht beweisen. Wir betrachten zuerst die surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: X = [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \times S^1 \\ (x, y) &\mapsto (x, \exp(2\pi iy)). \end{aligned}$$

Mithilfe von Satz 14.7 (2) kann man leicht zeigen, dass die Abbildung stetig ist. Nachdem $\varphi(a) = \varphi(b)$ für alle $a \sim b$ induziert φ nach Lemma 15.3 eine stetige Abbildung $\psi: X/\sim \rightarrow [0, 1] \times S^1$. Diese Abbildung ist (wie man leicht sieht) bijektiv. Es folgt aus Satz 1.11, dass X/\sim kompakt ist. Nachdem $[0, 1] \times S^1$ nach Lemma 14.9 zudem Hausdorff ist, folgt wiederum aus Satz 1.15, dass ψ ein Homöomorphismus ist, d.h. X/\sim ist in der Tat homöomorph zu einem Zylinder.

¹³¹Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

¹³²Die Äquivalenzrelation ist also gegeben durch

$$P \sim Q \iff P = Q \text{ oder } P = (x, 1) \text{ und } Q = (x, 0) \text{ für ein } x \in [0, 1].$$

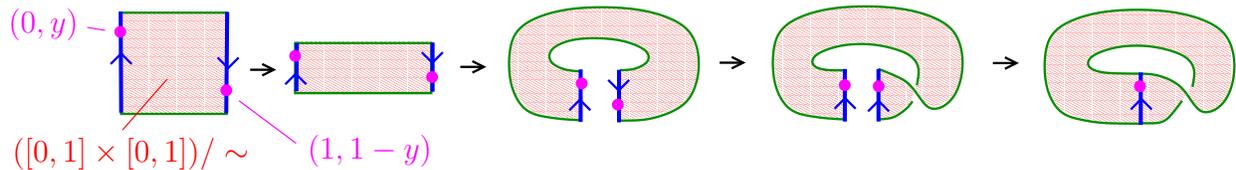


der Ausgang links entspricht dem Ausgang rechts, Pacman bewegt sich also auf einem Zylinder

Beispiel B: Das Möbiusband. Wir betrachten jetzt $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, dieses Mal mit der Äquivalenzrelation, welche erzeugt wird von

$$(0, y) \sim (1, 1 - y) \quad \text{für alle } y \in [0, 1].$$

Der Quotientenraum X/\sim entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir die „linke Kante nach einer Verdrillung mit der rechten Kante verkleben“. Den topologischen Raum X/\sim nennen wir das Möbiusband. Wir überlassen es als Übungsaufgabe nachzuweisen, dass X/\sim homöomorph ist zum Teilraum von \mathbb{R}^3 , welchen wir im Beweis von Lemma 19.3 eingeführt hatten.



Wir sehen, dass diese Beschreibung des Möbiusbands deutlich kürzer, und leichter zu merken ist, als die ursprüngliche Definition im Beweis von Lemma 19.3.

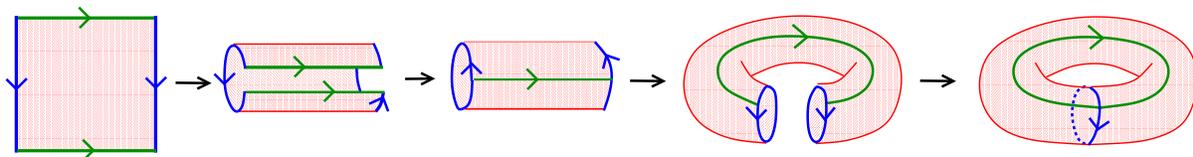
Beispiel C: Der Torus. Wir betrachten jetzt wiederum $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, aber dieses Mal mit der Äquivalenzrelation, welche erzeugt wird von

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

und von

$$(0, y) \sim (1, y) \quad \text{für alle } y \in [0, 1].$$

Der Quotientenraum X/\sim entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir die „obere Kante mit der unteren Kante orientierungserhaltend verkleben“ und die „linke Kante mit der rechten Kante orientierungserhaltend verkleben“. Die Abbildung unten veranschaulicht diese Operation und suggeriert, dass der Quotientenraum X/\sim ein Torus ist.



Wir betrachten die Abbildung

$$f: X = ([0, 1] \times [0, 1])/\sim \rightarrow S^1 \times S^1$$

$$[(\varphi, \theta)] \mapsto (\exp(2\pi i\varphi), \exp(2\pi i\theta)).$$

Es folgt aus Satz 14.7 (2) und Lemma 15.3, dass diese Abbildung stetig ist. Zudem kann man leicht überprüfen, dass die Abbildung bijektiv ist. Nachdem T kompakt ist und nachdem $S^1 \times S^1$ nach Lemma 14.9 Hausdorff ist, folgt nun aus Satz 1.15, dass f ein Homöomorphismus ist.

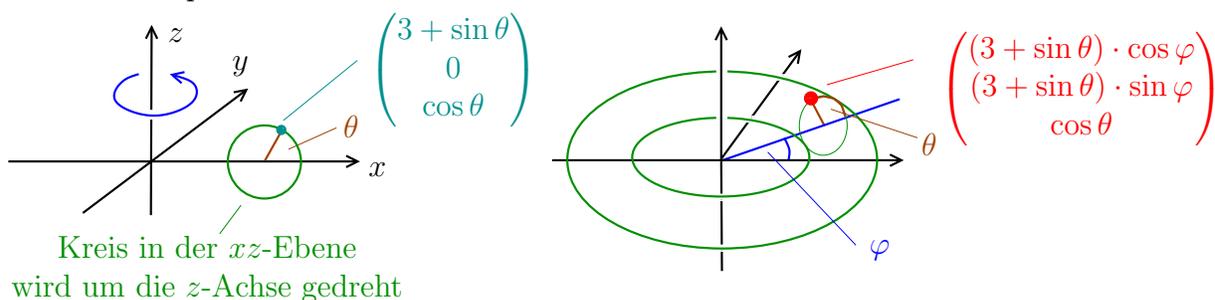
Auf Seite 27 hatten wir schon den Torus als 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$T := \{((3 + \sin \theta) \cdot \cos \varphi, (3 + \sin \theta) \cdot \sin \varphi, \cos \theta) \mid \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

von \mathbb{R}^3 eingeführt. Man kann nun leicht zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} X = ([0, 1] \times [0, 1]) / \sim &\rightarrow T \\ [(\varphi, \theta)] &\mapsto ((3 + \sin \theta) \cdot \cos \varphi, (3 + \sin \theta) \cdot \sin \varphi, \cos \theta) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.



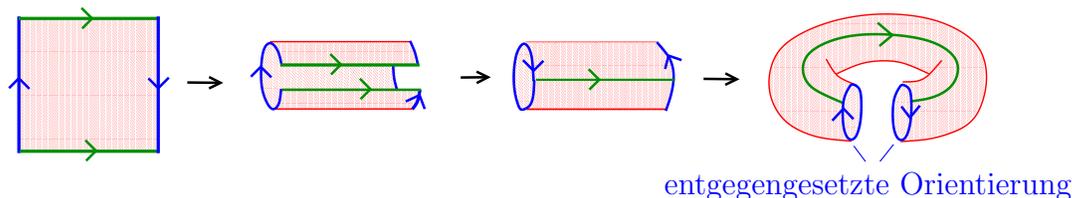
Beispiel D: Die Kleinsche Flasche. Wir betrachten noch einmal $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, jedoch dieses Mal mit der Äquivalenzrelation, welche erzeugt wird von

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

und von

$$(0, y) \sim (1, 1 - y) \quad \text{für alle } y \in [0, 1].$$

Der Quotientenraum X / \sim entsteht also aus dem Quadrat X , indem wir die „obere Kante orientierungserhaltend mit der unteren Kante verkleben“ und die „linke Kante nach einer Verdrillung mit der rechten Kante verkleben“. Den topologischen Raum X / \sim nennen wir die Kleinsche Flasche.¹³³

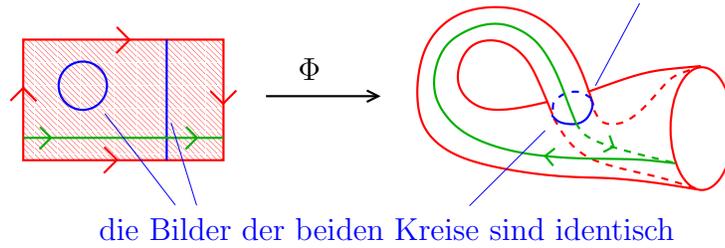


In der Abbildung unten sehen wir die Skizze einer stetigen Abbildung von der Kleinschen Flasche in \mathbb{R}^3 . Diese Abbildung ist nicht injektiv, denn zwei Kreise auf der Kleinschen Flasche bilden auf den gleichen Kreis in \mathbb{R}^3 ab. In der Tat kann man zeigen, aber dies geht weit über diese Vorlesung hinaus, dass es keine injektive stetige Abbildung von der Kleinschen Flasche nach \mathbb{R}^3 geben kann.

Es gibt jedoch eine injektive stetige Abbildung von der Kleinschen Flasche nach \mathbb{R}^4 . Die Konstruktion ist in der Abbildung unten skizziert. Genauer gesagt, es sei $\Phi: X / \sim \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung, welche in der Abbildung skizziert ist. Wir wählen eine weitere stetige Abbildung

¹³³Die Kleinsche Flasche ist nach dem Mathematiker Felix Klein (1849-1925) benannt.

jede Abbildung der Kleinschen Flasche nach \mathbb{R}^3 hat einen Selbstschnitt

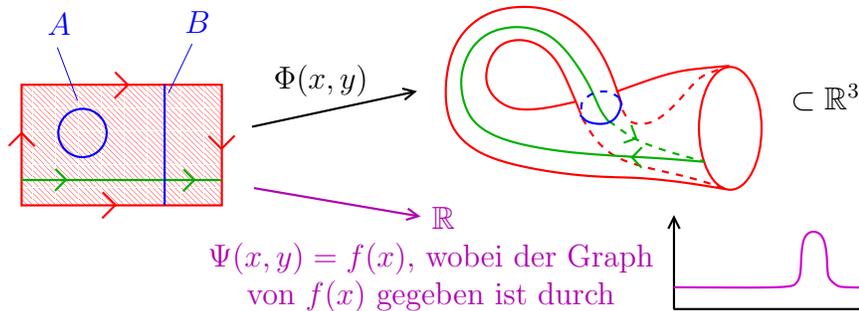


die Bilder der beiden Kreise sind identisch

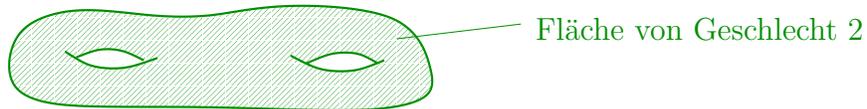
$\Psi(x, y) = f(x): X/\sim \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Eigenschaft hat, dass die Werte für alle Punkte auf A echt kleiner sind als die Werte auf B . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} X/\sim &\rightarrow \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ [(x, y)] &\mapsto (\Phi(x, y), f(x)) \end{aligned}$$

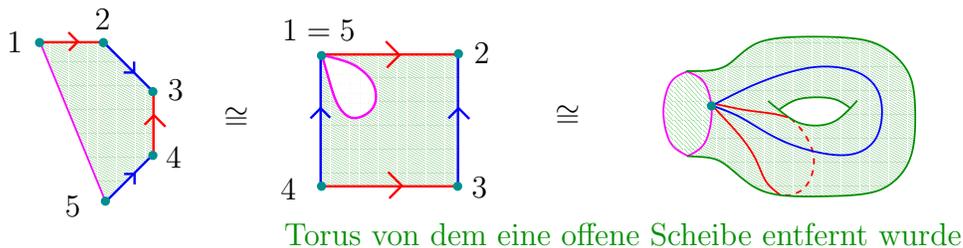
injektiv. In der Tat, denn wenn $\Phi(x, y') = \Phi(x, y)$ mit $(x, y) \neq (x', y')$, dann liegen (x, y) und (x', y') auf zwei verschiedenen Kreisen A und B , also unterscheiden sich die f -Werte.



15.5. Beispiele: Flächen von höherem Geschlecht. Es ist anschaulich klar, was eine Fläche von Geschlecht 2 sein soll. Aber es ist deutlich weniger klar, wie man eine solche Fläche mathematisch sauber definieren kann. Um unsere Definition zu motivieren beginnen wir zuerst mit einer etwas informellen Diskussion.



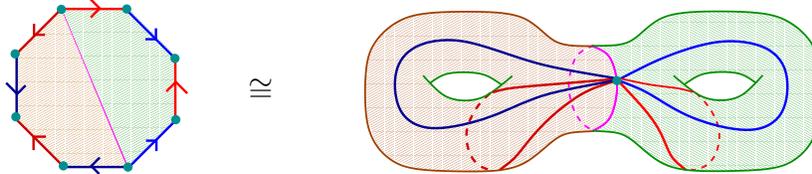
Wir betrachten erst einmal den topologischen Raum, welcher auf der linken Seite der Abbildung unten skizziert ist. Wir betrachten hierbei ein Pentagon, bei dem jeweils zwei Seiten mit gegenläufiger Orientierung identifiziert werden.



Torus von dem eine offene Scheibe entfernt wurde

In dem Beispiel sind die fünf Eckpunkte äquivalent.¹³⁴ Daher ist dieser topologische Raum homöomorph zum topologischen Raum, welchen wir aus dem Torus $X = ([0, 1] \times [0, 1]) / \sim$ erhalten, indem wir eine offene Scheibe entfernen. Wir erhalten also eine Fläche mit einer Randkomponente.

Wir betrachten jetzt das reguläre Oktagon¹³⁵ E_8 , welches in der nächsten Abbildung skizziert ist. Wie für den Torus wählen wir eine Äquivalenzrelation, so dass jeweils zwei Kanten, welche durch genau eine Kante getrennt sind, mit „gegenläufiger Orientierung“ äquivalent werden. Der topologische Raum E_8 / \sim , den wir dadurch erhalten, ist anschaulich



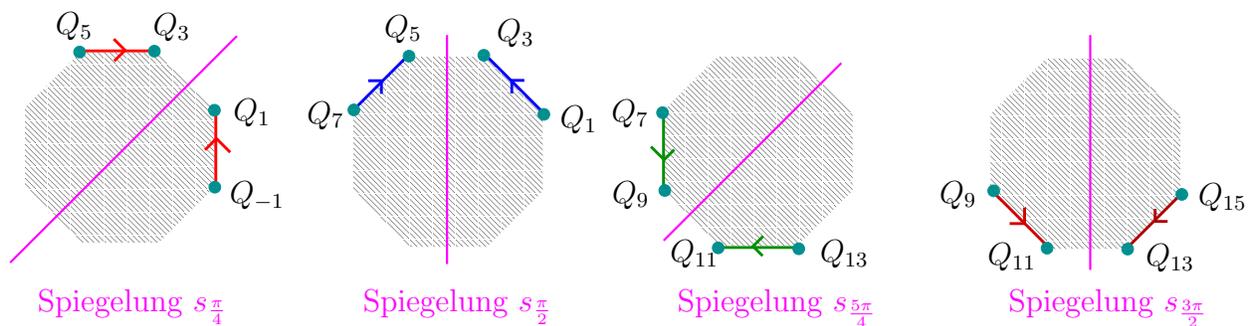
die Fläche von Geschlecht 2. Dies kann man wie folgt sehen: Wir betrachten in E_8 zuerst die rechte obere Hälfte, wir identifizieren dann jeweils zwei Kanten, und erhalten, wie wir gerade gesehen hatten einen „Torus minus eine Scheibe“. Genau das Gleiche gilt auch für die linke untere Hälfte. Wir erhalten jetzt E_8 / \sim , indem wir zwei solche „Tori minus eine Scheibe“ am Rand verkleben. Das Ergebnis ist, wie in der Abbildung oben illustriert, eine Fläche von Geschlecht 2.

Wir kehren jetzt zu präziser Mathematik zurück. Genauer gesagt, wir beschreiben jetzt E_8 und die obige Äquivalenzrelation präzise.

Definition. Wir bezeichnen mit E_8 das reguläre Oktagon in \mathbb{C} mit den acht Eckpunkten $Q_k = \exp(2\pi i k/16)$, wobei $k = 1, 3, \dots, 15$. Für Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bezeichnen wir wie üblich mit \overline{AB} die euklidische Strecke von A nach B . Zudem bezeichnen wir für $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $s_\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Spiegelung an der euklidischen Geraden $\{t \cdot \exp(i\varphi) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wir bezeichnen mit \sim die Äquivalenzrelation auf E_8 , welche erzeugt ist durch

$$P \in \overline{Q_{2k-1}Q_{2k+1}} \sim s_{2\pi i(2k+2)/16}(P) \in \overline{Q_{2k+3}Q_{2k+5}}$$

für $k = 0, 1, 4, 5$. Die obige Diskussion motiviert jetzt die Konvention, dass wir den topologischen Raum E_8 / \sim als die Fläche von Geschlecht 2 bezeichnen.

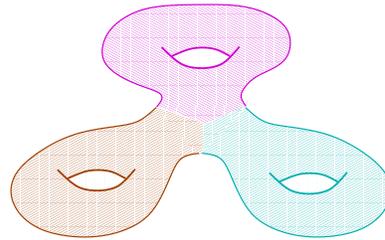
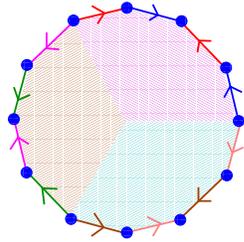


¹³⁴In der Tat: $1 \sim 4$ (wegen rot) und $4 \sim 3$ (wegen blau) und $3 \sim 2$ (wegen rot) und $2 \sim 5$ (wegen blau).

¹³⁵Ein n -Eck E im \mathbb{R}^2 heißt regulär, wenn alle Kanten die gleiche Länge besitzen und wenn alle Innenwinkel gleich sind.

Ganz analog kann man für jedes $g \geq 3$ auch die Fläche von Geschlecht g definieren. Genauer gesagt, wir starten in diesem Fall mit einem regulären $4g$ -Eck und identifizieren für $j = 1, \dots, g$ die Kante $4j + 1$ mit der Kante $4j + 3$ und die Kante $4j + 2$ mit der Kante $4j + 4$, wobei die Identifizierung jedes Mal gegeben ist durch eine Spiegelung.

Für $g = 3$ ist diese Konstruktion in der Abbildung unten skizziert.



Fläche von Geschlecht drei

16. TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEITEN

16.1. Zweitabzählbare topologische Räume. Bevor wir die topologischen Mannigfaltigkeiten einführen können, benötigen wir noch folgende etwas technische Definition.

Definition. Ein topologischer Raum heißt **zweitabzählbar**, wenn es eine abzählbare Basis für die Topologie gibt.

Lemma 16.1.

- (1) Der topologische Raum \mathbb{R}^n , mit der üblichen Topologie, ist zweitabzählbar,
- (2) Wenn X ein zweitabzählbarer topologischer Raum ist, dann ist auch jede Teilmenge, mit der Teilraumtopologie, zweitabzählbar.

Beweis.

- (1) Wir betrachten zuerst

$$\mathcal{B} := \{\text{alle Teilmengen von } \mathbb{R}^n \text{ der Form } B_\epsilon^n(p) \text{ mit } \epsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ und } p \in \mathbb{Q}^n\}.$$

Es folgt leicht aus Lemma 14.4, dass \mathcal{B} eine Basis der Topologie von \mathbb{R}^n ist.¹³⁶ Nachdem \mathcal{B} aus abzählbar vielen Mengen besteht, ist also \mathbb{R}^n zweitabzählbar.

- (2) Es sei nun X ein zweitabzählbarer topologischer Raum und A eine Teilmenge. Es sei \mathcal{B} eine abzählbare Basis der Topologie von X . Es folgt aus Lemma 14.5, dass

$$\mathcal{C} := \{\text{alle Teilmengen von } A \text{ der Form } A \cap X \text{ mit } X \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis der Topologie von A ist. Nachdem \mathcal{C} offensichtlich abzählbar ist, folgt, dass A zweitabzählbar ist. ■

Lemma 16.2. Das Produkt von zwei zweitabzählbaren topologischen Räumen ist wiederum zweitabzählbar.

Beweis. Es seien also X und Y zwei zweitabzählbare topologische Räume. Zudem sei $\{B_i\}_{i \in I}$ beziehungsweise $\{C_j\}_{j \in J}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X beziehungsweise Y . Es folgt aus Lemma 14.8, dass $\{B_i \times C_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis für $X \times Y$ ist. Das Produkt der beiden abzählbaren Mengen I und J ist wiederum abzählbar¹³⁷, also ist $\{B_i \times C_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ eine abzählbare Basis für $X \times Y$. ■

Lemma 16.3. Es sei X ein zweitabzählbarer topologischer Raum und es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Wenn die Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X/\sim$ offen ist, dann ist auch X/\sim zweitabzählbar.

Beweis. Das Lemma folgt sofort aus Lemma 15.4. ■

Beispiel. Die bisherigen beiden Lemmas besagen, dass die meisten Beispiele von topologischen Räumen, welche wir kennen, in der Tat zweitabzählbar sind. Allerdings sind nicht alle topologischen Räume zweitabzählbar. Beispielsweise ist \mathbb{R} mit der *diskreten* Topologie nicht zweitabzählbar.¹³⁸

¹³⁶In der Tat, denn sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $x \in U$. Dann gibt es per Definition ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon^n(x) \subset U$. Wir wählen nun eine rationale Zahl $\eta < \frac{\epsilon}{2}$ und wir wählen einen Punkt $y \in \mathbb{Q}^n$ mit $\|x - y\| < \eta$. Dann gilt $x \in B_\eta^n(y) \subset B_{\eta + \|x - y\|}^n(x) \subset B_\epsilon^n(x) \subset U$. Es folgt nun aus Lemma 14.4, dass \mathcal{B} eine Basis der Topologie von \mathbb{R}^n ist.

¹³⁷Warum ist das Produkt von zwei abzählbaren Mengen wiederum abzählbar?

¹³⁸Warum nicht?

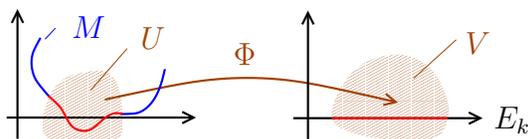
16.2. Definition von topologischen Mannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.

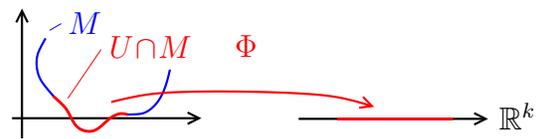
- (1) Eine n -dimensionale Karte für X ist ein Homöomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n .
- (2) Ein n -dimensionaler Atlas für den topologischen Raum X ist eine Familie von n -dimensionalen Karten $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$, so dass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
- (3) Wir sagen X ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn gilt:
 - (a) zu jedem $x \in X$ gibt es eine n -dimensionale Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $x \in U$,
 - (b) X ist Hausdorff,
 - (c) X ist zweitabzählbar.

Beispiele.

- (1) Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit der Karte $\Phi = \text{id}$.
- (2) Jede k -dimensionale Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^n mit $\partial M = \emptyset$ ist eine k -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. In der Tat, denn es gilt:
 - (a) Jede Karte $\Phi: U \rightarrow V$, im Sinne der Definition auf Seite 20, schränkt sich ein auf einen Homöomorphismus $\Phi: U \cap M \rightarrow V \cap E_k \subset E_k = \mathbb{R}^k$ ein.
 - (b,c) M ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^n , also insbesondere nach Seite 9 Hausdorff und nach Lemma 16.1 zudem zweitabzählbar,



Karte für Untermannigfaltigkeit



Karte für topologische Mannigfaltigkeit

- (2) Wenn X ein topologischer Raum ist, welcher homöomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist, dann ist X auch selber eine topologische Mannigfaltigkeit. Beispielsweise hatten wir gesehen, dass $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, die Gerade mit einem Punkt im Unendlichen, homöomorph zu S^1 ist. Also ist $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.
- (3) Es sei X die Gerade mit zwei Nullen, welche wir auf Seite 7 kennengelernt hatten. In Übungsblatt 12 werden wir sehen, dass es zu jedem $x \in X$ eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $x \in U$ gibt. Andererseits hatten wir schon gesehen, dass X nicht Hausdorff ist. Dies zeigt, dass die Hausdorff-Eigenschaft nicht aus der Existenz von Karten folgt.

Bemerkung. Die Bedingung, dass eine topologische Mannigfaltigkeit X zweitabzählbar sein soll ist sicher unerwartet. Wir geben hier eine erste Begründung, und etwas später geben wir noch eine weitere Begründung, warum man diese Einschränkung vornimmt.

Man kann sich fragen, was für eindimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten es gibt. Wir kennen natürlich S^1 und \mathbb{R} , und es erscheint auf den ersten Blick vernünftig, dass jede eindimensionale zusammenhängende nichtleere topologische Mannigfaltigkeit zu einer der beiden Beispiele homöomorph ist. Erstaunlicherweise gibt es jedoch noch einen weiteren topologischen Raum, welcher Hausdorff ist, und welcher einen Atlas besitzt, welcher jedoch nicht zu S^1 oder \mathbb{R} homöomorph ist. Dies ist die sogenannte "lange

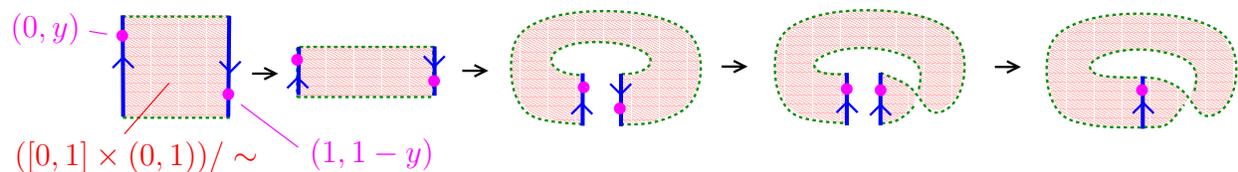
Gerade", siehe [FrT, Kapitel 16]. Dieser topologische Raum ist jedoch nicht zweitabzählbar, und damit keine topologische Mannigfaltigkeit in unserem Sinne. Um dieses exotische Beispiel auszuschließen haben wir in der Definition gefordert, dass eine topologische Mannigfaltigkeit zweitabzählbar sein soll.

Wir wenden uns jetzt den topologischen Räumen zu, welche wir in Kapitel 15.4 eingeführt hatten. Nachdem wir uns im Moment nicht mit „Randpunkten“ beschäftigen wollen, führen wir dazu folgende Variation des Möbiusbands ein.

Definition. Wir betrachten $X = [0, 1] \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, mit der Äquivalenzrelation, welche erzeugt wird von

$$(0, y) \sim (1, 1 - y) \quad \text{für alle } y \in (0, 1).$$

Wir bezeichnen X/\sim als das offene Möbiusband.



Lemma 16.4. Das offene Möbiusband ist eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Bemerkung. Mit den Methoden des Beweises von Lemma 16.4 kann man auch problemlos zeigen, dass auch die anderen topologischen Räume, welche wir in Kapitel 15.4 eingeführt hatten, nämlich der „offene“ Zylinder, der Torus und die Kleinsche Flasche ebenfalls 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten sind. Wir werden den Fall einer Fläche von Geschlecht 2 etwas später auch noch explizit betrachten und wir werden dann zeigen, dass es sich hierbei auch um eine topologische Mannigfaltigkeit handelt.

Beweis. Wir betrachten also den topologischen Raum $X = [0, 1] \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ mit der Äquivalenzrelation, welche erzeugt wird von $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ für alle $y \in (0, 1)$. Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X/\sim \\ Q &\mapsto p(Q) = [Q] \end{aligned}$$

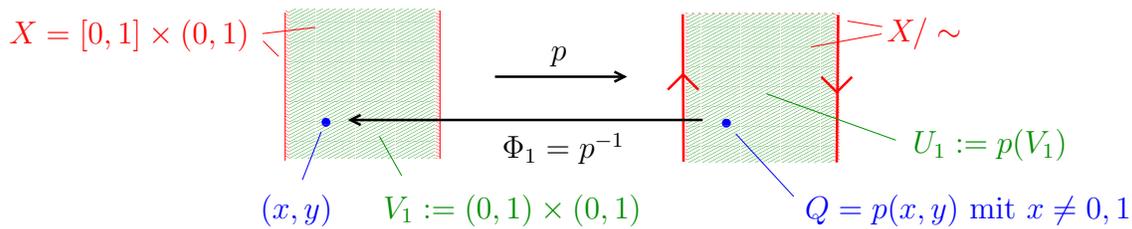
die Projektionsabbildung. In Übungsblatt 12 wird gezeigt, dass X/\sim zweitabzählbar ist. Zudem wird in Übungsblatt 12 gezeigt, dass X/\sim Hausdorff ist.¹³⁹ Wir müssen nun also nur noch zeigen, dass es zu jedem Punkt $Q \in X/\sim$ eine 2-dimensionale Karte um Q gibt. Es sei also $Q \in X/\sim$.

1. Fall Wir nehmen zuerst an, dass $Q = p(x, y)$ mit $x \neq 0, 1$. Wir setzen $V_1 = (0, 1) \times (0, 1)$. Die Einschränkung von p auf V_1 ist ein Homöomorphismus¹⁴⁰ und $U_1 := p(V_1)$ ist eine offene Umgebung von Q . Also ist $\Phi_1 := p^{-1}: U_1 \rightarrow V_1$ eine Karte um Q .
2. Fall Wir nehmen nun an, dass $Q = p(0, y)$ für ein $y \in (0, 1)$. Wir setzen

$$W := \left([0, \frac{1}{4}] \times (0, 1)\right) \cup \left(\left(\frac{3}{4}, 1\right] \times (0, 1)\right).$$

¹³⁹Nicht alle Eigenschaften einer topologischen Mannigfaltigkeit sind gleich wichtig. Die Hausdorff-Eigenschaft und die Zweitabzählbarkeit kann man in den meisten vernünftigen Fällen problemlos nachweisen. Der Knackpunkt ist normalerweise die Existenz der Karten.

¹⁴⁰Warum?



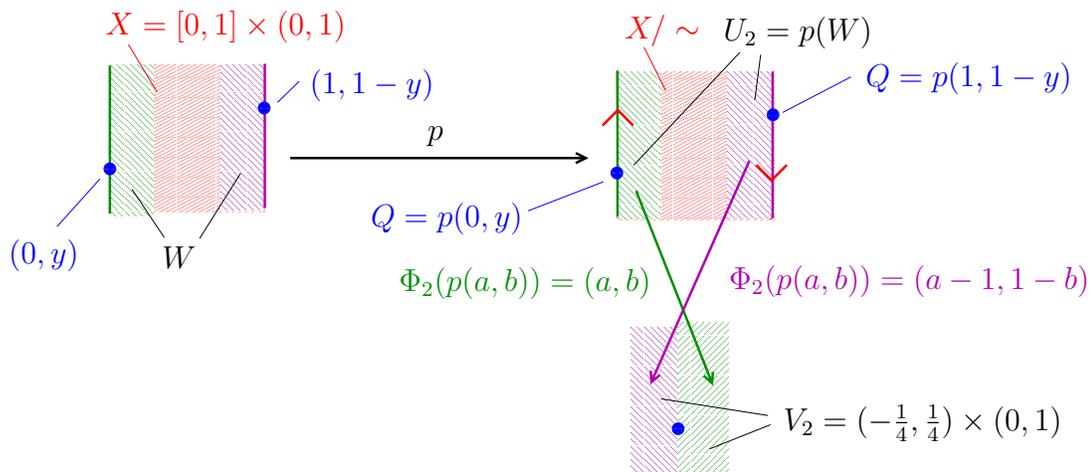
Dies ist offensichtlich eine offene Menge von X . Wir setzen nun $U_2 := p(W)$. Nachdem $p^{-1}(U_2) = p^{-1}(p(W)) = W$ offen ist, ist U_2 eine offene Umgebung von $Q = p(0, y)$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\Phi_2: U_2 = p(W) \rightarrow V_2 := \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \times (0, 1)$$

$$p(a, b) \mapsto \begin{cases} (a, b), & \text{wenn } (a, b) \in [0, \frac{1}{4}] \times (0, 1), \\ (a - 1, 1 - b), & \text{wenn } (a, b) \in (\frac{3}{4}, 1] \times (0, 1). \end{cases}$$

Diese Abbildung ist, wie man leicht zeigen kann, wohldefiniert¹⁴¹, bijektiv, stetig und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig. Also ist $\Phi_2: U_2 \rightarrow V_2$ eine Karte um $Q = p(0, y)$.

Wir haben nun also einen Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i=1,2}$ für das Möbiusband gefunden.¹⁴² ■



16.3. Gruppenoperationen. Um weitere Beispiele von topologischen Mannigfaltigkeiten zu konstruieren, führen wir den Begriff einer Gruppenoperation ein. (Dieser Begriff wurde auch schon in [Na3, Kapitel 13.1] eingeführt.)

Definition. Es sei X eine Menge und G eine Gruppe mit trivialem Element e .

(1) Eine **Gruppenoperation** (oder kurz **Operation**) von G auf X ist eine Abbildung

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

so dass gilt:

¹⁴¹D.h. wenn $p(a, b) = p(a', b')$, dann gilt auch nach der obigen Definition $\Phi_2(p(a, b)) = \Phi_2(p(a', b'))$.

¹⁴²Warum müssen wir nicht auch noch den Fall betrachten, dass $Q = p(1, y)$ für ein $y \in (0, 1)$?

$$\begin{aligned} e \cdot x &= x, & \text{für alle } x \in X, \\ g \cdot (h \cdot x) &= (gh) \cdot x, & \text{für alle } x \in X \text{ und } g, h \in G. \end{aligned} \quad 143$$

(2) Die Operation heißt **frei**, wenn $g \cdot x = x$ für ein $x \in X$ impliziert, dass $g = e$.

Beispiele.

- (1) Die orthogonale Gruppe $O(n)$ operiert auf \mathbb{R}^n durch die übliche Multiplikation. Diese Operation ist jedoch nicht frei.
- (2) Es sei V ein reeller Vektorraum und U ein Untervektorraum. Dann ist

$$\begin{aligned} U \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

eine freie Operation der Gruppe U auf der Menge V .

Lemma 16.5. Es sei X eine Menge und G eine Gruppe, welche auf X operiert. Dann ist

$$x \sim y \quad :\iff \quad \text{es existiert ein } g \in G, \text{ sodass } g \cdot x = y$$

eine Äquivalenzrelation auf X .

Beweis. Das Lemma folgt leicht aus den Definitionen. Beispielsweise folgt aus (1), dass für alle $x \in X$ gilt $x \sim x$. Die Symmetrie der Relation folgt aus folgendem Argument:

$$\begin{aligned} x \sim y &\implies \text{es gibt } g \in G \text{ mit } g \cdot x = y &\implies \text{es gibt } g \in G \text{ mit } \overbrace{g^{-1}(g \cdot x)}^{=e \cdot x = x} = g^{-1} \cdot y \\ &\implies \text{mit } k = g^{-1} \text{ gilt } k \cdot y = x &\implies y \sim x. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich zeigt man auch, dass \sim transitiv ist. ■

Notation. Es sei X eine Menge und G eine Gruppe, welche auf X operiert. Wir bezeichnen mit \sim die Äquivalenzrelation aus Lemma 16.5. Wir schreiben dann

$$X/G := X / \sim.$$

Beispiel. Es sei V wieder ein reeller Vektorraum und U ein Untervektorraum. Dann ist V/U gerade der Quotientenvektorraum, welcher in [Na2, Kapitel 5.2] eingeführt wurde.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir folgendes elementare Lemma mehrmals verwenden.

Lemma 16.6. Es sei G eine Gruppe, welche auf einer Menge X operiert. Wir bezeichnen mit $p: X \rightarrow X/G$ die Projektionsabbildung. Es seien A und B Teilmengen von X . Dann gilt

$$p(A) \cap p(B) = \emptyset \quad \iff \quad \text{für alle } g \in G \text{ ist } g \cdot A \cap B = \emptyset$$

und die äquivalente Aussage

$$p(A) \cap p(B) \neq \emptyset \quad \iff \quad \text{es gibt ein } g \in G \text{ mit } g \cdot A \cap B \neq \emptyset.$$

Beweis. Wir beweisen die zweite Aussage, die erste Aussage ist zu dieser äquivalent. Es gilt

$$\begin{aligned} p(A) \cap p(B) \neq \emptyset &\iff \text{es gibt } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } p(a) = p(b) \in X/G \\ &\iff \text{es gibt } a \in A \text{ und } b \in B \text{ und ein } g \in G \text{ mit } g \cdot a = b \\ &\iff \text{es gibt ein } g \in G \text{ mit } g \cdot A \cap B \neq \emptyset. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

¹⁴³Links wenden wir also zwei Mal die Operation an, während wir rechts erst die beiden Elemente in der Gruppe multiplizieren, und dann auf x anwenden.

16.4. Stetige Operationen.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe, welche auf X operiert. Wir sagen die Operation ist stetig, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

stetig ist.

Beispiele.

(A) Die Abbildung

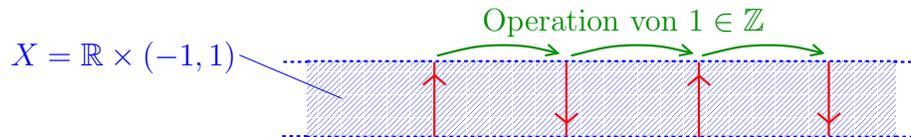
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (z, v) &\mapsto z + v \end{aligned}$$

ist eine stetige und freie Operation der Gruppe $G = \mathbb{Z}^n$ auf dem topologischen Raum $X = \mathbb{R}^n$.

(B) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times (-1, 1)) &\rightarrow \mathbb{R} \times (-1, 1) \\ (n, (x, y)) &\mapsto (x + n, (-1)^n \cdot y) \end{aligned}$$

ist eine Operation von $G = \mathbb{Z}$ auf $X = \mathbb{R} \times (-1, 1)$, welche stetig und frei ist.



(C) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\pm 1\} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\epsilon, x) &\mapsto \epsilon \cdot x \end{aligned}$$

ist eine stetige Operation von $G = \{\pm 1\}$ auf $X = \mathbb{R}$. Diese ist jedoch nicht frei, denn $(-1) \cdot 0 = 0$, aber -1 ist nicht das triviale Element der Gruppe $G = \{\pm 1\}$.

(D) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\pm 1\} \times S^n &\rightarrow S^n \\ (\epsilon, P) &\mapsto \epsilon \cdot P \end{aligned}$$

ist eine stetige und freie Operation von $G = \{\pm 1\}$ auf $X = S^n$.

(E) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, x) &\mapsto r + x, \end{aligned}$$

ist, analog zu Beispiel (A), eine stetige und freie Operation von $G = \mathbb{Q}$ auf $X = \mathbb{R}$.

Lemma 16.7. Es sei G eine Gruppe, welche stetig auf einem topologischen Raum X operiert. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Es sei G eine Gruppe, welche stetig auf dem topologischen Raum X operiert und es sei $g \in G$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g^{-1} \cdot x \end{aligned}$$

ist nach Voraussetzung ebenfalls stetig. Zudem ist diese Abbildung die Umkehrabbildung der gegebenen Abbildung, denn für alle $x \in X$ ist

$$\begin{array}{ccccccc} g^{-1} \cdot (g \cdot x) & = & (g^{-1}g) \cdot x & = & e \cdot x & = & x. \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{zweites Axiom einer Operation} & & \text{erstes Axiom einer Operation.} & & \end{array}$$

Genau das gleiche Argument zeigt auch, dass $g \cdot (g^{-1} \cdot x) = x$ für alle x . ■

Konvention. Es sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe, welche auf X stetig operiert. Wir fassen dann X/G immer als topologischen Raum bezüglich der Quotiententopologie auf, welche wir in Kapitel 15.2 eingeführt hatten. Zur Erinnerung, dies bedeutet, dass $U \subset X/G$ offen ist, wenn unter der Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X/G$ das Urbild $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Lemma 16.8. Es sei G eine Gruppe, welche stetig auf einem topologischen Raum X operiert. Wir bezeichnen mit $p: X \rightarrow X/G$ die Projektionsabbildung.

- (1) Die Projektionsabbildung $X \rightarrow X/G$ ist offen.¹⁴⁴
- (2) Es sei nun $U \subset X$ eine offene Teilmenge, so dass die Abbildung $p: U \rightarrow X/G$ injektiv ist. Dann ist die Abbildung $p: U \rightarrow p(U)$ ein Homöomorphismus.

Beweis.

- (1) Wir müssen zeigen, dass die Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X/G$ offen ist. Es sei also $U \subset X$ offen. Wir müssen zeigen, dass $p(U)$ offen in X/G ist, d.h. wir müssen zeigen, dass $p^{-1}(p(U))$ offen in X ist. Es folgt aus den Definitionen, dass¹⁴⁵

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U.$$

Nachdem G stetig operiert, ist die Multiplikationsabbildung $x \mapsto g \cdot x$ nach Lemma 16.7 ein Homöomorphismus. Also ist $g \cdot U$ offen in X . Es folgt, dass $p^{-1}(p(U))$ als Vereinigung von offenen Mengen, offen in X ist.

- (2) Die Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X/G$ ist nach Lemma 15.3 stetig, und damit ist auch die Einschränkung von p auf U stetig. Die Abbildung $p: U \rightarrow p(U)$ ist nach Voraussetzung injektiv und offensichtlich surjektiv, also eine Bijektion. Es verbleibt zu zeigen, dass $q := p^{-1}: p(U) \rightarrow U$ stetig ist. Es sei also $W \subset U$ offen. Da U offen in X ist, ist W auch offen in X . Also ist $q^{-1}(W) = (p^{-1})^{-1}(W) = p(W)$ offen nach (1). Also ist $p^{-1}: p(U) \rightarrow U$ stetig. ■

Wir betrachten nun die Quotientenräume der vorherigen Beispiele.

Beispiele.

- (A) Wir betrachten wiederum die stetige Operation von \mathbb{Z}^n auf \mathbb{R}^n . Auf Seite 158 hatten wir gesehen, dass \mathbb{R}/\mathbb{Z} homöomorph zu S^1 ist. Genau der gleiche Beweis zeigt nun, dass

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n & \rightarrow & (S^1)^n = \overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^{n\text{-Mal}} \\ [(x_1, \dots, x_n)] & \mapsto & (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n}) \end{array}$$

¹⁴⁴Zur Erinnerung, wir hatten auf Seite 159 eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen *offen* genannt, wenn das Bild jeder offenen Menge in X offen in Y ist.

¹⁴⁵Warum folgt das „aus den Definitionen“?

ein Homöomorphismus ist. Wir bezeichnen $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (S^1)^n$ als den n -dimensionalen Torus.

- (B) Es sei $X = [0, 1] \times (0, 1)$ und es sei $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ die Äquivalenzrelation von Seite 168, welche das offene Möbiusband definiert. Man kann nun relativ leicht zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} X/\sim &\rightarrow (\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z} \\ [(x, y)] &\mapsto [(x, 2y - 1)] \end{aligned}$$

wohldefiniert ist, und dass dies ein Homöomorphismus ist. Mit anderen Worten, der Quotientenraum $(\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z}$ ist homöomorph zum offenen Möbiusband. Im weiteren Verlauf bezeichnen wir oft auch $(\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z}$ als das Möbiusband.

- (C) Wir betrachten noch einmal die Operation von $G = \{\pm 1\}$ auf $X = \mathbb{R}$. Wir werden in Präsenzübungsblatt 12 zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\{\pm 1\} &\rightarrow [0, \infty) \\ [x] &\mapsto |x| \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.

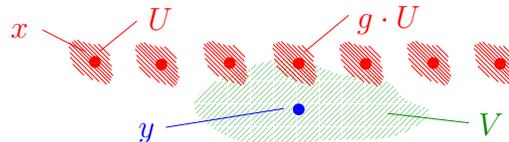
- (D) Wir bezeichnen den Quotientenraum $S^n/\{\pm 1\}$ als den n -dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$.^{146,147}
 (E) Wir betrachten die Operation

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, x) &\mapsto r + x. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist der Quotientenraum \mathbb{R}/\mathbb{Q} kein „alter Bekannter“, sondern ein eher eigenwilliger topologischer Raum. Beispielsweise werden wir in Übungsblatt 12 sehen, dass \mathbb{R}/\mathbb{Q} kein Hausdorff-Raum ist.

Beispiel (E) zeigt, dass der Quotient X/G eines Hausdorff-Raums nicht notwendigerweise Hausdorff ist. Wir wollen jetzt ein Kriterium dafür finden, dass für einen Hausdorff-Raum X auch der Quotientenraum X/G wiederum Hausdorff ist.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe, welche auf X operiert. Wir sagen, G operiert eigentlich, wenn es für alle x und y in X offene Umgebungen U von x und V von y gibt, so dass die Menge $\{g \in G \mid g \cdot U \cap V \neq \emptyset\}$ endlich ist.



Wir betrachten wiederum einige der vorherigen Beispiele.

¹⁴⁶Der reelle n -dimensionale projektive Raum wird normalerweise definiert als

$$\mathbb{R}P^n = \text{Menge aller Geraden in } \mathbb{R}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim,$$

wobei $v \sim w$, wenn $v = \lambda \cdot w$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Abbildung $S^n/\sim \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, welche gegeben ist durch $[v] \mapsto [v]$, ist jedoch offensichtlich eine Bijektion. Der projektive Raum spielt eine wichtige Rolle in der „algebraischen Geometrie“ und der „Topologie“.

¹⁴⁷In Präsenzübungsblatt 12 werden wir sehen, dass $\mathbb{R}P^n$ homöomorph ist zum topologischen Raum \overline{B}^n/\sim , wobei $z \sim -z$ für alle $z \in S^{n-1}$.

Beispiele.

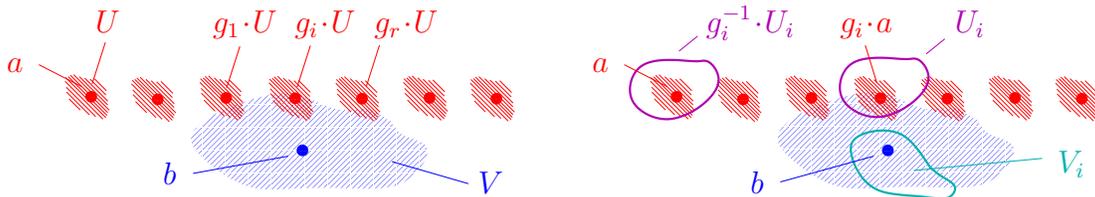
- (A) Die Operation von $G = \mathbb{Z}^n$ auf $X = \mathbb{R}^n$ ist eigentlich. In der Tat, denn es seien P und Q zwei Punkte in \mathbb{R}^n . Dann gilt für jede Wahl von beschränkten Umgebungen U und V , dass $\{z \in \mathbb{Z}^n \mid (z + U) \cap V \neq \emptyset\}$ endlich ist.¹⁴⁸
- (B) Ein ähnliches Argument wie in (A) zeigt, dass die Operation der Gruppe $G = \mathbb{Z}$ auf $X = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ eigentlich ist.
- (C&D) Jede stetige Operation einer endlichen Gruppe ist offensichtlich eigentlich. Insbesondere sind die Operationen der Gruppe $G = \{\pm 1\}$ auf $X = \mathbb{R}$ und $X = S^n$ eigentlich.
- (E) Die Operation von $G = \mathbb{Q}$ auf $X = \mathbb{R}$ ist nicht eigentlich. Diese Aussage kann man leicht ganz explizit nur mithilfe der Definitionen zeigen. Die Aussage folgt auch aus der oben bewiesenen Tatsache, dass \mathbb{R}/\mathbb{Q} nicht Hausdorff ist, zusammen mit dem nächsten Satz.

Satz 16.9. Es sei G eine Gruppe, welche auf einem Hausdorff-Raum X stetig operiert. Wenn die Operation zudem eigentlich ist, dann ist der Quotientenraum X/G ebenfalls Hausdorff.

Im Beweis von Satz 16.9 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Hilfslemma 16.10. Es sei G eine Gruppe, welche auf einem Hausdorff-Raum X stetig und eigentlich operiert. Für alle $a, b \in X$ gibt es offene Umgebungen A von a und B von b mit folgender Eigenschaft: für alle $g \in G$ mit $g \cdot a \neq b$ gilt auch $g \cdot A \cap B = \emptyset$.

Beweis von Hilfslemma 16.10. Es sei G eine Gruppe, welche auf einem Hausdorff-Raum X stetig und eigentlich operiert. Außerdem seien $a, b \in X$. Nachdem G eigentlich auf X operiert gibt es offene Umgebungen U von a und V von b , so dass $\{g \in G \mid g \cdot U \cap V \neq \emptyset\}$ eine endliche Menge ist. Wir bezeichnen die Elemente in dieser Menge mit g_1, \dots, g_r . Wir



setzen nun $I := \{i \in \{1, \dots, r\} \mid g_i \cdot a \neq b\}$. Nachdem X ein Hausdorff-Raum ist, existieren für jedes $i \in I$ eine offene Umgebung U_i von $g_i \cdot a$ und eine offene Umgebung V_i von b , so dass $U_i \cap V_i = \emptyset$. Wir setzen nun

$$A := U \cap \bigcap_{i \in I} g_i^{-1} \cdot U_i \quad \text{und} \quad B := V \cap \bigcap_{i \in I} V_i.$$

Die Mengen A und B sind als Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen¹⁴⁹ wiederum offen. Also ist A eine offene Umgebung von a und B ist eine offene Umgebung von b .

Man kann nun leicht verifizieren, dass A und B die gewünschten Eigenschaften besitzen. In der Tat, es sei $g \in G$ mit $g \cdot a \neq b$. Wenn $g \notin \{g_1, \dots, g_r\}$, dann ist schon $g \cdot U \cap V = \emptyset$,

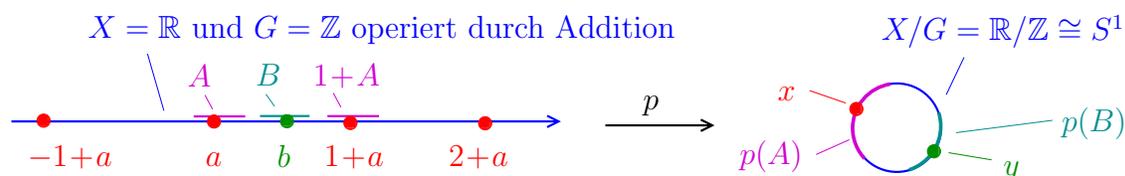
¹⁴⁸Da U und V beschränkt sind gibt es ein $d \geq 0$, so dass $\|u\| \leq d$ und $\|v\| \leq d$ für alle $u \in U$ und $v \in V$. Für $z \in \mathbb{Z}^n$ mit $z + U \cap V \neq \emptyset$ gibt es also $u \in U$ und $v \in V$ mit $z = v - u$, also folgt aus der Dreiecksungleichung, dass $\|z\| \leq 2d$. Aber es gibt nur endlich viele $z \in \mathbb{Z}^n$ mit $\|z\| \leq 2d$.

¹⁴⁹Hierbei verwenden wir, dass G stetig operiert, denn dies impliziert, dass die Mengen $h^{-1} \cdot U_i$ wiederum offen sind.

also ist $g \cdot A \cap B = \emptyset$. Wenn $g \in \{g_1, \dots, g_r\}$, dann ist $g = g_i$ für ein $i \in I$. Es folgt, dass $g_i \cdot (g_i^{-1} \cdot U_i) \cap V_i = U_i \cap V_i = \emptyset$, also ist auch $g_i \cdot A \cap B = \emptyset$. ■

Beweis von Satz 16.9. Es sei G eine Gruppe, welche auf einem Hausdorff-Raum X stetig und eigentlich operiert. Wir wollen zeigen, dass der Quotientenraum X/G ebenfalls Hausdorff ist. Wir bezeichnen mit $p: X \rightarrow X/G$ die Projektionsabbildung. Es seien x und y zwei verschiedene Punkte in X/G . Wir wählen a und b in X mit $p(a) = x$ und $p(b) = y$. Nachdem $p(a) = x \neq y = p(b)$ gilt $g \cdot a \neq b$ für alle $g \in G$. Nach Lemma 16.10 gibt es nun offene Umgebungen A von a und B von b , so dass $g \cdot A \cap B = \emptyset$ für alle $g \in G$. Es folgt aus Lemma 16.6, dass $p(A)$ und $p(B)$ disjunkt sind.

Nachdem A und B offen sind folgt zudem aus Lemma 16.8, dass $p(A)$ und $p(B)$ offene Teilmengen von X/G und insbesondere offene Umgebungen von $x = p(a)$ und $y = p(b)$ sind. Wir haben also die gewünschten disjunkten Umgebungen von x und y in X/G gefunden. ■



16.5. Gruppenoperationen auf topologischen Mannigfaltigkeiten. Es sei nun M eine topologische Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, welche auf M operiert. Der folgende Satz besagt nun, dass unter vernünftigen Voraussetzungen der Quotient M/G wiederum eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Satz 16.11. Es sei M eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und es sei G eine Gruppe, welche auf M stetig, frei und eigentlich operiert. Dann ist auch M/G eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Für den Beweis von Satz 16.11 benötigen wir folgendes Lemma.

Hilfslemma 16.12. Es sei X ein Hausdorff-Raum und es sei G eine Gruppe, welche auf X stetig, frei und eigentlich operiert. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U , so dass $g \cdot U \cap U = \emptyset$ für alle $g \neq e$.

Beweis. Es sei X also ein Hausdorff-Raum und es sei G eine Gruppe, welche auf X stetig, frei und eigentlich operiert. Zudem sei x ein Punkt in X . Nachdem G frei operiert gilt $g \cdot x \neq x$ für alle $g \neq e$. Wir wenden Lemma 16.10 auf $a = b = x$ an und erhalten offene Umgebungen A und B von x mit $g \cdot A \cap B = \emptyset$ für alle $g \neq e$. Aber dann besitzt $U := A \cap B$ die gewünschte Eigenschaft. ■

Beweis von Satz 16.11. Es sei M eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und es sei G eine Gruppe, welche auf M stetig, frei und eigentlich operiert. Wir wollen zeigen, dass M/G eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Wir müssen also folgende drei Aussagen beweisen:

- (1) M/G ist zweitabzählbar,
- (2) M/G ist Hausdorff, und
- (3) um jeden Punkt $y \in M/G$ gibt es eine n -dimensionale Karte.

Die erste Aussage folgt aus Lemmas 16.3 und 16.8, da die Operation stetig. Die zweite Aussage folgt sofort aus Satz 16.9, da die Operation stetig und eigentlich ist. Wir wenden uns

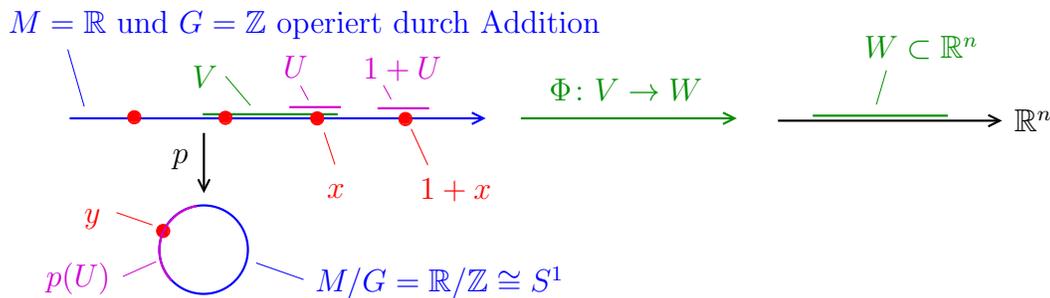
nun der dritten Aussage zu. Wir bezeichnen mit $p: M \rightarrow M/G$ die Projektionsabbildung. Es sei $y \in M/G$. Wir wählen ein $x \in M$ mit $p(x) = y$.

- (1) Nachdem M eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist, existiert eine n -dimensionale Karte $\Phi: V \rightarrow W$ um x .
- (2) Lemma 16.12 besagt, dass es eine offene Umgebung U von $x \in M$ gibt, so dass $g \cdot U \cap U \neq \emptyset$ für alle $g \neq e$. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass die Einschränkung von $p: M \rightarrow M/G$ auf U injektiv ist.¹⁵⁰

Indem wir U und V durch $U \cap V$ ersetzen können wir annehmen, dass $U = V$. Wir betrachten nun die Abbildungen

$$p(U) \xrightarrow{p^{-1}} U \xrightarrow{\Phi} W.$$

Die Abbildung Φ ist ein Homöomorphismus, und es folgt aus Lemma 16.8, dass auch die Abbildung $p: U \rightarrow p(U) \subset M/G$ ein Homöomorphismus ist. Also ist die obige Abbildung $\Phi \circ p^{-1}: p(U) \rightarrow W$ ein Homöomorphismus, und insbesondere eine n -dimensionale Karte für M/G um y . Wir haben damit bewiesen, dass M/G eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. ■



Beispiele.

- (A) Wir hatten schon gesehen, dass die Operation der $G = \mathbb{Z}^n$ auf der topologischen Mannigfaltigkeit $X = \mathbb{R}^n$ stetig, frei und eigentlich ist. Es folgt also aus Satz 16.11, dass $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Insbesondere erhalten wir einen weiteren¹⁵¹ Beweis für die Aussage, dass der 2-dimensionale Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$ eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist.
- (B) Ganz analog zu (A) sehen wir nun, dass $(\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z}$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Nachdem dieser topologische Raum homöomorph zum Möbiusband ist erhalten wir nun nach Lemma 16.4, einen weiteren Beweis für die Aussage, dass das Möbiusband eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Der Beweis in Lemma 16.4 war „ad hoc“, während sich der Beweis mithilfe von Satz 16.11, wie wir gerade auf dieser Seite sehen, auf viele weitere Beispiele verallgemeinert.
- (D) Wir hatten gesehen, dass

$$\begin{aligned} \{\pm 1\} \times S^n &\rightarrow S^n \\ (\epsilon, P) &\mapsto \epsilon \cdot P \end{aligned}$$

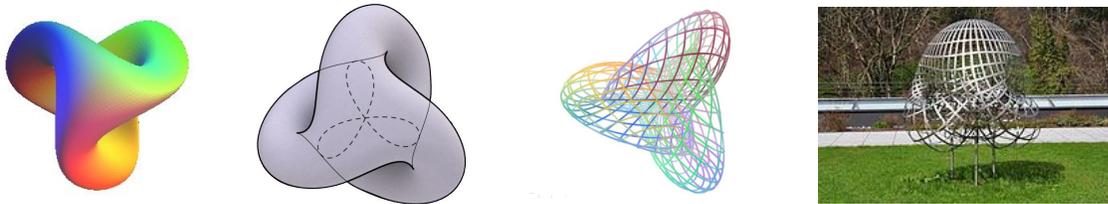
¹⁵⁰Es ist eine gute Übung sich zu überlegen, dass dies in der Tat der Fall ist.

¹⁵¹Wir hatten auf Seite 27 schon mal angedeutet, dass der 2-dimensionale Torus eine Untermannigfaltigkeit ist. Allerdings war der Beweis so umständlich, das wir gleich verzichtet hatten, diesen auszuführen.

eine stetige, freie und eigentliche Operation ist. Also ist der n -dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^n = S^n/\{\pm 1\}$ eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Diese topologische Mannigfaltigkeit spielt in der Mathematik eine sehr große Rolle.

Der Fall $n = 2$ ist besonders interessant. Der 2-dimensionale projektive Raum ist eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und stößt zu den verschiedenen Beispielen von 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten, welche wir in Kapitel 15.4 kennengelernt hatten hinzu. In algebraischer Topologie werden wir sehen, dass $\mathbb{R}P^2$ nicht homöomorph zu unseren bisherigen Beispielen von 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten ist.

Wir werden in algebraischer Topologie sehen, dass man die 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}P^2$ *nicht* als Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 darstellen kann. In der Abbildung sehen wir das Bild einer nicht injektiven Abbildung $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diese Teilmenge von \mathbb{R}^3 wird die Boysche Fläche genannt.



Boysche Fläche in Oberwolfach

17. MANNIGFALTIGKEITEN

17.1. Definition und Beispiele von Mannigfaltigkeiten. Wir erinnern zuerst an die Definition einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit M , welche wir auf Seite 167 gegeben hatten.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Eine n -dimensionale Karte für X ist ein Homöomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n .
- (2) Ein n -dimensionaler Atlas für den topologischen Raum X ist eine Familie von n -dimensionalen Karten $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$, so dass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
- (3) Wir sagen X ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn gilt:
 - (a) zu jedem $x \in X$ gibt es eine n -dimensionale Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $x \in U$,
 - (b) X ist Hausdorff,
 - (c) X ist zweitabzählbar.

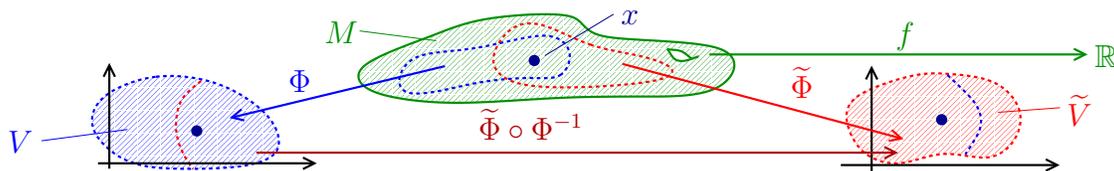
Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit. Nachdem M ein topologischer Raum ist, macht es Sinn von Stetigkeit von f zu sprechen. Können wir auch von Differenzierbarkeit von f sprechen?

Man könnte ganz naiv folgende „Definition“ einführen: wir sagen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in M$ differenzierbar, wenn für eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $x \in U$ die Abbildung $f \circ \Phi^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\Phi(x)$ differenzierbar ist. Auf den ersten Blick macht diese Definition Sinn, denn $f \circ \Phi^{-1}$ ist eine Abbildung von einer offenen Teilmenge in \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} , d.h. es macht Sinn von der Differenzierbarkeit von $f \circ \Phi^{-1}$ zu reden.

Aber was passiert, wenn wir eine andere Karte $\tilde{\Phi}: U \rightarrow \tilde{V}$ um x wählen? Wir schreiben

$$f \circ \tilde{\Phi}^{-1} = (f \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}).$$

Wir wissen, dass $\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ stetig ist, aber a priori wissen wir nicht, dass $\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ auch differenzierbar ist. Im Allgemeinen folgt aus der Differenzierbarkeit von $f \circ \Phi^{-1}$ also nicht notwendigerweise die Differenzierbarkeit von $f \circ \tilde{\Phi}^{-1}$.



Wenn wir hingegen nur Karten $\{\Phi_i\}_{i \in I}$ betrachten würden, so dass jeder die $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ glatt ist, dann hätten wir kein Problem. Diese Beobachtung gibt uns die Idee für folgende Definition.

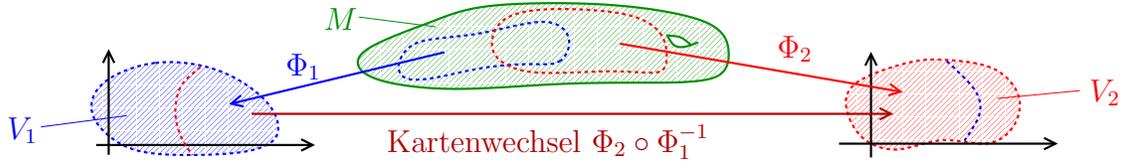
Definition.

- (1) Ein Atlas $\{\Phi: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ für eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M heißt glatt, wenn für alle $i, j \in I$ der Kartenwechsel

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: \underbrace{\Phi_i(U_i \cap U_j)}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{\Phi_j(U_i \cap U_j)}_{\subset \mathbb{R}^n}$$

glatt ist im Sinne der Definition auf Seite 18.

- (2) Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, \mathcal{A}) , wobei M eine topologische n -dimensionale Mannigfaltigkeit und \mathcal{A} ein glatter Atlas für M ist.



Beispiel.

- (1) Jede offene Teilmenge von \mathbb{R}^n , mit dem Atlas, der durch die Identitätsabbildung gegeben ist, ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.
- (2) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $\partial M = \emptyset$. Zudem sei $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas für M im Sinne der Definition auf Seite 20. Dann ist $\{\Phi_i: U_i \cap M \rightarrow V_i \cap E_k\}_{i \in I}$ ein glatter Atlas im obigen Sinne.¹⁵² Wir können also M als k -dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen.

Lemma 17.1. Das offene Möbiusband besitzt einen glatten Atlas, es kann also als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit aufgefasst werden.

Bemerkung. Man kann mit ähnlichen Methoden wie im Beweis von Lemma 17.1 nachweisen, dass wir die Kleinsche Flasche als eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen können.

Beweis. Wir hatten schon in Lemma 16.4 gezeigt, dass das offene Möbiusband eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Es genügt nun zu zeigen, dass der Atlas aus dem Beweis von Lemma 16.4 glatt ist. Wir betrachten also $X = [0, 1] \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ mit der Äquivalenzrelation, welche erzeugt ist durch $(0, y) \sim (0, 1 - y)$ für alle $y \in (0, 1)$.

Wir bezeichnen mit $p: X \rightarrow X/\sim$ die Projektionsabbildung. Im Beweis von Lemma 16.4 hatten wir gesehen, dass¹⁵³

$$\begin{array}{ccc} \Phi_1: \overbrace{p\left(\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \times (0, 1)\right)}{=:U_1} & \rightarrow & \overbrace{\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \times (0, 1)}{=:V_1} \\ p(a, b) & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \Phi_2: \overbrace{p\left(\left([0, \frac{3}{8}\right] \cup \left(\frac{5}{8}, 1\right]\right) \times (0, 1)\right)}{=:U_2} & \rightarrow & \overbrace{\left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \times (0, 1)}{=:V_2} \\ p(a, b) & \mapsto & \begin{cases} (a, b), & \text{wenn } (a, b) \in [0, \frac{3}{8}] \times (0, 1), \\ (a - 1, 1 - b), & \text{wenn } (a, b) \in (\frac{5}{8}, 1] \times (0, 1). \end{cases} \end{array}$$

¹⁵²Dies sieht man wie folgt. Es sei $\Phi_i: U_i \rightarrow V_i$ eine der k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M . Dies ist also ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n . Insbesondere ist auch jeder Kartenwechsel $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: \Phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_j(U_i \cap U_j)$ ein Diffeomorphismus.

Für eine Karte $\Phi_i: U_i \rightarrow V_i$ der k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M bezeichnen wir im Folgenden mit $\tilde{\Phi}_i: \tilde{U}_i := U_i \cap M \rightarrow \tilde{V}_i := V_i \cap E_k$ die Einschränkung von Φ_i auf $U_i \cap M$. Wir müssen zeigen, dass die entsprechenden Kartenwechsel alle glatt sind. Der Kartenwechsel $\tilde{\Phi}_j \circ \tilde{\Phi}_i^{-1}: \tilde{\Phi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) \rightarrow \tilde{\Phi}_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ ist die Einschränkung des Diffeomorphismus $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: \Phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_j(U_i \cap U_j)$ auf die Teilmenge $\Phi_i(U_i \cap U_j) \cap E_k = \tilde{\Phi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) \subset E_k = \mathbb{R}^k$. Dies ist also wiederum ein Diffeomorphismus.

¹⁵³Wir haben hierbei U_1 und U_2 etwas abgeändert, damit es leichter ist $U_1 \cap U_2$ zu skizzieren, mathematisch macht das keinen Unterschied.

ein Atlas für X/\sim ist. Wir wollen nun zeigen, dass dieser Atlas sogar glatt ist.

Wir zeigen zuerst, dass der Kartenwechsel

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}: \Phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Phi_2(U_1 \cap U_2)$$

glatt ist. In unserem Fall ist dies gerade die Abbildung

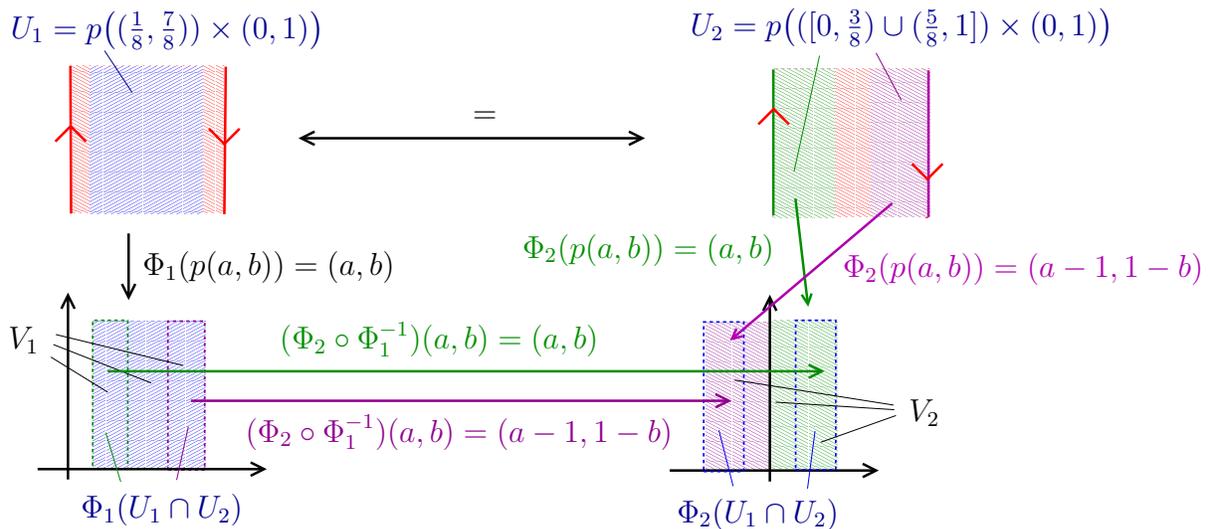
$$\begin{aligned} ((\frac{1}{8}, \frac{3}{8}) \times (0, 1)) \cup ((\frac{5}{8}, \frac{7}{8}) \times (0, 1)) &\rightarrow ((-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}) \times (0, 1)) \cup ((\frac{1}{8}, \frac{3}{8}) \times (0, 1)) \\ (a, b) &\mapsto \begin{cases} (a, b), & \text{wenn } (a, b) \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}) \times (0, 1), \\ (a - 1, 1 - b), & \text{wenn } (a, b) \in (\frac{5}{8}, \frac{7}{8}) \times (0, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Aber diese Abbildung ist in der Tat glatt, denn die Abbildung ist offensichtlich auf den beiden Komponenten $(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}) \times (0, 1)$ und $(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}) \times (0, 1)$ des Definitionsbereichs glatt.

Genau das gleiche Argument zeigt, dass auch der Kartenwechsel

$$\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}: \Phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Phi_1(U_1 \cap U_2)$$

glatt ist. Wir haben also gezeigt, dass $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i=1,2}$ ein glatter Atlas für das Möbiusband ist. ■



Definition. Es sei (M, \mathcal{A}) eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und es sei (N, \mathcal{B}) eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung.

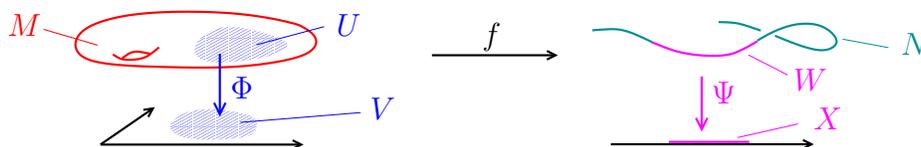
- (1) Wir sagen f ist glatt, wenn für alle Karten $\Phi: U \rightarrow V$ aus \mathcal{A} und $\Psi: W \rightarrow X$ aus \mathcal{B} die Abbildung

$$\underbrace{\Phi(f^{-1}(W) \cap U)}_{\text{offene Teilmenge von } \mathbb{R}^m} \xrightarrow{\Phi^{-1}} f^{-1}(W) \cap U \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\Psi} X.$$

\uparrow
Teilmenge von \mathbb{R}^n

glatt ist im Sinn der Definition auf Seite 18.

- (2) Wir sagen $f: M \rightarrow N$ ist ein Diffeomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist und wenn zudem sowohl f als auch f^{-1} glatte Abbildungen sind.



Beispiel.

- (1) Für Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n 's erhalten wir den gleichen Begriff von Glattheit wie auf Seite 28.
- (2) Man kann leicht nachweisen, dass die Verknüpfung von glatten Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten wieder glatt ist.

Definition. Es sei (M, \mathcal{A}) eine Mannigfaltigkeit. Eine glatte Operation einer Gruppe G auf M ist eine Operation $G \times M \rightarrow M$, so dass für alle $g \in G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned} \quad \text{glatt ist.}$$

Beispiel. Die Gruppe $G = \mathbb{Z}^n$ operiert durch Addition glatt auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^n . Ganz analog sind auch alle weiteren Beispiele, welche wir auf Seite 171 eingeführt hatten, Beispiele von glatten Operationen auf Mannigfaltigkeiten.

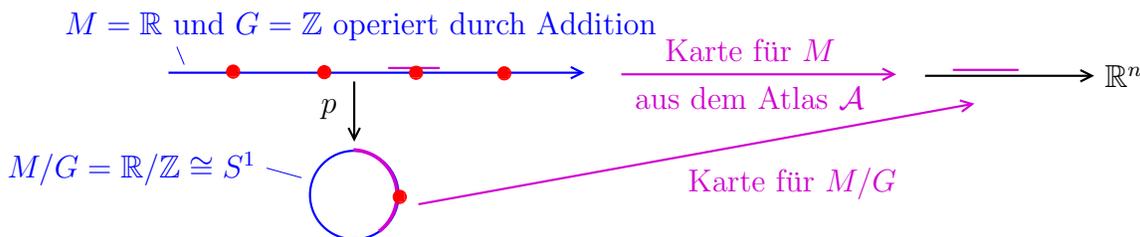
Definition. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Wir sagen f ist ein lokaler Diffeomorphismus, wenn es für alle $x \in M$ eine offene Umgebung U von $x \in M$ und eine offene Umgebung V von $f(x) \in N$ gibt, so dass $f: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.

Satz 17.2. Es sei (M, \mathcal{A}) eine Mannigfaltigkeit und es sei G eine Gruppe, welche auf M frei, eigentlich und glatt operiert. Es gibt einen glatten Atlas auf M/G , so dass die Projektionsabbildung $p: M \rightarrow M/G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Beweis. Es sei $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ der Atlas für M/G , welchen wir wie im Beweis von Satz 16.11, ausgehend von den Karten in \mathcal{A} , konstruieren. Man sieht nun leicht, dass für alle $i, j \in I$ der entsprechende Kartenwechsel $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: \Phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_j(U_i \cap U_j)$ gegeben ist durch Verknüpfungen und Einschränkungen von folgenden Abbildungen:

- (1) Karten aus dem Atlas \mathcal{A} und deren Umkehrabbildungen,
- (2) die Operation von einem $g \in G$ auf offenen Teilmengen von M .

Da G glatt auf M operiert sehen wir, dass alle diese Abbildungen glatt sind. Die Verknüpfung von glatten Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten ist aber wiederum eine glatte Abbildung. Dies zeigt, dass wir einen glatten Atlas auf M/G gefunden haben.



Es sei nun $x \in M$. Nachdem G stetig, frei und eigentlich auf M operiert gibt es nach Lemma 16.12 eine offene Umgebung U , so dass $gU \cap U \neq \emptyset$ für alle $g \neq e$. Es folgt aus Lemma 16.8, dass die Einschränkung $p: U \rightarrow p(U)$ ein Homöomorphismus ist. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass $p: U \rightarrow p(U)$ sogar ein Diffeomorphismus ist. ■

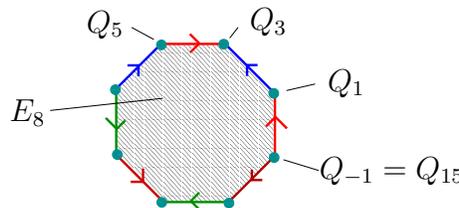
Beispiele. Wir kehren ein letztes Mal zu den Beispielen von Seite 171 zurück.

- (A) Die Gruppe $G = \mathbb{Z}^n$ operiert frei, eigentlich und glatt auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^n$. Also besagt Satz 17.2, dass wir den n -dimensionalen Torus $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ als n -dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen können.
- (B) Die Gruppe $G = \mathbb{Z}$ operiert frei, eigentlich und glatt auf der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R} \times (-1, 1)$. Dies gibt also nach Lemma 17.1 einen weiteren Beweis dafür, dass wir das offene Möbiusband als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen können.
- (D) Die Gruppe $G = \{\pm 1\}$ operiert frei, eigentlich und glatt auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M = S^n$, also können wir den projektiven Raum $S^n/\{\pm 1\} = \mathbb{R}P^n$ als n -dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen.

17.2. Die Fläche von Geschlecht 2 als Mannigfaltigkeit.

Satz 17.3. Die Fläche von Geschlecht g ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beweis.¹⁵⁴ Wir beweisen den Satz für den Fall $g = 2$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Wir betrachten also wieder das reguläre Oktagon $E_8 \subset \mathbb{C}$ mit den Eckpunkten $Q_k = \exp(2\pi ik/16)$, $k = 1, 3, \dots, 15$ und der Äquivalenzrelation \sim , welche wir in Kapitel 15.5 eingeführt hatten. Man kann leicht nachweisen, dass E_8/\sim zweitabzählbar und

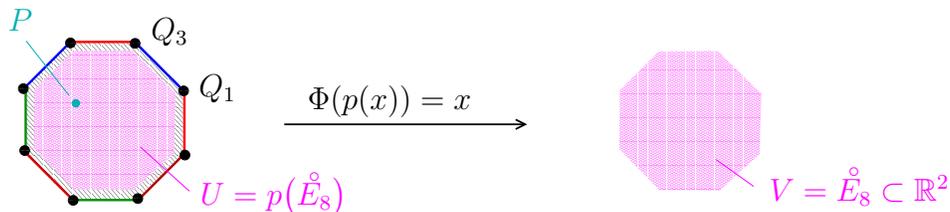


Hausdorff ist. Wir überlassen die Ausführung des Arguments als freiwillige Übungsaufgabe.

Wir zeigen als nächstes, dass E_8/\sim eine topologische 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Genauer gesagt, wir bestimmen explizit einen Atlas für E_8/\sim . Wir werden danach zeigen, dass es sich bei diesem Atlas um einen glatten Atlas handelt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: U := p(\overset{\circ}{E}_8) &\rightarrow V = \overset{\circ}{E}_8 \subset \mathbb{R}^2 \\ p(x) &\mapsto x \end{aligned}$$

ist offensichtlich eine Karte.



Für jede Kante des Oktagon wollen wir nun eine Karte finden, welche die Kante, bis auf die Eckpunkte, enthält. Aus Symmetriegründen genügt es die Kante $\overline{Q_{-1}Q_1}$ zu betrachten. Es sei P der Mittelpunkt der Kante. In dem Beweis verwenden wir folgende Notation: wir bezeichnen wir mit $s_{\pi/4}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Spiegelung an der Gerade $\{r \cdot \exp(i\frac{\pi}{4}) \mid r \in \mathbb{R}\}$

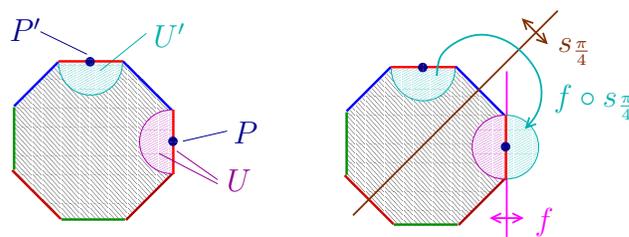
¹⁵⁴Der Beweis von Satz 17.3 ist eine etwas aufwändigere Variante des Beweises von Lemma 16.4 und Lemma 17.1.

und wir bezeichnen mit $P' = s_{\frac{\pi}{4}}(P)$ den Punkt, welcher mit P identifiziert wird. Es sei nun $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot |Q_1 - Q_{-1}|$ die halbe Kantenlänge. Wir schreiben $U := B_\epsilon^2(P) \cap E_8$ und $U' := B_\epsilon^2(P') \cap E_8$. Dann ist $p(U \cup U')$ eine offene Umgebung um P . Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden, welche durch die Kante $\overline{Q_{-1}Q_1}$ definiert wird. Es folgt nun leicht aus den Definitionen, dass die Abbildung

$$p(U \cup U') \rightarrow B_\epsilon^2(P) \subset \mathbb{R}^2$$

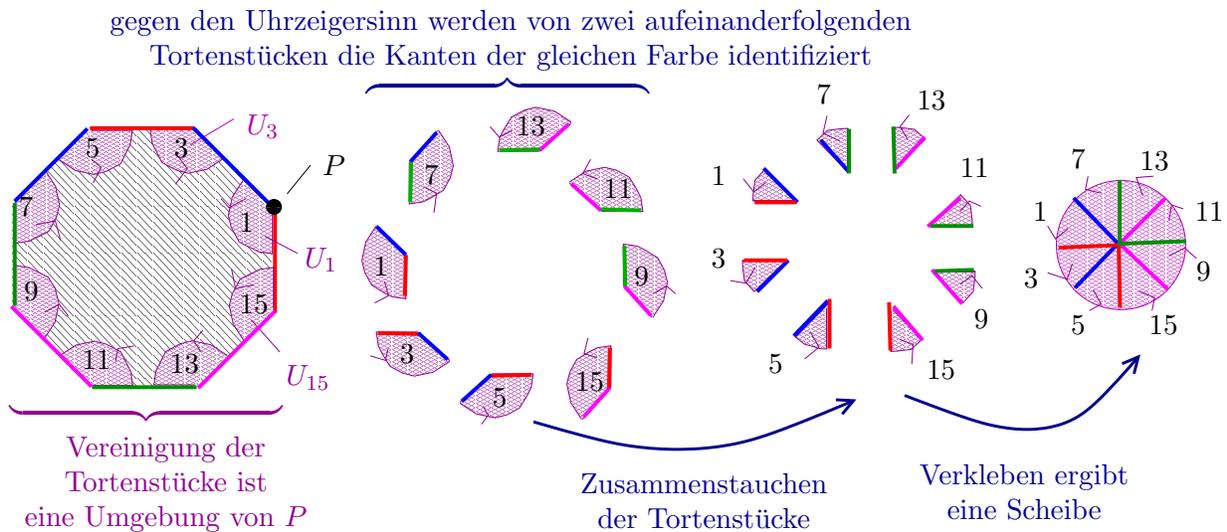
$$p(x) \mapsto \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in U \\ f(s_{\frac{\pi}{4}}(x)), & \text{wenn } x \in U' \end{cases}$$

wohldefiniert ist, und dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist.



Wir wollen nun noch eine Karte um $p(Q_1) = p(Q_3) = \dots = p(Q_{15})$ finden. Wir wählen ein $\eta > 0$, so dass sich die η -Scheiben um Q_1, \dots, Q_{15} nicht schneiden. Für $k = 1, 3, \dots, 15$ betrachten wir $U_k := B_\eta^2(Q_k) \cap E_8$. Die Mengen U_1, U_3, \dots, U_{15} sind disjunkt und man kann sich leicht davon überzeugen, dass $p(U_1) \cup p(U_3) \cup \dots \cup p(U_{15})$ eine offene Umgebung von $p(Q_1) = p(Q_3) = \dots = p(Q_{15})$ ist.

Bevor wir die Karte mathematisch sauber aufschreiben, wollen wir uns die Lage veranschaulichen. In der Abbildung sehen wir links die Mengen U_1, \dots, U_{15} . Wenn wir diese wie



im zweiten Bild anordnen, dann sehen wir die „Tortenstücke“ mit den Öffnungswinkeln $\frac{3\pi}{4}$ mit den jeweiligen Identifikationen am Rand. Die Abbildung vom zweiten Bild zum dritten Bild ist dadurch gegeben, dass wir jedes „Tortenstück“ auf ein Drittel des Öffnungswinkels zusammenstauchen. Diese acht Tortenstücke, welche jeweils den Öffnungswinkel $\frac{\pi}{4}$ besitzen,

fügen sich dann zusammen zu einer Scheibe in \mathbb{R}^2 .

Wir führen nun die gerade beschriebene Idee sauber aus. Wir betrachten dazu die Abbildung¹⁵⁵

$$\begin{aligned} \Phi: p(U_1) \cup \cdots \cup p(U_{15}) &\rightarrow B_\eta^2(0) \\ p(\underbrace{Q_k + r \cdot \exp(i\alpha)}_{\in U_k}) &\mapsto r \cdot \exp(i(\frac{1}{3}(\alpha - \beta(k)) + \gamma(k))), \end{aligned}$$

wobei $\beta(k)$ und $\gamma(k)$ durch folgende Tabelle gegeben sind:

k	1	3	5	7	9	11	13	15
$\beta(k)$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\gamma(k)$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$

Man kann nun leicht überprüfen, dass die Abbildung Φ wohldefiniert ist und das dies in der Tat ein Homöomorphismus ist.

Wir haben bisher nur bewiesen, dass die Fläche von Geschlecht 2 eine topologische 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Wir müssen nun noch zeigen, dass die obigen Karten einen glatten Atlas bilden. Dies ist in der Tat der Fall. Der Kartenwechsel zwischen den Karten von den ersten beiden Typen ist entweder die Identität oder eine Verknüpfung von zwei Spiegelungen. In beiden Fällen ist der Kartenwechsel glatt. Wenn wir die Karte um den „Eckpunkt“ mit den anderen Karten vergleichen, dann sieht man, dass die Kartenwechsel im Überlappungsgebiet Verknüpfungen von folgenden Abbildungen sind:

- (1) Spiegelungen,
- (2) Translationen,
- (3) der Abbildung

$$\begin{aligned} \{r \cdot \exp(i\alpha) \mid r \in (0, \eta), \alpha \in (0, \frac{\pi}{4})\} &\rightarrow \{r \cdot \exp(i\alpha) \mid r \in (0, \eta), \alpha \in (0, \frac{3\pi}{4})\} \\ z = r \cdot \exp(i\varphi) &\mapsto r \cdot \exp(3i\varphi) = \frac{z^3}{|z|^2}, \end{aligned}$$

- (4) und der Umkehrfunktion aus (3).

Mithilfe des Satzes 2.3 über die Umkehrabbildung kann man zeigen, dass die Abbildung in (3) ein Diffeomorphismus ist. Wir sehen also, dass alle vier Typen von Abbildungen glatt sind, also ist der Kartenwechsel wie gewünscht glatt. ■

17.3. Untermannigfaltigkeiten und Produkte von Mannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei (M, \mathcal{A}) eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir sagen $N \subset M$ ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M , wenn es zu jedem $P \in N$ eine Karte

¹⁵⁵Für jedes Tortenstück besitzt die Randkurve eine Orientierung. Es macht daher Sinn von der Ausgangskante zu reden. Die Abbildung verfährt nun also wie folgt mit Tortenstück k :

- (1) das Tortenstück wird in den Ursprung verschoben,
- (2) es wird gegen den Uhrzeigersinn um $\beta(k)$ gedreht, so dass die Ausgangskante auf der x -Achse liegt,
- (3) dann wird das Tortenstück auf ein Drittel des Öffnungswinkels gestaucht,
- (4) dann wird das Tortenstück um den Winkel $\gamma(k)$ im Uhrzeigersinn gedreht.

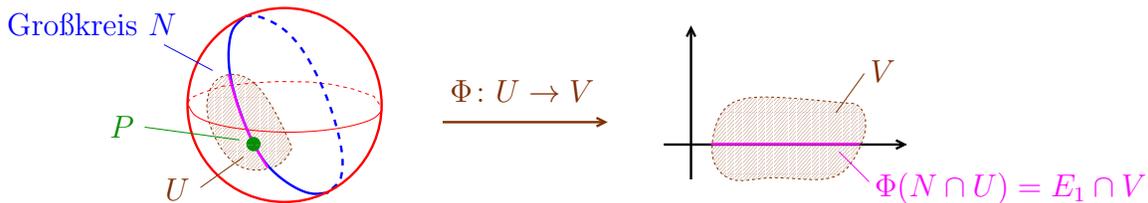
$\Phi: U \rightarrow V$ in \mathcal{A} um P gibt, so dass

$$\Phi(U \cap N) = V \cap E_k.$$

Die Einschränkungen der Karten in \mathcal{A} auf N bilden, wie wir schon in Fußnote 152 gesehen hatten, einen glatten Atlas für N . Wir können deshalb N wiederum als Mannigfaltigkeit auffassen.

Beispiele.

- (1) Es sei $M = \mathbb{R}^n$ und es sei \mathcal{A} der glatte Atlas, welcher gegeben ist durch alle Diffeomorphismen $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n . Dann ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^n eine Untermannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ genau dann, wenn sie eine Untermannigfaltigkeit im Sinne der Definition von Kapitel 2.2 ist.
- (2) Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist eine Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0. Insbesondere auch wieder eine Mannigfaltigkeit.
- (3) Jeder Großkreis auf S^2 , d.h. jeder Schnitt von S^2 mit einer Ebene durch den Ursprung, ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von S^2 .



Lemma 17.4. Es sei (M, \mathcal{A}) eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und es sei (N, \mathcal{B}) eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Es sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte aus \mathcal{A} und es sei $\Psi: W \rightarrow X$ eine Karte aus \mathcal{B} . Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi \times \Psi: U \times W &\rightarrow V \times X \\ (p, q) &\mapsto (\Phi(p), \Psi(q)) \end{aligned}$$

eine $(m+n)$ -dimensionale Karte für $M \times N$ und alle solche Karten $\Phi \times \Psi$ bilden einen glatten Atlas für $M \times N$.

- (2) Das Produkt $M \times N$ ist eine $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beispiel. Es folgt beispielsweise aus Lemma 17.4, dass das Produkt $S^k \times S^l$ von zwei Sphären S^k und S^l eine $(k+l)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Beweis. Die erste Aussage kann man problemlos überprüfen. Die zweite Aussage folgt aus der ersten Aussage zusammen mit Lemmas 14.9 und 16.2. ■

Bemerkung. Wir haben jetzt viele Beispiele von Mannigfaltigkeiten kennengelernt. Insbesondere können wir den Torus auf verschiedene Weisen als Mannigfaltigkeit auffassen:

- (1) Auf Seite 27 hatten wir den Torus als „explizite“ Teilmenge von \mathbb{R}^3 hingeschrieben:

$$T^2 := \{((3 + \sin \theta) \cdot \cos \varphi, (3 + \sin \theta) \cdot \sin \varphi, \cos \theta) \mid \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Wir hatten mithilfe des Satzes 2.7 vom regulären Wert gezeigt, dass T^2 eine Untermannigfaltigkeit ist, also nach der obigen Diskussion auch eine Mannigfaltigkeit.

- (2) Wir können den Torus als Quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ auffassen. Dies ist nach Satz 17.2 ebenfalls eine Mannigfaltigkeit.

(3) Wir können den Torus als Produkt $S^1 \times S^1$ von zwei Mannigfaltigkeiten auffassen.

Nach Lemma 17.4 ist dies eine Mannigfaltigkeit.

Mit einer elementaren, aber etwas langwierigen, Rechnung kann man nun zeigen, dass die drei Mannigfaltigkeiten T , $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und $S^1 \times S^1$ diffeomorph sind.

18. DER TANGENTIALRAUM VON MANNIGFALTIGKEITEN

Wir wollen, als gute Mathematiker, nun natürlich die Begriffe „Orientierbarkeit“, „ k -Formen“ und „Integral einer k -Form“ von Untermannigfaltigkeiten auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Dazu benötigen wir den Begriff des Tangentialraums einer Mannigfaltigkeit. Wir führen diesen in diesem Kapitel ein. Die Definition ist, wenn man diese das erste Mal sieht, gewöhnungsbedürftig. Zum Glück setzt sich normalerweise auch früher oder später die Gewöhnung ein.

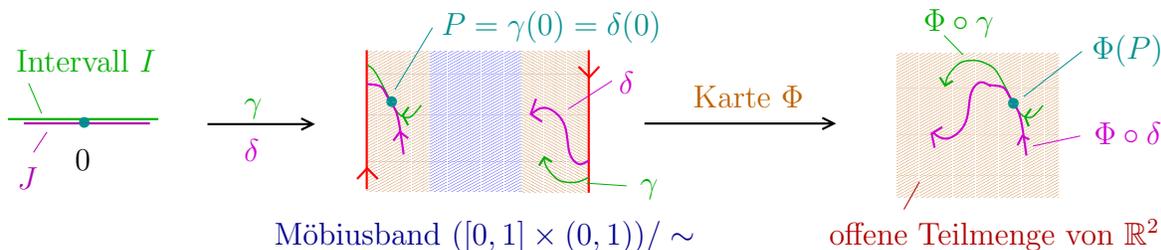
18.1. Der Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit.

Definition. Es sei (M, \mathcal{A}) eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte. Wir sagen Φ ist kompatibel mit \mathcal{A} , wenn $\Phi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus zwischen den Mannigfaltigkeiten U und V ist.¹⁵⁶

Beispiel. Es sei (M, \mathcal{A}) eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es folgt leicht aus den Definition, dass die Einschränkung einer Karte aus \mathcal{A} auf eine offene Teilmenge eine Karte ist, welche kompatibel mit \mathcal{A} ist.

Definition. Es sei (M, \mathcal{A}) eine Mannigfaltigkeit und P ein Punkt auf M .

- (1) Eine Kurve in M durch P ist eine glatte Abbildung $\gamma: I \rightarrow M$ auf einem offenen Intervall I mit $0 \in I$ und mit $\gamma(0) = P$.
- (2) Für eine Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ durch P und eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um P schreiben wir $(\Phi \circ \gamma)'(0) := (\Phi \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U)})'(0)$.
- (3) Wir sagen zwei Kurven γ und δ durch P sind äquivalent, wenn für jede Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um P , welche kompatibel mit \mathcal{A} ist, gilt: $(\Phi \circ \gamma)'(0) = (\Phi \circ \delta)'(0)$.
- (4) Die Menge aller Äquivalenzklassen von Kurven durch P wird mit $\tilde{T}_P M$ bezeichnet. Wir nennen $\tilde{T}_P M$ den Tangentialraum am Punkt P .



Lemma 18.1. Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es seien γ und δ zwei Kurven durch einen Punkt P auf M . Dann gilt

$$\gamma \text{ und } \delta \text{ sind äquivalent} \iff \begin{array}{l} \text{es gibt eine Karte } \Phi: U \rightarrow V \text{ um } P, \\ \text{welche kompatibel mit } \mathcal{A} \text{ ist, so} \\ \text{dass } (\Phi \circ \gamma)'(0) = (\Phi \circ \delta)'(0). \end{array}$$

¹⁵⁶Zur Erinnerung, Φ ist also ein Homöomorphismus zwischen einer offenen Teilmenge $U \subset M$ und einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$. Da $U \subset M$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen von Mannigfaltigkeiten sind, können wir diese nach der Diskussion auf Seite 185, auch wieder als Mannigfaltigkeiten auffassen.

¹⁵⁶Die Abbildungen $\Phi \circ \gamma$ und $\Phi \circ \delta$ sind glatte Abbildungen von einer offenen Teilmenge von \mathbb{R} , welches 0 enthält, zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n . Es macht also Sinn, die Ableitungen zu bestimmen.

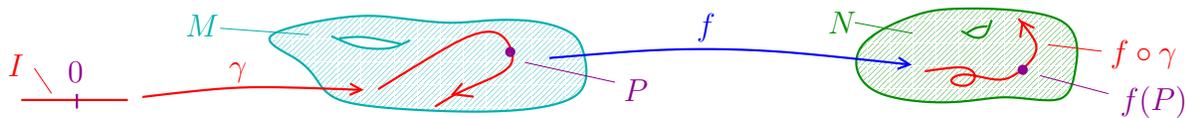
Beweis. Wir müssen natürlich nur die „ \Rightarrow “-Richtung beweisen. Es seien also γ und δ äquivalente Kurven durch P auf M . Wir nehmen an, es gibt eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um P , welche kompatibel mit \mathcal{A} ist, so dass $(\Phi \circ \gamma)'(0) = (\Phi \circ \delta)'(0)$. Wir müssen zeigen, dass γ und δ äquivalent sind. Es sei also $\Psi: W \rightarrow X$ eine beliebige Karte um P , welche kompatibel mit \mathcal{A} ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
 (\Psi \circ \gamma)'(0) &= ((\Psi \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \gamma))'(0) = \underset{\uparrow}{D_{\Phi(P)}(\Psi \circ \Phi^{-1})}((\Phi \circ \gamma)'(0)) \\
 &\text{folgt aus der Kettenregel 2.1, diese können wir anwenden, denn } \Phi \text{ und } \Psi \text{ sind Diffeomorphismen,} \\
 &\text{also ist der Kartenwechsel } \Psi \circ \Phi^{-1} \text{ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von } \mathbb{R}^n \\
 &= \underset{\uparrow}{D_{\Phi(P)}(\Psi \circ \Phi^{-1})}((\Phi \circ \delta)'(0)) = \underset{\uparrow}{(\Psi \circ \delta)'(0)}. \\
 &\text{nach Voraussetzung} \qquad \qquad \qquad \text{gleiche Argument rückwärts} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Definition. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und es sei $P \in M$. Ganz analog zur Diskussion auf Seite 82 betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}
 f_*: \tilde{T}_P M &\rightarrow \tilde{T}_{f(P)} N \\
 [\gamma: I \rightarrow M] &\rightarrow [f \circ \gamma: I \rightarrow N].
 \end{aligned}$$

Fast das gleiche Argument wie im Beweis von Lemma 18.1 zeigt, dass diese Abbildung nicht von der Wahl der Kurve γ abhängt.



Satz 18.2.

(1) Für eine Mannigfaltigkeit M und $P \in M$ gilt

$$id_* = id: \tilde{T}_P M \rightarrow \tilde{T}_P M.$$

(2) Es seien $f: L \rightarrow M$ und $g: M \rightarrow N$ glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten und es sei $P \in L$. Dann ist

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: \tilde{T}_P L \rightarrow \tilde{T}_{g(f(P))} N.$$

Beweis. Der Beweis ist elementar und wort-wörtlich der Gleiche wie von Satz 9.2. ■

Beispiel. Wenn $\Phi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten ist, dann folgt leicht aus Satz 18.2, dass für alle $P \in M$ die induzierte Abbildung $\Phi_*: \tilde{T}_P U \rightarrow \tilde{T}_{\Phi(P)} V$ eine Bijektion ist.

Lemma 18.3. Es sei (M, \mathcal{A}) eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit und es sei $Z \subset M$ eine offene Teilmenge. Es folgt aus der Diskussion auf Seite 185, dass wir Z auch als glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen können. Wir bezeichnen mit $i: Z \rightarrow M$ die Inklusionssabbildung. Für jedes $P \in Z$ ist die Abbildung

$$i_*: \tilde{T}_P Z \rightarrow \tilde{T}_P M$$

eine Bijektion.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $i_*: \tilde{T}_P Z \rightarrow \tilde{T}_P M$ injektiv ist. Es seien also α, β Kurven in Z durch P mit $i_*([\alpha]) = i_*([\beta])$. Die Kurven α und β sind also äquivalente Kurven in

M . Da Karten für Z auch Karten für M sind, sehen wir, dass α und β auch als Kurven in Z äquivalent sind. Also gilt, wie erhofft, $[\alpha] = [\beta] \in \tilde{T}_P Z$.

Wir zeigen nun, dass $i_*: \tilde{T}_P Z \rightarrow \tilde{T}_P M$ surjektiv ist. Es sei also $\gamma: I \rightarrow M$ eine Kurve durch P . Da Z eine offene Umgebung von P ist, ist $\gamma^{-1}(Z)$ eine offene Umgebung von $0 \in I$. Also existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $(-\epsilon, \epsilon) \subset \gamma^{-1}(Z)$. Die Kurve $\gamma|_{(-\epsilon, \epsilon)}$ ist nun eine Kurve in Z und es folgt leicht aus den Definitionen, dass $i_*([\gamma|_{(-\epsilon, \epsilon)}]) = [\gamma] \in \tilde{T}_P M$. ■



Es sei nun M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $P \in M$. Wir haben nun zwei verschiedene Definitionen eines Tangentialraum. Zum einen haben wir den klassischen Begriff $T_P M$, welchen wir auf Seite 64 eingeführt hatten, zum anderen haben wir den abstrakteren Begriff $\tilde{T}_P M$, welchen wir gerade erst eingeführt hatten. Um einen Zusammenhang herzustellen führen wir folgende Abbildung ein.

Notation. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $P \in M$. Mithilfe der Kettenregel 2.1 kann man leicht zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Theta_P: \tilde{T}_P M &\rightarrow T_P M \\ [\gamma: I \rightarrow M] &\mapsto \gamma'(0) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist.¹⁵⁷

Lemma 18.4.

- (1) Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^m bzw. \mathbb{R}^n . Für jedes $P \in M$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}_P M & \xrightarrow[\text{definiert auf Seite 188}]{f_*} & \tilde{T}_{f(P)} N \\ \downarrow \Theta_P & & \downarrow \Theta_{f(P)} \\ T_P M & \xrightarrow[\text{definiert auf Seite 82}]{f_*} & T_{f(P)} N. \end{array}$$

- (2) Es sei M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $P \in M$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Theta_P: \tilde{T}_P M &\rightarrow T_P M \\ [\gamma: I \rightarrow M] &\mapsto \gamma'(0) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Beweis.

- (1) Diese Aussage folgt sofort durch Einsetzen und Anwenden der Abbildungen.

¹⁵⁷In der Tat. Es sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte um P . Es sei $[\gamma] = [\delta]$. Dann gilt

$$\gamma'(0) = (\Phi^{-1} \circ \Phi)(\gamma'(0)) = D\Phi_{\Phi(P)}^{-1}((\Phi \circ \gamma)'(0)) = D\Phi_{\Phi(P)}^{-1}((\Phi \circ \delta)'(0)) = (\Phi^{-1} \circ \Phi)(\delta'(0)) = \delta'(0).$$

- (2) Es sei $P \in M$. Wir wählen eine k -dimensionale Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um P . Wir bezeichnen mit $i: U \rightarrow M$ die Inklusion. Wir betrachten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{T}_P M & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{T}_P U & \xrightarrow[\cong]{\Phi_*} & \tilde{T}_{\Phi(P)} V \\
 \downarrow \Theta & & \downarrow \Theta & & \downarrow \Theta \\
 T_P M & \xleftarrow{i_* = \text{id}} & T_P U & \xrightarrow{\Phi_*} & T_{\Phi(P)} V.
 \end{array}$$

Wir machen folgende Beobachtungen:

- (a) Es folgt aus (1), dass das Diagramm kommutiert.
- (b) Es folgt aus Lemma 18.3, dass $i_*: \tilde{T}_P U \rightarrow \tilde{T}_P M$ eine Bijektion ist. Ganz ähnlich sieht man auch, dass $T_P M = T_P U$, und dass $i_* = \text{id}: T_P U \rightarrow T_P M$.
- (c) Es folgt aus der Tatsache, dass Φ ein Diffeomorphismus ist, und der Funktorialität der beiden Typen von Tangentialräumen, siehe Satz 9.2 und Satz 18.2, dass die horizontalen Abbildungen auf der rechten Seite Bijektionen sind.
- (d) Da V eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k ist kann man, mithilfe der Identitätskarte und Lemma 18.1, leicht per Hand beweisen, dass die Abbildung $\Theta: \tilde{T}_{\Phi(P)} V \rightarrow T_{\Phi(P)} V$ sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Die eigentliche Aussage folgt nun aus diesen Beobachtungen. ■

Es sei nun M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und es sei P ein Punkt auf M . Wir hatten gerade den Tangentialraum $\tilde{T}_P M$ eingeführt. Aber es ist von der Definition her nicht klar, in wie weit $\tilde{T}_P M$ eigentlich ein Vektorraum ist. Wir holen dies nun nach und definieren eine Vektorraumstruktur auf $\tilde{T}_P M$.

Definition. Es sei (M, \mathcal{A}) eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und es sei P ein Punkt auf M . Wir wählen eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ um P aus dem Atlas \mathcal{A} . Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung und wir bezeichnen mit $i: U \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Wir definieren dann die Addition auf $\tilde{T}_P M$ mithilfe des folgenden Diagramms:¹⁵⁸

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{T}_P M \times \tilde{T}_P M & \text{-----} & \tilde{T}_P M \\
 \uparrow (i_*)^{-1} \cong & & \cong \uparrow (i_*)^{-1} & & \cong \uparrow i_* \\
 \tilde{T}_P U \times \tilde{T}_P U & & & & \tilde{T}_P U \\
 \Phi_* \downarrow \cong & & \cong \downarrow \Phi_* & & \cong \uparrow \Psi_* \\
 \tilde{T}_Q V \times \tilde{T}_Q V & & & & \tilde{T}_Q V \\
 \Theta \downarrow \cong & & \cong \downarrow \Theta & & \cong \uparrow \Theta^{-1} \\
 T_Q V \times T_Q V & \xrightarrow[\text{Vektorraum } T_Q V = \mathbb{R}^n]{\text{Addition im}} & T_Q V & &
 \end{array}$$

Ganz analog führen wir auch die Skalarmultiplikation auf $\tilde{T}_P M$ ein.

Satz 18.5.

¹⁵⁸Es folgt aus Lemma 18.3, dass die induzierte Abbildung $i_*: \tilde{T}_P U \rightarrow \tilde{T}_P M$ ein Isomorphismus ist.

- (1) Es sei (M, \mathcal{A}) eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und es sei P ein Punkt auf M .
- (a) Die Addition und die Skalarmultiplikation auf dem Tangentialraum $\tilde{T}_P M$ ist wohldefiniert und diese definieren eine Vektorraumstruktur auf dem Tangentialraum $\tilde{T}_P M$.
- (b) Der Tangentialraum $\tilde{T}_P M$ ist ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.
- (2) Es sei M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $P \in M$. Die Abbildung $\Theta_P: \tilde{T}_P M \rightarrow T_P M$ ist ein Isomorphismus von reellen Vektorräumen.
- (3) Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Für jedes $P \in M$ ist die Abbildung

$$f_*: \tilde{T}_P M \rightarrow \tilde{T}_{f(P)} N$$

linear.

Beweis.

- (1) Wir beweisen zuerst, dass die Skalarmultiplikation wohldefiniert ist. Es seien also $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ zwei Karten um P . Wir nehmen im Folgenden der Einfachheit halber an, dass $U = \tilde{U}$. Den allgemeinen Fall überlassen wir der Leserschaft. Wir setzen $Q := \Phi(P)$ und $\tilde{Q} := \tilde{\Phi}(P)$. Wir schreiben $\Psi := \Phi^{-1}$ und $\tilde{\Psi} := \tilde{\Phi}^{-1}$. Außerdem setzen wir $\Xi := \tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$. Wir betrachten folgende Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \tilde{T}_Q V & \xrightarrow{\Theta} & T_Q V & \xrightarrow{v \mapsto \lambda \cdot v} & T_Q V & \xrightarrow{\Theta^{-1}} & \tilde{T}_Q V & & \\
 & \nearrow \Phi_* & \downarrow \Xi_* & & \downarrow \Xi_* & & \downarrow \Xi_* & & \downarrow \Xi_* & \searrow \Psi_* & \\
 \tilde{T}_P M & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{T}_P U & & & & & & & \tilde{T}_P U & \xrightarrow[\cong]{i_*} & \tilde{T}_P M. \\
 & \searrow \tilde{\Phi}_* & \downarrow \tilde{\Phi}_* & & \downarrow \tilde{\Phi}_* & & \downarrow \tilde{\Phi}_* & & \downarrow \tilde{\Phi}_* & \nearrow \tilde{\Psi}_* & \\
 & & \tilde{T}_{\tilde{Q}} \tilde{V} & \xrightarrow{\Theta} & T_{\tilde{Q}} \tilde{V} & \xrightarrow{v \mapsto \lambda \cdot v} & T_{\tilde{Q}} \tilde{V} & \xrightarrow{\Theta^{-1}} & \tilde{T}_{\tilde{Q}} \tilde{V} & &
 \end{array}$$

Wir machen folgende Beobachtungen:

- (i) Das linke und rechte Dreieck kommutieren nach Satz 18.2, da $\tilde{\Phi} = \Xi \circ \Phi$.
- (ii) Das linke und rechte Quadrat kommutieren nach Lemma 18.4 (1).
- (iii) Das mittlere Quadrat kommutiert ebenfalls. Dies sieht man wie folgt. Für $\Xi: V \rightarrow \tilde{V}$ ist die induzierte Abbildung $\Xi_*: \mathbb{R}^n = T_Q V \rightarrow T_{\tilde{Q}} \tilde{V} = \mathbb{R}^n$ gegeben durch Multiplikation mit dem Differential $D\Xi_Q \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Die induzierte Abbildung ist also linear und kommutiert mit Skalarmultiplikation.

Aus dieser Diskussion folgt, dass die Skalarmultiplikation auf $\tilde{T}_P M$ wohldefiniert ist. Der Beweis, dass die Addition wohldefiniert ist, verläuft nach dem gleichen Schema. Da die Addition und Skalarmultiplikation auf $T_Q V = \mathbb{R}^n$ eine Vektorraumstruktur ergeben, gilt dies auch für $\tilde{T}_P M$.

Per Konstruktion sehen wir, dass die Abbildung $\tilde{T}_P M \rightarrow T_Q V$ ein Isomorphismus von reellen Vektorräumen ist. Da $T_Q V = \mathbb{R}^n$ sehen wir, dass $\tilde{T}_P M$ isomorph zu \mathbb{R}^n ist.

- (2) Aus Lemma 18.4 (2) folgt, dass jede Abbildung $\Theta_P: \tilde{T}_P M \rightarrow T_P M$ bijektiv ist. Mit ähnlichen Methoden wie in (1a) kann man auch nachweisen, dass diese Abbildung Θ_P die Skalarmultiplikation und die Addition respektiert. Also ist Θ_P ein Isomorphismus.

- (3) Mit ähnlichen Methoden wie in (1a) kann man auch nachweisen, dass jede Abbildung $f_*: \tilde{T}_P M \rightarrow \tilde{T}_{f(P)} N$ die Skalarmultiplikation und die Addition respektiert, also eine lineare Abbildung ist. ■

18.2. Natürliche Transformationen und natürliche Isomorphismen. Wir wollen jetzt die Tangentialräume zu Mannigfaltigkeiten und den Zusammenhang zu “klassischen” Tangentialräumen von Untermannigfaltigkeiten von einem \mathbb{R}^n noch etwas formaler beschreiben und ausdrücken.

Definition.

- (1) Wir betrachten die Kategorie der Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} , welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{M}) &:= \text{alle Mannigfaltigkeiten,} \\ \text{Mor}(M, N) &:= \text{alle glatten Abbildungen von } M \text{ nach } N. \end{aligned}$$

- (2) Eine punktierte Mannigfaltigkeit ist eine Paar (M, P) , wobei M eine Mannigfaltigkeit ist und P ein Punkt auf M . Wir betrachten die Kategorie der punktierten Mannigfaltigkeiten \mathcal{PM} , welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{PM}) &:= \{\text{alle punktierten Mannigfaltigkeiten}\}, \\ \text{Mor}((M, P), (N, Q)) &:= \{\text{alle glatten Abbildungen } f: M \rightarrow N \text{ mit } f(P) = Q\}. \end{aligned}$$

Wir können nun unsere bisherigen Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

Satz 18.6. Die Abbildungen

$$(M, P) \mapsto \tilde{T}_P M$$

und

$$(f: (M, P) \rightarrow (N, Q)) \mapsto (f_*: \tilde{T}_P M \rightarrow \tilde{T}_Q N)$$

definieren einen kovarianten Funktor von der Kategorie \mathcal{PM} der punktierten Mannigfaltigkeiten zu der Kategorie $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume.

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 18.2 und Satz 18.5. ■

Auf Seite 89 hatten wir ganz ähnlich gesehen, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} F: \text{Ob}(\mathcal{PUM}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}) \\ (M, P) &\mapsto T_P M, \\ f &\mapsto f_* = Df_P \end{aligned}$$

einen kovarianten Funktor von der Kategorie der punktierten Untermannigfaltigkeiten \mathcal{PUM} zu der Kategorie $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume bilden.

Wir haben nun also zwei Funktoren $\mathcal{PUM} \rightarrow \mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}$, nämlich $(M, P) \mapsto \tilde{T}_P M$ und $(M, P) \mapsto T_P M$. Es stellt sich die Frage, was es heißen soll, dass zwei Funktoren “isomorph” sind. Dies führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} zwei Kategorien.

- (1) Es seien $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei kovariante Funktoren. Eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren F und G weist jedem Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\Phi_X: F(X) \rightarrow G(X)$ in \mathcal{D} zu, so dass für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} das

folgende Diagramm von Morphismen in \mathcal{D} kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F_*(f)} & F(Y) \\ \Phi_X \downarrow & & \downarrow \Phi_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G_*(f)} & G(Y). \end{array}$$

Wenn für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ der Morphismus $\Phi_X: F(X) \rightarrow G(X)$ ein Isomorphismus ist, dann sagen wir, dass die natürliche Transformation ein natürlicher Isomorphismus ist.

- (2) Ganz analog definiert man auch eine natürliche Transformation zwischen kontravarianten Funktoren.

Bemerkung. Der Begriff einer natürlichen Transformation kann vielleicht durch folgendes Diagramm veranschaulicht werden:

$$\begin{array}{ccccc} & & F(X) & \xrightarrow{F_*(f)} & F(Y) \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \Phi_X & & \Phi_Y \\ & & G(X) & \xrightarrow{G_*(f)} & G(Y). \end{array}$$

Die gewellten Pfeile sind dabei keine Abbildungen, sondern wir deuten nur an, dass wir jedem Objekt aus \mathcal{C} Objekte in \mathcal{D} zuweisen.

Wenn man die Augen aufhält, dann sieht man, dass es deutlich mehr natürliche Transformationen gibt, als man zuerst denken würde.

Beispiel.

- (1) Wir betrachten wiederum die Kategorie $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume. Es folgt aus der Diskussion auf Seite 90, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} V &\mapsto (V^*)^* \\ (f: V \rightarrow W) &\mapsto ((f^*)^*: (V^*)^* \rightarrow (W^*)^*) \end{aligned}$$

einen kovarianten Funktor F von $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ zu sich selbst bilden. Für jeden reellen Vektorraum V betrachten wir den Homomorphismus

$$\begin{aligned} V &\rightarrow (V^*)^* \\ v &\mapsto \left(\begin{array}{c} V^* \rightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto \varphi(v) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Man kann leicht nachweisen, dass diese Abbildungen eine natürliche Transformation vom Identitätsfunktor $\text{id}: \mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ zu dem oben gerade erst eingeführten Funktor $F: \mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ bilden.

- (2) Es sei \mathcal{Epi} folgende Kategorie:

- Die Objekte sind Epimorphismen $\varphi: V \rightarrow W$ zwischen reellen Vektorräumen.
- Ein Morphismus zwischen Objekten $\varphi: V \rightarrow W$ und $\varphi': V' \rightarrow W'$ besteht aus zwei linearen Abbildungen $\alpha: V \rightarrow V'$ und $\beta: W \rightarrow W'$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ V' & \xrightarrow{\varphi'} & W'. \end{array}$$

Die folgenden Abbildungen definieren kovariante Funktoren von der Kategorie \mathcal{Epi} zu der Kategorie $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume:

$$\begin{array}{ll} F: \mathcal{Epi} \rightarrow \mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}} & G: \mathcal{Epi} \rightarrow \mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}} \\ (\varphi: V \rightarrow W) \mapsto V/\ker(\varphi) & \text{und } (\varphi: V \rightarrow W) \mapsto W \\ (\alpha, \beta) \mapsto \left(\begin{array}{l} V/\ker(\varphi) \rightarrow V'/\ker(\varphi') \\ [v] \mapsto [\alpha(v)] \end{array} \right) & (\alpha, \beta) \mapsto \beta. \end{array}$$

Die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V/\ker(\varphi) & \rightarrow & W \\ [v] = v + \ker(\varphi) & \mapsto & \varphi(v) \end{array}$$

bilden einen natürlichen Isomorphismus vom Funktor F zum Funktor G .

(3) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Es folgt leicht aus den Definitionen und Satz 11.9, dass die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} M \mapsto \Omega_k(M) := \text{Vektorraum der glatten } k\text{-Formen auf } M \\ (f: M \rightarrow N) \mapsto (f^*: \Omega_k(N) \rightarrow \Omega_k(M)) \end{array}$$

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie \mathcal{UM} der Untermannigfaltigkeiten zu der Kategorie $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume definieren. In Satz 12.6 (3) hatten wir gesehen, dass das Differential d mit induzierten Abbildungen vertauscht, d.h. dass für jede glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega_k(M) \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ \Omega_{k+1}(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega_{k+1}(M). \end{array}$$

Das bedeutet nun aber nichts anderes, als dass das Differential d eine natürliche Transformation vom Funktor $M \mapsto \Omega_k(M)$ zum Funktor $M \mapsto \Omega_{k+1}(M)$ ist.

Mit der Sprache von natürlichen Transformationen und natürlichen Isomorphismen können wir jetzt einige der vorherigen Ergebnisse wie folgt formulieren.

Satz 18.7. Die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} \Theta_P: \tilde{\mathbb{T}}_P M \rightarrow \mathbb{T}_P M \\ [\gamma: I \rightarrow M] \mapsto \gamma'(0) \end{array}$$

definieren einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren $\mathcal{PUM} \rightarrow \mathcal{Vekt}_{\mathbb{R}}$, welche gegeben sind durch

$$\begin{array}{ll} (M, P) \mapsto \tilde{\mathbb{T}}_P M \\ (f: (M, P) \rightarrow (N, Q)) \mapsto (f_*: \tilde{\mathbb{T}}_P M \rightarrow \tilde{\mathbb{T}}_Q N) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} (M, P) \mapsto \mathbb{T}_P M \\ ((M, P) \xrightarrow{f} (N, Q)) \mapsto (\mathbb{T}_P M \xrightarrow{f_*} \mathbb{T}_Q N). \end{array}$$

Beweis. Dieser Satz folgt sofort aus Lemma 18.4 (1) und Satz 18.5 (2). ■

19. ORIENTIERUNGEN AUF MANNIGFALTIGKEITEN

Auf Seite 120 hatten wir Orientierungen auf Untermannigfaltigkeiten eingeführt. Die damalige Definition verallgemeinert sich problemlos zu Mannigfaltigkeiten:

Definition. Es sei (M, \mathcal{A}) eine Mannigfaltigkeit von Dimension $k \in \mathbb{N}$.

- (1) Eine **Prä-Orientierung** für M ist eine Abbildung, welche jedem Tangentialraum $\tilde{T}_P M$ eine Orientierung zuordnet.
- (2) Es sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte aus dem Atlas \mathcal{A} . Wir bezeichnen mit $i: U \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Für jedes $x \in U$ erhalten wir den Isomorphismus

$$\tilde{T}_x M \xleftarrow{i_*} \tilde{T}_x U \xrightarrow[\cong]{\Phi_*} \tilde{T}_{\Phi(x)} V \xrightarrow[\uparrow]{\Theta_{\Phi(x)}} T_{\Phi(x)} V = \mathbb{R}^k.$$

Isomorphismus nach Lemma 18.3

natürlicher Isomorphismus von Seite 189

Wir sagen eine Prä-Orientierung ist stetig bezüglich der Karte $\Phi: U \rightarrow V$, wenn gilt: für jede Komponente K von U ist die obige Abbildung für alle $x \in K$ orientierungserhaltend oder für alle $x \in K$ ist diese orientierungsumkehrend.

- (3) Wir sagen eine Prä-Orientierung ist eine **Orientierung**, wenn die Prä-Orientierung bezüglich allen Karten stetig ist.
- (4) Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung heißt **orientierte Mannigfaltigkeit**. Eine Mannigfaltigkeit, für die man eine Orientierung finden kann, heißt **orientierbare Mannigfaltigkeit**.
- (5) Wenn M eine orientierte Mannigfaltigkeit ist, dann bezeichnen wir mit $-M$ die Mannigfaltigkeit, mit der entgegengesetzten Orientierung.

Beispiel. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Für jedes $P \in M$ betrachten wir wieder den natürlichen Isomorphismus $\Theta_P: \tilde{T}_P M \rightarrow T_P M$ von Seite 189. Es folgt eigentlich sofort aus den Definitionen, dass Orientierungen der Vektorräume $\tilde{T}_P M$ im obigen Sinne gerade Orientierungen der Vektorräume $T_P M$ im Sinne der Definition auf Seite 120 entsprechen. Wir erhalten also de facto den gleichen Orientierungsbegriff.

Definition. Es seien M und N Mannigfaltigkeiten.

- (1) Wir sagen eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist ein **lokaler Diffeomorphismus**, wenn es für alle $x \in M$ eine offene Umgebung U von $x \in M$ und eine offene Umgebung V von $f(x) \in N$ gibt, so dass $f: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.
- (2) Wir nehmen nun an, dass M und N orientiert sind. Wir sagen ein lokaler Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ ist **orientierungserhaltend**, wenn für alle $x \in M$ die induzierte Abbildung¹⁵⁹ $f_*: \tilde{T}_x M \rightarrow \tilde{T}_{f(x)} N$ ein orientierungserhaltender Isomorphismus ist.

Lemma 19.1.

- (1) Es sei $f: M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Wenn N eine Orientierung besitzt, dann besitzt M genau eine Orientierung, so dass $f: M \rightarrow N$ orientierungserhaltend ist.

¹⁵⁹Wenn $f: M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus ist dann kann man leicht zeigen, dass für jedes $x \in M$ die Abbildung $f_*: \tilde{T}_x M \rightarrow \tilde{T}_{f(x)} N$ ein Isomorphismus ist.

- (2) Es sei $f: U \rightarrow V$ ein lokaler Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n . Dann gilt:

$$f \text{ ist orientierungserhaltend} \iff \det(Df_x) > 0 \text{ f\"ur alle } x \in U.$$

Beweis. Die Aussagen folgen alle relative leicht aus den Definitionen. Aus Zeit und Platzgründen überlassen wir die Beweise der Leserschaft. ■

Im folgenden wollen wir Orientierungen von Quotienten-Mannigfaltigkeiten betrachten.

Definition. Es sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit und es sei $G \times M \rightarrow M$ eine glatte Operation. Wir sagen die Operation ist orientierungserhaltend, wenn für jedes $g \in G$ der Diffeomorphismus $x \mapsto g \cdot x$ orientierungserhaltend ist.

Satz 19.2. Es sei M eine Mannigfaltigkeit M und es sei G eine Gruppe, welche auf M frei, eigentlich und glatt operiert.

- (1) Wenn M orientiert ist, und wenn die Operation orientierungserhaltend ist, dann besitzt die Mannigfaltigkeit M/G eine eindeutige Orientierung, so dass die Projektion $p: M \rightarrow M/G$ orientierungserhaltend ist.
- (2) Wenn die Mannigfaltigkeit M/G orientierbar ist, dann besitzt M eine eindeutige Orientierung, so dass die Projektion $p: M \rightarrow M/G$ orientierungserhaltend ist, und diese Orientierung auf M hat die Eigenschaft, dass die Operation von G auf M orientierungserhaltend ist.

Beweis. Es sei M eine Mannigfaltigkeit M und es sei G eine Gruppe, welche auf M frei, eigentlich und glatt operiert. Satz 17.2 besagt, dass wir den Quotienten M/G als Mannigfaltigkeit auffassen können, so dass die Projektion $p: M \rightarrow M/G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

- (1) Wir nehmen zuerst an, dass M orientiert ist, und dass für jedes $g \in G$ die Abbildung $M \rightarrow M$, $Q \mapsto g \cdot Q$, orientierungserhaltend ist.

Für jedes $Q \in M/G$ wählen wir ein $\tilde{Q} \in M$ mit $p(\tilde{Q}) = Q$ und wir geben $T_Q(M/G)$ die Orientierung, welche wir mithilfe des Isomorphismus $Dp_{\tilde{Q}}: T_{\tilde{Q}}M \rightarrow T_Q(M/G)$ und der Orientierung auf $T_{\tilde{Q}}M$ erhalten. Nachdem die Operation orientierungserhaltend ist, kann man leicht sehen, dass diese Definition der Orientierung unabhängig ist von der Wahl von \tilde{Q} . Man kann nun auch leicht nachweisen, dass diese Orientierungen stetig sind bezüglich der Karten von M/G , welche wir in Satz 17.2 konstruiert hatten.

- (2) Wir nehmen nun an, dass M/G mit einer Orientierung ausgestattet ist. Da die Projektion $p: M \rightarrow M/G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, gibt es nach Lemma 19.1 (1) genau eine Orientierung auf M , so dass $p: M \rightarrow M/G$ orientierungserhaltend ist. Es sei nun $g \in G$. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{x \mapsto g \cdot x} & M \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & M/G & \end{array}$$

Die diagonalen Abbildungen sind orientierungserhaltend. Es folgt leicht, dass die horizontale Abbildung ebenfalls orientierungserhaltend ist. ■

Beispiel. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Verschiebung um v . Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist das Differential $Dt_x \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Identitätsmatrix. Es folgt aus Lemma 19.1

(2), dass die Operation von \mathbb{Z}^n auf \mathbb{R}^n orientierungserhaltend ist. Es folgt also aus Satz 19.2 (1), dass $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ orientierbar ist.

Lemma 19.3. Das offene Möbiusband ist nicht orientierbar.

Bemerkung. Wir hatten diese Aussage auch schon in Lemma 19.3 bewiesen. Der Beweis von Lemma 19.3 ist jedoch deutlich eleganter und die Beweismethode ist viel allgemeiner.

Beweis. Es sei $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ und \mathbb{Z} . Wie auf Seite 171 betrachten wir die Operation:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times (-1, 1)) &\rightarrow \mathbb{R} \times (-1, 1) \\ (n, (x, y)) &\mapsto (x + n, (-1)^n \cdot y). \end{aligned}$$

Diese Operation ist frei, eigentlich und glatt. Es folgt aus Satz 17.2, dass $(\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z}$ eine Mannigfaltigkeit ist. Man kann problemlos zeigen, dass diese Mannigfaltigkeit diffeomorph zum Möbiusband ist, welches wir in Lemma 17.1 betrachtet hatten.

Wir nehmen nun, dass das Möbiusband $\mathbb{R} \times (-1, 1)/\mathbb{Z}$ eine Orientierung besitzt. Es folgt aus Satz 19.2 (2), dass $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ eine Orientierung besitzt, so dass die Operation von \mathbb{Z} auf $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ orientierungserhaltend ist.

Da $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ zusammenhängend ist, besitzt $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ nur zwei Orientierungen, nämlich die "übliche", und die entgegengesetzte. Indem wir notfalls die Orientierung auf $(\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z}$ umdrehen können wir annehmen, dass wir auf $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ wiederum die übliche Orientierung betrachten.

Für $n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir den Diffeomorphismus von $\mathbb{R} \times (-1, 1)$, welcher durch die Operation von n gegeben, d.h. wir betrachten den Diffeomorphismus

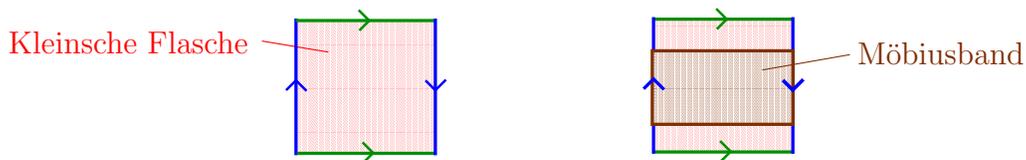
$$\begin{aligned} \Phi_n: \mathbb{R} \times (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \times (-1, 1) \\ (x, y) &\mapsto (x + n, (-1)^n \cdot y). \end{aligned}$$

Für $(x, y) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$ ist das Differential von Φ_n gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Es folgt aus dieser Berechnung, und Lemma 19.1 (1), dass für ungerade n der Diffeomorphismus Φ_n nicht orientierungserhaltend ist. Wir haben also einen Widerspruch erhalten. ■

Lemma 19.4. Die Kleinsche Flasche ist nicht orientierbar.

Beweis. Wir nehmen an, dass die Kleinsche Flasche orientierbar ist. Dann folgt aus Lemma 19.1 (1) dass auch jede Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0 orientierbar ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Kleinsche Flasche eine Untermannigfaltigkeit von Kodimension 0 besitzt, welche diffeomorph zum Möbiusband ist. Da das Möbiusband nach Lemma 19.3 nicht orientierbar ist, haben wir also einen Widerspruch zur Annahme erhalten. ■



Satz 19.5. Der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n = S^n/\{\pm 1\}$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.

Beweis. Es ist eine schöne Übungsaufgabe zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} S^n &\rightarrow S^n \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

orientierungserhaltend ist, genau dann, wenn n ungerade ist. Es folgt aus dieser Beobachtung, dass die Operation von $\{\pm 1\}$ auf S^n orientierungserhaltend ist, genau dann, wenn n ungerade ist. Die Aussage des Satzes folgt nun aus Satz 19.2. ■

20. DER SATZ VON STOKES AUF MANNIGFALTIGKEITEN

20.1. Mannigfaltigkeiten mit Rand. In Kapitel 2.2 hatten wir zuerst Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n „ohne Rand“ eingeführt. In Kapitel 6 hatten wir diesen ursprünglichen Begriff von Untermannigfaltigkeiten erweitert, und wir hatten Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n zugelassen, welche einen nichtleeren Rand besitzen. Mit fast wort-wörtlich der gleichen Vorgehensweise kann man nun auch Mannigfaltigkeiten mit Rand einführen.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Eine n -dimensionale Karte für X ist ein Homöomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n oder des Halbraums H_n .
- (2) Ein n -dimensionaler Atlas für den topologischen Raum X ist eine Familie von n -dimensionalen Karten $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$, so dass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
- (3) Ein Atlas $\{\Phi: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ heißt **glatt**, wenn für alle $i, j \in I$ der **Kartenwechsel**

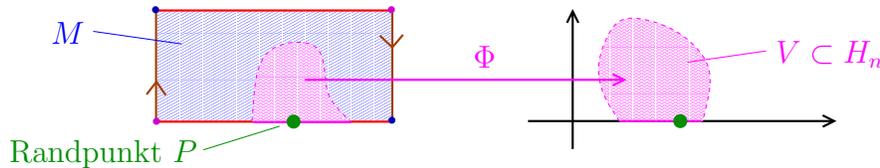
$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: \underbrace{\Phi_i(U_i \cap U_j)}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n \text{ oder } H_n} \rightarrow \underbrace{\Phi_j(U_i \cap U_j)}_{\subset \mathbb{R}^n}$$

glatt ist im Sinne der Definition auf Seite 18 und auf Seite 34.

Definition. Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, \mathcal{A}) , wobei gilt:

- (1) M ist ein topologischer Raum, welcher Hausdorff und zweitabzählbar ist.
- (2) \mathcal{A} ist ein glatter Atlas für M .

Wir sagen $P \in M$ ist ein **Randpunkt**, wenn es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ aus dem Atlas \mathcal{A} gibt, wobei U eine offene Umgebung von P ist, wobei V eine offene Teilmenge von H_n ist, und wobei $\Phi(P) \in \partial H_n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Die Menge aller Randpunkte wird als der **Rand** ∂M bezeichnet.



Bemerkung. Es gelten die offensichtlichen Verallgemeinerungen der Aussagen über Untermannigfaltigkeiten mit Rand und den Rand einer Untermannigfaltigkeit. Beispielsweise gilt, ganz analog zu Satz 6.5, dass der Rand ∂M einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Rand eine $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit leerem Rand ist.

Beispiel. Wir betrachten jetzt $Y = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, wobei die Äquivalenzrelation erzeugt ist durch

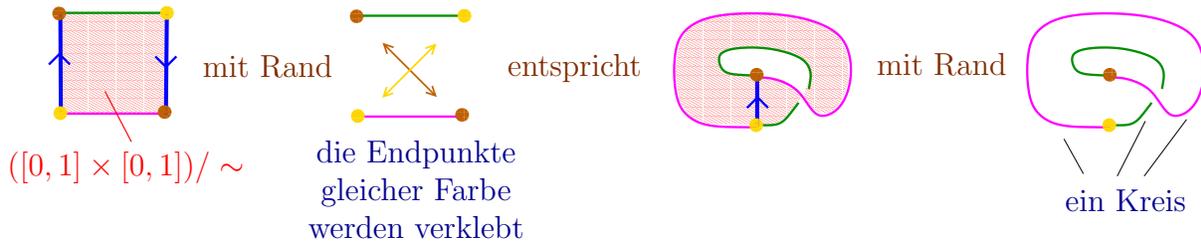
$$(0, y) \sim (1, 1 - y) \quad \text{für alle } y \in [0, 1].$$

Dies ist also fast die gleiche Definition wie die Definition vom Möbiusband auf Seite 161. Aber dieses Mal betrachten wir das abgeschlossene Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ anstatt dem halboffenen Quadrat $[0, 1] \times (0, 1)$. Der Quotientenraum Y / \sim entsteht wie zuvor aus dem Quadrat Y , indem wir die „linke Kante nach einer Verdrillung mit der rechten Kante verkleben“. Den topologischen Raum Y / \sim nennen wir das **abgeschlossene Möbiusband**.

Fast das gleiche Argument wie in Lemmas 16.4 und 17.1 zeigt, dass das abgeschlossene Möbiusband eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist mit Rand

$$(\{0, 1\} \times [0, 1]) / \sim = ((\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1])) / \sim,$$

wobei $(0, 0) \sim (1, 1)$ und $(0, 1) \sim (1, 0)$. Man kann nun leicht zeigen, dass der Rand von Y / \sim diffeomorph zum Kreis S^1 ist.



20.2. Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Auf Seite 195 hatten wir gesehen, wie wir den Begriff einer Orientierung auf einer Untermannigfaltigkeit zu Mannigfaltigkeiten verallgemeinern können. Mit dem gleichen Ansatz können wir auch viele weitere Begriffe aus der Theorie der Untermannigfaltigkeiten verallgemeinern:

Definition. In den Kapiteln 11 und 12 hatten wir für eine Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^n folgende Begriffe eingeführt:

- (1) glatte Differentialformen und deren Dachprodukte,
- (2) der Vektorraum $\Omega_k(M)$ der glatten k -Formen auf M ,
- (3) für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ die induzierte Abbildung $f^*: \Omega_k(N) \rightarrow \Omega_k(M)$,
- (4) das Differential $d\omega$ einer glatten k -Form.

In allen diesen Definitionen hatten wir immer nur mit den Tangentialräumen gearbeitet, aber wir hatten ansonsten nie verwendet, dass M einen „umgebenden Raum“ besitzt.¹⁶⁰¹⁶¹Nachdem wir jetzt für Mannigfaltigkeiten ebenfalls einen Begriff von Tangentialräumen haben, können wir nun diese Begriffe und alle Aussagen aus Kapitel 11 und 12, mithilfe des natürlichen Isomorphismus aus Satz 18.7, fast wort-wörtlich zu Mannigfaltigkeiten übertragen.¹⁶²

Insbesondere erhalten wir folgendes Analogon zu Satz 12.2, Satz 11.9 und Satz 12.3.

Satz 20.1.

- (1) Für jede glatte k -Form ω auf einer Mannigfaltigkeit ist $d\omega$ eine glatte $(k + 1)$ -Form und es gilt $d d\omega = 0$.

¹⁶⁰Die Definitionen und Sätze wurden auch immer formuliert in der Form „Es sei M eine Untermannigfaltigkeit“, und nie von der Form „Es sei M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n “, weil eben der \mathbb{R}^n nie eine Rolle gespielt hat.

¹⁶¹Insbesondere hatten wir bei diesen Definitionen und Sätzen nie das Skalarprodukt des \mathbb{R}^n in irgendeiner Weise verwendet.

¹⁶²Allerdings müssen wir uns bei Karten dann immer auf Karten des Atlanten einschränken. Beispielsweise heißt eine k -Form auf einer Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{A}) glatt, wenn für alle Karten $\Phi: U \rightarrow V$ im Atlas \mathcal{A} die k -Form $(\Phi^{-1})^*\omega$ auf V glatt ist.

- (2) Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und es sei $\omega \in \Omega_k(N)$. Dann ist $f^*\omega$ eine glatte k -Form auf M und es gilt

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

Beweis. Der Beweis ist fast wort-wörtlich der Gleiche wie von Satz 12.2, Satz 11.9 und Satz 12.3. ■

Analog zur Definition in Kapitel 11 können wir auch problemlos das Integral von glatten k -Formen auf orientierten kompakten k -dimensionalen Mannigfaltigkeiten einführen. Das Integral wird durch den folgenden Satz vollständig charakterisiert.

Satz 20.2. Es gibt genau eine Abbildung, genannt das Integral, welche jeder glatten k -Form ω auf einer orientierten kompakten k -dimensionalen Mannigfaltigkeit M eine reelle Zahl

$$\int_M \omega$$

zuordnet, welche folgende Eigenschaften besitzt:

- (1) Das Integral ist linear, d.h. für jede orientierte kompakte k -dimensionale Mannigfaltigkeit M und alle glatten k -Formen ω, σ auf M sowie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_M (\omega + \sigma) = \int_M \omega + \int_M \sigma \quad \text{und} \quad \int_M \lambda \cdot \omega = \lambda \cdot \int_M \omega.$$

- (2) Wenn M eine kompakte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k der Kodimension 0 ist, und wenn $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gilt

$$\underbrace{\int_M f \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k}_{\text{Integral einer } k\text{-Form}} = \underbrace{\int_{x \in M} f(x)}_{\text{Lebesgue-Integral}}.$$

- (3) Wenn M eine Mannigfaltigkeit ist, wenn U eine offen Teilmenge von M ist und wenn ω eine glatte k -Form auf M ist mit $\text{Träger}(\omega) \subset U$, dann gilt

$$\int_U \omega = \int_M \omega.$$

- (4) Für jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ zwischen zwei kompakten orientierten k -dimensionalen Mannigfaltigkeiten und jede glatte k -Form ω auf N gilt

$$\int_M f^*\omega = \int_N \omega.$$

Beweis. Die Tatsache, dass das Integral von k -Formen diese Eigenschaften besitzt folgt leicht aus den Definitionen, sowie aus Lemma 11.21 und Satz 11.20, umformuliert für Mannigfaltigkeiten. Die Tatsache, dass das Integral durch diese Eigenschaften charakterisiert ist, folgt aus der Beobachtung, dass man, ganz analog zur Diskussion auf Seite 125, jede glatte k -Form auf einer kompakten Mannigfaltigkeit als Summe von glatten k -Formen schreiben kann, deren Träger jeweils im Definitionsbereich einer Karte enthalten sind. Für solche k -Formen ist das Integral durch die Eigenschaften (2), (3) und (4) charakterisiert. ■

Satz 20.3. (Satz von Stokes) Es sei M eine orientierte k -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit und es sei $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis. Der Beweis ist fast wort-wörtlich der Beweis des ursprünglichen Satzes 13.1 von Stokes. ■

Im Folgenden führen wir noch eine Möglichkeit ein, Differentialformen auf Quotientenmannigfaltigkeiten zu konstruieren.

Definition. Es sei G eine Gruppe, welche glatt auf einer Mannigfaltigkeit M operiert. Für $g \in G$ bezeichnen wir mit $\phi_g: M \rightarrow M$ den Diffeomorphismus, welcher gegeben ist durch $x \mapsto g \cdot x$. Wir sagen eine k -Form ω auf M ist G -invariant, wenn für alle $g \in G$ gilt, dass $\phi_g^*(\omega) = \omega$.

Lemma 20.4. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, welche auf M frei, glatt und eigentlich operiert. Wir bezeichnen mit $p: M \rightarrow M/G$ die Projektionsabbildung. Es sei ω eine k -Form auf M , welche G -invariant ist. Dann gibt es genau eine glatte k -Form $\bar{\omega}$ auf der Mannigfaltigkeit M/G mit

$$\omega = p^*(\bar{\omega}).$$

Beispiel. Wir bezeichnen mit dx und dy die üblichen 1-Formen auf \mathbb{R}^2 , welche an jedem $P \in \mathbb{R}^2$ gegeben sind durch

$$dx: \tilde{T}_P \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} T_P \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad dy: \tilde{T}_P \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} T_P \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v_x, v_y) \mapsto v_x \qquad \qquad \qquad (v_x, v_y) \mapsto v_y.$$

Diese 1-Formen sind invariant unter der Operation von \mathbb{Z}^2 auf \mathbb{R}^2 . Diese 1-Formen induzieren also 1-Formen \bar{dx} und \bar{dy} auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Die 2-Form $dx \wedge dy$ auf \mathbb{R}^2 ist ebenfalls invariant unter der Operation von \mathbb{Z}^2 und induziert damit eine 2-Form $\bar{dx} \wedge \bar{dy}$ auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Man sieht leicht, dass $\bar{dx} \wedge \bar{dy} = \overline{dx \wedge dy}$. Dann gilt beispielsweise¹⁶³

$$\int_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2} \bar{dx} \wedge \bar{dy} = 1.$$

Beweis. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, welche auf M frei, glatt und eigentlich operiert. Wir bezeichnen mit $p: M \rightarrow M/G$ die Projektionsabbildung. Es sei ω eine k -Form auf M , welche G -invariant ist.

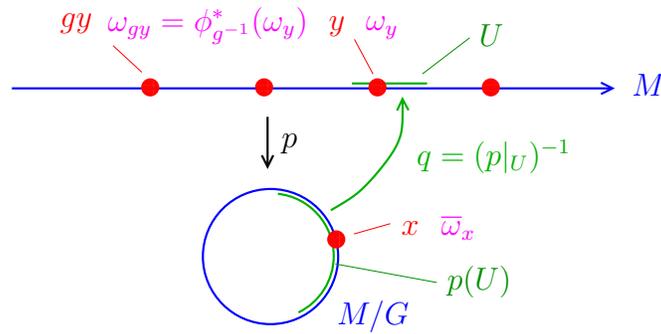
Es sei nun x ein Punkt in M/G . Wir wählen ein $y \in M$ mit $p(y) = x$. Nach Satz 17.2 ist $p: M \rightarrow M/G$ ein lokaler Diffeomorphismus. Es gibt also eine offene Umgebung U von y , so dass $p: U \rightarrow p(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen mit $q: p(U) \rightarrow U$ die Umkehrabbildung und wir setzen $\bar{\omega}_x = q^*\omega_y$. Wir zeigen nun, dass $\omega = p^*(\bar{\omega})$ für alle Punkte in $p^{-1}(y) = G \cdot y = \{gy \mid g \in G\}$. Es sei also $g \in G$ beliebig. Wir bezeichnen mit

¹⁶³Dies sieht man wie folgt: wir schreiben $U = (0, 1) \times (0, 1)$, dann ist $p: U \rightarrow p(U)$ ein Diffeomorphismus und es ist

$$\int_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2} \bar{dx} \wedge \bar{dy} = \int_{\substack{\uparrow p(U) \\ \text{denn } \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \setminus p(U) \\ \text{ist eine „Nullmenge“}}} \bar{dx} \wedge \bar{dy} = \int_{\substack{\uparrow U \\ \text{Satz 20.2(4)}}} p^*(\bar{dx} \wedge \bar{dy}) = \int_{\substack{\uparrow U \\ \text{obige Diskussion}}} dx \wedge dy = \int_{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 20.2(2)}}} \text{Flächeninhalt von } U = (0, 1)^2 = 1.$$

$\phi_{g^{-1}}: M \rightarrow M$ die Abbildung, welche durch $\phi_{g^{-1}}(x) := g^{-1} \cdot x$ definiert ist. Dann gilt in der Tat

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Definition von } \bar{\omega} & & \text{da } p \circ q = \phi_{g^{-1}} \text{ auf } gU & & \\
 p^*(\bar{\omega})_{gy} & = & p^*(\bar{\omega}_{p(gy)}) & = & p^*(\bar{\omega}_x) & \stackrel{\downarrow}{=} & p^*(q^*(\omega_y)) & = & (p \circ q)^*(\omega_y) & \stackrel{\downarrow}{=} & \phi_{g^{-1}}^*(\omega_y) & = & \omega_{gy}. \\
 & & \uparrow & & \text{denn } p(gy) = p(y) = x & & \uparrow & & \text{nach Seite 114 ist dies ein} & & & & \text{denn } \omega \text{ ist} \\
 & & & & & & & & \text{kontravarianter Funktor} & & & & & \text{G-invariant} \blacksquare
 \end{array}$$



21. DIE DE RHAM-KOHOMOLOGIE VON MANNIGFALTIGKEITEN

In diesem Kapitel führen wir die de Rham-Kohomologiegruppen von Mannigfaltigkeiten ein. Diese werden es uns unter anderem ermöglichen zu zeigen, dass die Sphäre S^2 nicht diffeomorph zum Torus ist.

21.1. Quotientenvektorräume. In diesem kurzen Kapitel erinnern wir an die Definition der Quotientenvektorräume und an einige Eigenschaften derselben. Diese wurden schon in der Linearen Algebra II eingeführt.

Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum.

(1) Für $v, w \in V$ schreiben wir

$$v \sim w \quad :\iff \quad v - w \in U.$$

In Lemma 16.5 hatten wir gesehen, dass dies eine Äquivalenzrelation auf V definiert.¹⁶⁴ Wir bezeichnen mit V/U die Menge aller Äquivalenzklassen. Wir wollen jetzt eine Addition auf V/U definieren. Es seien also $x, y \in V/U$. Dann gibt es $a, b \in V$, so dass $x = a + U$ und $y = b + U$. Wir definieren

$$x + y := a + b + U.$$

Man kann leicht zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl von a und b abhängt.¹⁶⁵ Ganz analog können wir eine Skalarmultiplikation auf V/U einführen. Man kann nun leicht nachweisen, dass mit dieser Addition und dieser Skalarmultiplikation V/U wiederum ein reeller Vektorraum ist. Die „Null“ des Vektorraums V/U ist dabei die Äquivalenzklasse $0 + U = U$. Dieser Vektorraum wird auch **Quotientenvektorraum** genannt.

(2) Die Abbildung

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V/U \\ v &\mapsto v + U \end{aligned}$$

ist surjektiv und ein Homomorphismus. Diese Abbildung wird die **Projektionsabbildung** von V auf V/U genannt.

21.2. Die Definition der de Rham-Kohomologie.

Definition. Es sei M eine Mannigfaltigkeit.

(1) Für $k \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir

$$\Omega_k(M) := \{\text{glatte } k\text{-Formen auf } M\}.$$

Wir setzen zudem $\Omega_{-1}(M) := \{0\}$.

(2) Nach Satz 20.1 (1) definiert das Differential für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine lineare Abbildung

$$d: \Omega_{k-1}(M) \rightarrow \Omega_k(M).$$

(3) Wir sagen eine glatte Differentialform ω ist **geschlossen**, wenn $d\omega = 0$ und wir sagen ω ist **exakt**, wenn es eine Differentialform σ mit $d\sigma = \omega$ gibt. Für jedes k betrachten

¹⁶⁴Wir wählen $a', b' \in V$ mit $x = a' + U$ und $y = b' + U$. Dann gilt in der Tat

$$a' + b' + U = a + b + \underbrace{a' - a + b' - b}_{\in U} + U = a + b + U.$$

¹⁶⁵Jede Äquivalenzklasse ist von der Form $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ für ein $v \in V$.

wir nun

$$\begin{aligned} Z_k(M) &:= \text{Ker}(d: \Omega_k(M) \rightarrow \Omega_{k+1}(M)) = \{\text{alle geschlossenen } k\text{-Formen}\} \\ B_k(M) &:= \text{Im}(d: \Omega_{k-1}(M) \rightarrow \Omega_k(M)) = \{\text{alle exakten } k\text{-Formen}\}. \end{aligned}$$

- (4) Nach Satz 20.1 (1) gilt $d d\omega = 0$ für jede Differentialform $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$. Also ist $B_k(M)$ ein Untervektorraum von $Z_k(M)$. Wir können also den Quotientenvektorraum

$$H^k(M) := Z_k(M)/B_k(M)$$

bilden. Der Vektorraum $H^k(M)$ wird die k -te de Rham-Kohomologiegruppe von M genannt.¹⁶⁶

Beispiele.

- (1) Es sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, welche auf M frei, glatt und eigentlich operiert. Es sei ω eine G -invariante k -Form auf M . Nach Lemma 20.4 gibt es genau eine glatte k -Form $\bar{\omega}$ auf der Mannigfaltigkeit M/G mit $\omega = p^*(\bar{\omega})$. Wenn ω geschlossen ist, dann folgt aus der Tatsache, dass $p: M \rightarrow M/G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, dass auch die induzierte k -Form $\bar{\omega}$ auf M/G geschlossen ist.¹⁶⁷
- (2) Wir bezeichnen mit dx wie üblich die 1-Form auf \mathbb{R}^2 , welche an jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} dx: \tilde{T}_P \mathbb{R}^2 \cong T_P \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_x, v_y) &\mapsto v_x, \end{aligned}$$

und wir definieren dy ganz analog. Wir betrachten nun die beiden 1-Formen \bar{dx} und \bar{dy} auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, welche wir auf Seite 202 eingeführt hatten. Es folgt aus (1), dass \bar{dx} und \bar{dy} geschlossene 1-Formen auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sind.

21.3. Berechnungen der de Rham-Kohomologie. Die de Rham-Kohomologie ordnet also jeder Mannigfaltigkeit M die de Rham-Kohomologiegruppen $H^k(M)$, $k \in \mathbb{N}_0$ zu. Wir wollen im Folgenden einige de Rham-Kohomologiegruppen von Mannigfaltigkeiten bestimmen.

Lemma 21.1. Für eine Mannigfaltigkeit M mit m Komponenten gilt

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}^m.$$

Insbesondere gilt für jede zusammenhängende nichtleere Mannigfaltigkeit M , dass

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}.$$

Beweis. Es sei also M eine Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\begin{aligned} H^0(M) &= \text{Ker}\{\Omega_0(M) \rightarrow \Omega_1(M)\} = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \mid df = 0\}. \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\text{da } \Omega_{-1}(M) = 0 \qquad \text{da } \Omega_0(M) = \{\text{glatte Funktionen } M \rightarrow \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

¹⁶⁶Georges de Rham (1903-1990) war ein Schweizer Mathematiker.

¹⁶⁷Dies sieht man wie folgt. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $b \in M/G$ eine offene Umgebung gibt, so dass $\bar{\omega}$ auf dieser offenen Umgebung geschlossen ist. Es sei also $b \in M/G$. Wir bezeichnen mit $p: M \rightarrow M/G$ die Projektionsabbildung und wir wählen ein $a \in M$ mit $p(a) = b$. Nach Satz 17.2 ist p ein lokaler Diffeomorphismus, es gibt also eine offene Umgebung U von a , so dass $p: U \rightarrow p(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen mit $q = p^{-1}: p(U) \rightarrow U$ die Umkehrabbildung. Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned} d\bar{\omega} &= d(q^*p^*\bar{\omega}) = dq^*(\omega) = q^*(d\omega) = 0. \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\text{da } q^* \circ p^* = (p \circ q)^* = \text{id} \quad \text{da } \omega = p^*(\bar{\omega}) \quad \text{Satz 20.1 (2)} \quad \text{da } d\omega = 0 \end{aligned}$$

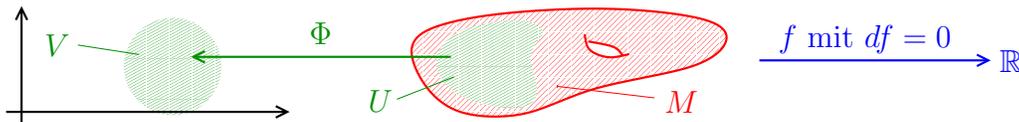
Wir benötigen nun folgende Behauptung.

Behauptung. Die glatten Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $df = 0$ sind gerade die lokal konstanten¹⁶⁸ Funktionen.

Beweis. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Es sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte, wobei V eine offene Kugel ist. Dann gilt

- (1) f ist konstant auf U , genau dann, wenn $f \circ \Phi^{-1}$ konstant auf V ist.
 - (2) $df = 0$ auf $U \iff \Phi^* df = 0 \iff d(\Phi^* f) = 0 \iff d(f \circ \Phi^{-1}) = 0$.
- \uparrow da Φ Diffeomorphismus \uparrow Satz 20.1 (1) \uparrow Definition von $\Phi^* f$

Es genügt nun die Behauptung für Funktionen auf offenen Kugeln $V \subset \mathbb{R}^k$ zu beweisen. Für eine konstante Funktion $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist natürlich $dg = 0$. Umgekehrt, sei $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $dg = 0$. Aus Lemma 10.1 folgt, dass die partiellen Ableitungen von g verschwinden. Der Schrankensatz [Fr2, Satz 12.2] aus Analysis II besagt nun, dass g auch schon konstant ist. □



Zusammengefasst folgt nun, dass

$$H^0(M) = \{\text{alle lokal konstanten Funktionen auf } M\}.$$

Aber die Dimension von diesem reellen Vektorraum ist gerade die Anzahl der Komponenten von M .¹⁶⁹ ■

Bemerkung. Es sei M eine nichtleere kompakte Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 1$. Für $k \in \{0, \dots, n\}$ ist der Vektorraum $H^k(M)$ der Quotient zweier unendlich (sogar überabzählbar) dimensional Vektorräumen. Für $k = 0$ hatten wir gerade gesehen, dass die 0-te de Rham-Kohomologiegruppe $H^0(M)$ endlich dimensional ist. Die analoge Aussage gilt auch für alle $k \in \mathbb{N}$. Die allgemeine Aussage ist aber deutlich schwerer zu beweisen.

Lemma 21.2. Für jede k -dimensionale Mannigfaltigkeit gilt $H^i(M) = 0$ für $i > k$.

Beweis. Jeder Tangentialraum einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist nach Satz 18.5 (1) ein k -dimensionaler Vektorraum. Für $i > k$ folgt also aus der Diskussion auf Seite 108, dass $\wedge^i \tilde{T}_P^* M = 0$ für alle $P \in M$. Insbesondere ist also $\Omega^i(M) = 0$, und damit auch $H^i(M) = 0$. ■

Satz 21.3. Für jede orientierbare geschlossene nichtleere k -dimensionale Mannigfaltigkeit gilt $\dim H^k(M) \geq 1$.

Bemerkung. Es gilt die stärkere Aussage, dass die Dimension von $H^k(M)$ gerade gegeben ist durch die Anzahl der Komponenten von M . Wir können diese Aussage in dieser Vorlesung nicht beweisen.

¹⁶⁸Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal konstant*, wenn es zu jedem Punkt $P \in M$ eine offene Umgebung U gibt, so das $f|_U$ konstant ist.

¹⁶⁹Warum ist dies der Fall?

Beweis. Es ist

$$H^k(M) = Z_k(M)/B_k(M) = \text{Ker}\{d: \Omega_k(M) \rightarrow \Omega_{k+1}(M)\}/B_k(M) = \Omega_k(M)/B_k(M).$$

↑
nach dem Beweis von Lemma 21.2 ist $\Omega_{k+1}(M) = 0$

Da M orientierbar und kompakt ist, können wir folgende lineare Abbildung einführen:

$$\Theta: \Omega_k(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \int_M \omega.$$

Es sei nun $\omega \in B_k(M)$. Es gibt also ein $\eta \in \Omega_{k-1}(M)$ mit $d\eta = \omega$. Dann gilt

$$\Theta(\omega) = \Theta(d\eta) = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = \int_{\emptyset} \eta = 0.$$

Satz 20.3 von Stokes da M geschlossen

Wir haben also gezeigt, dass $B_k(M) \subset \text{Ker}(\Theta)$. Die lineare Abbildung Θ induziert also eine wohldefinierte lineare Abbildung

$$\Theta: H^k(M) = \Omega_k(M)/B_k(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

Es genügt nun also zu zeigen, dass es eine k -Form ω auf M gibt mit $\Theta(\omega) \neq 0$. Da M nicht-leer ist, können wir einen Punkt $P \in M$ finden. Wir wählen eine orientierungserhaltende Karte $\Phi: U \rightarrow V$ und eine nichtnegative glatte Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(\Phi(P)) > 0$ und kompakten Träger.¹⁷⁰ Wir betrachten nun die k -Form ω auf M , welche gegeben ist durch

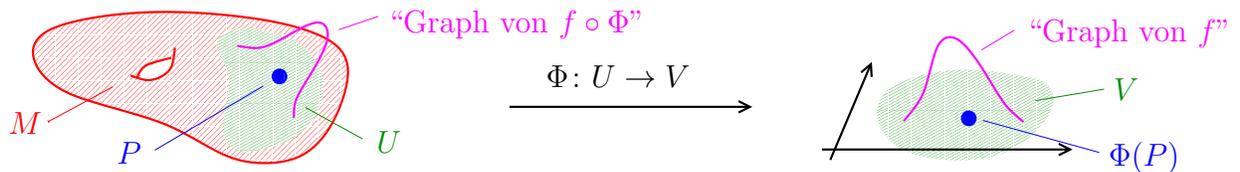
$$\omega = \Phi^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) \quad \text{auf } U$$

und $\omega = 0$ außerhalb von U .

Dies ist eine glatte k -Form auf M und es gilt

$$\int_M \omega \stackrel{\text{Satz 20.2 (3)}}{=} \int_U \omega \stackrel{\text{Satz 20.2 (2)}}{=} \int_U \Phi^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) \stackrel{\text{Satz 20.2 (2)}}{=} \int_V f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \int_V f, > 0.$$

folgt aus Satz 20.2 (4), da Φ orientierungserhaltend denn die Funktion f ist nicht-negativ, stetig und für $\Phi(P)$ ist die Funktion positiv ■



21.4. Die Funktorialität der de Rham-Kohomologie.



¹⁷⁰Warum gibt es solch eine Funktion?

Satz 21.4. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung

$$\begin{aligned} f^*: H^k(N) &\rightarrow H^k(M) \\ [\omega] &\mapsto [f^*\omega] \end{aligned}$$

wohldefiniert und eine lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen.

Beweis. Wir müssen folgende drei Aussagen beweisen:

- (1) wenn $d\omega = 0$, dann ist auch $d(f^*\omega) = 0$,
- (2) wenn $[\omega] = [\sigma] \in H^k(N)$ dann ist auch $[f^*\omega] = [f^*\sigma] \in H^k(M)$,
- (3) f^* ist eine lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen.

Die erste Aussage folgt sofort aus der Tatsache, siehe Satz 20.1, dass $df^* = f^*d$. Es seien nun ω und σ zwei geschlossene k -Formen auf M mit $[\omega] = [\sigma]$. Dann gilt $[\omega - \sigma] = [\omega] - [\sigma] = 0$. Dies wiederum bedeutet, dass es eine $(k-1)$ -Form δ auf M gibt mit

$$\omega - \sigma = d\delta.$$

Dann gilt auch

$$f^*\omega - f^*\sigma = f^*(\omega - \sigma) = f^*(d\delta) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 20.1}}}{=} d(f^*\delta)$$

Dies impliziert, dass $[f^*\omega] = [f^*\sigma] \in H^k(M)$. Wir haben damit die zweite Behauptung bewiesen.

Es ist nun leicht zu sehen, dass die Abbildung wohldefiniert und linear ist. ■

Satz 21.5. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren die Abbildungen

$$M \mapsto H^k(M)$$

und

$$(f: M \rightarrow N) \mapsto (f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M))$$

einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten zu der Kategorie $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}$ der reellen Vektorräume.

Beweis. Im Hinblick auf Satz 21.4 genügt es folgende zwei Aussagen zu beweisen:

- (1) für eine Mannigfaltigkeit M gilt $\text{id}_M^* = \text{id}_{H^k(M)}$,
- (2) für glatte Abbildungen $f: L \rightarrow M$ und $g: M \rightarrow N$ gilt $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Beide Aussagen folgen leicht aus den Definitionen. ■

Das folgende Korollar besagt insbesondere, dass diffeomorphe Mannigfaltigkeiten isomorphe de Rham-Kohomologiegruppen besitzen.

Korollar 21.6. Es sei $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten, dann ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die induzierte Abbildung $f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Aussage folgt, wie Beweis von Korollar 9.3, leicht aus der Funktorialität der de Rham Kohomologiegruppen. ■

Definition. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Wir sagen f besitzt ein Linksinverses, wenn es eine glatte Abbildung $g: N \rightarrow M$ gibt, so dass $g \circ f = \text{id}_M$.

Lemma 21.7. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, welche ein Linksinverses besitzt. Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die induzierte Abbildung $f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ ein Epimorphismus.

Beispiel. Es sei $y_0 \in S^1$ beliebig. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} f: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 & \text{besitzt das Linksinverse} & g: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \\ x \mapsto (x, y_0) & & (x, y) \mapsto x. \end{array}$$

Es folgt aus Lemma 21.7, dass $f^*: H^1(S^1 \times S^1) \rightarrow H^1(S^1)$ ein Epimorphismus ist. Satz 21.3 besagt, dass $H^1(S^1) \neq 0$, also ist auch $H^1(S^1 \times S^1) \neq 0$.

Beweis. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und es sei $g: N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung mit $g \circ f = \text{id}_M$. Dann ist

$$\text{id}_{H^k(M)} \underset{\text{Satz 21.5}}{=} \text{id}_M^* = (g \circ f)^* \underset{\text{Satz 21.5}}{=} f^* \circ g^*.$$

Da $f^* \circ g^* = \text{id}: H^k(M) \rightarrow H^k(M)$ insbesondere ein Epimorphismus ist, ist auch die zweite Abbildung $f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ ein Epimorphismus. ■

21.5. Die Sphäre und der Torus sind nicht diffeomorph. In diesem Teilkapitel wollen wir beweisen, dass die Sphäre und der Torus nicht diffeomorph sind. Wir werden dabei folgenden Satz verwenden.

Satz 21.8. Es ist $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$.

Bemerkung. Mit etwas mehr Aufwand kann man auch beweisen, dass für alle $n \geq 0$ und für alle $k \geq 1$ gilt, dass $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$.

Beweis. Wir hatten den Satz, mit etwas anderer Sprache, schon als Übungsblatt 9 Aufgabe 2 gelöst. Der Vollständigkeit halber wollen wir das Argument noch mal ausführen.

Wir müssen also zeigen, dass jede geschlossene 1-Form auf \mathbb{R}^2 auch schon exakt ist. Mit anderen Worten, wir müssen folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Es sei

$$\omega = f(x, y) \cdot dx + g(x, y) \cdot dy$$

eine 1-Form mit $d\omega = 0$, wir müssen zeigen, dass es eine glatte 0-Form c gibt, so dass $dc = \omega$. Wir müssen also eine glatte Funktion $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ finden, mit

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial c}{\partial y} \cdot dy}_{= dc, \text{ nach Lemma 10.1}} = f(x, y) \cdot dx + g(x, y) \cdot dy.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = d\omega &= d(f \cdot dx + g \cdot dy) = df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot dy \right) \wedge dy = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \cdot dx \wedge dy. \end{aligned}$$

\uparrow Lemma 10.1 \uparrow denn $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$
und $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$

Es folgt also, dass

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Zur Erinnerung, wir müssen eine Funktion $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{\partial c}{\partial x} = f(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial c}{\partial y} = g(x, y).$$

Es liegt nahe, als erstes eine Stammfunktion von f bezüglich x zu betrachten. Für $(x, y) \in U$ definieren wir nun

$$a(x, y) := \int_{s=0}^{s=x} f(s, y) ds.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{s=0}^{s=x} f(s, y) ds = f(x, y).$$

↑
HDI

Zudem gilt

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{s=0}^{s=x} f(s, y) ds = \int_{s=0}^{s=x} \frac{\partial f}{\partial y}(s, y) ds = \int_{s=0}^{s=x} \frac{\partial g}{\partial s}(s, y) ds = g(x, y) - g(0, y).$$

↑
Satz 3.10 angewandt
auf das Rechteck $[0, x] \times [0, y]$

↑
denn $\frac{\partial f}{\partial y}(s, y) = \frac{\partial g}{\partial s}(s, y)$

Wir erhalten also die gewünschte partielle Ableitung bezüglich x . Zudem erhalten wir fast die gewünschte partielle Ableitung bezüglich y , aber im Moment erhalten wir noch den Extraterm $-g(0, y)$. Wir können nun jedoch noch eine geeignet gewählte Funktion in y hinzuaddieren. In der Tat kann man nun leicht nachprüfen, dass

$$c(x, y) := a(x, y) + \int_{s=0}^{s=y} g(0, s) ds$$

die gewünschte Eigenschaft besitzt. ■

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 21.9. Die Sphäre S^2 ist nicht diffeomorph zum Torus $T = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Beweis. Nehmen wir also an, es gibt einen Diffeomorphismus $\Phi: S^2 \rightarrow T := S^1 \times S^1$. Wir bezeichnen mit $N = (0, 0, 1)$ den „Nordpol“ von S^2 und wir schreiben $\Phi(N) =: (z, w)$. Die Einschränkung von Φ auf $S^2 \setminus \{N\} \rightarrow T \setminus \{\Phi(N)\}$ ist ebenfalls ein Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten.

Korollar 21.6 besagt, dass diffeomorphe Mannigfaltigkeiten isomorphe Kohomologiegruppen besitzen. Es genügt nun also folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es ist $H^1(S^2 \setminus \{N\}) = 0$ und es ist $H^1(T \setminus \{\Phi(N)\}) \neq 0$.

Beweis. Wie auf Seite 23 betrachten wir nun die stereographische Projektion

$$\Theta: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Dies gibt uns einen Diffeomorphismus von der Mannigfaltigkeit $S^2 \setminus \{N\}$ zu \mathbb{R}^2 . Es folgt nun aus Satz 21.8 und aus Korollar 21.6, dass $H^1(S^2 \setminus \{N\}) = 0$.

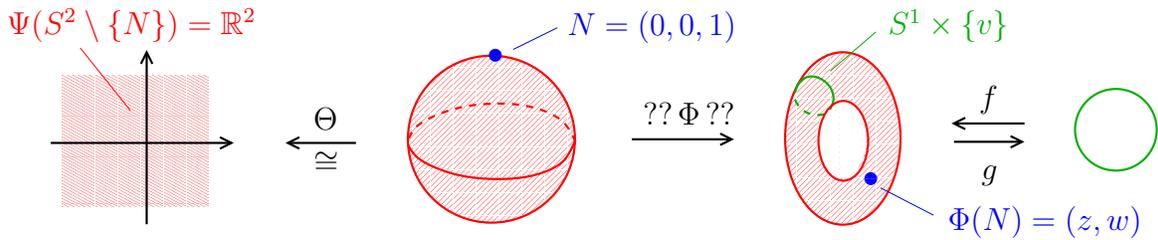
Der Beweis, dass $H^1(T \setminus \{\Phi(N)\}) \neq 0$ ist fast identisch zu dem Beweis auf Seite 209, dass $H^1(T) \neq 0$. Wir wählen ein $v \neq w$. Dann ist $S^1 \times \{v\} \subset (S^1 \times S^1) \setminus \{(z, w)\} = T \setminus \{\Phi(N)\}$.

Die Abbildung

$$f: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 \setminus \{\Phi(N)\} \quad \text{besitzt das Linksinverse} \quad g: (S^1 \times S^1) \setminus \{\Phi(N)\} \rightarrow S^1$$

$$x \mapsto (x, v) \quad \quad \quad (x, y) \mapsto x.$$

Es folgt aus Lemma 21.7, dass $f^*: H^1((S^1 \times S^1) \setminus \{\Phi(N)\}) \rightarrow H^1(S^1)$ ein Epimorphismus ist. Satz 21.3 besagt, dass $H^1(S^1) \neq 0$. Also ist auch $H^1((S^1 \times S^1) \setminus \{\Phi(N)\}) \neq 0$. ■



Bemerkung. Der vorherige Satz besagt also, dass die Sphäre S^2 nicht diffeomorph zum Torus $T = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist. A priori könnte es allerdings sein, dass die Sphäre S^2 homöomorph zum Torus T ist. In der Tat gibt es Mannigfaltigkeiten, welche homöomorph aber nicht diffeomorph sind. Wir werden jedoch in der Vorlesung Algebraische Topologie II sehen, dass die Sphäre und der Torus in der Tat nicht homöomorph sind.

21.6. Das Dachprodukt auf de Rham-Kohomologie (*). Wir beschließen das Skript mit einem sehr kurzen Teilkapitel, welches wir nicht mehr in der Vorlesung behandelt hatten, und damit auch nicht mehr offizieller Teil der Vorlesung ist.

Satz 21.10. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und es seien $\omega \in \Omega_k(M)$, $\sigma \in \Omega_l(M)$. Es ist

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \cdot \omega \wedge d\sigma.$$

Beweis. Diesen Satz kann man problemlos mithilfe von Satz 12.2 (4) beweisen. ■

Korollar 21.11. Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\wedge: H^k(M) \times H^l(M) \rightarrow H^{k+l}(M)$$

$$([\omega], [\sigma]) \mapsto [\omega] \wedge [\sigma] := [\omega \wedge \sigma]$$

eine wohldefinierte Abbildung. Diese hat zudem folgende Eigenschaften:

(1) die folgende Abbildung ist bilinear:

$$\wedge: H^k(M) \times H^l(M) \rightarrow H^{k+l}(M)$$

$$(a, b) \mapsto a \wedge b$$

(2) für alle $a \in H^k(M)$, $b \in H^l(M)$ und $c \in H^m(M)$ ist

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

(3) für alle $a \in H^k(M)$ und $b \in H^l(M)$ ist

$$b \wedge a = (-1)^{\text{Grad}(a) \cdot \text{Grad}(b)} \cdot a \wedge b.$$

Beweis. Das Korollar kann man leicht mithilfe von Satz 11.6 und Satz 21.10 beweisen. ■

Beispiel. Wir betrachten die beiden 1-Formen \overline{dx} und \overline{dy} auf dem Torus $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, welche wir auf Seite 202 eingeführt hatten. Wir hatten auf Seite 205 bewiesen, dass \overline{dx} und

\overline{dy} geschlossen sind. Hierbei ist $[\overline{dx}] \wedge [\overline{dy}] = [\overline{dx} \wedge \overline{dy}]$. Wir hatten auf Seite 202 gezeigt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2} \overline{dx} \wedge \overline{dy} = 1.$$

Es folgt nun aus dem Beweis von Seite 206, dass $[\overline{dx} \wedge \overline{dy}] \neq 0 \in H^2(T)$. Zudem folgt aus Korollar 21.11 (1), dass $[\overline{dx}] \neq 0 \in H^1(T)$ und $[\overline{dy}] \neq 0 \in H^1(T)$. Außerdem folgt aus Korollar 21.11 (3), dass $[\overline{dx}]$ und $[\overline{dy}]$ linear unabhängig in $H^1(T)$ sind.¹⁷¹ Wir haben also gezeigt, dass $\dim H^1(T) \geq 2$.¹⁷²

Definition. Für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M setzen wir nun¹⁷³

$$H^*(M) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(M).$$

Für $a_i, b_i \in H^i(M)$, $i = 0, \dots, n$ definieren wir

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \wedge \left(\sum_{i=0}^n b_i \right) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \underbrace{a_i \wedge b_j}_{\in H^{i+j}(M)}$$

Es folgt aus Korollar 21.11, dass mit dieser Multiplikation $H^*(M)$ ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring ist.¹⁷⁴

Satz 21.12. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} M &\mapsto H^*(M) \\ (f: M \rightarrow N) &\mapsto (f^*: H^*(N) \rightarrow H^*(M)) \end{aligned}$$

definieren einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten zu der Kategorie der Ringe.

Beweis. Auf Seite 113 hatten wir schon erwähnt, dass für eine lineare Abbildung $f: U \rightarrow V$ zwischen Vektorräumen und für alle $\alpha \in \wedge^k V^*$ und $\beta \in \wedge^l V^*$ gilt, dass

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Mithilfe dieser Bemerkung kann man nun, ganz analog zu Satz 21.4, den Satz beweisen. ■

¹⁷¹Wenn $[\overline{dx}]$ und $[\overline{dy}]$ linear abhängig wären, dann gäbe es ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $[\overline{dx}] = \lambda \cdot [\overline{dy}]$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} [\overline{dx}] \wedge [\overline{dy}] &= \lambda \cdot [\overline{dy}] \wedge [\overline{dy}] = -\lambda \cdot [\overline{dy}] \wedge [\overline{dy}] = -[\overline{dx}] \wedge [\overline{dy}], \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Korollar 21.11 (3)} \end{aligned}$$

d.h. es ist $[\overline{dx}] \wedge [\overline{dy}] = 0$.

¹⁷²In der Tat gilt $H^0(T) \cong \mathbb{R}$, $H^1(T) \cong \mathbb{R}^2$ und $H^2(T) \cong \mathbb{R}$. Aber wir können das mit den bisher erarbeiteten Methoden nicht beweisen.

¹⁷³Für Vektorräume V_0, \dots, V_n bezeichnen wir hierbei mit

$$\bigoplus_{i=0}^n V_i := V_0 \oplus \dots \oplus V_n := \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$$

die direkte Summe von V_0, \dots, V_n .

¹⁷⁴Besitzt der Ring $H^*(M)$ ein multiplikativ neutrales Element?

22. AUSBLICK

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, dass die 2-dimensionale Sphäre und der Torus nicht diffeomorph sind. Wir haben dies dadurch bewerkstelligt, dass wir einen Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten zu der Kategorie der Vektorräume eingeführt hatten. Dieser Funktor hat es uns dann ermöglicht Mannigfaltigkeiten mithilfe von der (deutlich einfacheren Theorie) der Vektorräume zu studieren.

In den Vorlesungen Algebraische Topologie I-III werden wir ganz ähnlich verfahren. Wir werden Funktoren von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen und in die Kategorie der Vektorräume einführen. Diese ermöglichen es uns topologische Probleme mithilfe von algebraischen Methoden zu studieren.

Insbesondere werden wir in der Algebraische Topologie III die „singuläre Kohomologiegruppen“ für beliebige topologische Räume einführen. Für Mannigfaltigkeiten sind diese isomorph zu der de Rham-Kohomologie. Wir werden zudem viele Eigenschaften der Kohomologiegruppen kennenlernen, welche es ermöglichen diese für viele Mannigfaltigkeiten zu bestimmen.