

ANALYSIS II - SOMMERSEMESTER 2021

STEFAN FRIEDL

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	4
1. Metrische Räume	5
1.1. Normierte Vektorräume	5
1.2. Definition von metrischen Räumen	7
1.3. Offene und abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen	9
1.4. Exkurs: Etwas Mengenlehre	11
1.5. Weitere Eigenschaften von offenen Mengen	12
1.6. Abgeschlossene Teilmengen	13
1.7. Die Hausdorff-Eigenschaft von metrischen Räumen	15
2. Konvergente Folgen und stetige Abbildungen	16
2.1. Konvergenz von Folgen	16
2.2. Cauchy-Folgen	18
2.3. Stetige Abbildungen	19
2.4. Exkurs: Urbilder von Abbildungen	22
2.5. Charakterisierung von stetigen Abbildungen	23
2.6. Homöomorphismen	26
3. Kompakte Mengen	28
3.1. Definition von kompakten Mengen	28
3.2. Der Satz von Heine–Borel	29
3.3. Kompakte Mengen und stetige Abbildungen	35
4. Kurven in $\mathbb{R}^n$	39
4.1. Definition und Beispiele	39
4.2. Die Länge von Kurven	39
4.3. Stetig differenzierbare Kurven	42
4.4. Beweis von Satz 4.2	45
4.5. Parametertransformationen	47
5. Partielle Ableitungen	49
6. Differenzierbarkeit	54
6.1. Grenzwerte von Abbildungen	54
6.2. Das Landau-Symbol o	54
6.3. Differenzierbarkeit	55
6.4. Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen	57

6.5.	Norm von Matrizen	62
6.6.	Die Kettenregel	63
7.	Gradient und Richtungsableitungen	66
7.1.	Exkurs: Das Skalarprodukt und orthogonale Matrizen	66
7.2.	Exkurs: Winkel	69
7.3.	Der Gradient	70
7.4.	Richtungsableitungen	72
7.5.	Gradienten und Niveaulinien	73
8.	Exkurs: Der Spektralsatz	76
8.1.	Ähnliche Matrizen und die Spur einer Matrix	76
8.2.	Eigenwerte	77
8.3.	Existenz von Eigenwerten	80
8.4.	Euklidische und unitäre Vektorräume	82
8.5.	Selbstadjungierte Endomorphismen	84
8.6.	Der Spektralsatz	86
8.7.	Orthogonale Matrizen	88
9.	Der Satz von Taylor	91
9.1.	Die Taylorpolynome aus der Analysis I	91
9.2.	Die Taylorformel im $\mathbb{R}^n$	93
9.3.	Beweis des Satz 9.5 von Taylor	95
9.4.	Das zweite Taylorpolynom und die Hesse-Matrix	98
10.	Lokale Extrema	100
10.1.	Definition von lokalen Extrema	100
10.2.	Lokale Extrema I	101
10.3.	Exkurs: Definite Bilinearformen	103
10.4.	Lokale Extrema II	106
11.	Globale Extrema	110
11.1.	Das Innere und der Rand	110
11.2.	Polarkoordinaten, zylindrische Koordinaten und sphärische Koordinaten	114
11.3.	Parametrisierungen	117
12.	Die Norm von Matrizen und Abschätzungen von Funktionswerten	119
13.	Banachräume und der Banachsche Fixpunktsatz	122
13.1.	Banachräume	122
13.2.	Der Banachsche Fixpunktsatz	126
14.	Der Satz über die Umkehrabbildung	131
14.1.	Erinnerung an Analysis I	131
14.2.	Der Satz über die Umkehrabbildung	132
15.	Tangentialvektoren und Lagrange-Multiplikatoren	139
15.1.	Tangentialvektoren	139
15.2.	Der Satz vom regulären Wert	140
15.3.	Die Methode der Lagrangemultiplikatoren	144
16.	Differentialgleichungen: Definition und Beispiele	148

16.1.	Definition von Differentialgleichungen	148
16.2.	Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	150
16.3.	Homogene lineare Differentialgleichungen	152
16.4.	Inhomogene lineare Differentialgleichungen	153
17.	Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz	155
17.1.	Lipschitz-stetige Abbildungen	155
17.2.	Der Existenzsatz von Picard-Lindelöf	157
17.3.	Das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren	161
17.4.	Der Eindeutigkeitssatz	163
18.	Differentialgleichungen höherer Ordnung	167
19.	Lineare Differentialgleichungen	171
19.1.	Beweis von Satz 19.1 (*)	171
19.2.	Homogene lineare Differentialgleichungen	174
19.3.	Inhomogene lineare Differentialgleichungen	176
20.	Der Fluß von Differentialgleichungen	180
20.1.	Exkurs: Volumen und Matrizen	180
20.2.	Differentialgleichungen in Abhängigkeit vom Anfangspunkt	181
20.3.	Die Wronski-Determinante und der Satz von Liouville	184
21.	Homogene lineare autonome Differentialgleichungen	187
22.	Homogene lineare autonome Differentialgleichungen in Dimension 2	191
22.1.	Reelle 2×2 -Matrizen	191
22.2.	Der reell diagonalisierbare Fall	193
22.3.	Der komplex diagonalisierbare Fall	195
22.4.	Der nicht diagonalisierbare Fall	197

LITERATUR

- [Ba] M. Bader. *Space-Filling Curves*, Texts in Computational Science and Engineering, 9, Springer (2013).
- [Br1] T. Bröcker. *Analysis I*, Spektrum Akademischer Verlag (1995).
- [Br2] T. Bröcker. *Analysis II*, Spektrum Akademischer Verlag (1995).
- [Br3] T. Bröcker. *Analysis III*, Spektrum Akademischer Verlag (1992).
- [Fi] G. Fischer. *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*, Vieweg Verlag (2002).
- [Fo1] O. Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Springer Spektrum (2015).
- [Fo2] O. Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer Spektrum (2017).
- [Fr1] S. Friedl. *Analysis 1*, Vorlesungsskript (2021).
- [K1] K. Königsberger. *Analysis 1*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag (2004). Königsberger, Konrad
- [K2] K. Königsberger. *Analysis 2*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag (2004).
- [N1] N. Naumann. *Lineare Algebra I*, Vorlesungsskript (2021).
- [N2] N. Naumann. *Lineare Algebra II*, Vorlesungsskript (2021).
- [W] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer Verlag, 7. Auflage (2000).

1. METRISCHE RÄUME

In diesem Semester wollen wir uns hauptsächlich mit Abbildungen der Form $X \rightarrow \mathbb{R}^m$ beschäftigen, wobei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Ein erstes Ziel wird sein die Stetigkeit von solchen Abbildungen zu betrachten. Allerdings werden wir die Stetigkeit nicht nur für solche Abbildungen betrachten, sondern etwas allgemeiner für Abbildungen zwischen “metrischen Räumen”. Diese Verallgemeinerung wird uns im weiteren Verlauf noch von Nutzen sein.

In diesem Kapitel führen wir also erst einmal die metrischen Räume ein, und wir führen zudem einige zugehörige grundlegende Begriffe ein, bevor wir uns dann im nächsten Kapitel der Stetigkeit zuwenden.

1.1. Normierte Vektorräume. In diesem Teilkapitel führen wir die normierten Vektorräume ein. Diese werden eine Brücke zwischen der Analysis II und der Linearen Algebra schlagen.

Definition. Ein **normierter Vektorraum** ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ und einer **Norm auf V** , d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (positive Definitheit)
- (2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ (Homogenität)
- (3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

Im Folgenden werden wir verschiedene Normen auf $\mathbb{R}^n$ betrachten. Wir werden dabei immer wieder folgende Konvention verwenden.

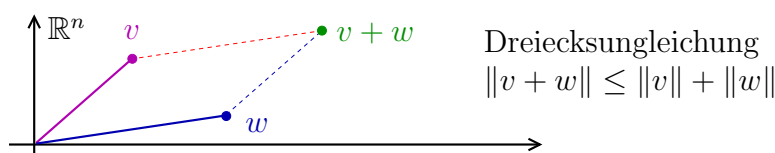
Konvention. Wenn x ein Punkt in $\mathbb{R}^n$ ist, dann bezeichnen wir für $i \in \{1, \dots, n\}$ mit x_i die i -te Koordinate von x . Insbesondere ist also $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Das folgende Lemma gibt uns ein wichtiges Beispiel einer Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.1. Auf $V = \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x_1, \dots, x_n) = x &\mapsto \|x\| := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad (\text{Euklidische Norm}) \end{aligned}$$

eine Norm.¹



¹Manchmal bezeichnen wir diese auch mit $\|\cdot\|_{\text{eukl}}$ um Verwechslungen zu vermeiden.

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften einer Norm kann man leicht nachweisen. Wir beweisen deswegen nur die dritte Aussage. Wir machen folgende Vorbereitung:

(1) Wir bezeichnen mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(2) Für jedes $u \in \mathbb{R}^n$ gilt, wie man leicht nachrechnen kann, $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

Es seien nun $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wir müssen zeigen, dass $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \stackrel{\downarrow}{=} \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \stackrel{\downarrow}{=} \langle v, v \rangle + 2 \cdot \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &\leq \langle v, v \rangle + 2 \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle} + \langle w, w \rangle = (\sqrt{\langle v, v \rangle} + \sqrt{\langle w, w \rangle})^2 = (\|v\| + \|w\|)^2. \\ &\quad \uparrow \\ &\text{die Schwarzsche Ungleichung aus der Linearen Algebra [N1, Satz 19.7],} \\ &\text{welche wir anwenden können da das Skalarprodukt positiv definit ist,} \\ &\text{besagt, dass } \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen auf beiden Seiten erhalten wir, dass $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. ■

Beispiele von Normen. Auf $V = \mathbb{R}^n$ gibt es auch viele andere interessante Normen. Beispielsweise folgt aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} \|x\|_{\max} &:= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} && \text{(Maximumsnorm)} \\ \|x\|_{\text{sum}} &:= \sum_{i=1}^n |x_i| && \text{(Summennorm)} \end{aligned}$$

Normen auf $\mathbb{R}^n$ definieren.

In Übungsblatt 1 werden Sie folgendes Lemma beweisen.

Lemma 1.2. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$|x_i| \leq \|x\|_{\max} \leq \|x\|_{\text{eukl}} \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_{\max}.$$

Konvention. Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{R}^n$ durchgehend als normierten Vektorraum bezüglich der euklidischen Norm $\| - \|$, außer wir sagen explizit etwas anderes.

Wir wollen jetzt noch weitere interessante Beispiele von normierten Vektorräumen geben. Wir führen dazu erst einmal einen neuen Vektorraum ein.

Definition. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, dann ist

$$F(X, \mathbb{R}) := \text{alle beschränkten Funktionen } X \rightarrow \mathbb{R}$$

ein Vektorraum, denn je zwei Abbildungen² kann man punktweise addieren, und jede Abbildung kann man mit einem Skalar multiplizieren, und wir erhalten jeweils wiederum eine beschränkte Abbildung.³

²Genauer gesagt, wenn $\varphi, \psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen sind, dann definieren wir $\varphi + \psi$ als die Abbildung, welche für $x \in X$ den Wert $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$ annimmt.

³Man kann zudem leicht verifizieren, dass mit diesen Verknüpfungen alle Axiome eines reellen Vektorraums erfüllt sind. Das Nullelement im Vektorraum $F(X, \mathbb{R})$ ist hierbei die Abbildung, welche jedem Punkt $x \in X$ den Wert $0 \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Im folgenden Beispiel sehen wir nun, dass wir auf solchen Vektorräumen eine interessante Norm definieren können.

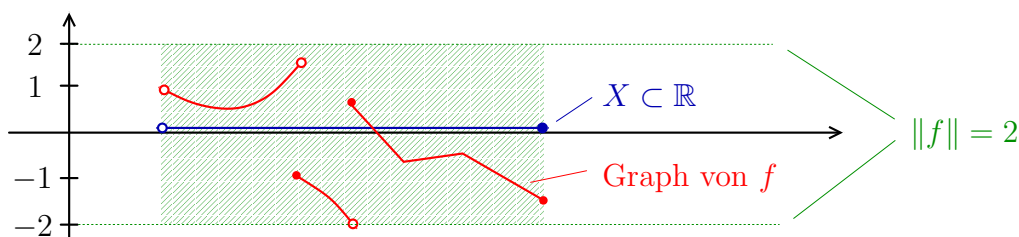
Beispiel. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge. Dann bildet der Vektorraum

$$F(X, \mathbb{R}) = \text{alle beschränkten Funktionen } X \rightarrow \mathbb{R},$$

zusammen mit der *Supremumsnorm*

$$\|f\| := \sup \{ |f(x)| \mid x \in X \}$$

einen normierten Vektorraum.⁴



1.2. Definition von metrischen Räumen. Jetzt wollen wir endlich die oben versprochene Definition eines metrischen Raums geben.

Definition. Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer **Metrik** d auf X , d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \\ (x, y) &\mapsto d(x, y), \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (positive Definitheit)
- (2) für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
- (3) für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Wir nennen $d(x, y)$ manchmal den Abstand von x zu y .

Folgender Satz gibt uns gleich viele Beispiele von metrischen Räumen.

Satz 1.3. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (v, w) &\mapsto d(v, w) := \|v - w\| \end{aligned} \quad \text{eine Metrik auf } V.$$

⁴Wir haben diesen normierten Vektorraum schon am Ende von Analysis I kennengelernt. Es ist offensichtlich, dass $\|\cdot\|$ die ersten beiden Eigenschaften einer Norm erfüllt. Wir müssen noch zeigen, dass $\|\cdot\|$ die Dreiecksungleichung erfüllt. Es seien also $f, g \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup\{|f(x) + g(x)| \mid x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| \mid x \in X\} + \sup\{|g(x)| \mid x \in X\} = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Beweis. Die drei Eigenschaften einer Metrik folgen leicht aus den drei Eigenschaften einer Norm. Beispielsweise gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$d(v, w) = \|v - w\| = \|(-1) \cdot (w - v)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft (2) einer Norm}}}{=} |-1| \cdot \|w - v\| = \|w - v\| = d(w, v).$$

Die anderen beiden Aussagen kann man ebenso leicht beweisen. ■

Beispiele von Metriken auf $X = \mathbb{R}^n$.

- (1) In Lemma 1.1 hatten wir die euklidische Norm eingeführt. Es folgt also nun aus Satz 1.3, dass

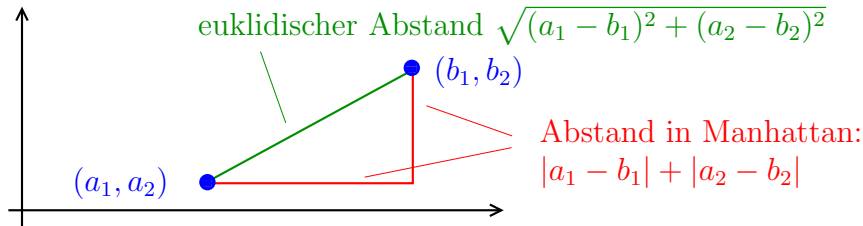
$$d(x, y) := \|x - y\|_{\text{eukl}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Wir bezeichnen diese als die *euklidische Metrik*.

- (2) Auf Seite 6 hatten wir die Summennorm eingeführt. Wenden wir nun Satz 1.3 darauf an, sehen wir, dass

$$d(x, y) := \|x - y\|_{\text{sum}} = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$$

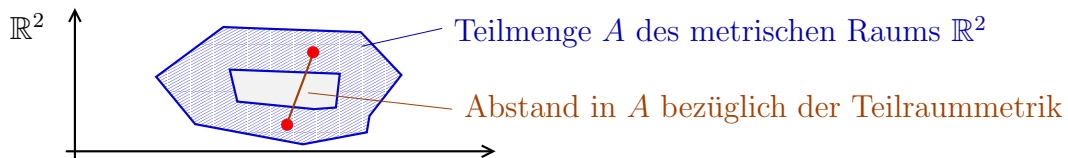
eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Diese wird manchmal die *Manhattan-Metrik*⁵ genannt.



Lemma 1.4. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist die Einschränkung der Metrik auf A , eine Metrik auf A . Wir bezeichnen diese Metrik als die Teilraummetrik auf A .*

Beweis. Das Lemma folgt sofort aus den Definitionen. ■

Konvention. Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{R}^n$ als metrischen Raum bezüglich der euklidischen Metrik. Dies wiederum bedeutet insbesondere, dass wir $\mathbb{R}$ wie üblich durchgehend mit der Metrik $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$ betrachten. Darüber hinaus betrachten wir jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ mit der dazugehörigen Teilraummetrik.

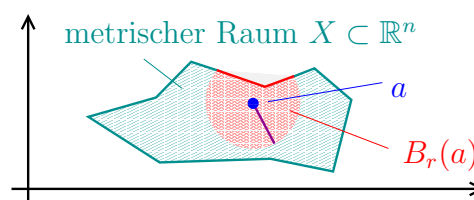
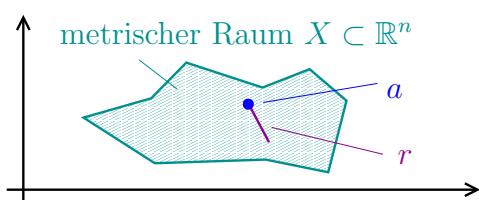
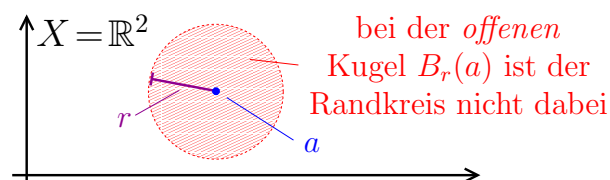
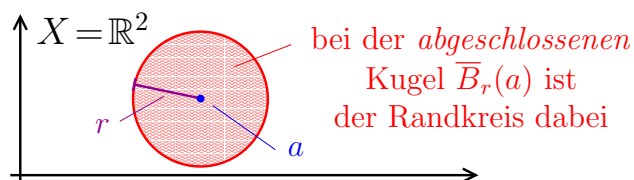


⁵Warum? Wenn Sie zu Fuss von der Ecke “25th Street 6th Avenue” zu “59th Street, 3rd Avenue” gehen wollen, wie messen Sie die Distanz bezüglich der Koordinaten (25, 6) und (59, 3)?

1.3. Offene und abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen. Wir führen folgende harmlose Notation ein.

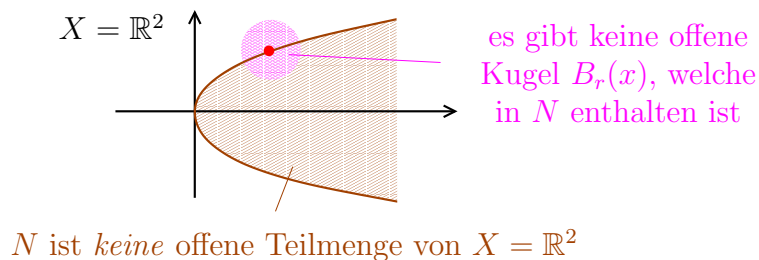
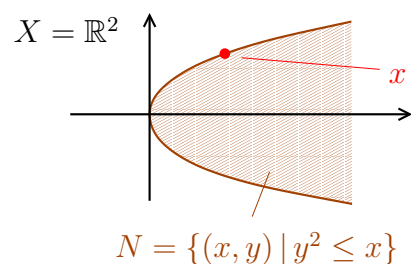
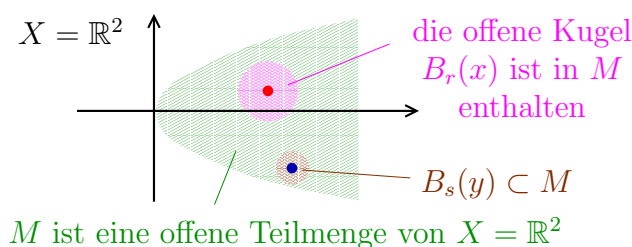
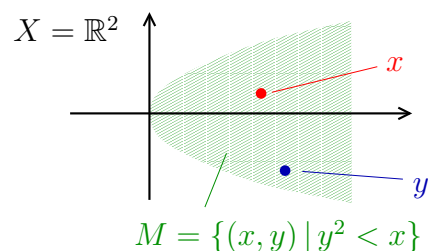
Notation. Sei (X, d) ein metrischer Raum, es sei $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} \overline{B}_r(a) &:= \{b \in X \mid d(a, b) \leq r\} && \text{als die abgeschlossene Kugel von Radius } r \text{ um } a \\ B_r(a) &:= \{b \in X \mid d(a, b) < r\} && \text{die offene Kugel von Radius } r \text{ um } a. \end{aligned}$$



Folgende Definition ist etwas weniger harmlos.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **offen**, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset M$.



Wir hatten $B_r(x)$ als “offene Kugel” bezeichnet. Das folgende Lemma besagt, dass dies in der Tat eine korrekte Verwendung des Adjektivs “offen” ist.

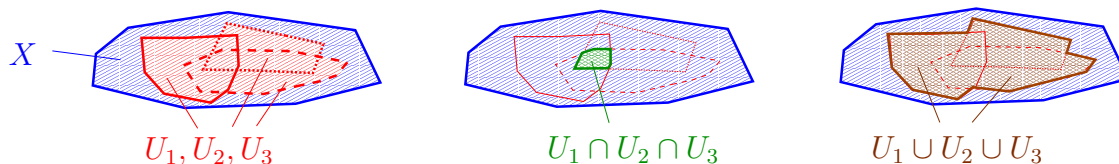
- (2) Die leere Menge besitzt per Definition kein einziges Element, also gibt es bei der Offenheit auch nichts zu überprüfen, d.h. die leere Menge ist offen. ■

1.4. **Exkurs: Etwas Mengenlehre.** Bevor wir fortfahren wollen wir noch an einige grundlegende Definitionen und Aussagen aus der Mengenlehre erinnern.

Notation. Es sei X eine Menge. Für Teilmengen $A_1, \dots, A_k$ definieren wir

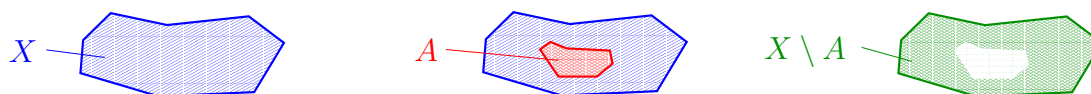
$A_1 \cap \dots \cap A_k :=$ alle $x \in X$, welche in *allen* A_i liegen (Durchschnitt)

$A_1 \cup \dots \cup A_k :=$ alle $x \in X$, welche in *mindestens einem* A_i liegen (Vereinigung).



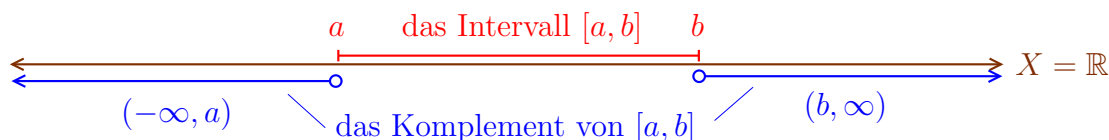
Notation. Es sei X eine Menge. Für eine Teilmenge A von X definieren wir

$X \setminus A :=$ das Komplement von A in $X = \{x \in X \mid x \notin A\}$.



Beispiel.

- (1) Ganz allgemein gilt $X \setminus X = \emptyset$ und $X \setminus \emptyset = X$.
 (2) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt: $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$.

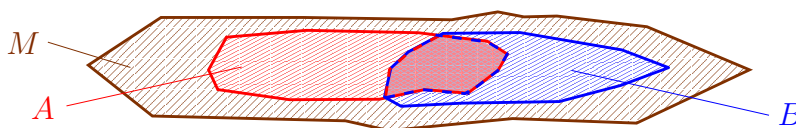


Lemma 1.7. (de Morgansche Gesetze) Für beliebige Teilmengen A, B von einer Menge X gilt

$$(1) \quad X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

$$(2) \quad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus den Definition und elementarer Logik. Man kann dies auch mithilfe der Abbildung verifizieren. ■



Manchmal kann es auch sinnvoll sein nicht nur endlich viele Teilmengen zu betrachten, sondern beliebig viele Teilmengen. Dies führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei X eine Menge. Eine Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen besteht aus einer *Indexmenge* (z.B. $I = \{1, \dots, k\}$ oder $I = \mathbb{Z}$, aber I kann auch z.B. überabzählbar sein), und zu jedem Element $i \in I$ ist eine Teilmenge A_i von X gegeben.

Wir können jetzt die Notation oben leicht verallgemeinern.

Notation. Es sei X eine Menge und es sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} A_i &:= \text{alle } x \in X, \text{ welche in } \textit{allen } A_i \text{ liegen} && (\textit{Durchschnitt}) \\ \bigcup_{i \in I} A_i &:= \text{alle } x \in X, \text{ welche in } \textit{mindestens einem } A_i \text{ liegen} && (\textit{Vereinigung}). \end{aligned}$$

Beispiel. Wir betrachten die Menge $X = \mathbb{R}$ und den Durchschnitt und Vereinigung von Familien von Intervallen:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right) = [2, 3] \quad \text{und} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Die de Morganschen Gesetze verallgemeinern sich wie folgt:

Lemma 1.8. (de Morgansche Gesetze) Es sei X eine Menge und es sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen. Dann gilt

$$(1) \quad X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \quad \text{und} \quad (2) \quad X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

1.5. Weitere Eigenschaften von offenen Mengen. Wir kehren zurück zum Studium der offenen Teilmengen eines metrischen Raums.

Satz 1.9. Es sei X ein metrischer Raum.⁶

- (1) Der *Durchschnitt* von *endlich vielen offenen* Teilmengen ist wiederum offen.
- (2) Die *Vereinigung* von *beliebig vielen offenen* Teilmengen ist wiederum offen.

Beispiel.

- (1) Es ist

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{(n, n+1)}_{\substack{\text{offenes Intervall,} \\ \text{also offene} \\ \text{Teilmenge von } \mathbb{R}}}$$

Wir sehen also, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ die Vereinigung von (unendlich vielen) offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist, also ist nach Satz 1.9 auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

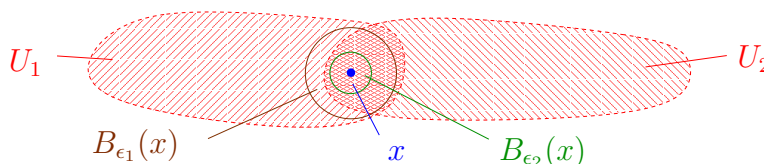
- (2) Der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen *nicht* offen. Ein Beispiel dafür ist gegeben durch

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right)}_{\text{offen in } \mathbb{R}} = \underbrace{[2, 3]}_{\text{nicht offen in } \mathbb{R}}.$$

⁶Wenn nichts anderes angegeben ist, dann wird die Metrik immer mit d bezeichnet, d.h. “sei X ein metrischer Raum” ist kurz für “sei (X, d) ein metrischer Raum”.

Beweis.

- (1) Es seien $U_1, \dots, U_k$ offene Teilmengen von X . Wir wollen zeigen, dass der Durchschnitt $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ wiederum offen ist. Es sei also $x \in U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$. Nach Voraussetzung existiert für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ ein $\epsilon_i > 0$, so dass $B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$. Wir setzen $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$.
- (a) Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ folgt aus $\epsilon \leq \epsilon_i$, dass $B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$.
- (b) Aus (a) folgt, dass $B_\epsilon(x) \subset U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$.



- (2) Es sei also $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X . Wir müssen zeigen, dass die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i \in I} U_i$ ebenfalls offen ist. Es sei also $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann existiert insbesondere ein $j \in I$, so dass $x \in U_j$. Nach Voraussetzung ist U_j offen, also existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \subset U_j$. Dann gilt aber auch, dass

$$B_\epsilon(x) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

■

1.6. Abgeschlossene Teilmengen.

Definition. Es sei X ein metrischer Raum. Für eine Teilmenge $U \subset X$ definieren wir:

U ist **abgeschlossen** $:\iff$ das **Komplement** $X \setminus U$ ist **offen**.

Beispiele.

- (1) (a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, dann ist das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, denn das Komplement

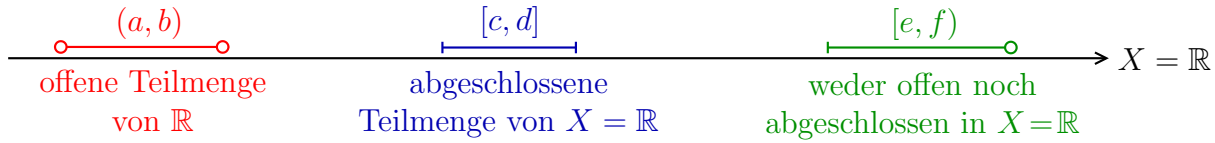
$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(b, \infty)}_{\text{offen}}$$

ist die Vereinigung zweier offener Mengen, also ist $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ nach Satz 1.10 ebenfalls offen. Mit anderen Worten $[a, b]$ ist abgeschlossen.

- (b) Ganz analog zeigt man auch, dass Intervalle der Form $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ abgeschlossen sind.
- (c) Andererseits kann man nun auch leicht sehen, dass diese drei Typen von Intervallen, zusammen mit $(-\infty, \infty)$, die einzigen Intervalle sind, welche abgeschlossen sind.

Die Intervalle, welche im obigen Sinne abgeschlossen sind, sind also genau die Intervalle, welche wir in [Fr1, Kapitel 1.8] als abgeschlossen bezeichnet hatten.

- (2) Es gibt auch Teilmengen, welche weder offen noch abgeschlossen sind. Beispielsweise ist für reelle Zahlen $a < b$ das halb-offene Intervall $(a, b]$ weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.



- (3) Es sei X ein metrischer Raum, dann sind nach Lemma 1.6 die **ganze Menge X** und die **leere Menge** offen. Ihre Komplemente sind per Definition abgeschlossen, also sind die **leere Menge** und **X** auch abgeschlossen. Zusammengefasst gilt:
die leere Menge und die ganze Menge X sind sowohl abgeschlossen als auch offen.
- (4) In Übungsblatt 1 werden wir sehen, dass jede abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r(a)$ in der Tat eine abgeschlossene Teilmenge ist.

Das folgende Lemma ist das Analogon von Satz 1.9 für abgeschlossene Teilmengen.

Lemma 1.10. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

- (1) Die **Vereinigung** von **endlich vielen abgeschlossenen** Teilmengen ist abgeschlossen.
- (2) Der **Durchschnitt** von **beliebig vielen abgeschlossenen** Teilmengen ist wiederum abgeschlossen.

Beweis. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (1) Es seien also $A_1, \dots, A_k \subset X$ abgeschlossene Mengen von (X, d) . Dann gilt:

$$X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de Morgansches Gesetz 1.8}}}{=} \bigcap_{i=1}^k \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\text{offen}},$$

aber nach Voraussetzung sind die Mengen $X \setminus A_i$ offen, und nach Satz 1.9 (2) ist die Schnittmenge von **endlich** vielen offenen Mengen wieder offen.

- (2) Der Beweis der zweiten Aussage des Lemmas verläuft nach dem gleichen Schema wie der Beweis der ersten Aussage. Es sei also $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von X . Dann gilt

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de Morgansches Gesetz 1.8}}}{=} \bigcup_{i \in I} \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\text{offen}},$$

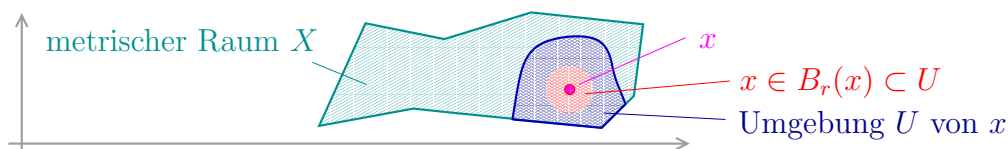
aber die rechte Seite ist nach Satz 1.9 (1) eine offene Menge. ■

Bemerkung. Die Vereinigung von unendlich vielen abgeschlossenen Teilmengen ist nicht notwendigerweise abgeschlossen. Ein Beispiel dafür ist gegeben durch

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\text{abgeschlossen in } \mathbb{R}} = \underbrace{(-1, 1)}_{\text{nicht abgeschlossen in } \mathbb{R}}.$$

1.7. Die Hausdorff-Eigenschaft von metrischen Räumen. Für die Formulierung des letzten Satzes des Kapitels benötigen wir noch folgende Definition.

Definition. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Wir sagen $U \subset X$ ist eine **Umgebung** von x , wenn es eine offene Teilmenge V^7 von X gibt, mit der Eigenschaft, dass $x \in V$ und $V \subset U$.



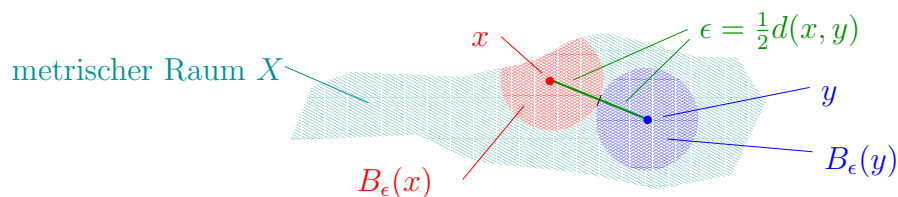
Beispiel.

- (1) Wenn U eine *offene* Teilmenge von X ist, welche x enthält, dann folgt sofort aus der Definition, mit $V = U$, dass U eine Umgebung von x ist. Nachdem U offen und eine Umgebung von x ist, nennen wir U manchmal auch eine *offene Umgebung* von x .
- (2) Es sei $x = 1 \in \mathbb{R}$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$, dass Intervall $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ eine offene Umgebung von $1 \in \mathbb{R}$. Weitere Beispiele von Umgebungen von $1 \in \mathbb{R}$ sind gegeben durch $[0, 2)$, $(-\infty, 3]$ und $\mathbb{R}$.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 1.11. (Hausdorff-Eigenschaft) Es sei X ein metrischer Raum und es seien x, y zwei verschiedene Punkte in X . Dann existieren offene Umgebungen U von x und V von y , welche *disjunkt* sind, d.h. $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Es sei X ein metrischer Raum und es seien $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Wir setzen $\epsilon := \frac{1}{2}d(x, y)$. Nachdem x und y verschieden sind folgt aus der positiven Definitheit von Metriken, dass $\epsilon > 0$. Es folgt aus Lemma 1.5, dass $U := B_\epsilon(x)$ und $V := B_\epsilon(y)$ Umgebungen von x bzw. y sind. Wir müssen nun noch zeigen, dass diese disjunkt sind.



Nehmen wir an, es gibt einen Punkt $z \in U \cap V$. Dann gilt:

$$2\epsilon = d(x, y) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{d(x, z) + d(z, y)} < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Zusammengefasst folgt, dass $2\epsilon < 2\epsilon$. Wir erhalten also einen Widerspruch. ■

⁷Beispielsweise eine offene Kugel $B_r(x)$ mit $r > 0$.

2. KONVERGENTE FOLGEN UND STETIGE ABBILDUNGEN

2.1. Konvergenz von Folgen. Wir erinnern an folgende Definition von [Fr1, Seite 32].

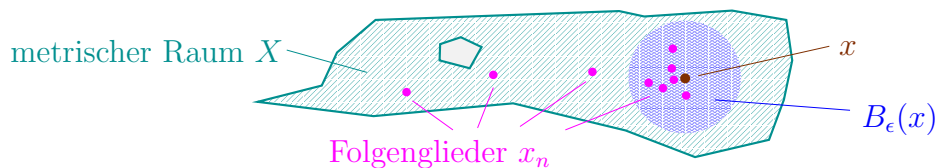
Definition. Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } x \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \iff \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \forall k \geq K \underbrace{|x_k - x| < \epsilon}_{\text{d.h. } x_k \in (x-\epsilon, x+\epsilon)}$$

Dieser Begriff überträgt sich ganz leicht auf metrische Räume.

Definition. Es sei X ein metrischer Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X . Es sei $x \in X$. Wir definieren

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } x \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \iff \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \forall k \geq K \underbrace{d(x_k, x) < \epsilon}_{\text{d.h. } x_k \in B_\epsilon(x)}$$



Das folgende Lemma gibt eine schicke Umformulierung der Konvergenz von Folgen.

Lemma 2.1. *Es sei X ein metrischer Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X . Dann gilt für $x \in X$, dass*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \iff \forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \exists K \in \mathbb{N} \forall k \geq K x_k \in U.$$

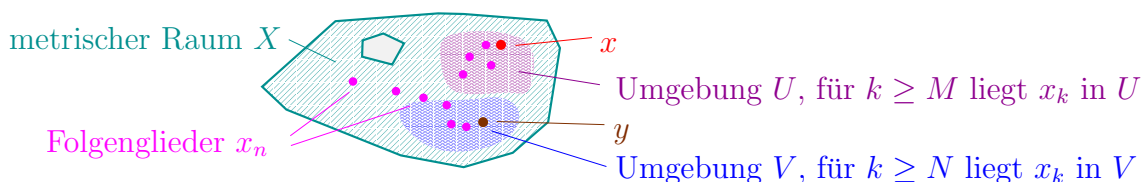
Beweis. Der Beweis des Lemmas ist eine Übungsaufgabe im 1. Übungsblatt. ■

Nach [Fr1, Satz 3.1] wissen wir, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge von reellen Zahlen eindeutig bestimmt ist. Der folgende Satz verallgemeinert nun diese Aussage auf Folgen in beliebigen metrischen Räumen.

Satz 2.2. (Satz vom eindeutigen Grenzwert) *Es sei X ein metrischer Raum. Wenn eine Folge in X konvergiert, dann ist der Grenzpunkt eindeutig.*

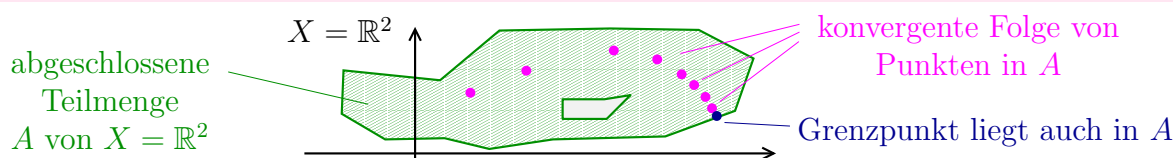
Beweis. Wir beweisen die Aussage mithilfe eines Widersprucharguments. Nehmen wir also an, es gibt eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, welche gegen zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ konvergiert. Die Hausdorff-Eigenschaft 1.11 besagt, dass es disjunkte offene Umgebungen U von x und V von y gibt.

- Da $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ gibt es nach Lemma 2.1 ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq M$ gilt: $x_k \in U$.
- Da $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$ gibt es nach Lemma 2.1 ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq N$ gilt: $x_k \in V$.
- Also gilt für alle $k \geq \max\{M, N\}$, dass $x_k \in U$ und $x_k \in V$. Aber dies kann nicht sein, denn $U \cap V = \emptyset$. ■



Folgendes Lemma wird im 1. Übungsblatt bewiesen.

Lemma 2.3. *Es sei X ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von X . Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in A . Wenn die Folge in X konvergiert und wenn A abgeschlossen ist, dann liegt der Grenzwert ebenfalls in A .*



Beispiel. Es sei $X = \mathbb{R}$ und $A = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Lemma 2.3 besagt, dass wenn (x_k) eine Folge von Zahlen in $[a, b]$ ist, welche in $\mathbb{R}$ konvergiert, dann liegt auch der Grenzwert in $[a, b]$. Diese Aussage folgt beispielsweise auch aus [Fr1, Satz 3.6].

Satz 2.4. *Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in $\mathbb{R}^n$ und es sei $y \in \mathbb{R}^n$.⁸ Dann gilt*

$$\underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y}_{\text{Analysis II}} \iff \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = y_i}_{\text{Analysis I}} \text{ für alle } i = 1, \dots, n.$$

Bemerkung.

- (1) Dieser Satz erlaubt es uns die Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$ auf das Studium der Konvergenz von Folgen von reellen Zahlen zurückzuführen. Insbesondere können wir die Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$ mithilfe der Methoden aus der Analysis I studieren.
- (2) Der Satz ist ganz ähnlich zu [Fr1, Satz 10.6], dieser besagt, dass eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen konvergiert, genau dann, wenn die Realteile und Imaginärteile von den Folgengliedern konvergieren.

Beweis ().* Wir erinnern zuerst daran, dass wir in Lemma 1.2 gezeigt hatten, dass für einen Punkt $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$(*) \quad |z_i| \leq \|z\| \leq \sqrt{n} \cdot \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}.$$

Der Satz folgt nun leicht aus diesen beiden Ungleichungen und aus Standard-Argumenten. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument noch ausführlich aus. Wir beweisen

⁸Wie oben erwähnt, wenn nichts anderes angegeben ist, dann betrachten wir $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm.

zuerst die “ $\Rightarrow$ ”-Richtung. Wir nehmen also an, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$. Es gilt also:

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{K \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq K} \|x_k - y\| < \epsilon.$$

Es sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir müssen zeigen:

$$\forall_{\eta > 0} \exists_{L \in \mathbb{N}} \forall_{l \geq L} |x_{li} - y_i| < \eta.$$

Sei also $\eta > 0$. Wenn wir $\epsilon = \eta$ setzen, erhalten wir ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ gilt, $\|x_k - y\| < \epsilon$. Dann gilt für alle $l \geq L := K$:

$$|x_{li} - y_i| \leq \|x_l - y\| < \epsilon = \eta.$$

folgt aus (*), angewandt auf $z = x_l - y$

Wir beweisen nun die “ $\Leftarrow$ ”-Richtung. Wir nehmen also an, dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$, d.h. wir wollen zeigen, dass

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{K \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq K} \|x_k - y\| < \epsilon.$$

Sei also $\epsilon > 0$. Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$. Nachdem $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i$ existiert insbesondere ein $L_i \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq L_i$ gilt: $|x_{ki} - y_i| < \eta = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. Wenn wir nun $K := \max\{L_1, \dots, L_n\}$ setzen, dann gilt für alle $k \geq K$, dass

$$\|x_k - y\| \leq \sqrt{n} \cdot \max\{|x_{k1} - y_1|, \dots, |x_{kn} - y_n|\} < \epsilon.$$

folgt aus (*), angewandt auf $z = x_k - y$

■

2.2. Cauchy-Folgen. Der Begriff von Cauchy-Folgen von reellen Zahlen überträgt sich problemlos auf Folgen in metrischen Räumen.

Definition. Es sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten in X heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{K \in \mathbb{N}} \forall_{k, l \geq K} d(x_k, x_l) < \epsilon.$$

Wie gesagt, diese Definition ist fast wort-wörtlich die gleiche wie die Definition einer Cauchy-Folge von reellen Folgen. Dementsprechend übertragen sich auch viele Aussagen fast wort-wörtlich.

Lemma 2.5. *Es sei X ein metrischer Raum. Jede konvergente Folge in X ist auch eine Cauchy-Folge.*

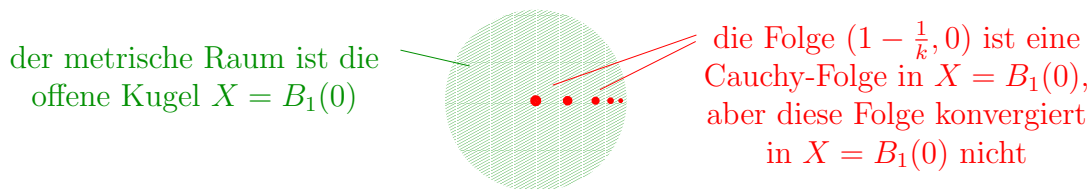
Beweis. Der Beweis ist fast identisch zum Beweis der entsprechenden Aussage [Fr1, Satz 4.1] für $X = \mathbb{R}$. ■

Definition. Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiel.

(1) Aus [Fr1, Satz 1.20] wissen wir, dass der metrische Raum $\mathbb{R}$ vollständig ist.

- (2) Die offene Kugel⁹ $X = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ von Radius 1, aufgefasst als metrischer Raum, ist nicht vollständig, denn die Folge $x_k = (1 - \frac{1}{k}, 0)$ ist eine Cauchy-Folge, welche jedoch in dem metrischen Raum $X = B_1(0)$ nicht konvergiert.



Lemma 2.6. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der metrische Raum $\mathbb{R}^n$ vollständig.

Beweis ().* Es sei also $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$.

- (1) Ganz analog zum Beweis der “ $\Rightarrow$ ”-Richtung von Satz 2.4 sieht man, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Folge $(x_{k,i})_{k \in \mathbb{N}}$ der i -ten Koordinaten eine Cauchy-Folge ist.
- (2) Nachdem $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert jede der Folgen $(x_{k,i})_{k \in \mathbb{N}}$.
- (3) Also konvergiert nach Satz 2.4 auch die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. ■

2.3. Stetige Abbildungen. Wir erinnern an folgende Definition aus [Fr1, Seite 93].

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$, es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in D$. Wir definieren

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{\substack{x \in D \text{ mit} \\ |x - x_0| < \delta}} \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Wir sagen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig*, wenn f in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist.

Wir können diese Definition fast wort-wörtlich auf Abbildungen zwischen zwei metrischen Räumen übertragen.

Definition. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Für $x_0 \in X$ definieren wir

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x \in B_\delta(x_0)} \quad \underbrace{d(f(x), f(x_0))}_{\text{d.h. } f(x) \in B_\epsilon(f(x_0))} < \epsilon.$$

Wir sagen f ist *stetig*, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Das folgende Lemma gibt uns wichtige Beispiele von stetigen Abbildungen.

Lemma 2.7.

- (1) Es sei X ein metrischer Raum.
 - (a) Für jede Teilmenge A ist die Inklusion $\iota: A \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.
 - (b) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zu einem metrischen Raum Y . Für jede Teilmenge A ist auch die Einschränkung von f auf $f|_A: A \rightarrow Y$ stetig.
 - (c) Für jedes $P \in X$ ist die Abbildung

⁹Hier, und im weiteren Verlauf der Vorlesung bezeichnen wir mit 0 den Nullpunkt von $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll}
 X & \rightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\
 x & \mapsto & d(\textcolor{red}{P}, x) \quad \textit{stetig.}
 \end{array}$$

(2) Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ ist die Projektion

$$\begin{array}{lll}
 \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_j \quad \textit{stetig.}
 \end{array}$$

Beweis.

- (1) (a) Für $\epsilon > 0$ hat $\delta = \epsilon$ die gewünschte Eigenschaft.
- (b) Für $x \in A$ und $\epsilon > 0$ erhalten wir für $f: X \rightarrow Y$ ein $\delta > 0$, und dieses funktioniert auch für $f|_A: A \rightarrow X$.
- (c) Für $\epsilon > 0$ folgt leicht aus der Dreiecksungleichung der Metrik, dass $\delta = \epsilon$ die gewünschte Eigenschaft hat.
- (2) Es sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Lemma 1.2 besagt insbesondere, dass für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt $|x_j| \leq \|x\|$. Aus dieser Tatsache folgt: für jedes $\epsilon > 0$ hat $\delta = \epsilon$ die gewünschte Eigenschaft. ■

Der nächste Satz gibt uns eine Charakterisierung von stetigen Abbildungen durch die Konvergenz von Folgen.

Satz 2.8. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen und es sei $x_0 \in X$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{ll}
 \textit{f ist stetig} & \\
 \textit{im Punkt } x_0 & \\
 \iff & \textit{für jede Folge } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ in } X \textit{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = x_0, \\
 & \textit{gilt, dass dann auch } \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(x_0).
 \end{array}$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist fast identisch zu dem Beweis von [Fr1, Satz 7.4]. ■

Satz 2.9. *Es sei X ein metrischer Raum und es seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, welche im Punkt $x_0 \in D$ stetig sind. Zudem sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen*

$$\begin{array}{lll}
 f + g: X & \rightarrow & \mathbb{R} & f \cdot g: X & \rightarrow & \mathbb{R} & \lambda \cdot f: X & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 x & \mapsto & f(x) + g(x) & x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) & x & \mapsto & \lambda \cdot f(x)
 \end{array}$$

ebenfalls stetig im Punkt x_0 . Wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann ist auch die Funktion

$$\begin{array}{lll}
 \frac{f}{g}: X & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{stetig im Punkt } x_0.
 \end{array}$$

Beweis. Wie im analogen Fall von [Fr1, Satz 7.5] kann man den Beweis einfach auf Satz 2.8 zurückführen. ■

Beispiel. Die Projektionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche gegeben sind durch $(x, y) \mapsto x$ und $(x, y) \mapsto y$ sind nach Lemma 2.7 (2) stetig. Es folgt nun aus Satz 2.9, dass beispielsweise auch die

Funktionen

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \text{oder auch} \quad h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x - 3y & (x, y) \mapsto x \cdot y & (x, y, z) \mapsto x^2 + xyz - 7z^3 \end{array}$$

stetig sind. Ganz allgemein sieht man, dass alle Polynome in mehreren Variablen stetig sind.

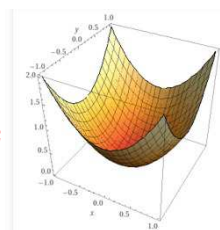
Bemerkung. Im allgemeinen ist es natürlich schwer sich Abbildungen zwischen metrischen Räumen vorzustellen. Für $X \subset \mathbb{R}^2$ können wir eine Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ durch den Graphen

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in X\} \subset \mathbb{R}^3$$

veranschaulichen. Wie man in der Abbildung sieht, benötigt es aber auch schon eine gewisse Vorstellungskraft um solche Graphen richtig zu interpretieren.

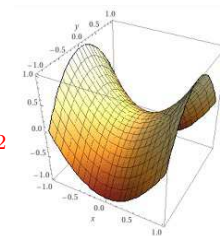
Graph der Funktion

$$\begin{array}{l} [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \end{array}$$



Graph der Funktion

$$\begin{array}{l} [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2 \end{array}$$



Lemma 2.10. Es sei X ein metrischer Raum und es sei

$$\begin{array}{ll} f = (f_1, \dots, f_n): X & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

eine Abbildung. Dann gilt:

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist stetig} \iff \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\} \text{ ist die Funktion } f_i: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

Beweis. Das Lemma folgt fast sofort aus Satz 2.8 und Satz 2.4. ■

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z \\ xy - 3xz^3 \end{pmatrix}.$$

Die beiden “Koordinatenfunktionen” $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ und $f_2(x, y, z) = xy - 3xz^3$ sind nach der vorherigen Diskussion stetig. Es folgt aus Lemma 2.10, dass auch f stetig ist.

Lemma 2.11. Es sei A eine reelle $n \times m$ -Matrix. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^m & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto A \cdot x \end{array} \quad \text{stetig.}$$

Beweis. Es sei $A = (a_{ij})$ eine reelle $n \times m$ -Matrix. Aus Lemma 2.10 folgt: es genügt zu zeigen, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildung

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^m & \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_m) & \mapsto i\text{-te Koordinate von } A \cdot x = a_{i1} \cdot x_1 + \dots + a_{im} \cdot x_m, \end{array}$$

stetig ist. Die Stetigkeit dieser Abbildungen folgt, wie bei den anderen Beispielen oben, aus Lemma 2.7 (2) und Satz 2.9. ■

2.4. Exkurs: Urbilder von Abbildungen. Bevor wir mit der Diskussion von Stetigkeit fortfahren ist es sinnvoll nochmal einen Exkurs in die Mengenlehre durchzuführen. Dieses Mal wollen wir uns mit dem immer wieder verwirrenden Begriff von Urbildern beschäftigen.

Definition. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge $B \subset Y$ definieren wir das Urbild als

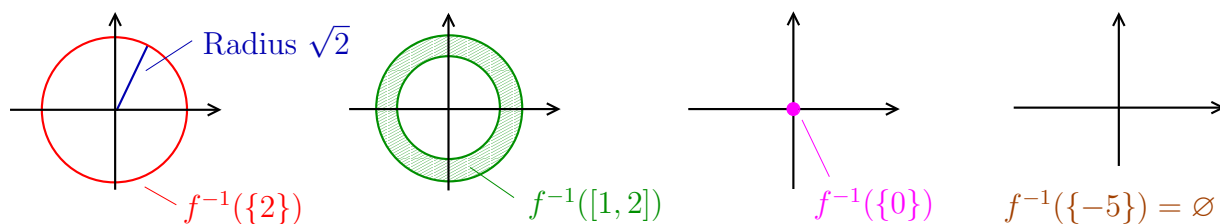
$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X.$$

Mit anderen Worten: $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Dann gilt:

- | | | |
|-----|--|---|
| (1) | $f^{-1}(\{2\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$ | Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um den Ursprung |
| (2) | $f^{-1}([1, 2]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in [1, 2]\}$ | Kreisring gegeben durch Radien 1 und $\sqrt{2}$ |
| (3) | $f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ | der Ursprung |
| (4) | $f^{-1}(\{-5\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = -5\}$ | die leere Menge. |



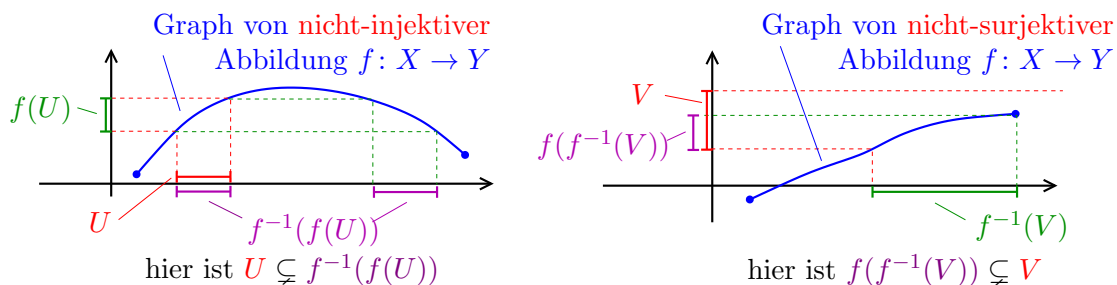
Satz 2.12. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für alle $U \subset X$ und $V \subset Y$ gilt:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| (1) $U \subset f^{-1}(f(U))$ | (2) $f(f^{-1}(V)) \subset V$ |
|------------------------------|------------------------------|

Beweis. Beide Aussagen folgen aus elementarer Logik. ■

Beispiele. In der Abbildung sehen wir:

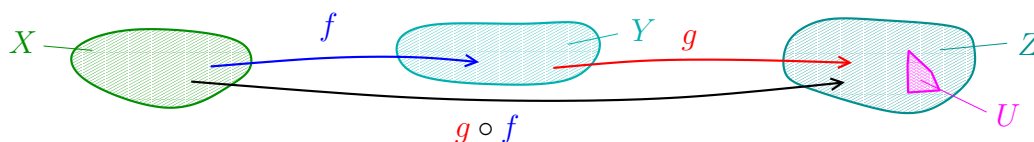
- (1) Wenn $f: X \rightarrow Y$ nicht injektiv ist, dann gibt es $U \subset X$ mit $U \subsetneq f^{-1}(f(U))$.
- (2) Wenn $f: X \rightarrow Y$ nicht surjektiv ist, dann gibt es $V \subset Y$ mit $f(f^{-1}(V)) \subsetneq V$.



Lemma 2.13. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen.

- (1) Für $B \subset Y$ gilt $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.
 (2) Wenn $g: Y \rightarrow Z$ eine weitere Abbildung ist, dann gilt für jede Teilmenge $U \subset Z$:

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$



Beweis. Wieder folgen beide Aussagen aus elementarer Logik. ■

Zum Schluß betrachten wir noch den Zusammenhang zwischen (Ur-) Bildern und Vereinigung bzw. Durchschnitten.

Lemma 2.14. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen Mengen X und Y . Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen von X und jede Familie $\{V_j\}_{j \in J}$ von Teilmengen von Y gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad f\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f(U_i) & (2) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) &= \bigcup_{j \in J} f^{-1}(V_j). \\ (3)^{10} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) &\subset \bigcap_{i \in I} f(U_i) & (4) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} V_j\right) &= \bigcap_{j \in J} f^{-1}(V_j). \end{aligned}$$

Beweis. Auch hier folgen alle Aussagen aus elementarer Logik. ■

Diese verschiedenen Beispiele und Sätze zeigen schon, dass man im Umgang mit Urbildern vorsichtig sein muss, und im Zweifelsfall es immer eine gute Idee ist, nachzuschlagen, was denn nun die korrekten Aussagen sind.

2.5. Charakterisierung von stetigen Abbildungen. Nach diesem Exkurs können wir nun folgenden Satz formulieren, welcher uns eine überraschende Charakterisierung von stetigen Abbildungen gibt.

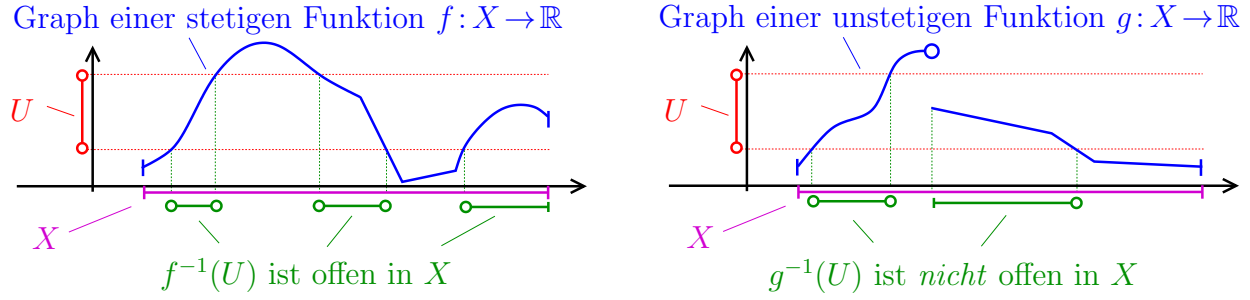
Satz 2.15. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) f ist stetig,
 (2) für jede offene Menge U in Y ist auch das Urbild $f^{-1}(U)$ offen,
 (3) für jede abgeschlossene Menge A in Y ist auch das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

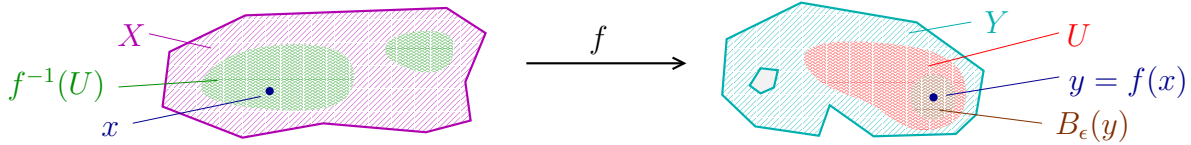
Bemerkung. Die Charakterisierung von stetigen Abbildungen in Satz 2.15 ist zwar gewöhnungsbedürftig, aber leicht zu merken:

$$f \text{ ist stetig} \iff \text{das Urbild jeder offenen Menge ist offen.}$$

¹⁰In Übungsblatt 2 werden wir sehen, dass es Beispiele gibt, bei denen die linke Seite eine echte Teilmenge der rechten Seite ist.



Beweis. Wir beweisen zuerst die “(1) $\Rightarrow$ (2)”-Aussage. Wir nehmen also an, dass f stetig ist. Es sei U eine offene Teilmenge von Y . Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen in X ist. Es sei also $x \in f^{-1}(U)$. Wir setzen $y := f(x)$. Da U offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(y) \subset U$. Da f stetig ist gibt es nun ein $\delta > 0$, so dass für alle $\tilde{x} \in B_\delta(x)$ gilt $f(\tilde{x}) \in B_\epsilon(y)$. Aber das bedeutet gerade, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(y))$ und damit auch $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$.



Der Beweis der “(2) $\Rightarrow$ (1)”-Aussage ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 2. Die Äquivalenz von (2) von (3) folgt eigentlich sofort aus Lemma 2.13. Genauer gesagt, nehmen wir an, dass (2) gilt. Nun sei A eine abgeschlossene Teilmenge von Y . Dann gilt

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus \underbrace{(Y \setminus A)}_{\text{offen, da } A \text{ abgeschlossen}}) \stackrel{\text{Lemma 2.13}}{=} X \setminus \underbrace{f^{-1}(Y \setminus A)}_{\text{offen in } X, \text{ da wir (2) annehmen}} = \text{Komplement einer offenen Teilmenge}.$$

Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X . Der Beweis von (3) $\Rightarrow$ (2) erfolgt nach genau dem gleichen Muster. ■

Beispiel. Es sei X ein metrischer Raum und es sei $P \in X$. In Lemma 2.7 hatten wir gesehen, dass die Abbildung

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x \mapsto d(\mathbf{P}, x)$$

stetig ist. Nun sei $r \in \mathbb{R}$. Fast schon per Definition gilt

$$B_r(P) := f^{-1}\left(\underbrace{[0, r)}_{\text{offen in } \mathbb{R}_{\geq 0}}\right) \quad \text{und} \quad \overline{B}_r(P) := f^{-1}\left(\underbrace{[0, r]}_{\text{abgeschlossen in } \mathbb{R}_{\geq 0}}\right).$$

Es folgt also aus Satz 2.15, dass $B_r(P)$ offen in X ist, und dass $\overline{B}_r(P)$ abgeschlossen in X ist. Insbesondere erhalten wir einen neuen Beweis von Lemma 1.5.

Satz 2.16. *Die Verknüpfung von zwei stetigen Abbildungen ist wiederum stetig.*

Beweis. ¹¹ Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Wir wollen zeigen, dass die Verknüpfung $g \circ f: X \rightarrow Z$ ebenfalls stetig ist. Aus Satz 2.15 folgt, dass es genügt zu zeigen, dass für jede offene Teilmenge $U \subset Z$ auch das Urbild $(g \circ f)^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Es sei also $U \subset Z$ offen. Dann gilt

$$(g \circ f)^{-1}(U) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Lemma 2.13}}}{=} f^{-1}(g^{-1}(U)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } g \text{ ist stetig}}}{=} f^{-1}(\text{offene Teilmenge von } Y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } f \text{ ist stetig}}}{=} \text{offene Teilmenge von } X. \quad \blacksquare$$

Satz 2.15 besagt, dass es bei der Stetigkeit nur auf die offenen Mengen ankommt. Insbesondere folgt nun aus dem nächsten Lemma, dass bei einer Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ der Begriff der Stetigkeit nicht davon abhängt, ob wir mit der euklidischen Metrik oder der Maximumsmetrik arbeiten.

Lemma 2.17. *Eine Menge in $\mathbb{R}^k$ ist offen bezüglich der euklidischen Metrik, genau dann, wenn sie offen ist bezüglich der Maximumsmetrik.*

Beweis ().* Für $x \in \mathbb{R}^k$ und $\epsilon > 0$ seien

$$B_\epsilon^{\text{eukl}}(x) = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \|x - y\|_{\text{eukl}} < \epsilon\} \quad \text{und} \quad B_\epsilon^{\text{max}}(x) = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \|x - y\|_{\text{max}} < \epsilon\}$$

die zugehörigen offenen Kugeln bezüglich den beiden Metriken, welche wir betrachten. Es folgt leicht aus der Definition von offenen Mengen, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es sei $x \in \mathbb{R}^k$ beliebig. Dann gelten folgende beiden Aussagen:

- (1) Für alle $\mu > 0$ gibt es ein $\nu > 0$, so dass $B_\nu^{\text{max}}(x) \subset B_\mu^{\text{eukl}}(x)$.
- (2) Für alle $\mu > 0$ gibt es ein $\nu > 0$, so dass $B_\nu^{\text{eukl}}(x) \subset B_\mu^{\text{max}}(x)$.

Zur Erinnerung, Lemma 1.2 besagt, dass für alle $v \in \mathbb{R}^k$ gilt

$$\|v\|_{\text{max}} \leq \|v\|_{\text{eukl}} \quad \text{und zudem} \quad \|v\|_{\text{eukl}} \leq \sqrt{n} \cdot \|v\|_{\text{max}}.$$

Aus diesen Ungleichung folgt nun, angewandt auf $v = x - y$, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt:¹²

$$B_\epsilon^{\text{eukl}}(x) \subset B_\epsilon^{\text{max}}(x) \quad \text{und zudem} \quad B_{\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon}^{\text{max}}(x) \subset B_\epsilon^{\text{eukl}}(x).$$

Die Behauptung folgt sofort aus dieser Aussage. \blacksquare

¹¹Man kann den Satz auch genau wie [Fr1, Satz 7.7] zeigen, man muss nur in dem Beweis [Fr1, Satz 7.4] durch Satz 2.8 ersetzen. Der Beweis mit offenen Mengen ist aber noch mal kürzer.

¹²Wir zeigen nun im Detail, dass $B_{\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon}^{\text{max}}(x) \subset B_\epsilon^{\text{eukl}}(x)$. Nämlich aus $\|v\|_{\text{eukl}} \leq \sqrt{n} \cdot \|v\|_{\text{max}}$ folgt:

$$y \in B_{\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon}^{\text{max}}(x) \implies \|x - y\|_{\text{max}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon \implies \|x - y\|_{\text{eukl}} < \epsilon \implies y \in B_\epsilon^{\text{eukl}}(x).$$

Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{aligned} M(n \times n, \mathbb{R}) &= \text{alle reellen } n \times n\text{-Matrizen} \\ GL(n, \mathbb{R}) &= \text{alle invertierbaren } n \times n\text{-Matrizen.} \end{aligned}$$

Wir fassen im Folgenden $M(n \times n, \mathbb{R})$ als normierten reellen Vektorraum auf, indem wir für $A = (a_{ij})$ definieren $\|A\| := \max\{|a_{ij}| \mid i, j \in \{1, \dots, n\}\}$. (Als normierter Vektorraum ist $M(n \times n, \mathbb{R})$ also isomorph zu $(\mathbb{R}^{n^2}, \|\cdot\|_{\max})$.) Wir verwenden diese Norm um $M(n \times n, \mathbb{R})$ als metrischen Raum aufzufassen.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \det: M(n \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} && \text{Leibniz-Formel, siehe [N1, Satz 12.5]} \\ A &\mapsto \det(A) && \downarrow \\ &= \underbrace{\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}}_{\text{Polynom in den Variablen } a_{ij}}. \end{aligned}$$

Es folgt aus Lemmas 2.7, 2.9 und 2.17, dass diese Abbildung stetig ist. Nun gilt:

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} = \det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\substack{\text{offene Teilmenge} \\ \text{von } \mathbb{R}}}) \\ &\uparrow \\ &\text{siehe Lineare Algebra [N1, Satz 12.8]} \end{aligned}$$

Wir erhalten aus dieser Diskussion und Satz 2.15, dass $GL(n, \mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist. Das besagt beispielsweise Folgendes: wenn A eine invertierbare $n \times n$ -Matrix ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass jede $n \times n$ -Matrix B , deren Einträge sich von den Einträgen von A um höchstens ϵ unterscheiden, ebenfalls invertierbar ist.

2.6. Homöomorphismen.

Definition. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Wir sagen f ist ein **Homöomorphismus**, wenn gilt:

- (1) f ist stetig,
- (2) f ist bijektiv,
- (3) die Umkehrabbildung f^{-1} ist stetig.

Wenn es einen solchen Homöomorphismus zwischen X und Y gibt, dann sagen wir, dass X und Y **homöomorph** sind.

Beispiel.

- (a) Die metrischen Räume $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$ sind homöomorph. In der Tat: die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow (-1, 1) \\ x &\mapsto \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(x) \end{aligned}$$

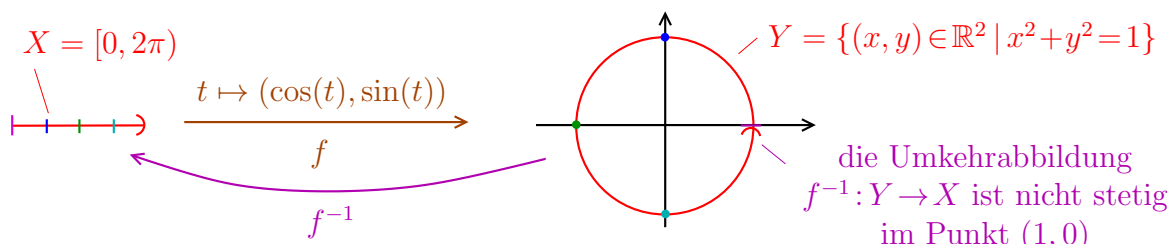
ist stetig und bijektiv, und die Umkehrabbildung $x \mapsto \tan(\frac{\pi}{2}x)$ ist ebenfalls stetig.

D.h. f ist in der Tat ein Homöomorphismus.

- (b) Wir geben hier noch ein weiteres Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: X := [0, 2\pi) &\rightarrow Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv. Wir werden jedoch in Übungsblatt 2 sehen, dass die Umkehrabbildung f^{-1} im Punkt $(1, 0)$ nicht stetig ist. Mit anderen Worten, die Eigenschaften (1) und (2) eines Homöomorphismus sind erfüllt, nicht jedoch die Eigenschaft (3). Es



stellt sich nun jedoch die Frage, ob es überhaupt einen Homöomorphismus zwischen dem halb-offenen Intervall X und dem Kreis Y geben kann. Wir werden diese Frage später noch beantworten.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma.

Lemma 2.18. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine **bijektive** Abbildung zwischen metrischen Räumen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- (1) f ist ein Homöomorphismus.
- (2) Für jede Teilmenge U von X gilt:

$$U \text{ ist offen in } X \iff f(U) \text{ ist offen in } Y.$$

Beweis ().* Wir bezeichnen mit $g: Y \rightarrow X$ die Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung $f: X \rightarrow Y$. Per Definition ist die bijektive Abbildung f ein Homöomorphismus, genau dann, wenn sowohl f als auch g stetig sind.

Es folgt aus Satz 2.15, dass gilt:

- (1) f ist stetig genau dann, wenn für $U \subset X$ gilt: $f(U)$ offen $\Rightarrow f^{-1}(f(U)) = U$ ist offen.
- (2) g ist stetig genau dann, wenn für $U \subset X$ gilt: U offen $\Rightarrow g^{-1}(U) = f(U)$ ist offen.

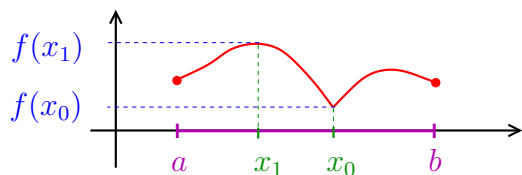
Das Lemma folgt aus den obigen Beobachtungen. ■

3. KOMPAKTE MENGEN

In [Fr1] hatten wir Intervalle vom Typ $[a, b]$, also beschränkte Intervalle bei denen die Endpunkte enthalten sind, als *kompakt* bezeichnet. Wir hatten gesehen, dass kompakte Intervalle mehrere wichtige Eigenschaften besitzen. Beispielsweise hatten wir in [Fr1, Satz 8.2] folgende Aussagen bewiesen.

Jede stetige Funktion $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es existieren $x_0, x_1 \in I = [a, b]$, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in I = [a, b].$$



jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an

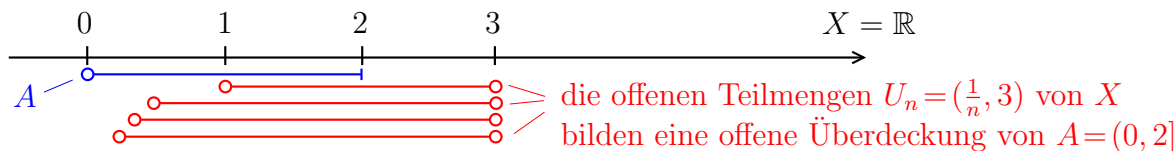
Wenn X nun ein beliebiger metrischer Raum ist, dann werden wir im Folgenden sogenannte “kompakte Teilmengen” einführen. Wenn $A \subset X$ kompakt ist, dann werden wir sehen, dass jede stetige Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

3.1. Definition von kompakten Mengen.

Definition. Es sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Eine **offene Überdeckung** von A ist eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Teilmengen von X , so dass

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Beispiel. Wir betrachten $A = (0, 2] \subset \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $U_n := (\frac{1}{n}, 3)$. Dann ist $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A .



Wir können jetzt eine der wichtigsten Definitionen der Mathematik einführen.

Definition. Es sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **kompakt**, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von A endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ gibt, so dass

$$A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Anders ausgedrückt, A heißt kompakt, wenn man für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von A endlich viele Mengen aus den U_i 's finden kann, so dass diese schon A überdecken.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass die Teilmenge $(0, 2]$ von $\mathbb{R}$ *nicht* kompakt ist. Wir betrachten dazu wiederum die obige offene Überdeckung, welche gegeben ist durch $U_n := (\frac{1}{n}, 3)$, $n \in \mathbb{N}$. Wenn $(0, 2]$ kompakt wäre, dann gäbe es endliche viele $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$(0, 2] \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k},$$

aber es ist leicht zu sehen, dass

$$\underbrace{\frac{1}{\max\{i_1, \dots, i_k\}}}_{\in (0, 2]} \notin U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Wir haben also einen Widerspruch erhalten. Wir haben damit bewiesen, dass $(0, 2]$ nicht kompakt ist.

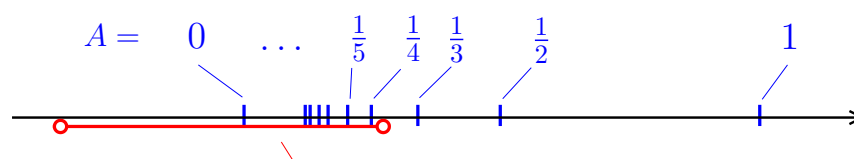
Beispiel. Wir betrachten

$$A := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Wir behaupten, dass A kompakt ist. Es sei also $\{U_i\}_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von A .

- (1) Nachdem $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A ist, existiert insbesondere ein $j \in I$, so dass $0 \in U_j$.
- (2) Nachdem U_j offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $(-\epsilon, \epsilon) \subset U_j$.
- (3) Nachdem $\epsilon > 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N} \in (0, \epsilon)$.
- (4) Dann gilt aber auch für alle $n \geq N$, dass $\frac{1}{n} \in (0, \epsilon)$. Insbesondere sehen wir, dass alle Punkte $\frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \dots$ in U_j enthalten sind.
- (5) Nachdem $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A ist, existiert insbesondere zu jedem $n \in \{1, \dots, N-1\}$ ein $i_n \in I$, so dass $\frac{1}{n} \in U_{i_n}$.

Es folgt nun, dass $A \subset U_j \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{N-1}}$.



U_j ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, welche 0 enthält,
 nachdem U_j offen ist, enthält U_j auch ein Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$,
 es liegen nur endlich viele Punkte von A außerhalb des Intervalls $(-\epsilon, \epsilon)$

3.2. Der Satz von Heine–Borel. Der folgende Satz besagt nun, dass “kompakte Intervalle” aus der Analysis I in der Tat kompakt im obigen Sinne sind.

Satz 3.1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Ganz analog zum Beispiel auf Seite 29 kann man zeigen, dass alle Intervalle, welche nicht von der Form $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind, auch nicht kompakt sind. Anders ausgedrückt, ein Intervall ist genau dann kompakt, wenn es von der Form $[a, b]$ ist. Dies sind genau die Intervalle, welche wir auch in Analysis I als kompakt bezeichnet hatten.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Spezialfall, dass $a = 0$ und $b = 1$. Wir schreiben $I := [0, 1]$. Wir nehmen nun an, dass I nicht kompakt ist. Dies bedeutet, wir nehmen an, dass es eine offene Überdeckung $\{U_j\}_{j \in J}$ von $[0, 1]$ gibt, so dass I nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann.

Behauptung. Es gibt eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

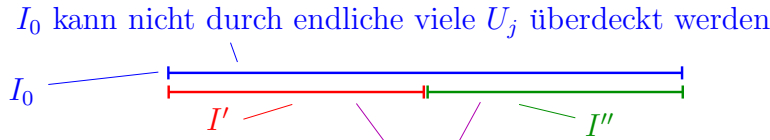
$$I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

so dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- (1) I_m kann nicht durch endlich viele der U_j 's überdeckt werden,
- (2) die Länge von I_m ist 2^{-m} .

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion.

- (a) Wir setzen $I_0 := I$. Nach unserer obigen Annahme erfüllt I_0 beide Bedingungen.
- (b) Nehmen wir an, dass wir $I_0, I_1, \dots, I_m$ schon gefunden haben. Wir teilen I_m in zwei abgeschlossene Intervalle I' und I'' der halben Länge. Da I_m nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann, kann zumindest eines der Intervalle I' oder I'' nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden. Dieses Intervall wählen wir als I_{m+1} . $\square$



mindestens eines der beiden Intervalle kann nicht durch endliche viele U_j überdeckt werden

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $a_m \in I_m$.

Behauptung.

- (a) der Grenzwert $x := \lim_{m \rightarrow \infty} a_m$ existiert
- (b) es gilt $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m$.

Wir beweisen nun die beiden Aussagen.

- (a) Nachdem $\mathbb{R}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Für $m, n \geq N$ gilt:

$$|a_m - a_n| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } a_m \text{ und } a_n \text{ liegen in } I_N}}{\text{Länge}(I_N)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } I_N}}{2^{-N}}.$$

Es folgt, dass $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in der Tat eine Cauchy-Folge ist.¹³

- (b) Wir müssen zeigen, dass $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m$. Anders ausgedrückt, wir müssen zeigen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: $x \in I_m$. Sei also $m \in \mathbb{N}$. Für alle $n \geq m$ gilt, dass $a_n \in I_n \subset I_m$. Insbesondere ist $(a_n)_{n \geq m}$ eine konvergente Folge von Punkten in I_m . Nachdem I_m ein abgeschlossenes Intervall ist, folgt aus Lemma 2.3, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I_m$. $\square$

¹³Dies sieht man wie folgt: Sei also $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2^N} < \epsilon$, dann folgt aber, dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon$.

Nachdem $\{U_j\}_{j \in J}$ eine Überdeckung von I ist, existiert ein $j \in J$, so dass $x \in U_j$. Wegen der Offenheit von U_j existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U_j$. Wir wählen nun ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $2^{-m} < \epsilon$. Es folgt, dass

$$\begin{array}{ccccc} I_m & \subset & [x - 2^{-m}, x + 2^{-m}] & \subset & (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U_j. \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{da } x \in I_m \text{ und da } \text{Länge}(I_m) = 2^{-m} & & \text{Wahl von } m & \end{array}$$

d.h. I_m ist in einem einzigen U_j enthalten, im Widerspruch zur Eigenschaft (1) der Intervalle I_m . ■

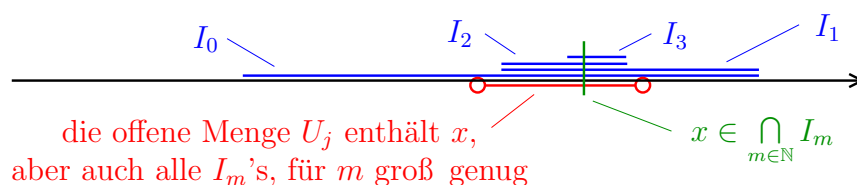


Abbildung: Skizze für den Beweis, dass $[0, 1]$ kompakt ist.

Ganz ähnlich, allerdings mit etwas aufwendigerer Notation, beweist man auch folgenden Satz. Der Satz wird beispielsweise in [Fo2, Seite 26] bewiesen.

Satz 3.2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $a \geq 0$ ist der n -dimensionale Würfel

$$[-a, a]^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in [-a, a]\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt im metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$.

Mithilfe des folgenden Satzes erhalten wir weitere Beispiele von kompakten Mengen:

Satz 3.3. Es sei X ein metrischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und es sei $A \subset K$. Wenn A eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, dann ist auch A kompakt.

Beispiel. Wir betrachten noch einmal die Menge $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Diese ist enthalten in der kompakten Menge $K = [0, 1]$. Zudem ist A abgeschlossen, denn

$$\mathbb{R} \setminus A = \underbrace{(-\infty, 0)}_{\text{offen}} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(1, \infty)}_{\text{offen}} = \text{offen.}$$

↑
folgt aus Satz 1.9

Wir erhalten nun mithilfe von Satz 3.3 einen neuen Beweis dafür, dass A kompakt ist.

Beweis. Es sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Nachdem A abgeschlossen in A ist, folgt, dass $X \setminus A$ offen ist. Also ist

$$(X \setminus A) \text{ zusammen mit } \{U_i\}_{i \in I}$$

eine offene Überdeckung von X . Insbesondere ist dies eine offene Überdeckung von K . Nachdem K kompakt ist, können wir K durch endlich viele dieser Mengen $X \setminus A$ und $U_i, i \in I$ überdecken. Es gibt also $i_1, \dots, i_k$, so dass

$$K \subset (X \setminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Nachdem $A \subset K$ folgt, dass

$$A \subset (X \setminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Aber nachdem $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ erhalten wir, dass

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Wir haben also gezeigt, dass A durch endlich viele der U_i 's überdeckt wird, d.h. A ist in der Tat kompakt. ■

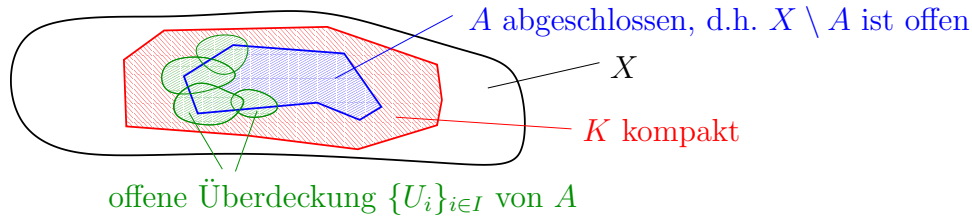


Abbildung: Skizze für den Beweis von Satz 3.3.

Definition. Wir nennen eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X **beschränkt**, wenn es ein $x \in X$ und ein $C \geq 0$ gibt, so dass $A \subset B_C(x)$.



Lemma 3.4. Es sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes X . Wenn A beschränkt ist, dann gibt es für jedes $y \in X$ ein $D \geq 0$, so dass $A \subset B_D(y)$.

Beweis (*). Es sei A eine beschränkte Teilmenge eines metrischen Raumes. Es gibt also ein $x \in X$ und ein $C \geq 0$, so dass $A \subset B_C(x)$. Nun sei $y \in X$ beliebig. Wir setzen $D := C + d(x, y)$. Dann gilt für alle $a \in A$, dass

$$\begin{aligned} d(a, y) &\leq \underbrace{d(a, x)}_{< C, \text{ da } a \in B_C(x)} + d(x, y) < C + d(x, y) = D. \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Dreiecksungleichung} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, es ist $A \subset B_D(y)$. ■

Satz 3.5. Es sei X ein metrischer Raum. Wenn $A \subset X$ kompakt ist, dann ist A beschränkt und abgeschlossen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass A beschränkt ist. Wir wählen ein beliebiges $x \in X$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$U_n := \underbrace{B_n(x)}_{\text{offen nach Lemma 1.5}}.$$

Nachdem jeder Punkt einen endlichen Abstand von x hat, folgt, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$. Insbesondere ist also $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A . Nachdem A kompakt ist, existieren also $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$A \subset U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k}.$$

Mit $C := \max\{n_1, \dots, n_k\}$ gilt also $A \subset U_C = B_C(x)$.

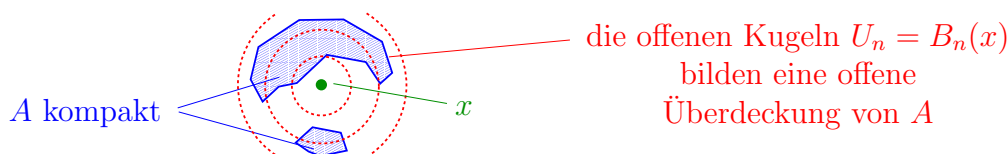


Abbildung: Kompakte Teilmengen sind beschränkt.

Wir wollen nun zeigen, dass A abgeschlossen ist, d.h. wir wollen zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Sei also $x \in X \setminus A$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset X \setminus A$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die offene Teilmenge¹⁴

$$U_n := \underbrace{\left\{ y \in X \mid d(y, x) > \frac{1}{n} \right\}}_{\text{offen nach dem Argument von Seite 24}} = X \setminus \underbrace{\overline{B_{\frac{1}{n}}}(x)}_{\text{abgeschlossen}}.$$

Dann gilt

$$\begin{array}{ccccc} A & \subset & X \setminus \{x\} & \subset & \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n. \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{denn } x \notin A & & \text{denn für } y \neq x \text{ gilt } d(y, x) > 0 & & \end{array}$$

Also ist $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A . Nachdem A kompakt ist, existieren $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$A \subset U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k}.$$

Wir setzen $N := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Dann ist schon $A \subset U_N$ und es gilt

$$\begin{array}{ccccc} B_{\frac{1}{N}}(x) & \subset & \overline{B_{\frac{1}{N}}}(x) & = & X \setminus U_N \subset X \setminus A. \\ & & \uparrow & & \\ & & \text{aus } A \subset U_N \text{ folgt } X \setminus U_N \subset X \setminus A & & \blacksquare \end{array}$$

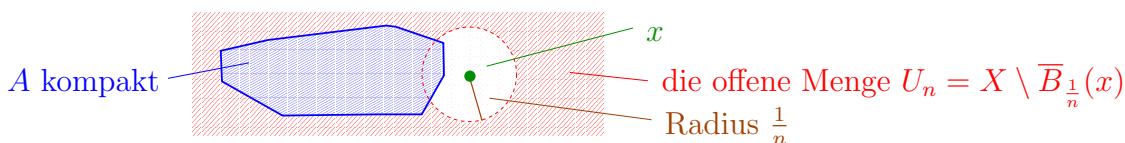


Abbildung: Kompakte Teilmengen sind abgeschlossen.

Korollar 3.6. Wenn $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere kompakte Teilmenge, dann besitzt A ein Maximum und ein Minimum, d.h. es existieren $t_0, t_1 \in A$, so dass

$$t_0 \leq x \leq t_1 \quad \text{für alle } x \in A.$$

¹⁴Das Argument von Seite 24 zeigt, dass in einem metrischen Raum X für jedes $x \in X$ und $r > 0$ die Menge $\{y \in X \mid d(y, x) > r\}$ offen ist.

Beweis. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere kompakte Teilmenge. Wir zeigen im Folgenden die Existenz von t_1 . Der Beweis der Existenz von t_0 ist fast identisch.

Es folgt aus Satz 3.5, dass A beschränkt und abgeschlossen ist. Da A nichtleer und beschränkt ist existiert nach [Fr1, Satz 5.2] insbesondere das Supremum $t_1 := \sup(A)$. Es verbleibt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es ist $t_1 \in A$.

Nach [Fr1, Satz 5.3] gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in A , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = t_1$. Da A abgeschlossen ist, folgt nun aus Lemma 2.3, dass der Grenzwert t_1 auch in A liegt. ■

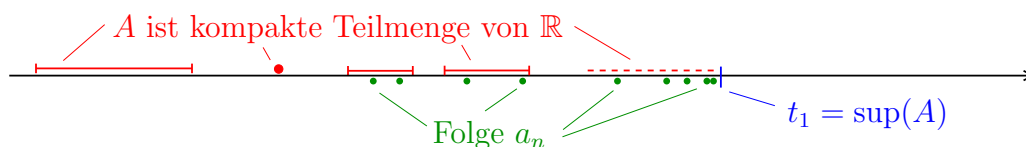


Abbildung: Skizze für den Beweis von Korollar 3.6.

Für Teilmengen des metrischen Raums $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ gibt uns der folgende Satz die Umkehrung von Satz 3.5.

Satz 3.7. (Satz von Heine–Borel) *Es sei A eine Teilmenge des metrischen Raums $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$. Dann gilt:*

$$A \text{ ist kompakt} \iff A \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis.

(“ $\Rightarrow$ ”) Satz 3.5 besagt, dass sogar eine kompakte Teilmenge eines beliebigen metrischen Raums beschränkt und abgeschlossen ist.

(“ $\Leftarrow$ ”) Nun nehmen wir an, dass $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen ist.

- Da A beschränkt ist, folgt aus Lemma 3.4, dass es ein $a > 0$ gibt mit $A \subset B_a(0)$.
- Also ist A insbesondere eine Teilmenge des Würfels $[-a, a]^n \subset \mathbb{R}^n$.
- Der Würfel $[-a, a]^n$ ist nach Satz 3.2 kompakt.
- Nachdem A abgeschlossen ist, folgt aus Satz 3.3, dass auch A kompakt ist. ■

Beispiele.

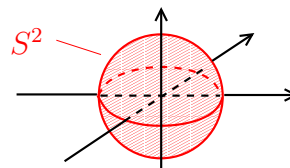
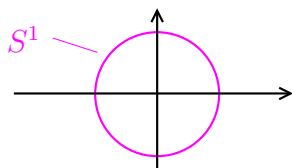
(1) Wir betrachten die n -dimensionale Sphäre

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, 0) = 1\}.$$

Wir wollen zeigen, dass S^n kompakt ist. Nach dem Satz 3.7 von Heine–Borel genügt es zu zeigen, dass S^n beschränkt und abgeschlossen ist. Es folgt sofort aus der Definition, dass S^n beschränkt ist. Wir hatten schon auf Seite 24 gezeigt, dass S^n abgeschlossen ist. Wir zeigen nun jedoch noch einmal, dass S^n abgeschlossen ist. Wir betrachten dazu die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Die Funktion ist stetig und es gilt $S^n = f^{-1}(\{1\})$. Nachdem $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz 2.15, dass auch S^n abgeschlossen ist.



- (2) Ganz analog kann man auch zeigen, dass jede abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r(x)$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ kompakt ist.

Manchmal sind nicht-Beispiele fast genauso wichtig wie Beispiele.

Beispiel. Die Voraussetzung im Satz 3.7 von Heine–Borel, dass wir $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik betrachten ist essentiell. Die Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig für andere metrische Räume, auch nicht, wenn wir zwar $X = \mathbb{R}^n$, jedoch mit einer anderen Metrik betrachten. Beispielsweise werden wir in Übungsblatt 3 sehen, dass wenn wir auf $\mathbb{R}$ die Metrik $d(x, y) := \min\{1, |x - y|\}$, betrachten, dann gibt es Teilmengen, welche abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt sind.

Lemma 3.8. *Es seien X und Y zwei metrische Räume. Wenn X und Y homöomorph sind, dann ist X kompakt genau dann, wenn Y kompakt ist.*

Beweis ().* Es sei $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus. Aus Lemma 2.18 wissen wir, dass für jedes $U \subset X$ gilt:

$$U \subset X \text{ ist offen} \quad \Longleftrightarrow \quad f(U) \subset Y \text{ ist offen.}$$

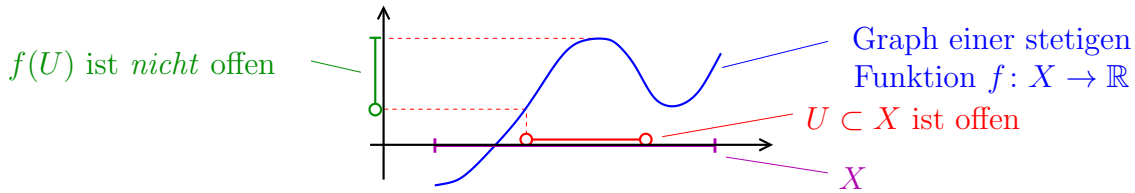
Das Lemma folgt problemlos aus dieser Tatsache. ■

Beispiel. Wir haben gerade gesehen, dass die 1-dimensionale Sphäre S^1 kompakt ist. Andererseits folgt aus dem Satz 3.5, oder aus der Diskussion auf Seite 29, dass $[0, 2\pi)$ nicht kompakt ist. Wir sehen also mithilfe von Lemma 3.8, dass die beiden metrischen Räume S^1 und $[0, 2\pi)$ nicht homöomorph sind. Dies gibt einen weiteren Beweis für die Aussage, dass die Abbildung $f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ von Seite 27 kein Homöomorphismus ist.

3.3. Kompakte Mengen und stetige Abbildungen. Wir beginnen mit einem kleinen Exkurs. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. In Satz 2.15 hatten wir gesehen, dass das **Urbild** jeder offenen Menge wiederum offen ist. Es stellt sich nun die Frage, ist auch das **Bild** jeder offenen Menge wiederum offen? Kurzes Nachdenken zeigt, dass die Antwort im Allgemeinen nein ist, wie man beispielsweise in der Abbildung sieht.

In Übungsblatt 3 werden wir zudem sehen, dass auch das Bild einer abgeschlossenen Teilmenge nicht notwendigerweise wiederum abgeschlossen ist.

Folgender Satz macht nun die überraschende Aussage, dass hingegen Bilder von kompakten Mengen wiederum kompakt sind.



Satz 3.9. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Wenn $K \subset X$ kompakt ist, dann ist auch das Bild $f(K)$ kompakt.

Beweis. Es sei $K \subset X$ kompakt. Wir wollen beweisen, dass $f(K)$ wiederum kompakt ist. Es sei also $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Wir müssen zeigen, dass $f(K)$ in der Vereinigung von endlich vielen U_i 's enthalten ist. Es gilt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 K & \subset & f^{-1}(f(K)) & \subset & f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) & = & \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{offen nach Satz 2.15}} \\
 \uparrow & & & & \uparrow & & \\
 & & \text{Lemma 2.12 (1)} & & \text{Lemma 2.14 (2)} & &
 \end{array}$$

Nachdem f stetig ist folgt aus Satz 2.15, dass die Urbilder von den U_i offen in X sind. Insbesondere ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K . Nachdem K kompakt ist, existieren endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k$, so dass

$$K \subset f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k}).$$

Dann folgt aber:

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(K) & \subset & f(f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k})) \\
 & = & f(f^{-1}(U_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_{i_k})) & \subset & U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 & & \text{Lemma 2.14 (1)} & & \text{Lemma 2.12 (2) angewandt auf jedes } f(f^{-1}(U_{i_j}))
 \end{array}$$

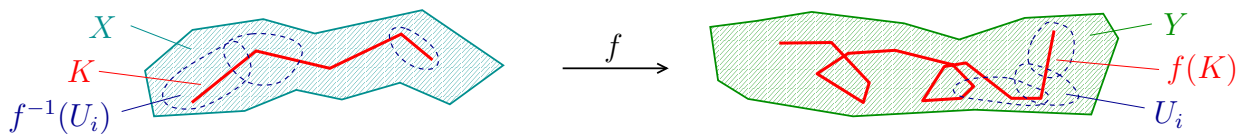


Abbildung: Skizze für den Beweis von Satz 3.9.

Das folgende Korollar ist die versprochene Verallgemeinerung von [Fr1, Satz 8.2].

Korollar 3.10. Es sei K eine kompakte nichtleere Teilmenge eines metrischen Raumes X .¹⁵ Es sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann nimmt f ein globales Minimum und ein globales Maximum an, d.h. es existieren $x_0, x_1 \in K$, so dass

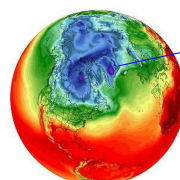
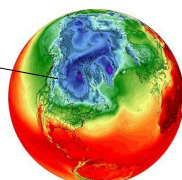
$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in K.$$

¹⁵Hier, und in den anderen Sätzen ist natürlich der Fall $K = X$ zugelassen, wenn X schon selber kompakt ist.

Beispiel. Es folgt also aus Korollar 3.10, angewandt auf die kompakte Menge $K = S^2$, dass jede stetige Funktion $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Sphäre S^2 ein Maximum und Minimum annimmt.

Temperaturfunktion
 $T: S^2 \rightarrow (-273, \infty)$
 am 24.4.2021

<https://climatereanalyzer.org/>



minimale Temperatur
wird in Grönland erreicht

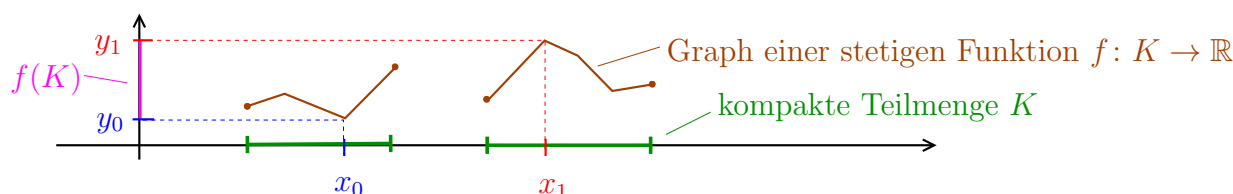
maximale Temperatur
wird in der Sahara erreicht

Beweis. Nachdem K kompakt und f stetig ist, folgt aus Satz 3.9, dass das Bild $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt ist. Korollar 3.6, angewandt auf die kompakte Teilmenge $f(K)$, besagt, dass es $y_0, y_1 \in f(K)$ gibt, so dass

$$y_0 \leq y \leq y_1 \quad \text{für alle } y \in f(K).$$

Da $y_0, y_1 \in f(K)$ gibt es $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = y_0$ und $x_1 \in K$ mit $f(x_1) = y_1$. Dann gilt

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in K. \quad \blacksquare$$



Skizze für den Beweis von Korollar 3.10.

Auf Seite 27 hatten wir gesehen, dass eine stetige, bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ nicht notwendigerweise auch ein Homöomorphismus ist. Der folgende Satz besagt nun, dass dies doch der Fall ist, wenn wir zudem wissen, dass X kompakt ist.

Satz 3.11. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige bijektive Abbildung zwischen metrischen Räumen. Wenn X kompakt ist, dann ist f sogar ein Homöomorphismus.*

Beispiel. Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ der Rand des Quadrates mit den Eckpunkten $\{\pm 1, \pm 1\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow S^1 \\ P &\mapsto \frac{P}{\|P\|} \end{aligned}$$

ist, wie man leicht sehen kann, stetig und bijektiv. Zudem kann man leicht mithilfe des Satzes 3.7 von Heine–Borel zeigen, dass X kompakt ist. Es folgt also aus Satz 3.11, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: S^1 \rightarrow X$ stetig ist.



Beweis. Wir müssen also zeigen, dass die Umkehrabbildung $g := f^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig ist. Nach Satz 2.15 genügt es zu zeigen, dass für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$ auch das Urbild $g^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

- Es sei also $A \subset X$ eine abgeschlossene Menge.
- Nachdem X kompakt ist, ist nach Satz 3.3 auch A kompakt.
- Es folgt aus Satz 3.9, dass $g^{-1}(A) = f(A)$ eine kompakte Teilmenge von Y ist.
- Nach Satz 3.5 ist $g^{-1}(A) = f(A)$ auch eine abgeschlossene Teilmenge von Y . ■

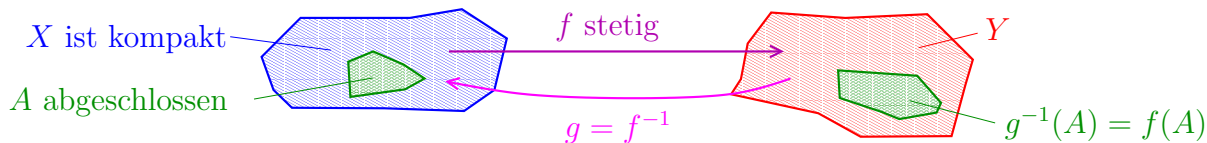


Abbildung: Skizze für den Beweis von Satz 3.11.

4. KURVEN IN $\mathbb{R}^n$

4.1. Definition und Beispiele.

Definition. Eine **Kurve** in $\mathbb{R}^n$ ist eine *stetige* Abbildung

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{wobei } I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall ist.}$$

Beispiele von Kurven.

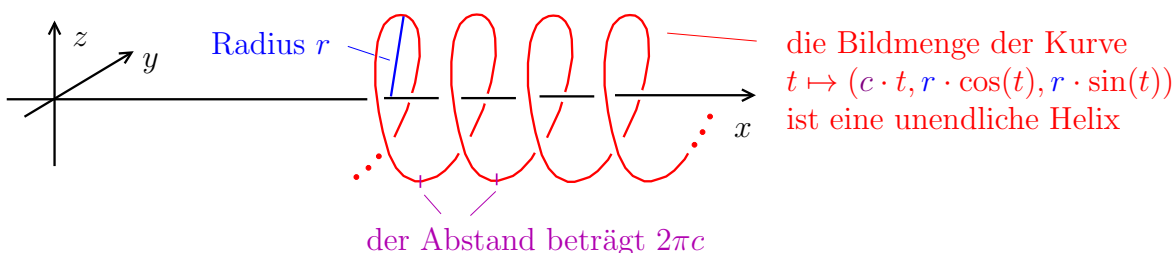
- (1) Wir betrachten die Kurven

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \text{und} & & g: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) & & & t &\mapsto (\cos(-t), \sin(-t)). \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist das Bild der Einheitskreis S^1 um den Ursprung. Bei der Kurve f wird der Kreis “gegen den Uhrzeigersinn”, hingegen bei der Kurve g wird der Kreis “im Uhrzeigersinn” durchlaufen.

- (2) Es seien $r > 0$ und $c \neq 0$. Die Kurve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto (c \cdot t, r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$

beschreibt eine unendliche Helix.



- (3) Es seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n & \text{oder allgemeiner} & & [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (1-t) \cdot P + t \cdot Q & & & t &\mapsto \underbrace{\frac{b-t}{b-a}}_{\substack{=1, \text{ für } t=a \\ =0, \text{ für } t=b}} \cdot P + \underbrace{\frac{t-a}{b-a}}_{\substack{=0, \text{ für } t=a \\ =1, \text{ für } t=b}} \cdot Q \end{aligned}$$

als *euklidische Strecken* von P nach Q .

4.2. Die Länge von Kurven. Unser nächstes Ziel ist den Begriff der Länge einer Kurve einzuführen. Wir fangen mit einem ganz elementaren Fall an.

Definition.

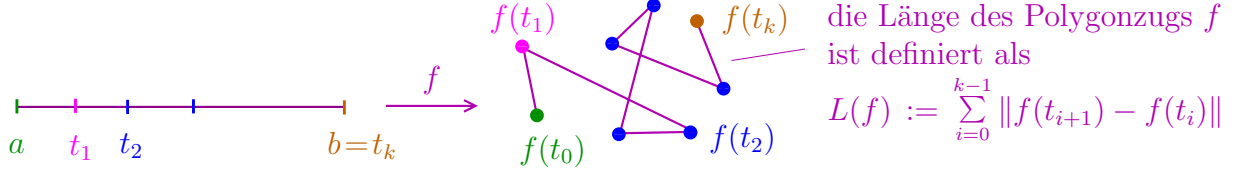
Eine **Zerlegung** Z eines Intervalls $[a, b]$ besteht aus reellen Zahlen

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b.$$

- (2) Eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Polygonzug**, wenn es eine solche Zerlegung gibt, so dass für jedes $i \in \{0, \dots, k-1\}$ die Kurve auf dem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ eine euklidische

Strecke ist. Wir definieren die Länge des Polygonzugs f als

$$L(f) := \sum_{i=0}^{k-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|.$$



Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall.

Definition.

- (1) Für eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine Zerlegung Z der Form

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b.$$

definieren wir

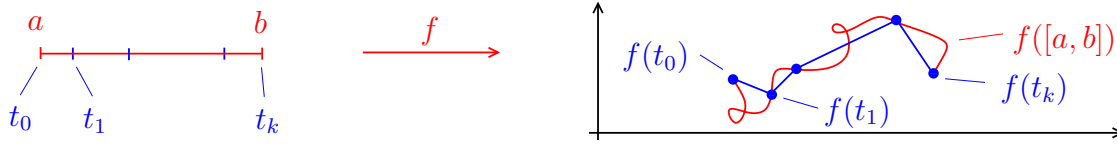
$$L(f, Z) := \sum_{i=0}^{k-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|.$$

Dies ist also gerade die Länge eines Polygonzugs, welcher gegeben ist durch die Punkte $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)$.

- (2) Wir definieren die Länge von f wie folgt:¹⁶¹⁷

$$L(f) := \sup\{L(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Wenn $L(f) < \infty$, dann nennen wir die Kurve rektifizierbar.



Beispiel. Es seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die euklidische Strecke

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (1-t) \cdot P + t \cdot Q. \end{aligned}$$

Dann gilt für jede Zerlegung Z der Form $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$, dass

$$\begin{aligned} L(f, Z) &= \sum_{i=0}^{k-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \sum_{i=0}^{k-1} \|(1-t_{i+1}) \cdot P + t_{i+1} \cdot Q - (1-t_i) \cdot P - t_i \cdot Q\| \\ &= \|Q - P\| \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i)}_{=1} = \|Q - P\|. \end{aligned}$$

¹⁶Für eine nach oben unbeschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ schreiben wir $\sup(M) = \infty$.

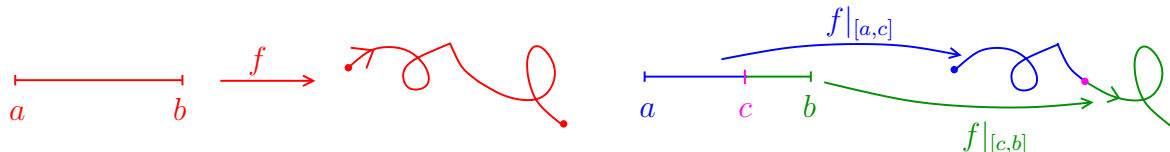
¹⁷Diese Definition ähnelt stark der Beschreibung des Riemann-Integrals über das Supremum von Untersummen.

Es folgt, dass die Länge von f wenig überraschend $\|Q - P\|$ beträgt.

Satz 4.1. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und es sei $a < c < b$. Wir bezeichnen mit $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ die Einschränkungen von f auf die Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$. Dann gilt¹⁸

$$L(f) = L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Insbesondere ist f rektifizierbar, genau dann, wenn sowohl $f|_{[a,c]}$ als auch $f|_{[c,b]}$ rektifizierbar sind.



Bemerkung. Es folgt aus dem vorherigen Beispiel und Satz 4.1, dass die erste Definition der Länge von Polygonzügen auch der allgemeinen Definition über die Länge von beliebigen Kurven entspricht.

Beweis ().* Die Aussage ähnelt [Fr1, Lemma 15.6], welches besagt, dass wir Riemann-Integrale in zwei Integrale aufbrechen können. Der Beweis verläuft formal ganz ähnlich. Der Vollständigkeit halber skizzieren wir zumindest den Beweis. Wenn X eine Zerlegung von $[a, c]$ ist und wenn Y eine Zerlegung von $[c, b]$ ist, dann ist $Z = X \cup Y$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und es folgt leicht aus den Definitionen, dass $L(f, Z) = L(f|_{[a,c]}, X) + L(f|_{[c,b]}, Y)$. Aus dieser Tatsache folgt nun problemlos, dass

$$(1) \quad L(f) \geq L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]}).$$

Andererseits gilt, wenn Z eine Zerlegung von $[a, b]$ ist, dann ist $Z \cup \{c\}$ ebenfalls eine Zerlegung, und diese ist von der Form $Z \cup \{c\} = X \cup Y$, wobei X eine Zerlegung von $[a, c]$ und Y eine Zerlegung von $[c, b]$ ist. Es folgt, dass

$$L(f, Z) \leq L(f, Z \cup \{c\}) = L(f|_{[a,c]}, X) + L(f|_{[c,b]}, Y).$$

Aus dieser Tatsache folgt nun ebenfalls problemlos, dass

$$(2) \quad L(f) \leq L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]}).$$

Die Ungleichungen (1) und (2) ergeben die Gleichheit, welche wir beweisen sollten. ■

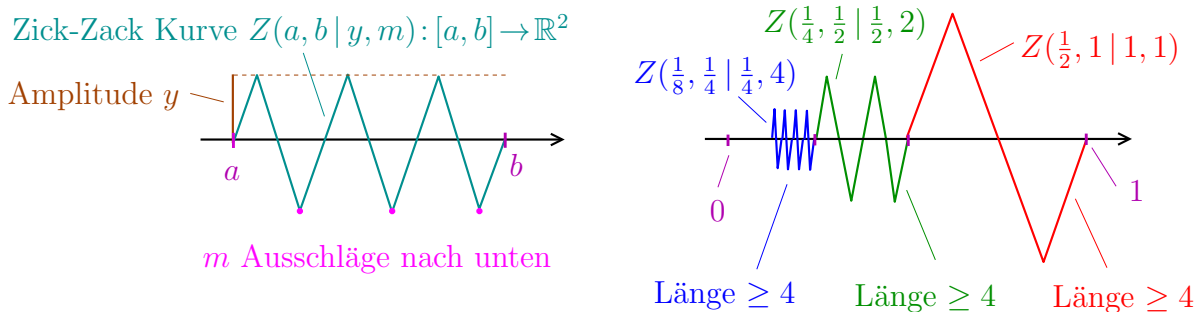
Beispiel. Wir werden nun sehen, dass es Kurven $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, welche nicht rektifizierbar sind. Für reelle Zahlen $a < b$ und $y \geq 0$ sowie $m \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $Z(a, b | y, m)$ die Zick-Zack-Kurve, welche in der Abbildung links abgebildet ist. Hierbei ist¹⁹

$$L(Z(a, b | y, m)) = \sqrt{(b-a)^2 + (4ym)^2} \geq 4 \cdot y \cdot m.$$

Wir betrachten die Kurve

¹⁸Wir verwenden hier die Addition auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, welche wir in [Fr1, Seite 42] eingeführt hatten.

¹⁹Man sieht dies, indem man die $4m$ Geradenstücke umlegt zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Länge $(b-a)$ und $4my$.



$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{cases} (0, 0), & \text{wenn } t = 0, \\ Z(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} | \frac{1}{2^k}, 2^k), & \text{wenn } t \in (\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}] \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

welche in der Abbildung auf der rechten Seite skizziert wird.²⁰ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$L(f|_{[\frac{1}{2^n}, 1]}) = \sum_{i=0}^{k-1} L(f|_{[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]}) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{L(Z(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} | \frac{1}{2^k}, 2^k))}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = 4} \geq 4n.$$

Wir sehen also, dass die Kurve $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ beliebig lange Teilkurven besitzt, also folgt aus Satz 4.1, dass $L(f) = \infty$.

Beispiel. Ein weiteres Beispiel einer nicht-rektifizierbaren Kurve ist durch die Peano-Kurve gegeben:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve>

Diese Kurve ist eine stetige Abbildung $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass die Bildmenge aus dem Quadrat $[0, 1]^2$ besteht, siehe auch [Ba, Kapitel 2.4]. Die Peano-Kurve ist nicht rektifizierbar.

4.3. Stetig differenzierbare Kurven. Folgende Definition ist eigentlich noch Bestandteil von Analysis I.

Definition. Eine Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall heißt **stetig differenzierbar**, wenn gilt:

- (1) Die Funktion ist im Inneren (a, b) stetig differenzierbar, d.h. die Funktion ist auf (a, b) differenzierbar und die Ableitungsfunktion ist stetig.
- (2) Die Ableitungsfunktion $g': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ setzt sich stetig auf die Randpunkte des Intervalls $[a, b]$ fort. Diese Fortsetzung wird dann ebenfalls mit g' bezeichnet.

Beispiel.

- (1) Die Einschränkung einer stetig differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf ein beliebiges Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar. Beispielsweise sind also Polynomfunktionen, die Exponentialfunktion und die Sinus- und Kosinusfunktion, eingeschränkt auf beliebige Intervalle, stetig differenzierbar.

²⁰Die Abbildung f ist in der Tat auch für $t = 0$ und die Punkte $t = \frac{1}{2^k}$ stetig.

(2) Die Funktion

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

ist *nicht* stetig differenzierbar, denn die Ableitungsfunktion $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ lässt sich nicht stetig von $(0, 1)$ auf $[0, 1]$ fortsetzen.

Jetzt wenden wir uns wieder der Analysis II zu.

Definition. Wir sagen eine Kurve $f = (f_1, \dots, f_n): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist (stetig) differenzierbar, wenn die n Koordinatenfunktionen $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ (stetig) differenzierbar sind.

Beispiel. Wir betrachten wiederum die Kurve $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche gegeben ist durch $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Die beiden Koordinatenfunktionen sind in diesem Fall $f_1(t) = \cos(t)$ und $f_2(t) = \sin(t)$. Diese sind natürlich stetig differenzierbar.

Definition. Es sei

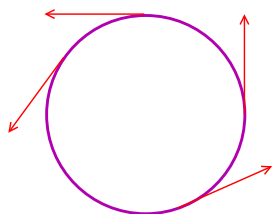
$$\begin{aligned} f: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Für $t \in [a, b]$ nennen wir

$$f'(t) := (f'_1(t), \dots, f'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

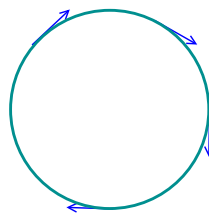
den **Ableitungsvektor** oder auch den **Tangentialvektor** der Kurve f zum Parameterwert t .

Bemerkung. Anschaulich gesprochen zeigt der Tangentialvektor in die “Durchlaufrichtung” und die Länge des Tangentialvektors misst die “Geschwindigkeit” zum Zeitpunkt t .



Tangentialvektoren der Kurve

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$



Tangentialvektoren der Kurve

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(-\tfrac{1}{2}t), \sin(-\tfrac{1}{2}t)) \end{aligned}$$

Der folgende Satz erlaubt es uns, mit etwas Glück, Längen von stetig differenzierbaren Kurven zu bestimmen.

Satz 4.2. Für jede stetig differenzierbare Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beispiele.

- (1) Es seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die euklidische Strecke von P nach Q :

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (1-t) \cdot P + t \cdot Q, \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 \underbrace{\|f'(t)\|}_{=Q-P} dt = \int_0^1 \|Q - P\| dt = \|Q - P\|. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Satz 4.2} \end{aligned}$$

Wir erhalten also in der Tat das erwartete Ergebnis.

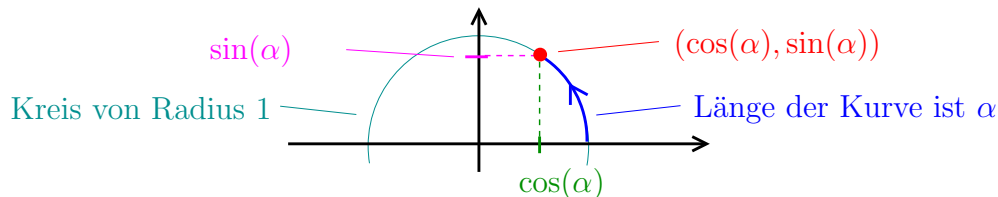
- (2) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Kurve
- $$\begin{aligned} f: [0, \alpha] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)). \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^\alpha \|f'(t)\| dt = \int_0^\alpha \|(-\sin(t), \cos(t))\| dt = \int_0^\alpha \underbrace{\sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2}}_{=1} dt = \alpha. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Satz 4.2} \end{aligned}$$

Diese Rechnung hat mehrere interessante Konsequenzen:

- (a) Für $\alpha = 2\pi$ erhalten wir also das wenig überraschende Ergebnis, dass die Länge der Kreiskurve von Durchmesser 1 gerade 2π beträgt. Wir haben jetzt also gezeigt, dass die auf den ersten Blick eigenwillige Definition von π aus der Analysis I der Definition aus der Schule entspricht. Insbesondere haben wir jetzt die Definition aus der Schule “ 2π ist der Umfang von einem Kreis von Radius 1” präzise gemacht, denn jetzt wissen wir, was “Länge von einem Kreis” wirklich heißen soll.
- (b) Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ sehen wir, dass der Punkt $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ gerade dem Punkt auf dem Einheitskreis entspricht, so dass die Länge der Kreiskurve α beträgt. Dies zeigt, dass die Definition von Sinus- und Kosinus in Analysis I gerade der Schuldefinition entspricht.



- (3) Es seien $r > 0$ und $c \neq 0$ gegeben. Wir betrachten wiederum die Helix

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (c \cdot t, r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t)), \end{aligned}$$

welche wir in der Abbildung auf Seite 39 skizziert hatten. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 L(f) &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(c, -r \sin(t), r \cos(t))\| dt \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{Satz 4.2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 + (-r \cdot \sin(t))^2 + (r \cdot \cos(t))^2} dt = 2\pi \sqrt{c^2 + r^2}.
 \end{aligned}$$

4.4. Beweis von Satz 4.2. Der Beweis von Satz 4.2 benötigt mehrere Vorbereitungen.

Lemma 4.3. *Es sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann gilt*

$$\left\| \underbrace{\int_a^b g(t) dt}_{\text{komponentenweises Integral}} \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Beweis ().* Für $n = 1$ ist dies gerade die Aussage von [Fr1, Satz 15.9]. Der allgemeine Beweis ist etwas aufwändiger. Wir führen dazu folgende Notation ein. Für eine Zerlegung Z der Form $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ definieren wir

$$I(g, Z) := \sum_{i=0}^{k-1} g(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 \|I(g, Z)\| &= \left\| \sum_{i=0}^{k-1} g(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|g(t_i)\| \cdot (t_{i+1} - t_i) \leq \underbrace{O(\|g\|, Z)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Obersumme von } \|g\| \text{ bezüglich } Z}}.
 \end{aligned}$$

$\uparrow$ Dreiecksungleichung Obersumme von $\|g\|$ bezüglich Z

Zudem folgt aus [Fr1, Satz 15.2], angewandt auf die Komponentenfunktionen von g , dass es eine Folge von Zerlegungen Z_n des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass gilt:

$$\int_a^b g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} I(g, Z_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} O(\|g\|, Z_n) = \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Es folgt:

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| = \underbrace{\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} I(g, Z_n) \right\|}_{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } Z_n}} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \|I(g, Z_n)\|}_{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit von } \|\cdot\|}} \leq \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} O(\|g\|, Z_n)}_{\substack{\uparrow \\ \text{erste Ungleichung}}} = \underbrace{\int_a^b \|g(t)\| dt}_{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } Z_n}}. \quad \blacksquare$$

Lemma 4.4. *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt*

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{\substack{s, s' \in [a, b] \text{ mit} \\ s \leq s' \leq s + \delta}} \forall_{t \in [s, s']} \left\| \underbrace{\frac{f(s) - f(s')}{s - s'}}_{\substack{\text{für } n=1 \text{ ist dies die} \\ \text{durchschnittliche Steigung} \\ \text{auf dem Intervall } [s, s']}} - f'(t) \right\| < \epsilon.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Es sei also $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und es sei $\epsilon > 0$. Die Ableitung $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Voraussetzung stetig. Nach [Fr1, Satz 7.14] ist die stetige Funktion f' sogar gleichmäßig stetig. Dies bedeutet:

$$\exists_{\delta > 0} \quad \forall_{\substack{\mu, \nu \in [a, b] \text{ mit} \\ |\mu - \nu| \leq \delta}} \quad |f'(\mu) - f'(\nu)| < \epsilon.$$

Es seien nun $s \leq s' \leq s + \delta$ und $t \in [s, s']$. Dann gilt

$$\left| \underbrace{\frac{f(s) - f(s')}{s - s'}}_{= f'(\xi) \text{ für ein } \xi \in [s, s'] \text{ nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung}} - f'(t) \right| = |f'(\xi) - f'(t)| < \epsilon.$$

$\uparrow$
aus $\xi, t \in [s, s']$ und $s' \leq s + \delta$ folgt $|\xi - t| \leq \delta$

Wir haben damit also die Aussage für $n = 1$ bewiesen.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall. Es sei also $f = (f_1, \dots, f_n): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es folgt aus Lemma 1.2, dass

$$\left\| \frac{f(s) - f(s')}{s - s'} - f'(t) \right\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{i=1, \dots, n} \left| \frac{f_i(s) - f_i(s')}{s - s'} - f'_i(t) \right|.$$

Wir wenden nun den Fall $n = 1$ auf die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_n$ und $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ an und erhalten $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$. Dann hat $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ die gewünschte Eigenschaft. ■

Wir können jetzt zum eigentlichen Beweis von Satz 4.2 übergehen.

Beweis von Satz 4.2. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Wir wollen zeigen, dass

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Wir zeigen, dass die Ungleichungen “ $\leq$ ” und “ $\geq$ ” gelten. Wir beginnen mit folgender Beobachtung: Für eine beliebige Zerlegung Z der Form $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$ gilt

$$L(f, Z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per Definition}}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \|f(s_{i+1}) - f(s_i)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HDI angewandt auf jede Komponente}}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{s_i}^{s_{i+1}} f'(t) dt \right\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 4.3}}}{\leq} \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \|f'(t)\| dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zusammenfassen der Integrale}}}{=} \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Dies zeigt schon die Ungleichung “ $\leq$ ”. Die Ungleichung “ $\geq$ ” folgt aus folgender Behauptung.

Behauptung. Für jedes $\eta > 0$ existiert eine Zerlegung Z mit $L(f, Z) \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt - \eta$.

Es sei also $\eta > 0$. Wir setzen $\epsilon = \frac{\eta}{b-a}$ und wir wählen ein $\delta > 0$ wie in Lemma 4.4. Zudem wählen wir eine Zerlegung $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$, so dass für alle $i = 0, \dots, k-1$ gilt

$s_{i+1} - s_i < \delta$. Dann folgt:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Definition von } L(f, Z) & & \text{Berechnung des Integrals} \\
 \text{und Zerlegung des Integrals} & & \text{einer konstanten Funktion} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L(f, Z) - \int_a^b \|f'(t)\| dt & = & \sum_{i=0}^{k-1} \left(\|f(s_{i+1}) - f(s_i)\| - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \|f'(t)\| dt \right) = \\
 & = & \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\| \frac{f(s_{i+1}) - f(s_i)}{s_{i+1} - s_i} - f'(t) \right\| dt \\
 & \geq & \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \underbrace{\left\| \frac{f(s_{i+1}) - f(s_i)}{s_{i+1} - s_i} - f'(t) \right\|}_{\leq \epsilon \text{ da } s_{i+1} - s_i < \delta} dt \geq \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} -\epsilon dt}_{=-\epsilon \cdot (b-a)} = -\eta. \\
 \uparrow & & \\
 \text{die Dreiecksungleichung besagt, dass} & & \\
 \|b\| = \|a + (-a + b)\| \leq \|a\| + \|-a + b\| = \|a\| + \|a - b\| & & \\
 \text{also gilt } \|a\| - \|b\| \geq -\|a - b\| & & \blacksquare
 \end{array}$$

4.5. Parametertransformationen. Wir beschließen das Kapitel mit der Diskussion von Parametertransformationen von Kurven.

Definition. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetige bijektive Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned}
 f \circ \varphi: [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
 t &\mapsto f(\varphi(t))
 \end{aligned}$$

ebenfalls eine Kurve. Wir sagen, diese Kurve geht aus der Kurve f durch **Parametertransformation** φ hervor.

Bemerkung. Eine Parametertransformation $f \circ \varphi$ nimmt also genau die gleichen Punkte an wie die ursprüngliche Kurve f , aber “zu anderen Zeiten”.

Beispiel. Für

$$\begin{aligned}
 f: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{ist} & & g: [-\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) & & & t &\mapsto (\cos(5 \cdot t + \frac{\pi}{2}), \sin(5 \cdot t + \frac{\pi}{2}))
 \end{aligned}$$

entstanden durch die Parametertransformation $\varphi: [-\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}] \rightarrow [0, 2\pi]$, wobei $\varphi(t) = 5 \cdot t + \frac{\pi}{2}$.

Der folgende Satz besagt, dass sich die Länge einer Kurve durch Parametertransformationen nicht ändern.

Satz 4.5. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und es sei zudem $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetige bijektive Funktion. Dann gilt

$$L(f \circ \varphi) = L(f).$$

Etwas vereinfacht gesagt besagt der Satz, dass sich die Länge einer Kurve nicht verändert, wenn man die Bildpunkte mit einer anderen “Geschwindigkeit durchfährt”.

Beweis. Wenn man sich die Definition der Länge einer Kurve auf Seite 40 in Ruhe und mit Adlernaugen anschaut, dann merkt man, dass der Satz direkt aus der Definition folgt: In der

Tat, denn für jede Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$ gilt, wie man durch hinschreiben sieht, dass $L(f, Z) = L(f \circ \varphi, \varphi^{-1}(Z))$, und dass $L(f \circ \varphi, Z) = L(f, \varphi(Z))$

Wenn f und φ stetig differenzierbar sind, dann geben wir im Folgenden noch einen zweiten Beweis, welcher länger ist, aber je nach Geschmack eingängiger.

Nachdem φ stetig und bijektiv ist, folgt, dass entweder φ streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist. Wir betrachten zuerst den Fall, dass φ streng monoton steigend ist, d.h. es ist $\varphi'(s) \geq 0$ für alle $s \in [c, d]$. Insbesondere ist $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 L(f \circ \varphi) &= \int_c^d \|(f \circ \varphi)'(s)\| ds &= \int_c^d \|f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\| ds &= \int_c^d \|f'(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s) ds \\
 &\uparrow \text{nach Satz 4.2} &\uparrow \text{Kettenregel koordinatenweise} &\uparrow \text{denn } \varphi'(s) \geq 0 \\
 &&&\text{angewandt} \\
 &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|f'(u)\| du &= \int_a^b \|f'(u)\| du &= L(f). \\
 &\uparrow \text{nach der Substitutionsregel mit } u = \varphi(s) &&\uparrow \text{nach Satz 4.2}
 \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir den Fall, dass φ streng monoton fallend ist. Es folgt, dass $\varphi'(s) \leq 0$ für alle $s \in [c, d]$. Zudem ist $\varphi(c) = b$ und $\varphi(d) = a$. Wir wenden das obige Argument noch einmal an, allerdings mit zwei kleinen Modifikationen:

$$\begin{aligned}
 L(f \circ \varphi) &= \int_c^d \|(f \circ \varphi)'(s)\| ds &= \int_c^d \|f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\| ds &= \int_c^d \|f'(\varphi(s))\| \cdot |\varphi'(s)| ds \\
 &\uparrow \text{nach Satz 4.2} &\uparrow \text{Kettenregel koordinatenweise angewandt} \\
 &= \int_c^d \|f'(\varphi(s))\| \cdot (-\varphi'(s)) ds &= - \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|f'(u)\| du \\
 &\uparrow \text{denn } \varphi'(s) \leq 0 &\uparrow \text{nach der Substitutionsregel mit } u = \varphi(s) \\
 &= - \int_b^a \|f'(u)\| du &= \int_a^b \|f'(u)\| du = L(f). \\
 &\uparrow \text{da } \varphi(c) = b \text{ und } \varphi(d) = a &\uparrow \text{da allgemein } \int_b^a g(u) du = - \int_a^b g(u) du
 \end{aligned}$$

Bemerkung. Auf Seite 40 hatten wir die Länge einer Kurve, d.h. einer stetigen Abbildung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eingeführt. Mithilfe von Satz 4.5 kann man nun den Begriff von Länge auch für bestimmte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einführen. Genauer gesagt, wenn $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge ist, für welche es eine injektive Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f([a, b]) = K$ gibt, dann definieren wir

$$\text{Länge von } K := L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

wenn f stetig differenzierbar

Mithilfe von Satz 4.5 kann man, mit etwas Mühe, zeigen, dass diese Definition der Länge von K nicht von der Wahl von f abhängt. Wir werden diesen Gedanken nicht weiter verfolgen.

5. PARTIELLE ABLEITUNGEN

In Analysis I haben wir gesehen, dass Ableitungen eine wichtige Rolle spielen. Wir wollen uns jetzt dem Begriff von Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen zuwenden. Wir führen dazu erst einmal folgende Notation ein.

Notation. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir:

$$\begin{array}{ccc} i\text{-ten Einheitsvektor} & e_i & := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \\ & & \uparrow \\ & & i\text{-te Koordinate} \end{array}$$

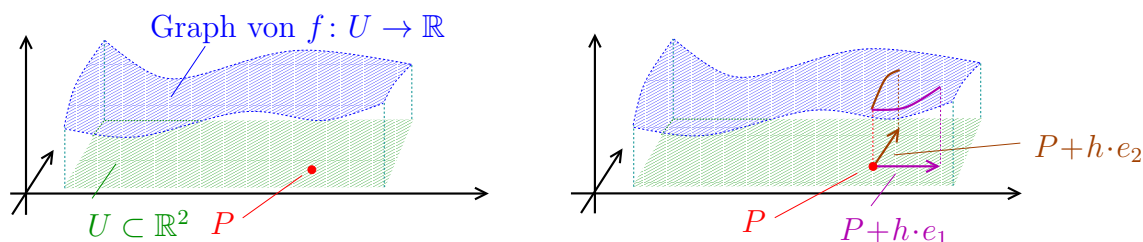
Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (1) Es sei $P \in U$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Wenn der Grenzwert²¹²²

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(P) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h \cdot e_i) - f(P)}{h}$$

existiert, dann heißt f am Punkt P in der i -ten Koordinate partiell differenzierbar und wir nennen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(P)$ die i -te partielle Ableitung von f am Punkt P .

- (2) Wir sagen f ist in P partiell differenzierbar, wenn f in P in allen Koordinaten partiell differenzierbar ist.
 (3) Die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt partiell differenzierbar, wenn f in allen Punkten $P \in U$ partiell differenzierbar ist.



Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Außerdem sei nun $P = (p_1, \dots, p_n) \in U$ ein fest gewählter Punkt. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(p_1, \dots, p_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{h}$$

nichts anderes als die übliche Analysis I- Ableitung der Funktion

$$x_i \mapsto f(p_1, \dots, p_{i-1}, x_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

²¹Nachdem U offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $P + h \cdot e_i \in U$ für alle $h \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wir bestimmen hier dann den Grenzwert der Funktion $(-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $h \mapsto \frac{f(P + h \cdot e_i) - f(P)}{h}$,

mit $h \rightarrow 0$, d.h. wir bestimmen den Grenzwert einer reellwertigen Funktion in einer Variablen, diesen hatten wir schon in Analysis I definiert.

²²Das Symbol ∂ wird als “Del” ausgesprochen. Es ist kein griechischer Buchstabe, und insbesondere nicht mit dem griechischen Delta δ zu verwechseln. In Latex wird es als `\partial` geschrieben.

an der Stelle $x_i = p_i$. Wir können deswegen partielle Ableitungen wie gewöhnliche Ableitungen von Funktionen einer Variablen bestimmen.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion²³

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 \cdot x_2 + x_2^5 + \sin(x_1 \cdot x_3).$$

Wie gerade besprochen können wir die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}$ “ganz normal” wie in Analysis I bestimmen, wir müssen nur bedenken, dass alle anderen x_j in Wirklichkeit Konstanten sind. In diesem Fall gilt also beispielsweise:²⁴

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f = 6x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot \cos(x_1 \cdot x_3), \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f = 3x_1^2 + 5x_2^4, \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} f = x_1 \cdot \cos(x_1 \cdot x_3).$$

Bemerkung. Manchmal verwenden wir auch andere Namen für die partiellen Ableitungen. Beispielsweise verwenden wir für Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ oft auch “ x ” und “ y ” anstatt “ x_1 ” und “ x_2 ”. Beispielsweise gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{x^2+y^2} = 2y \cdot e^{x^2+y^2}.$$

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion.

- (1) Wir sagen, f ist stetig partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und zudem stetig sind.²⁵
- (2) Wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f: U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ wieder partiell differenzierbar sind, dann heißt f zweimal partiell differenzierbar. Analog definieren wir k -mal partiell differenzierbar.
- (3) Wir sagen f ist k -mal stetig partiell differenzierbar, wenn die Funktion f k -mal partiell differenzierbar ist, und alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

von Grad $l \leq k$ stetig sind.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 + x_2^5 + \sin(x_1 x_3)$. In diesem Fall gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} f = \frac{\partial}{\partial x_3} (6x_1 x_2 + x_3 \cdot \cos(x_1 x_3)) = 1 \cdot \cos(x_1 x_3) - x_3 \cdot x_1 \cdot \sin(x_1 x_3),$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} f = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \cdot \cos(x_1 x_3)) = 1 \cdot \cos(x_1 x_3) - x_1 \cdot x_3 \cdot \sin(x_1 x_3).$$

Wir sehen also, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} f = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} f.$$

In diesem Beispiel erhalten wir also die gleichen zweifachen partiellen Ableitungen, egal, in welcher Reihenfolge wir die partiellen Ableitungen bilden.

²³Wie in Analysis I geben wir nicht immer den Definitionsbereich, sondern wir verwenden implizit den “maximalen” Definitionsbereich, bei dem der gegebene Ausdruck Sinn ergibt. In diesem Fall ist also f auf $U = \mathbb{R}^3$ definiert.

²⁴Die partiellen Ableitungen sind wiederum Funktionen $\frac{\partial}{\partial x_i} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

²⁵Die partiellen Ableitungen sind Funktionen $\frac{\partial}{\partial x_i} f: U \rightarrow \mathbb{R}$, welche wir auf Stetigkeit überprüfen können.

Der nächste Satz besagt, dass dies kein Zufall ist, sondern dass diese Aussage allgemein für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen Funktionen gilt.

Satz 5.1. (Satz von Schwarz) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $P \in U$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dass*

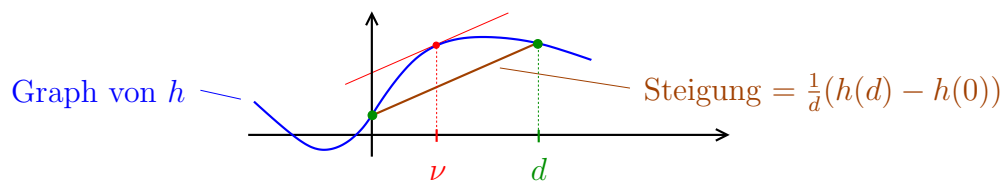
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(P) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(P).$$

Bemerkung. Im Übungsblatt 4 werden wir sehen, dass die Aussage im Allgemeinen nicht für Funktionen gilt, welche zwar zweimal partiell differenzierbar sind, aber nicht zweimal stetig partiell differenzierbar sind.

Der Beweis von Satz 5.1 basiert auf dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung [Fr1, Satz 13.2], in folgender speziellen Formulierung:

Theorem 5.2. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Für jedes $d > 0$ gibt es eine reelle Zahl $\nu \in (0, d)$, so dass*

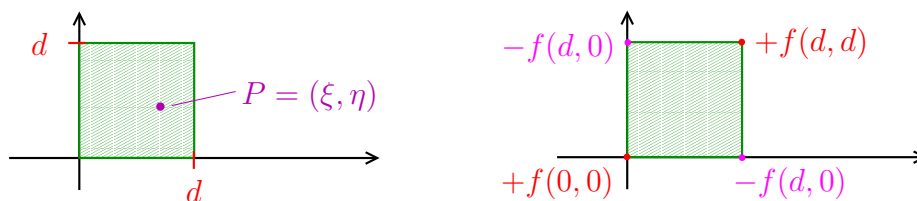
$$h'(\nu) = \frac{1}{d} \cdot (h(d) - h(0)).$$



Das folgende Lemma kann man als 2-dimensionale Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auffassen.

Lemma 5.3. *Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Für jedes $d > 0$ existiert ein $P \in (0, d) \times (0, d)$, so dass*

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(P) = \frac{1}{d^2} \cdot (f(d, d) - f(d, 0) - f(0, d) + f(0, 0)).$$



Beweis.

Die Idee für den Beweis ist, dass wir den Mittelwertsatz 5.2 der Differentialrechnung (MWS) zweimal geschickt auf die rechte Seite der Behauptung anwenden wollen, nämlich einmal auf eine “Funktion in der x -Variable” und dann auf eine “Funktion in der y -Variable”.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d^2} \cdot (f(d, d) - f(d, 0) - f(0, d) + f(0, 0)) \\
&= \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{d} \cdot (h(d) - h(0)) \quad \text{wobei } h(x) := f(x, d) - f(x, 0) \\
&= \frac{1}{d} \cdot \underbrace{\frac{1}{d} \cdot (h(d) - h(0))}_{= h'(\xi) \text{ für ein } \xi \in (0, d) \text{ nach MWS angewandt auf } h(x)} \\
&= \frac{1}{d} \cdot h'(\xi) \\
&= \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\xi, d) - \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, 0) \right) \quad \text{nachdem } h(x) = f(x, d) - f(x, 0) \\
&= \frac{1}{d} \cdot (k(d) - k(0)) \quad \text{wobei } k(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y) \\
&= \underbrace{\frac{1}{d} \cdot (k(d) - k(0))}_{= k'(\eta) \text{ für ein } \eta \in (0, d) \text{ nach MWS angewandt auf } k(y)} \\
&= k'(\eta) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, \eta) \quad \text{nachdem } k(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y).
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $P = (\xi, \eta)$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. ■

Lemma 5.4. *Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Für jedes $d > 0$ existiert ein $Q \in (0, d) \times (0, d)$, so dass*

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(Q) = \frac{1}{d^2} \cdot (f(d, d) - f(d, 0) - f(0, d) + f(0, 0)).$$

Beweis. Indem wir im Beweis von Lemma 5.3 die Rollen der ersten und zweiten Koordinate vertauschen sehen wir, dass es $Q \in (0, d) \times (0, d)$ gibt, so dass

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(Q) = \underbrace{\frac{1}{d^2} \cdot (f(d, d) - f(0, d) - f(d, 0) + f(0, 0))}_{\text{gleich dem gewünschten Ausdruck}}.$$
■

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis von Satz 5.1 zu.

Beweis von Satz 5.1. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir nur den Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^2$, $i = 1$, $j = 2$ und $P = (0, 0)$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen.

Es sei also $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Wir wollen zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0).$$

Nachdem für jedes $d > 0$ auf der rechten Seiten von Lemma 5.3 und 5.4 genau der gleiche Term steht, wissen wir schon, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte P_n, Q_n in $(0, \frac{1}{n}) \times (0, \frac{1}{n})$ gibt

mit:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} f(P_n) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(Q_n).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} f(0,0) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n\right) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} f(P_n) \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(Q_n) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(0,0). \end{aligned}$$

nach Wahl von P_n und Q_n wie beim zweiten Schritt

Notation. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ schreiben wir

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

Wir verwenden zudem die ganz analogen Notationen für die höheren partiellen Ableitungen.

Der folgende Satz besagt nun, dass es bei k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen völlig egal ist, in welcher Reihenfolge wir die ersten k partiellen Ableitungen bilden.

Satz 5.5. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Es seien $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und es sei $\sigma \in S_k$ eine Permutation²⁶. Dann gilt*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \partial x_{i_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(k)}}} f = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} f.$$

Beweis. Es folgt aus Satz 5.1, dass man zwei partielle Ableitungen vertauschen kann, welche direkt aufeinander erfolgen. Der Satz folgt nun leicht aus der Tatsache, welche in der Linearen Algebra [N1, Satz 11.4] bewiesen wurde, dass jedes Element in der Permutationsgruppe ein Produkt von Transpositionen ist. ■

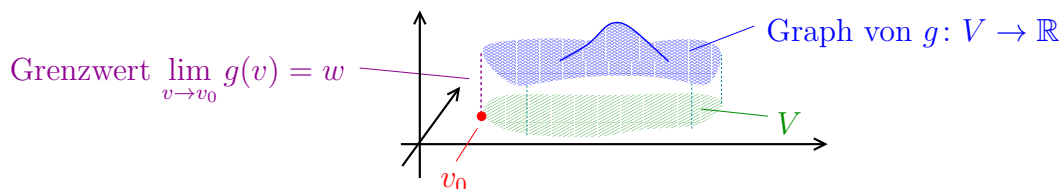
²⁶Zur Erinnerung, S_k bezeichnet die k -te Permutationsgruppe, d.h. die Gruppe aller bijektiven Abbildungen $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

6. DIFFERENZIERBARKEIT

6.1. Grenzwerte von Abbildungen.

Definition. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ und es sei $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Zudem sei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ und es sei $w \in \mathbb{R}^m$. Wir definieren, wie in Analysis I:

$$\lim_{v \rightarrow v_0} g(v) = w \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall v \neq v_0 \in B_\delta(v_0) \cap V \quad \|g(v) - w\| < \epsilon.$$



Viele Sätze über Grenzwerte, welche wir schon aus Analysis I kennen übertragen sich problemlos auf diesen allgemeineren Fall. Beispielsweise gilt folgende Verallgemeinerung von [Fr1, Satz 7.9].

Satz 6.1. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ und es sei $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Für $v_0 \in V$ gilt:

$$g \text{ stetig im Punkt } v_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{v \rightarrow v_0} g(v) = g(v_0).$$

Insbesondere gilt: wenn g stetig ist, dann können wir Grenzwert und Abbildung vertauschen.

Beweis. Genau wie [Fr1, Satz 7.9] folgt dieser Satz sofort aus den Definitionen. ■

Der folgende Satz verallgemeinert zudem [Fr1, Satz 7.10]. Der Satz kann verwendet werden um Aussagen über Grenzwerte von Abbildungen auf Aussagen über Grenzwerte von Folgen zurückzuführen.

Satz 6.2. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ und es sei $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Für $v_0 \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\lim_{v \rightarrow v_0} g(v) = w \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{für jede Folge } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } V, \\ \text{mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = v_0 \text{ gilt, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = w. \end{array}$$

Beweis. Der Beweis ist ganz analog zum Beweis von [Fr1, Satz 7.10]. Wir überlassen es der Leserschaft die Details auszuführen. ■

Der Beweis von folgendem Lemma ist ganz ähnlich zum Beweis von [Fr1, Satz 3.5].

Lemma 6.3. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$, es sei $v_0 \in V$ und es seien $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen. Dann gilt

$$\lim_{v \rightarrow v_0} f(v) = 0 \quad \& \quad g \text{ auf } V \text{ beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{v \rightarrow v_0} (f \cdot g)(v) = 0.$$

6.2. Das Landau-Symbol o . Wir führen jetzt das Landau-Symbole o ein. Diese Schreibweise wird im weiteren Verlauf der Vorlesung die Notation bei mehreren Gelegenheiten deutlich vereinfachen.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von 0 und es seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildung. Wir schreiben²⁷

$$f(x) = o(h(x)) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in B_\delta(0) \cap U} \|f(x)\| \leq \epsilon \cdot |h(x)|.$$

Für Abbildungen $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir auch

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x) - g(x) = o(h(x)).$$

Bemerkung. Sehr vereinfacht gilt $f(x) = o(h(x))$, wenn $\|f(x)\|$ beliebig viel kleiner als $|h(x)|$ ist in kleinen Umgebungen des Ursprungs.

Beispiel. Auf $U = \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 \cdot \sin(x) = o\left(\frac{1}{2} \cdot x\right).$$

In der Tat: für $\epsilon > 0$ setzen wir $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$, und dann gilt für alle $x \in (-\delta, \delta)$, dass

$$|x^2 \cdot \sin(x)| = \underbrace{2 \cdot |x \cdot \sin(x)|}_{< 2 \cdot \delta} \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot x\right| < \underbrace{2 \cdot \delta}_{=\epsilon} \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot x\right| = \epsilon \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot x\right|.$$

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgendem Lemma.

Lemma 6.4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von 0 und es seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen, so dass $f(0) = 0$ und so dass $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = o(h(x)).$$

Beweis. Wenn man die Definitionen der Aussagen links und rechts explizit hinschreibt, dann sieht man, dass die Aussage auch fast schon dasteht. ■

6.3. Differenzierbarkeit. Wir führen nun folgende Definition ein.

Definition. Es sei B eine reelle $m \times n$ -Matrix es sei $C \in \mathbb{R}^m$. Wir bezeichnen²⁸

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto B \cdot x + C \end{aligned}$$

als eine affine Abbildung.

In Analysis I hatten wir gesehen, dass eine differenzierbare Funktion durch affine Funktionen approximiert werden kann. Genauer gesagt, [Fr1, Lemma 21.1] macht de facto folgende Aussage:

Lemma 6.5. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn f differenzierbar ist im Punkt $x_0 \in I$, dann ist die Abbildung

$$h \mapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

²⁷Gesprochen wird das wie folgt: “ $f(x)$ ist klein-O von $g(x)$ ”.

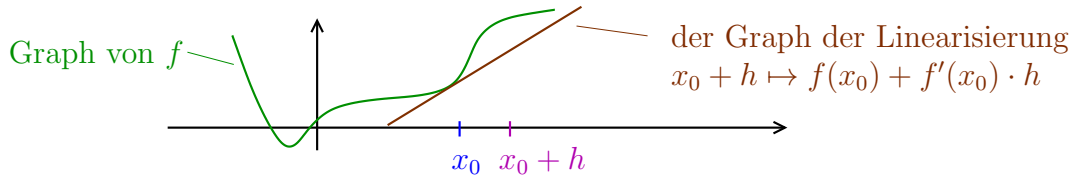
²⁸Die Abbildung ist eine lineare Abbildung genau dann, wenn $C = 0$.

eine Approximation der Funktion $h \mapsto f(x_0 + h)$ in dem Sinne, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h}{h} = 0.$$

Mit anderen Worten die Ableitung $f'(x_0)$ hat die Eigenschaft, dass

$$f(x_0 + h) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot h}_{\text{affine Abbildung in } h} + o(h).$$



In höheren Dimensionen soll eine Abbildung in einem Punkt x_0 differenzierbar heißen, wenn wir die Abbildung in der Nähe von x_0 durch eine affine Abbildung approximieren können. Dieser Gedanke führt uns zu der folgenden Definition.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Zudem sei $x_0 \in U$.

- (1) Wir sagen f ist im Punkt x_0 differenzierbar²⁹, wenn es eine $m \times n$ -Matrix D gibt, so dass³⁰

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0) - D \cdot v}{\|v\|} = 0.$$

- (2) Wir nennen die Matrix D in (1) das Differential $Df(x_0)$ von f am Punkt x_0 .³¹ Manchmal schreiben wir auch Df_{x_0} anstatt $Df(x_0)$.
- (3) Wir sagen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar, wenn f in allen Punkten des Definitionsbereichs U differenzierbar ist.

Bemerkung.

- (1) Wenn $m = n = 1$, dann ist die Definition von Differenzierbarkeit oben äquivalent zu derjenigen aus Analysis I. In diesem Fall ist dann D die 1×1 -Matrix, welche durch $f'(x_0)$ gegeben ist.
- (2) Dank Lemma 6.4 können wir Differenzierbarkeit auch mithilfe vom Landau-Symbol o formulieren. Genauer gesagt, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist im Punkt x_0 differenzierbar, genau dann, wenn es eine $m \times n$ -Matrix D gibt, so dass gilt:

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + D \cdot v + o(\|v\|).$$

Das folgende Lemma verallgemeinert [Fr1, Lemma 12.1].

²⁹In der Literatur wird dies manchmal auch als *total differenzierbar* bezeichnet.

³⁰Nachdem U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x_0) \subset U$. Wir betrachten dann also den Grenzwert der Abbildung

$$\begin{aligned} B_\epsilon(0) \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto \frac{f(x_0 + v) - f(x_0) - D \cdot v}{\|v\|} \quad \text{am Punkt } v_0 = 0. \end{aligned}$$

³¹Das Differential wird manchmal auch *Funktional-Matrix* oder *Jacobi-Matrix* genannt.

Lemma 6.6. Es sei B eine $m \times n$ -Matrix es sei $C \in \mathbb{R}^m$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto B \cdot x + C \end{aligned}$$

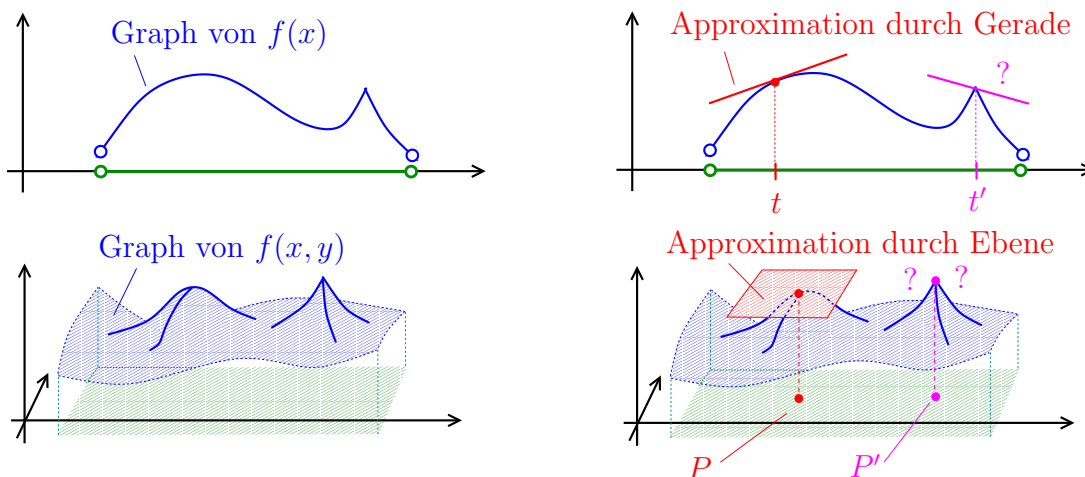
ist an jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit Differential B .

Beweis. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x_0+v) - f(x_0) - B \cdot v}{\|v\|} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(B \cdot (x_0+v) + C) - (B \cdot x_0 + C) - B \cdot v}{\|v\|} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(B \cdot x_0 + B \cdot v + C) - (B \cdot x_0 + C) - B \cdot v}{\|v\|} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{0}{\|v\|} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bemerkung.

- (1) Anschaulich gesprochen ist eine Funktion $f(x)$ differenzierbar in einem Punkt t , wenn der Graph am Punkt $(t, f(t))$ durch eine Gerade approximiert werden kann.
- (2) Ganz analog gilt, eine Funktion $f(x, y)$ ist differenzierbar in einem Punkt P , wenn der Graph am Punkt $(P, f(P))$ durch eine Ebene approximiert werden kann.



6.4. Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen. Auf Seite 49 hatten wir den Begriff von partiellen Ableitungen eingeführt, und es stellt sich die natürliche Frage, was denn die ähnlich klingenden Begriffe von “partiellen Ableitungen” und “Differential” miteinander zu tun haben. Der folgende Satz beantwortet diese Frage teilweise.

Satz 6.7. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei

$$f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Abbildung, welche im Punkt $x \in U$ differenzierbar mit Differential $D = (d_{ij})$ ist. Dann gilt:

- (1) f ist stetig im Punkt x ,

(2) für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ ist f_i in der j -ten Koordinate partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = d_{ij} = ij\text{-Eintrag des Differentials } D.$$

Bemerkung. Der Satz besagt insbesondere, dass wenn f im Punkt x differenzierbar ist, dann kann das Differential durch die partiellen Ableitungen bestimmt werden, insbesondere ist das Differential eindeutig bestimmt.

Beweis von Satz 6.7. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, welche im Punkt $x \in U$ differenzierbar mit Differential $D = (d_{ij})$ ist.

$$\begin{aligned} (1) \text{ Es gilt } \lim_{w \rightarrow x} f(w) &= \lim_{w \rightarrow x} \left(f(x) + Df_x \cdot (w - x) + \underbrace{\varphi(w - x)}_{\substack{\text{wobei } \varphi(v) = o(\|v\|)}} \right) \\ &\quad \uparrow \text{ siehe Seite 56 mit } v = w - x \\ &= f(x) + Df_x \cdot \underbrace{\left(\lim_{w \rightarrow x} (w - x) \right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{w \rightarrow x} \varphi(w - x)}_{=0, \text{ denn } \varphi(v) = o(\|v\|)} = f(x). \\ &\quad \uparrow \text{ folgt aus Satz 6.1 und Lemma 2.11} \end{aligned}$$

Es folgt also aus Satz 6.1, dass die Abbildung f im Punkt x stetig ist.

(2) Es seien $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x) - D \cdot v}{\|v\|} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_j) - f(x) - D \cdot h e_j}{\|h e_j\|} = 0.$$

Es folgt, wie in Satz 2.4, dass dann auch die Grenzwerte für die m Koordinaten gegen 0 konvergieren. Die i -te Koordinate von $D \cdot h e_j$ ist $h d_{ij}$, es folgt also, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + h e_j) - f_i(x) - h d_{ij}}{\|h e_j\|} = 0.$$

Nachdem $\|h e_j\| = |h|$, folgt nun, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + h e_j) - f_i(x) - h d_{ij}}{|h|} = 0.$$

Nachdem der Grenzwert Null ist, ist der Absolutbetrag im Nenner irrelevant, und es folgt, dass sogar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + h e_j) - f_i(x) - h d_{ij}}{h} = 0,$$

also folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + h e_j) - f_i(x)}{h} = d_{ij},$$

aber die linke Seite ist gerade die Definition der partiellen Ableitung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$. ■

Der vorherige Satz besagt, dass wenn f an einem Punkt differenzierbar ist, dann ist f auch an diesem Punkt partiell differenzierbar. Es stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung gilt.

Beispiel. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|y|}. \end{aligned}$$

Nachdem $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, sehen wir, dass die partiellen Ableitungen am Punkt $(0, 0)$ existieren, und null sind. Wenn f differenzierbar wäre müsste das Differential nach Satz 6.7 also die Nullmatrix sein. Andererseits gilt für Punkte (x, x) auf der Diagonale, dass $f(x, x) = |x|$, dies deutet schon an, dass f im Punkt $(0, 0)$ nicht durch die Nullmatrix approximiert werden kann. Wir werden das Argument in Übungsblatt 4 ausarbeiten.

Der folgende Satz ist in gewisser Weise doch eine Umkehrung von Satz 6.7: wenn f in jedem Punkt partiell differenzierbar ist, und wenn die partiellen Ableitungen stetig sind, dann ist f auch in jedem Punkt differenzierbar. Genauer gesagt, wir haben folgenden Satz.

Satz 6.8. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wenn f stetig partiell differenzierbar ist, dann ist f auch differenzierbar.*

Im Beweis von Satz 6.8 verwenden wir folgende Formulierung des Mittelwertsatzes.

Theorem 6.9. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine reelle Zahl t zwischen 0 und c , so dass*

$$h(c) - h(0) = c \cdot h'(t).$$

Beweis. Für $c > 0$ und auch $c < 0$ folgt die Aussage sofort aus dem üblichen Mittelwertsatz der Differentialrechnung, siehe [Fr1, Satz 13.2]. Die Aussage ist aber auch trivialerweise wahr für $c = 0$. ■

Beweis von Satz 6.8. Wir müssen also zeigen, dass f in jedem Punkt x differenzierbar ist. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^n$ und $x = 0 \in \mathbb{R}^n$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Es sei also $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion.

Wir müssen also zeigen, dass $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass es eine $(1 \times n)$ -Matrix D gibt, so dass

$$(*) \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v) - f(0) - D \cdot v}{\|v\|} = 0.$$

Aus Satz 6.7 wissen wir, dass die einzige Matrix, welche möglicherweise diese Bedingung (*) erfüllt, gegeben ist durch

$$D := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(0) \right).$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Matrix D in der Tat (*) erfüllt. Die folgende Behauptung erlaubt es uns den Zähler von (*) umzuschreiben.

Behauptung. Für alle $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existieren Punkte $u^1, \dots, u^n \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u^i\| \leq \|v\|$, so dass

$$f(v) - f(0) - D \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(u^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right).$$

Es sei also $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

Wir wollen auch diese Behauptung mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung beweisen. Wir müssen dazu den Ausdruck $f(v) - f(0) - D \cdot v$ durch Funktionen in einer Variablen beschreiben.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} w^0 &:= (0, \dots, 0), \\ w^1 &:= (v_1, 0, \dots, 0), \\ w^2 &:= (v_1, v_2, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ w^n &:= (v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(v) - f(0) - D \cdot v &\stackrel{\text{alle anderen Terme heben sich weg und nach Wahl von } D}{=} \sum_{i=1}^n (f(w^i) - f(w^{i-1})) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, 0, \dots, 0) - f(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, 0, \dots, 0)}_{=h_i(v_i)-h_i(0) \text{ für } h_i(s)=f(v_1, \dots, v_{i-1}, s, 0, \dots, 0)} - \sum_{i=1}^n v_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \\ &= (*). \end{aligned}$$

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ wenden wir Satz 6.9 auf die Funktion

$$h_i(s) = f(v_1, \dots, v_{i-1}, s, 0, \dots, 0) \text{ und } c = v_i$$

an. Wir erhalten ein t_i zwischen 0 und v_i mit

$$h_i(v_i) - h_i(0) = v_i \cdot h'_i(t_i)$$

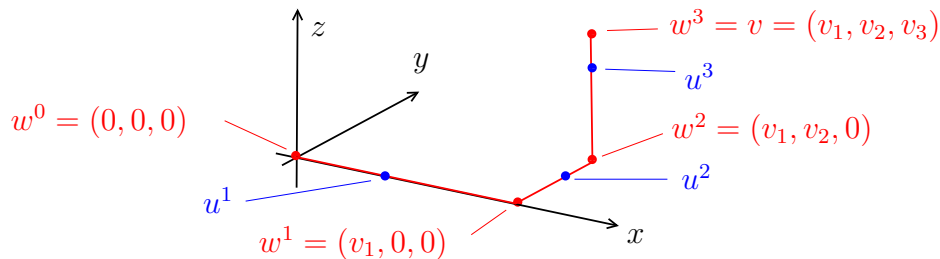
Aber durch Rückübersetzen in die Funktion f erhalten, wir dass

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, 0, \dots) - f(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, \dots) = v_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underbrace{v_1, \dots, v_{i-1}, t_i, 0, \dots, 0}_{=: u^i}).$$

Für jedes i setzen wir nun $u^i := (v_1, \dots, v_{i-1}, t_i, 0, \dots, 0)$ und erhalten, dass

$$(*) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(u^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Beobachtung, dass die Normen der Punkte $u^1, \dots, u^n$ kleiner gleich der Norm von v sind. $\square$



Behauptung. Es gilt

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v) - f(0) - D \cdot v}{\|v\|} = 0.$$

Sei also $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen stetig. Also existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$u \in B_\delta(0) \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right| < \frac{\epsilon}{n}$$

Es sei nun also $v \in B_\delta(0)$. Wir wählen $u^1, \dots, u^n$ wie in der Behauptung. Dann ist

$$\left| \frac{f(v) - f(0) - D \cdot v}{\|v\|} \right| \leq \sum_{i=1}^n \overbrace{\frac{|v_i|}{\|v\|}}^{\in [0,1]} \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right| \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right|}_{< \frac{\epsilon}{n} \text{ da } \|u^i\| \leq \|v\| < \delta} < \epsilon.$$

↑
folgt aus der Wahl der u^i und
der Dreiecksungleichung

Wir haben damit also gezeigt, dass der Grenzwert in der Tat 0 ist. ■

Satz 6.10. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wenn alle Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ stetig partiell differenzierbar sind, dann ist f differenzierbar, und für jedes $P \in U$ gilt:*

$$\text{Differential } Df(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir wenden Satz 6.7 und Satz 6.8 auf die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ an und erhalten die Aussage für die einzelnen Koordinaten. Die allgemeine Aussage folgt dann ähnlich wie in Satz 2.4. ■

Satz 6.10 besagt also, dass eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$, deren Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ alle stetig partiell differenzierbar sind, auch differenzierbar im Sinne der Definition von Seite 56 ist. Zudem sehen wir, dass in diesem Falle die Abbildung

$$\begin{aligned} U &\rightarrow M(m \times n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto Df(x) \end{aligned}$$

stetig ist. Dies motiviert folgende Definition.

Definition. Es sei $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

- (1) Wir sagen f ist stetig differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ stetig partiell differenzierbar sind.
- (2) Für $k \geq 2$ sagen wir, f ist k -mal stetig differenzierbar, wenn die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ alle k -mal stetig partiell differenzierbar sind.

Bemerkung. Zusammengefasst haben wir nun also Folgendes bewiesen. Wenn eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar ist (und diese Eigenschaft können wir mit den Methoden der Analysis I normalerweise leicht nachweisen), dann erhalten wir aus Satz 6.10, dass f an jedem Punkt $P \in U$ differenzierbar ist, es gilt also

$$f(P + v) = f(P) + \underbrace{Df(P)}_{\text{Differential}} \cdot v + o(\|v\|), \quad \text{wobei } Df(P) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}.$$

Wir können also f in der Nähe von P durch eine explizite affine lineare Abbildung approximieren.

6.5. Norm von Matrizen. In diesem kurzen Kapitel führen wir die Norm einer Matrix ein. Wir werden diese im nächsten Teilkapitel für den Beweis der Kettenregel benötigen. Die Norm einer Matrix wird aber auch im weiteren Verlauf der Vorlesung immer wieder auftauchen.

Lemma 6.11. Für jede Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ existiert³²

$$\|A\| := \max \{ \|A \cdot v\| \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \}.$$

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \|A \cdot v\| \end{aligned}$$

ist nach Lemma 2.7 (1), Lemma 2.11 und Satz 2.16 stetig. Auf Seite 34 hatten wir gesehen, dass S^{n-1} kompakt ist. Also nimmt die Funktion f nach Korollar 3.10 ein Maximum an. ■

Beispiel. Für die Matrix $A = \lambda \cdot \text{id}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|A\| = |\lambda|$.

Wir fassen einige Eigenschaften von $\|A\|$ in folgendem Lemma zusammen.

Lemma 6.12.

- (1) Die Abbildung
$$\begin{aligned} M(m \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ A &\mapsto \|A\| \end{aligned}$$
 ist eine Norm auf dem Vektorraum $M(m \times n, \mathbb{R})$.
- (2) Für alle $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|A \cdot w\| \leq \|A\| \cdot \|w\|$.
- (3) Für jede $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $\|A\| \leq n \cdot m \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$.

Bemerkung. Die Norm $\|A\|$ ist im Allgemeinen schwierig zu berechnen. Die Abschätzung in Lemma 6.12 (3) erlaubt es uns später die Norm $\|A\|$ relativ einfach nach oben abzuschätzen.

³²Hier ist $\|v\|$ die euklidische Norm von $v \in \mathbb{R}^n$ und $\|A \cdot v\|$ ist die euklidische Norm von $A \cdot v \in \mathbb{R}^m$.

Beweis.

- (1) Wir weisen die drei Eigenschaft einer Norm nach, welche wir auf Seite 5 eingeführt hatten.

(a) Wir müssen also zeigen, dass $\|A\| = 0$ genau dann, wenn $A = 0$.³³ Es ist offensichtlich, dass $\|0\| = 0$. Es verbleibt also zu beweisen, dass $\|A\| \neq 0$, wenn $A \neq 0$. Es sei also $A = (a_{ij}) \neq 0$. Dann gibt es zumindest ein $a_{ij} \neq 0$. Es folgt nun also, dass

$$\|A\| \geq \|A \cdot e_j\| = \left\| \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \right\| \geq |a_{ij}| > 0.$$

(b) Die Homogenität von $\| - \|$ folgt leicht aus den Definitionen.

(c) Es seien nun $A, B \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ gilt:

$$\|(A + B) \cdot v\| = \|A \cdot v + B \cdot v\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung für } \| - \| \text{ auf } \mathbb{R}^n}}{\leq} \|Av\| + \|Bv\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } \|A\| \text{ und } \|B\|}}{\leq} \|A\| + \|B\|.$$

Es folgt: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

- (2) Es sei also $w \in \mathbb{R}^n$. Wenn $w = 0$, dann ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Nehmen wir nun an, dass $w \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$\|A \cdot w\| = \|A \cdot \overbrace{\|w\|}^{=w} \cdot \underbrace{\frac{1}{\|w\|}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Homogenität von } \| - \| \text{ auf } \mathbb{R}^n}} \cdot w\| = \|w\| \cdot \|A \cdot \overbrace{\frac{1}{\|w\|}}^{\| - \| = 1} \cdot w\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per Definition von } \|A\|}}{\leq} \|w\| \cdot \|A\|.$$

- (3) Es sei also $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix. Wir wählen k, l , so dass $|a_{ij}| \leq |a_{kl}|$ für alle anderen i, j . Es sei nun $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{da } \|(x_1, \dots, x_m)\|^2 &= \sum_{i=1}^m x_i^2 && \text{Dreiecksungleichung} \\ \downarrow &&& \\ \|A \cdot v\|^2 &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot v_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n \underbrace{|a_{ij}|}_{\leq |a_{kl}|} \cdot \underbrace{|v_j|}_{\leq \|v\|=1}}_{\leq n \cdot |a_{kl}|} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m (n \cdot |a_{kl}|)^2 = m \cdot n^2 \cdot |a_{kl}|^2 \\ &&& \leq m^2 \cdot n^2 \cdot |a_{kl}|^2. \end{aligned}$$

Die gewünschte Ungleichung erfolgt nun durch Wurzelziehen auf beiden Seiten. ■

6.6. Die Kettenregel. Wir erinnern an die Analysis I: wenn $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, dann besagt die Kettenregel [Fr1, Satz 12.7], dass $g \circ f$ ebenfalls differenzierbar ist, und es gilt

³³Die Bedeutung von 0 hängt vom Kontext ab. In diesem Fall ist "0" die $m \times n$ -Matrix deren Einträge alle 0 sind.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

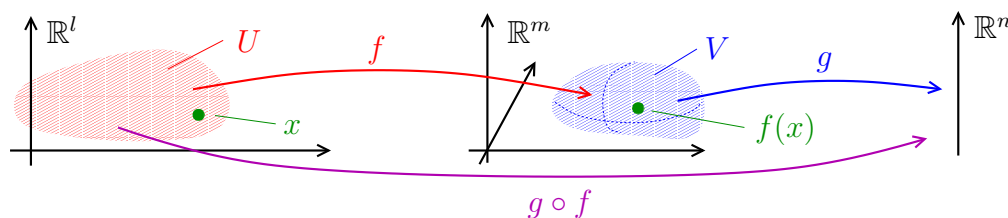
Das heißt also, dass

$$\begin{aligned} \text{Ableitung von } g \circ f \text{ am Punkt } x &= \text{Ableitung von } g \text{ am Punkt } f(x) \\ &\quad \text{mal Ableitung von } f \text{ am Punkt } x. \end{aligned}$$

In der mehrdimensionalen Welt gilt eine ganz analoge Kettenregel:

Satz 6.13. (Kettenregel) Es seien $U \subset \mathbb{R}^l$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und es seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildungen, so dass $f(U) \subset V$. Dann ist die Abbildung $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls differenzierbar, und für jeden Punkt $x \in U$ gilt:

$$\underbrace{D(g \circ f)_x}_{n \times l\text{-Matrix}} = \underbrace{Dg_{f(x)}}_{n \times m\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{Df_x}_{m \times l\text{-Matrix}}.$$



Bemerkung. Die Kettenregel 6.13 besagt also, dass

$$\begin{aligned} \text{Differential von } g \circ f \text{ am Punkt } x &= \text{Differential von } g \text{ am Punkt } f(x) \\ &\quad \text{mal Differential von } f \text{ am Punkt } x. \end{aligned}$$

Beweis. In der Formulierung der Differenzierbarkeit auf Seite 56 müssen wir zeigen, dass

$$(g \circ f)(x + \xi) = (g \circ f)(x) + \underbrace{Dg_{f(x)} \cdot Df_x}_{\text{wir behaupten, dass das Differential ist}} \cdot \xi + o(\|\xi\|).$$

Nach Voraussetzung ist f insbesondere im Punkt x differenzierbar und g ist insbesondere im Punkt $g(x)$ differenzierbar. Also gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x + \xi) &= f(x) + Df_x \cdot \xi + \varphi(\xi), & \text{wobei } \varphi(\xi) &= o(\|\xi\|), \\ (2) \quad g(f(x) + \eta) &= g(f(x)) + Dg_{f(x)} \cdot \eta + \psi(\eta), & \text{wobei } \psi(\eta) &= o(\|\eta\|). \end{aligned}$$

Mit dieser Notation erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + \xi) &= g(f(x + \xi)) \stackrel{=:\eta}{=} g(f(x) + \overbrace{Df_x \cdot \xi + \varphi(\xi)}^{\eta}) \stackrel{\uparrow}{=} g(f(x)) + Dg_{f(x)} \cdot \eta + \psi(\eta) \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\quad \text{folgt aus (1)} \quad \text{folgt aus (2)} \\ &= g(f(x)) + Dg_{f(x)} \cdot Df_x \cdot \xi + \underbrace{Dg_{f(x)} \cdot \varphi(\xi)}_{=(1)} + \underbrace{\psi(Df_x \cdot \xi + \varphi(\xi))}_{=(2)}. \end{aligned}$$

Es genügt nun also zu zeigen, dass die Terme (1) und (2) vom Typ $o(\|\xi\|)$ sind.³⁴ Mit anderen Worten, mit $A := Dg_{f(x)}$ und $B := Df_x$ genügt es nun folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung.

$$\begin{aligned} (1) \quad & A \cdot \varphi(\xi) = o(\|\xi\|). \\ (2) \quad & \psi(B \cdot \xi + \varphi(\xi)) = o(\|\xi\|). \end{aligned}$$

Für den Beweis von beiden Aussagen verwenden wir das Kriterium aus Lemma 6.4. Wir beweisen zuerst die erste Aussage. Es gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{A \cdot \varphi(\xi)}{\|\xi\|} & = & \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(A \cdot \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \right) & = & A \left(\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \right) & = & A \cdot 0 = 0. \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{da Matrix-Multiplikation} & & \text{folgt aus Satz 6.1} & & \text{nach Lemma 6.4,} & & \\ \text{linear ist} & & \text{da Multiplikation mit } A & & \text{da } \varphi(\xi) = o(\|\xi\|) & & \\ & & \text{nach Lemma 2.11 stetig ist} & & & & \end{array}$$

Wir wenden uns nun der zweiten Aussage zu. Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\psi(B \cdot \xi + \varphi(\xi))}{\|\xi\|} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\psi(B \cdot \xi + \varphi(\xi))}{\|B \cdot \xi + \varphi(\xi)\|}}_{\substack{\lim_{\xi \rightarrow 0} = 0, \text{ da } \lim_{\xi \rightarrow 0} (B \cdot \xi + \varphi(\xi)) = 0 \\ \text{und } \psi(\nu) = o(\|\nu\|)}} \cdot \underbrace{\frac{\|B \cdot \xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\substack{\text{da } \varphi(\xi) = o(\|\xi\|) \text{ existiert} \\ \text{Umgebung } U \text{ mit } \|\varphi(\xi)\| < \|\xi\|, \\ \text{dort ist der Bruch} \\ \text{beschränkt durch } \|B\| + 1}} & \stackrel{\text{Lemma 6.3}}{=} & 0. \end{array}$$

■

³⁴Hierbei benützen wir die elementare Aussage, dass wenn $p(\xi) = o(\|\xi\|)$ und $q(\xi) = o(\|\xi\|)$, dann ist auch $(p + q)(\xi) = o(\|\xi\|)$.

7. GRADIENT UND RICHTUNGSABLEITUNGEN

7.1. Exkurs: Das Skalarprodukt und orthogonale Matrizen.

Definition.

- (1) Für eine beliebige Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ bezeichnen wir im Folgenden mit $A^T := (a_{ji}) \in M(n \times m, \mathbb{R})$ die zugehörige transponierte Matrix. Diese erhalten wir anschaulich dadurch, dass wir A "an der Diagonale" spiegeln.
- (2) Eine Matrix A mit $a_{ij} = a_{ji}$, d.h. mit $A = A^T$ wird symmetrisch genannt.

Beispiel.

für $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & e \\ -1 & 2 & \pi \end{pmatrix}$ ist $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ e & \pi \end{pmatrix}$, und $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & \pi \end{pmatrix}$ ist symmetrisch.

Lemma 7.1. Es sei $Q \in M(m \times n)$ eine Matrix.

- (1) Es gilt: $(Q^T)^T = Q$.
- (2) Für jedes i gilt: i -te Zeilenvektor von $Q = i$ -te Spaltenvektor von Q^T .
- (3) Für jedes i gilt: i -te Spaltenvektor von $Q = i$ -te Zeilenvektor von Q^T .
- (4) Für $P \in M(l \times m, \mathbb{R})$ gilt: $(P \cdot Q)^T = Q^T \cdot P^T$.
- (5) Wenn $m = n$, dann gilt: $\det(Q^T) = \det(Q)$.

Beweis. Aussagen (1)-(4) folgen leicht aus den Definitionen und (5) ist [N1, Satz 13.4]. ■

Definition. Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_n)$ in $\mathbb{R}^n$ ist wie folgt definiert:

$$\langle v, w \rangle := v \cdot w := \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i.$$

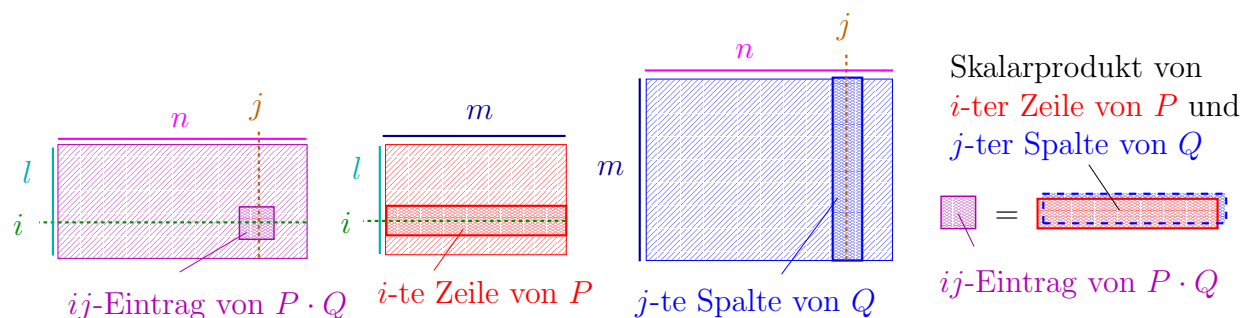
Beobachtung 7.2.

- (1) Es sei P eine $(l \times m)$ -Matrix und es sei Q eine $(m \times n)$ -Matrix. Zudem seien $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Aus den Definitionen folgt leicht:

$$ij\text{-ter Eintrag von } P \cdot Q = \langle i\text{-te Zeile von } P, j\text{-te Spalte von } Q \rangle.$$

- (2) Wenn $v, w \in \mathbb{R}^n$ sind, und wir uns diese als $(n \times 1)$ -Matrizen vorstellen, dann gilt

$$v^T \cdot w = \langle v, w \rangle.$$



Definition.

- (1) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle A \cdot v, A \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

- (2) Die Menge aller orthogonalen $n \times n$ -Matrizen wird mit **O(n)** bezeichnet.

Lemma 7.3. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Die Matrix ist orthogonal.
 (2) Die Spalten $s_1, \dots, s_n$ der Matrix A bilden ein Orthonormalsystem, d.h. für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\langle s_i, s_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

↑
Kronecker-Symbol

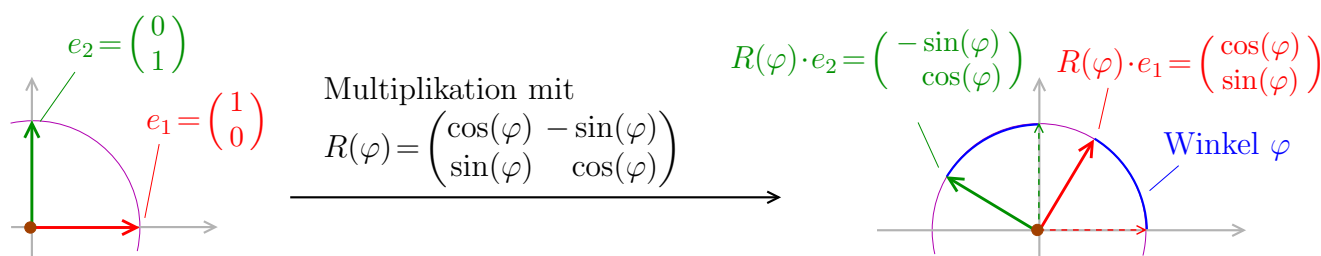
- (3) Es ist $A^T \cdot A = \text{id}$. (Mit anderen Worten A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$.)
 (4) Die Spalten $s_1, \dots, s_n$ der Matrix A bilden eine orthonormale Basis für $\mathbb{R}^n$.
 (5) Die Matrix A ist Norm erhaltend, d.h. für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|A \cdot v\| = \|v\|$.

Beispiel. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

als *Drehmatrix*. Es folgt aus der Charakterisierung von orthogonalen Matrizen, welche durch Lemma 7.3 (2) gegeben ist, dass $R(\varphi)$ eine orthogonale Matrix ist. Anschaulich gesprochen ist die Multiplikation mit $R(\varphi)$ gerade Drehung um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn. Im Präsenzübungsblatt 5 werden wir mithilfe der Additionstheoreme [Fr1, Satz 11.4] zeigen, dass für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$R(\varphi) \cdot R(\psi) = R(\varphi + \psi).$$



Beweis. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit den Spalten $s_1, \dots, s_n$.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\langle s_i, s_j \rangle = \langle A \cdot e_i, A \cdot e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

↑
denn A ist orthogonale Matrix

(2) $\Rightarrow$ (3) Es seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Beobachtung 7.2 (1)} & \text{Lemma 7.1} \\ ij\text{-ter Eintrag von } A^T \cdot A & \stackrel{\downarrow}{=} \langle i\text{-te Zeile von } A^T, j\text{-te Spalte von } A \rangle & \stackrel{\downarrow}{=} \\ & = \langle i\text{-te Spalte von } A, j\text{-te Spalte von } A \rangle & = \langle s_i, s_j \rangle = \delta_{ij}. \end{array}$$

Also ist $A^T \cdot A = (\delta_{ij}) = \text{id}$.

(2) $\Rightarrow$ (4) Es verbleibt zu zeigen, dass die Spalten $s_1, \dots, s_n$ eine Basis bilden. Es genügt zu zeigen, dass $\det(A) \neq 0$. Es gilt

$$\det(A)^2 = \det(A) \cdot \det(A) \stackrel{\uparrow}{=} \det(A^T) \cdot \det(A) \stackrel{\uparrow}{=} \det(A^T \cdot A) \stackrel{\uparrow}{=} \det(\text{id}) = 1.$$

$\uparrow$ denn $\det(A^T) = \det(A)$ $\uparrow$ Multiplikativität der Determinante $\uparrow$ folgt aus (2) $\Rightarrow$ (3)

Also ist $\det(A) \neq 0$.

(4) $\Rightarrow$ (2) Diese Aussage ist natürlich trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1) Es seien nun $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir fassen die Vektoren $v, w, A \cdot v, A \cdot w$ als $(n \times 1)$ -Matrizen auf. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \langle A \cdot v, A \cdot w \rangle & = & (A \cdot v)^T \cdot (A \cdot w) & = & v^T \cdot A^T \cdot A \cdot w & = & v^T \cdot \text{id} \cdot w = v^T \cdot w = \langle v, w \rangle. \\ & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ & \text{Beobachtung 7.2} & & \text{Lemma 7.1} & \text{Lemma 7.3} & & \text{Beobachtung 7.2} \end{array}$$

(1) $\Rightarrow$ (5) Diese Aussage folgt sofort aus der Tatsache, dass $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Wir werden diese Implikation in Übungsblatt 5 beweisen. ■

Bemerkung. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Für jede orthogonale Matrix $A \in O(n)$ folgt leicht aus Lemma 7.3 (1) $\Rightarrow$ (5) und der Definition von Länge auf Seite 2, dass Multiplikation mit A die Länge einer Kurve nicht abändert.

Lemma 7.4. Die Menge $O(n)$ der orthogonalen Matrizen bildet eine Untergruppe von der Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen.

Beweis. Aus Lemma 7.3 (3) folgt, dass orthogonale Matrizen invertierbar sind. Also gilt $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Wir müssen nun noch nachweisen, dass $O(n)$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ ist. Nach [N1, Definition 2.5] müssen wir drei Aussagen überprüfen:

(1) Offensichtlich liegt das neutrale Element id auch in $O(n)$.

(2) Es seien $A, B \in O(n)$. Wir müssen zeigen, dass $A \cdot B \in O(n)$. Dies folgt aus der Beobachtung, dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} \langle (A \cdot B) \cdot v, (A \cdot B) \cdot w \rangle & = & \langle A \cdot (B \cdot v), A \cdot (B \cdot w) \rangle & \stackrel{\uparrow}{=} & \langle B \cdot v, B \cdot w \rangle & \stackrel{\uparrow}{=} & \langle v, w \rangle. \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & \text{denn } A \in O(n) & & \text{denn } B \in O(n) & \end{array}$$

(3) Es sei $A \in O(n)$. Wir müssen zeigen, dass $A^{-1} \in O(n)$. Dies folgt aus der Beobachtung, dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

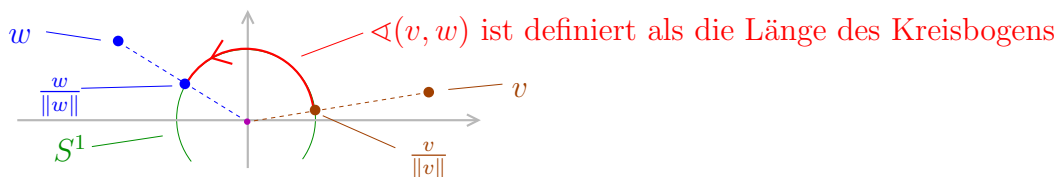
$$\begin{array}{ccccccc} \langle A^{-1} \cdot v, A^{-1} \cdot w \rangle & = & \langle A \cdot (A^{-1} \cdot v), A \cdot (A^{-1} \cdot w) \rangle & = & \langle \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{=\text{id}} \cdot v, \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{=\text{id}} \cdot w \rangle & = & \langle v, w \rangle. \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \text{denn } A \in O(n) & & & & \end{array}$$

7.2. Exkurs: Winkel. Folgende Definition eines Winkels entspricht der Schulintuition.

Definition. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir definieren den Winkel

$\angle(v, w) :=$ Länge eines injektiven Weges, welcher sich gegen den Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis S^1 von $\frac{v}{\|v\|}$ nach $\frac{w}{\|w\|}$ bewegt $\in [0, 2\pi)$.

Es folgt aus der Bemerkung auf Seite 48, dass diese Definition nicht von der Wahl der Kurve abhängt.



Folgendes Lemma gibt nun eine geometrische Interpretation des Skalarprodukts.

Lemma 7.5. Für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \cos(\angle(v, w)) \cdot \|v\| \cdot \|w\|.$$

Beweis. Nachdem sich beide Seiten des Lemmas nicht ändern, wenn wir v und w durch die jeweiligen Normen $\|v\|$ und $\|w\|$ teilen, genügt es den Fall zu betrachten, dass $\|v\| = 1$ und $\|w\| = 1$.

Der Satz über die Polarkoordinatendarstellung, d.h. [Fr1, Satz 11.11] besagt, dass es $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ gibt, so dass $v = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, und so dass $w = (\cos(\psi), \sin(\psi))$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\psi \geq \varphi$. In diesem Fall gilt:

$$\angle(v, w) = L \left(\begin{array}{ccc} [\varphi, \psi] & \rightarrow & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 4.2}}}{=} \int_{t=\varphi}^{t=\psi} \underbrace{\|(-\sin(t), \cos(t))\|}_{=1} dt = \psi - \varphi.$$

Es folgt:

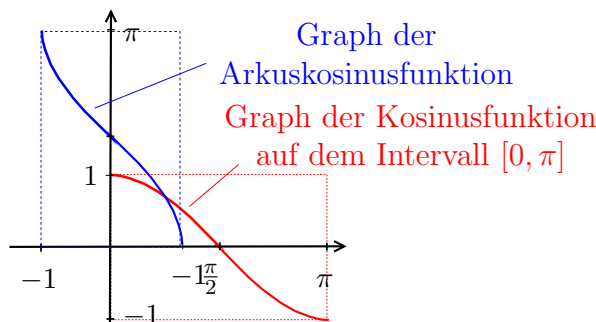
$$\begin{aligned} \text{denn } R(\alpha) \cdot e_1 &= (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) & \text{denn } R(\alpha) \cdot R(\beta) &= R(\alpha + \beta) & \text{denn } R(\varphi) \text{ ist orthogonal} \\ \langle v, w \rangle &\stackrel{\downarrow}{=} \langle R(\varphi) \cdot e_1, R(\psi) \cdot e_1 \rangle & \stackrel{\downarrow}{=} \langle R(\varphi) \cdot e_1, R(\varphi) \cdot R(\psi - \varphi) \cdot e_1 \rangle & \stackrel{\downarrow}{=} \langle e_1, R(\psi - \varphi) \cdot e_1 \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\psi - \varphi) \\ \sin(\psi - \varphi) \end{pmatrix} \right\rangle = \cos(\psi - \varphi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Berechnung oben}}}{=} \cos(\angle(v, w)). \end{aligned}$$

Der Fall, dass $\psi \leq \varphi$ wird ähnlich bewiesen. ■

Für Vektoren im höher dimensionalen Raum verwenden wir jetzt Lemma 7.5 als Inspiration um den Begriff eines Winkels einzuführen. Genauer gesagt führen wir folgende Definition ein:

Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und es seien v und w zwei Vektoren in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir definieren:

$$\angle(v, w) := \arccos \left(\underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}}_{\in [-1, 1] \text{ nach der Schwarz Ungleichung [N1, Satz 19.7]}} \right) \in [0, \pi).$$



7.3. Der Gradient.

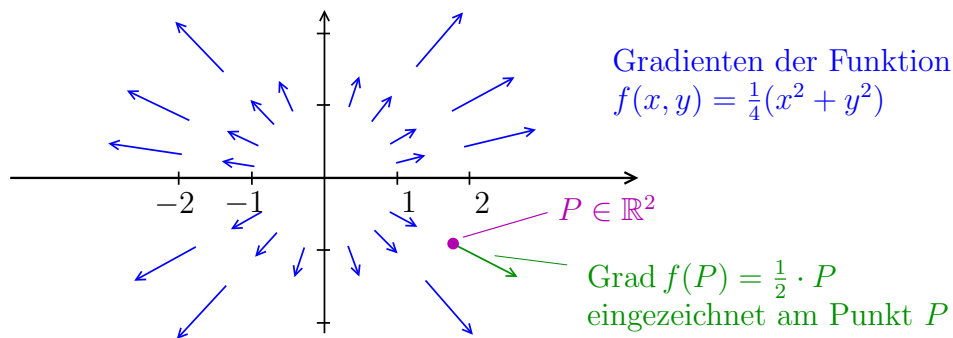
Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Es sei $P \in U$. Dann heißt der Vektor

$$\text{Grad } f(P) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(P), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(P) \right) \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient** von f am Punkt P .³⁵³⁶

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ auf $\mathbb{R}^2$. Der Gradient am Punkt (x, y) ist gegeben durch

$$\text{Grad } f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y \right), \quad \text{d.h. } \text{Grad } f(P) = \frac{1}{2} \cdot P.$$



³⁵Der Gradient $\text{Grad}(f)$ wird oft auch als ∇f geschrieben, das Symbol ∇ wird hierbei als “Nabla” ausgesprochen. Das Wort “Nabla” ist der hebräische Name für einen Harfentyp, welcher in etwa die Form von ∇ besitzt.

³⁶Wir schreiben Vektoren in $\mathbb{R}^n$ manchmal in Zeilenform (z.B. wenn der Platz beschränkt ist) und manchmal in Spaltenform (z.B. wenn wir die Multiplikation mit einer Matrix verdeutlichen wollen).

Satz 7.6. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es sei $P \in U$ und es sei zudem $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $P + t \cdot v \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt

$$\frac{d}{dt}f(P + t \cdot v) = \underbrace{Df_{P+t \cdot v}}_{1 \times n\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\langle \text{Grad } f(P + t \cdot v), \cdot \rangle}_{\in \mathbb{R}^n} \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^n}.$$

Insbesondere erhalten wir am Punkt $t = 0$, dass

$$\left. \frac{d}{dt}f(P + t \cdot v) \right|_{t=0} = Df_P \cdot v = \langle \text{Grad } f(P), v \rangle.$$

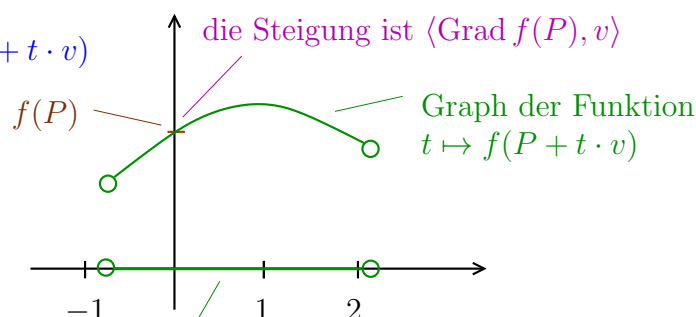
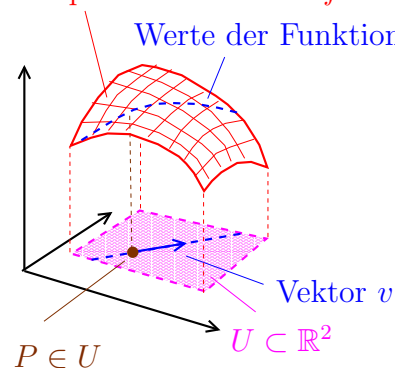
Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zudem sei $P \in U$ und es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Aus der Offenheit von U folgt leicht, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $P + t \cdot v \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Wir erhalten nun folgende Gleichheiten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(P + t \cdot v) &= Df_{P+t \cdot v} \cdot (P + t \cdot v)' = Df_{P+t \cdot v} \cdot v \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Kettenregel 6.13 angewandt auf die Verknüpfung } f \circ g, \text{ wobei} \\ &\quad \begin{array}{l} f: U \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto f(s) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} g: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto P + t \cdot v \end{array} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P + t \cdot v) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(P + t \cdot v) \right)}_{\text{Berechnung von } Df \text{ mit Satz 6.7}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P + t \cdot v) \cdot v_i \\ &= \underbrace{\langle \text{Grad } f(P + t \cdot v), v \rangle}_{\text{Definition des Skalarprodukts}}. \end{aligned}$$

■

Graph einer Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$



alle $t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $P + t \cdot v \in U$

Durch zweifaches Anwenden von Satz 7.6 erhalten wir auch folgende Aussage, welche in Übungsblatt 5 bewiesen wird. Wir werden diesen Satz später benötigen, wenn wir lokale Maxima und Minima von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ bestimmen wollen.

Satz 7.7. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in U$ und es sei zudem $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Es sei $\epsilon > 0$, so dass $P + t \cdot v \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} g: (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(P + t \cdot v) \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, dass

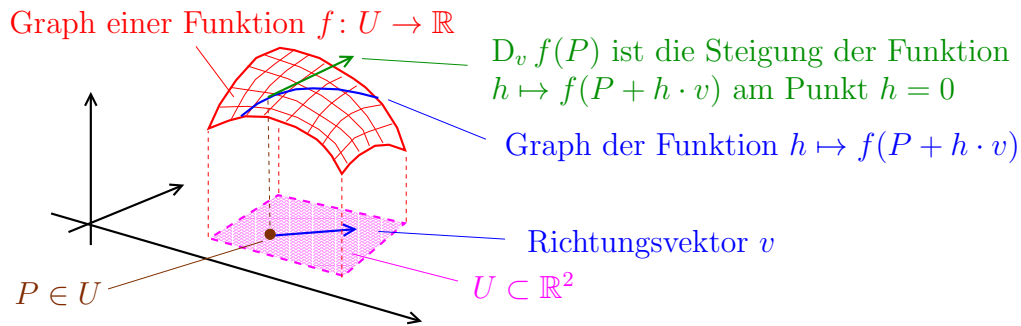
$$g^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(P + t \cdot v) \cdot v_i \cdot v_j.$$

7.4. Richtungsableitungen. Wir beginnen dieses kurze Teilkapitel mit folgender ziemlich intuitiven Definition.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $P \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$. Falls der Grenzwert

$$\left. \frac{d}{dt} f(P + t \cdot v) \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h \cdot v) - f(P)}{h}$$

existiert, dann bezeichnen wir den Grenzwert als die Richtungsableitung $D_v f(P)$ von f im Punkt P in Richtung v .



Beispiel. Wenn $v = e_i$, d.h. wenn v der i -te Einheitsvektor ist, dann folgt direkt aus den Definitionen, dass

$$D_{e_i} f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P).$$

Satz 7.8. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sei $P \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$. Dann gilt

$$D_v f(P) = \langle \text{Grad } f(P), v \rangle.$$

Insbesondere, wenn $\text{Grad } f(P) \neq 0$ und wenn $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen v und $\text{Grad } f(P)$ ist, dann gilt

$$D_v f(P) = \cos(\varphi) \cdot \|\text{Grad } f(P)\|.$$

Beweis. Die erste Aussage ist nur eine Umformulierung von Satz 7.6 und die zweite Aussage folgt dann sofort aus Lemma 7.5. ■

Satz 7.8 besagt insbesondere, dass die Richtungsableitung maximal ist, wenn $\varphi = 0$, d.h. wenn v und $\text{Grad } f(P)$ in die gleiche Richtung zeigen. Wir erhalten also folgendes Korollar:

Korollar 7.9. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $P \in U$ ein Punkt, so dass $\text{Grad } f(P) \neq 0$. Dann ist*³⁷

$$v := \frac{\text{Grad } f(P)}{\|\text{Grad } f(P)\|}$$

die Richtung mit maximaler Richtungsableitung.

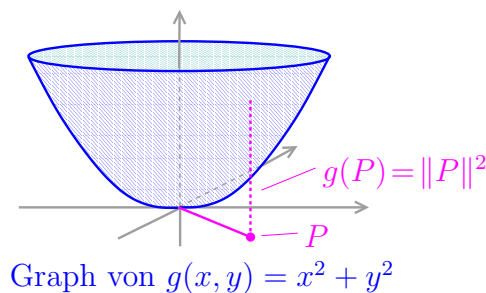
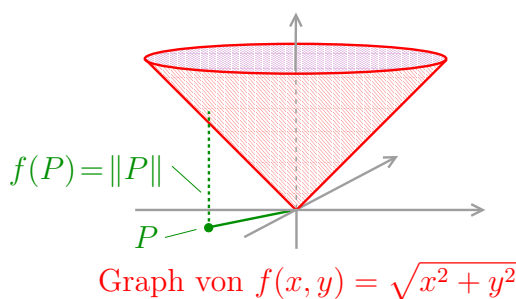
Anders ausgedrückt, “der Gradient zeigt in die Richtung in welche f am schnellsten ansteigt”.

7.5. Gradienten und Niveaulinien. In diesem sehr anschaulichen Teilkapitel betrachten wir nur Funktionen $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$. Wir haben schon gesehen, dass man sich solche Funktionen durch den Graphen

$$\text{Graph}(h) = \{(x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

veranschaulichen kann. Wir betrachten die Graphen der Funktionen

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\| & \text{und} \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2. \end{array}$$



Eine alternative Methode um Funktionen zu veranschaulichen ist wie folgt gegeben: für verschiedene Werte $C \in \mathbb{R}$ betrachten wir die *Niveaulinie*³⁸

$$h^{-1}(\{C\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = C\}.$$

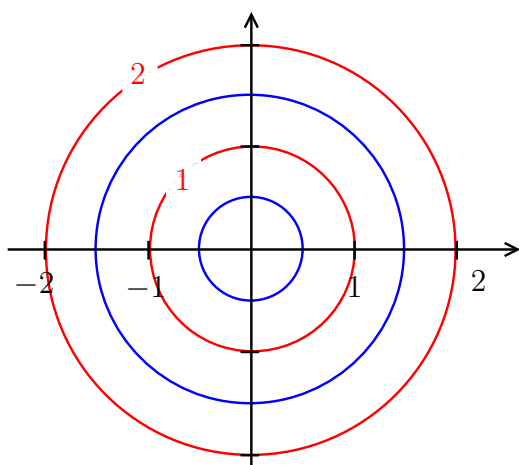
Beispielsweise werden in der oberen Abbildung auf Seite 74 Niveaulinien für die Funktionen f und g angezeigt.

Für diese beiden Funktionen ist der Gradient gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Grad } f(x, y) &= \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|}, & \text{wobei } (x, y) \neq (0, 0) \\ \text{Grad } g(x, y) &= 2 \cdot (x, y). \end{aligned}$$

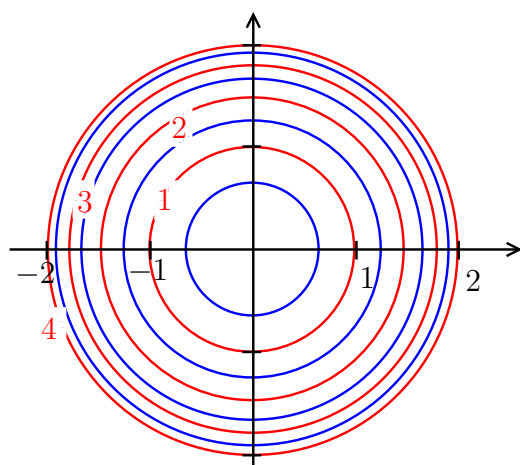
³⁷Eine “Richtung” ist immer ein Vektor mit Länge 1, wir müssen deswegen den Gradienten auf die Länge 1 normieren.

³⁸Auf klassischen Wanderkarten wird die Höhe, als Funktion $(x, y) \mapsto h(x, y)$ durch Niveaulinien illustriert, diese werden dabei normalerweise Höhenlinien genannt.



Niveaulinien für die Funktion

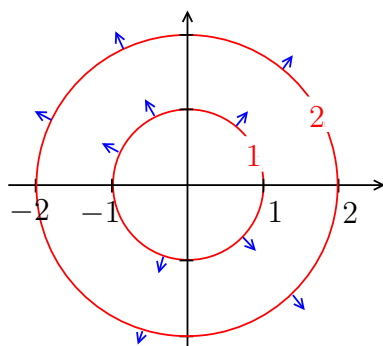
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Niveaulinien für die Funktion

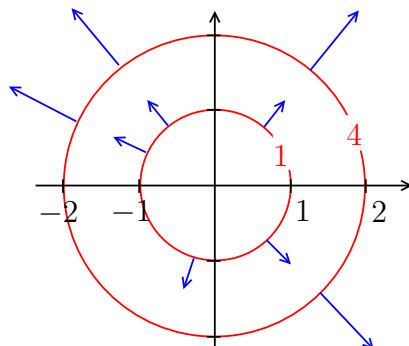
$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

In beiden Fällen zeigt also der Gradient “weg vom Ursprung”. Im ersten Fall besitzt der Gradient $\text{Grad } f(x, y)$ immer die Länge 1, d.h. der Anstieg ist konstant. Im zweiten Fall besitzt der Gradient $\text{Grad } g(x, y)$ die Länge $2\sqrt{x^2 + y^2}$, er wird also länger, wenn man sich vom Ursprung fortbewegt. Die Gradienten für beide Funktionen werden in der unteren Abbildung auf Seite 74 skizziert. Damit die Skizzen übersichtlich bleiben, sind in beiden Fällen die Gradienten auf $\frac{1}{4}$ der Länge gestaucht.



Gradienten für die Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



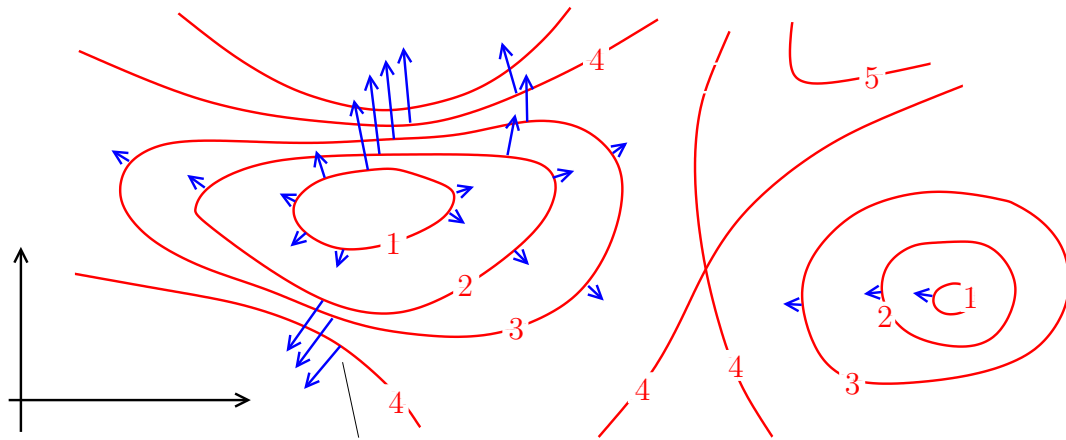
Gradienten für die Funktion

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Bemerkung. In den Bildern sehen wir, dass der Gradient senkrecht auf den Niveaulinien steht. Wir werden später sehen, dass dies kein Zufall ist, sondern dass dies unter geeigneten Voraussetzungen immer der Fall ist.³⁹

³⁹Insbesondere müssen wir noch präzise machen, was es heißen soll, dass ein Vektor an einem Punkt senkrecht zu einer Kurve ist.

In der Abbildung auf Seite 75 zeigen wir das typische Bild für eine Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die Gradienten stehen senkrecht auf den Niveaulinien und zeigen in die Richtung, in der die Funktion ansteigt. Desto enger die Niveaulinien aneinander liegen, desto größer ist die “Steigung”, und desto länger sind die Gradienten.



eng liegende Niveaulinien bedeutet starker Anstieg und lange Gradienten

8. EXKURS: DER SPEKTRALSATZ

8.1. Ähnliche Matrizen und die Spur einer Matrix. Wir beginnen unseren Exkurs in die Lineare Algebra mit folgender Definition [N1, S. 71].

Definition. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und es sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Wir definieren die **Spur** von A wie folgt:

$$\text{tr}(A) := \text{Summe aller diagonalen Einträge von } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

(Die Bezeichnung “tr” rührt vom englischen Begriff “trace” her.)

Folgendes Lemma werden wir im Präsenzübungsblatt 6 beweisen.

Lemma 8.1. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ gilt*

$$\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A).$$

Wir fahren mit der nächsten Definition fort [N1, S. 65].

Definition. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir sagen zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ sind **ähnlich**, wenn es $P \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt, so dass $P^{-1}AP = B$.

Das folgende Lemma besagt nun, dass ähnliche Matrizen in vielen Invarianten übereinstimmen.

Lemma 8.2. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wenn zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ähnlich sind, dann besitzen sie die gleiche Determinante und die gleiche Spur.*

Beweis. Es sei also $P \in GL(n, \mathbb{K})$ mit $P^{-1}AP = B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad \det(B) &= \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det(P)^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \det(A). \\ (1) \quad \text{tr}(B) &= \text{tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \text{tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \text{tr}(P \cdot (P^{-1} \cdot A)) = \text{tr}(A). \end{aligned}$$

$\uparrow$
 Lemma 8.1

Wir erinnern an folgende Notationen.

Notation. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir:

$$\text{\textit{i}-ten Einheitsvektor } e_i := (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{\textit{i}-te Koordinate}}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$$

Notation. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum und es sei $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis. Wir bezeichnen mit χ_X den zugehörigen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \chi_X: V &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i &\mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i. \end{aligned}$$

Wir erinnern nun an folgende Definition [N1, S. 35 und 40].

Definition. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und es sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus zwischen endlich dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Es sei $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von V und $Y = \{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von W . Wir schreiben

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{a_{11} \cdot w_1}^{f(v_1)=} & \overbrace{a_{1m} \cdot w_1}^{f(v_m)=} & \\ + \overbrace{a_{21} \cdot w_2} & + \overbrace{a_{2m} \cdot w_2} & \\ \vdots & \vdots & \\ + \overbrace{a_{n1} \cdot w_n} & + \overbrace{a_{nm} \cdot w_n} & \end{array} \quad \dots \quad \text{und bezeichnen} \quad \Phi(f)_{X,Y} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

als die zugehörige darstellende Matrix.

Bemerkung. Wir fahren mit der Notation aus der vorherigen Definition fort. Die darstellende Matrix $(a_{ij}) = \Phi(f)_{X,Y}$ ist also festgelegt durch die Eigenschaft, dass für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot w_j.$$

Dies wiederum bedeutet, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \chi_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \chi_Y \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{\Phi(f)_{X,Y}} & \mathbb{K}^n. \end{array}$$

8.2. Eigenwerte. Wir erinnern an folgende Definition [N1, S. 66].

Definition. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, es sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

- (1) Wir sagen $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein **Eigenwert** von f , wenn es einen Vektor $0 \neq v \in V$ mit $f(v) = \lambda \cdot v$ gibt.
- (2) Einen Vektor $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda \cdot v$ nennen wir einen **Eigenvektor** zum Eigenwert λ .

Beispiel. Wir betrachten den reellen Vektorraum

$$V = \text{alle beliebig oft differenzierbaren Funktionen } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

und den Endomorphismus

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow V \\ \gamma(t) &\mapsto \text{die Ableitung } \frac{d}{dt} \gamma(t). \end{aligned}$$

Jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert von f , denn

$$\underbrace{f(\exp(\lambda \cdot t))}_{\in V} = \frac{d}{dt}(\exp(\lambda \cdot t)) = \lambda \cdot \exp(\lambda \cdot t).$$

↑
folgt aus $\frac{d}{dt} \exp = \exp$ und der Kettenregel

Folgendes Lemma folgt sofort aus den Definitionen.

Lemma 8.3. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, es sei $\varphi: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$ -Vektorräumen und es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Wir erhalten also folgendes kommutative Diagram:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow \cong & & \cong \downarrow \varphi \\ W & \xrightarrow{\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}} & W. \end{array}$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} v \in V \text{ ist Eigenvektor zum} & & \varphi(v) \in W \text{ ist Eigenvektor zum} \\ \text{Eigenwert } \lambda \text{ für den} & \iff & \text{Eigenwert } \lambda \text{ für den} \\ \text{Endomorphismus } f: V \rightarrow V & & \text{Endomorphismus } \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}: W \rightarrow W. \end{array}$$

Der Begriff von Eigenwerten und Eigenvektoren überträgt sich auf offensichtliche Art auf Matrizen [N1, S. 66]:

Definition. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ eine quadratische Matrix.

- (1) Wir sagen $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein **Eigenwert** von A , wenn es einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{K}^n$ mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$ gibt.
- (2) Einen Vektor $v \neq 0$ mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$ nennen wir einen **Eigenvektor** zum Eigenwert λ .

Das folgende Lemma, welches der Aussage von [N1, Proposition 17.6] entspricht, verbindet den Begriff der Eigenwerte von einer Matrix und einem Endomorphismus.

Lemma 8.4. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Es sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Wenn X eine Basis für V ist, dann gilt:*

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } f \iff \lambda \text{ ist Eigenwert der darstellenden Matrix } \Phi(f)_{X,X}.$$

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm von Seite 77:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \chi_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \chi_X \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\Phi(f)_{X,X}} & \mathbb{K}^n. \end{array}$$

Die Aussage des Lemmas folgt nun sofort aus Lemma 8.3. ■

Beispiel.

- (1) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die diagonale Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es gilt $D \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i$, d.h. die $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sind Eigenwerte von D und die Einheitsvektoren sind Eigenvektoren.

- (2) Wir betrachten

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ Eigenwerte der Matrix B .

Bemerkung. Wir können eine reelle Matrix immer auch als komplexe Matrix auffassen. Deswegen macht es Sinn bei einer quadratischen reellen Matrix von komplexen Eigenwerten und Eigenvektoren zu sprechen.

Beispiel. Wir betrachten

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = (1-i) \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} = (1+i) \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind $\lambda := 1-i$ und $\bar{\lambda} := 1+i$ Eigenwerte der Matrix C .

Lemma 8.5. *Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine reelle Matrix. Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert ist, dann ist auch $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert.*

Beweis. Es sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Dann gilt

$$A \cdot \bar{v} = \bar{A} \cdot \bar{v} = \overline{A \cdot v} = \overline{\lambda \cdot v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}.$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 denn A ist eine reelle Matrix denn für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Wir haben also gezeigt, dass $\bar{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ ist. ■

Definition. [N1, S. 66] Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir sagen $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist diagonalisierbar, wenn A ähnlich zu einer diagonalen Matrix ist. Mit anderen Worten, A ist diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist, d.h. so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Folgender Satz ist äquivalent zu [N1, Satz 17.5].

Satz 8.6. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$.*

- (1) A ist diagonalisierbar $\iff$ es gibt eine Basis von $\mathbb{K}^n$, welche nur aus Eigenvektoren von A besteht.

(2) Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Wir setzen $P := (v_1 \dots v_n) \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$. Dann gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} \text{für alle } i = 1, \dots, n \text{ gilt:} \\ v_i \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda_i. \end{array}$$

Beispiel. Wir betrachten

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } P := \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Spalten sind Eigenvektoren} \\ \text{zu den Eigenwerten } \sqrt{2} \text{ und } -\sqrt{2}}}, \text{ dann gilt } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Aussage (1) folgt leicht aus Aussage (2). Wir wollen nun Aussage (2) beweisen. Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Wir setzen $P := (v_1 \dots v_n) \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{P^{-1}AP} & \mathbb{K}^n \\ P \cdot \downarrow \cong & & \cong \downarrow P \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} &\iff \text{für } i = 1, \dots, n \text{ ist } e_i \text{ EV von } P^{-1}AP \text{ zum EW } \lambda_i &\stackrel{\text{Lemma 8.3}}{\iff} \\ &\iff \text{für } i = 1, \dots, n \text{ ist } \underbrace{P \cdot e_i}_{=v_i} \text{ EV von } A \text{ zum EW } \lambda_i. \end{aligned}$$

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgendem hinreichenden Kriterium für Diagonalisierbarkeit, welches in [N1, Korollar 17.11] bewiesen wird.

Satz 8.7. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \text{M}(n \times n, \mathbb{K})$. Wenn es n paarweise verschiedene Eigenwerte gibt, dann ist A diagonalisierbar.

8.3. Existenz von Eigenwerten. In diesem Teilkapitel wollen wir sehen, wie man in der Theorie und der Praxis nachweisen kann, dass eine Matrix Eigenwerte besitzt. Wir erinnern an folgende Definition [N1, S. 70].

Definition. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für eine $n \times n$ -Matrix $A \in \text{M}(n \times n, \mathbb{K})$ bezeichnen wir

$$\chi_A(t) := \det(t \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ n \times n\text{-Identitätsmatrix}}}{\text{id}_n} - A)$$

als das charakteristische Polynom von A .

Beispiel. Für

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ erhalten wir } \chi_C(t) = \det\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 2.$$

Satz 8.8. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ gilt*

$$\chi_A(t) = t^n - \operatorname{tr}(A) \cdot t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot \det(A).$$

Beweis.

- (1) Die Aussage für den t^n -Koeffizienten folgt leicht aus der Leibniz-Formel.
- (2) Die Aussage für den t^{n-1} -Koeffizient wird in [N1, Satz 18.5] oder auch [Fi, Satz 4.2.2] bewiesen. Wir werden diese Aussage jedoch nicht benötigen.
- (3) Die Aussage für den konstanten Koeffizienten folgt durch Einsetzen von $t = 0$. ■

Folgender Satz gibt uns eine einfache Methode um Eigenwerte einer Matrix zu bestimmen.

Satz 8.9. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Für $\lambda \in K$ gilt:*

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \iff \lambda \text{ ist Nullstelle von } \chi_A(t).$$

Insbesondere besitzt A höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Beispiel.

- (1) Die Nullstellen von $\chi_C(t) = t^2 - 2t + 2$ sind $1 - i$ und $1 + i$. Wir hatten oben schon explizit gesehen, dass dies Eigenwerte von C sind, und wir wissen jetzt, dass dies auch die einzigen Eigenwerte von C sind. Insbesondere sehen wir, dass C keine reellen Eigenwerte besitzt.
- (2) Für eine diagonale Matrix hatten wir schon gesehen, dass die Einträge auf der Diagonale Eigenwerte sind. Mithilfe von Satz 8.9 sieht man nun auch leicht, dass dies die einzigen Eigenwerte sind.

Beweis. Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A &\iff \text{es gibt ein } v \neq 0 \text{ mit } A \cdot v = \lambda v \\ &\iff \text{es gibt ein } v \neq 0 \text{ mit } (\lambda \cdot \operatorname{id}_n - A) \cdot v = 0 \\ &\iff \ker(\lambda \cdot \operatorname{id}_n - A) \neq 0 \\ &\iff \det(\lambda \cdot \operatorname{id}_n - A) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ ist Nullstelle von } \det(t \cdot \operatorname{id}_n - A) = \chi_A(t). \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom von A ist nach Satz 8.8 ein Polynom von Grad $= n$. Also besitzt es auch höchstens n Nullstellen, insbesondere besitzt A höchstens n Eigenwerte. ■

Mithilfe von Analysis I können wir folgenden Satz beweisen.

Satz 8.10. *Für ungerades n besitzt jede Matrix in $M(n \times n, \mathbb{R})$ mindestens einen reellen Eigenwert.*

Beweis. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Es folgt aus Satz 8.8, dass

$$\chi_A(t) = t^n + \text{Terme von niedrigerem Grad}.$$

Da n ungerade ist folgt nun aus [Fr1, Lemma 7.13], dass $\lim_{t \rightarrow -\infty} \chi_A(t) = -\infty$, und es folgt dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi_A(t) = +\infty$. Es folgt nun aus dem Zwischenwertsatz, dass $\chi_A(t)$ mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Es folgt also aus Satz 8.9, dass A mindestens einen reellen Eigenwert besitzt. ■

Folgenden schönen Satz werden wir leider erst in Analysis III beweisen.

Satz 8.11. (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom $p(t)$ mit komplexen Koeffizienten zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, d.h. es gibt $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass gilt*

$$p(t) = C \cdot (t - z_1) \cdot \dots \cdot (t - z_n).$$

Insbesondere besitzt jedes komplexe Polynom von Grad ≥ 1 mindestens eine komplexe Nullstelle.

Korollar 8.12. *Jede komplexe Matrix, und damit auch jeder Endomorphismus eines endlich dimensional komplexen Vektorraums besitzt mindestens einen Eigenwert.*

Beweis. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine komplexe Matrix. Das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ besitzt Grad n . Es folgt aus dem Fundamentalsatz 8.11 der Algebra, dass $\chi_A(t)$ eine komplexe Nullstelle besitzt. Es folgt dann aus Satz 8.9, dass A einen komplexen Eigenwert besitzt. ■

8.4. Euklidische und unitäre Vektorräume.

Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum.

- (1) Eine **symmetrische Form** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \varphi(v, w) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) φ ist bilinear.
- (b) Für alle $v, w \in V$ gilt: $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$.
- (2) Wir sagen φ ist **positiv definit**, wenn für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt: $\varphi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0}$.
- (3) Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein Paar (V, φ) bestehend aus einem endlich dimensional reellen Vektorraum V und einer positiv definiten symmetrischen Form φ .

Wir führen auch noch das komplexe Analogon ein.

Definition. Es sei V ein komplexer Vektorraum.

- (1) Eine **hermitesche Form** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: V \times V &\rightarrow \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto \varphi(v, w) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) φ ist komplex anti-linear im ersten Argument und komplex linear im zweiten Argument.

- (b) Für alle $v, w \in V$ gilt: $\varphi(v, w) = \overline{\varphi(w, v)}$.
- (2) Wir sagen φ ist positiv definit, wenn für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt: $\varphi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0}$.
- (3) Ein unitärer Vektorraum ist ein Paar (V, φ) bestehend aus einem endlich dimensionalen komplexen Vektorraum V und einer positiv definiten hermiteschen Form φ .

Beispiel.

- (1) Für $V = \mathbb{C}^n$ ist $\langle -, - \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$
- $$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle = \overline{v}^T \cdot w = \sum_{j=1}^n \overline{v}_j \cdot w_j$$

eine hermitesche Form. Diese ist natürlich positiv definit. Wir fassen $\mathbb{C}^n$ normalerweise als unitären Vektorraum bezüglich dieser hermiteschen Form auf.

- (2) Für jeden Untervektorraum $V \subset \mathbb{C}^n$ definiert die Einschränkung von $\langle -, - \rangle$ auf $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ wiederum eine positiv definite hermitesche Form.

Definition. Es sei (V, φ) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Für $v \in V$ definieren wir die Länge von v als

$$\|v\| := \sqrt{\varphi(v, v)}.$$

Dies macht Sinn, denn φ ist positiv definit, d.h. $\varphi(v, v) \geq 0$.

Satz 8.13. Es sei (V, φ) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.

- (1) Es gibt eine Orthonormalbasis (ONB) für V , d.h. eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, so dass für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\varphi(v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

- (2) Wenn $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis für V ist, dann gilt für jedes $w \in V$, dass

$$w = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i, w) \cdot v_i.$$

Beweis.

- (1) Diese Aussage kann mithilfe des Gram-Schmidt Verfahrens leicht gezeigt werden, siehe [N1, Satz 20.5].
- (2) Da $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ist existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $w = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$. Dann gilt

$$\lambda_i = \varphi(v_i, \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n) = \varphi(v_i, w).$$

denn $v_1, \dots, v_n$ ist eine ONB und φ ist linear im zweiten Argument ■

Definition. Es sei (V, φ) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Für einen Untervektorraum $U \subset V$ bezeichnen wir

$$U^\perp = \{v \in V \mid \varphi(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

als das orthogonale Komplement von U . Da φ linear im zweiten Argument ist, ist dies ein Untervektorraum von V .

Lemma 8.14. *Es sei (V, φ) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Für jeden Untervektorraum $U \subset V$ gilt*

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Mit anderen Worten, per Definition einer direkten Summe, siehe [N1, S. 30], gelten folgende beide Aussagen:

- (1) $V = U + U^\perp$,
- (2) $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Beweis.

- (1) Es sei $v \in V$. Wir müssen zeigen, dass es $u \in U$ und $w \in U^\perp$ mit $v = u + w$ gibt. Wir wählen eine Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_d$ für U , welche nach Satz 8.13 existiert. Wir setzen

$$u = \sum_{j=1}^d \varphi(u_j, v) \cdot u_j \in U.$$

Es genügt zu zeigen, dass $v - u \in U^\perp$. Für beliebiges $i \in \{1, \dots, d\}$ führen wir erst einmal folgende Rechnung durch:

$$\varphi(u_i, v - u) = \varphi\left(u_i, v - \sum_{j=1}^d \varphi(u_j, v) \cdot u_j\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \varphi \text{ linear im zweiten Argument}}}{=} \varphi(u_i, v) - \sum_{j=1}^d \varphi(u_j, v) \cdot \underbrace{\varphi(u_i, u_j)}_{= \delta_{ij}, \text{ da ONB}} = 0.$$

Aus der (anti-) Linearität des ersten Argument von φ folgt nun, dass sogar für alle Linearkombinationen $\tilde{u}$ der u_i gilt: $\varphi(\tilde{u}, v - u) = 0$.

- (2) Es sei $v \in U \cap U^\perp$. Dann gilt $\varphi(v, v) = 0$. Andererseits ist φ per Definition positiv definit, d.h. aus $\varphi(v, v) = 0$ folgt $v = 0$. Also ist $U \cap U^\perp = \{0\}$. ■

8.5. Selbstadjungierte Endomorphismen. Wir beginnen dieses Kapitel mit einer harmlosen Definition.

Definition. Es sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Wir sagen A ist **hermitesch**, wenn $A = \overline{A}^T$, d.h. wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Beispiel.

- (1) Eine reelle Matrix ist genau dann hermitesch, wenn sie symmetrisch ist.
- (2) Die komplexe Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3+2i \\ 3-2i & 5 \end{pmatrix}$ ist hermitesch.

Folgende Definition ist eher verwirrend.

Definition. Es sei (V, φ) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Analog zu [N1, S. 86], nennen wir einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ **selbstadjungiert**, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\varphi(v, f(w)) = \varphi(f(v), w).$$

Wir werden im Folgenden die beiden Definitionen in Verbindung setzen.

Beispiel.

- (1) Es sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt bezüglich der üblichen hermiteschen Form $\langle -, - \rangle$ auf $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} \langle v, A \cdot w \rangle &= \bar{v}^T \cdot A \cdot w = \bar{v}^T \cdot \bar{A}^T \cdot w = \overline{(A \cdot v)}^T \cdot w = \langle A \cdot v, w \rangle. \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\text{denn } \langle x, y \rangle = \bar{x}^T \cdot y \quad \text{denn } A = \bar{A}^T \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass hermitesche Matrizen, aufgefasst als Endomorphismen von $\mathbb{C}^n$, selbstadjungiert sind.

- (2) Genau das gleiche Argument wie in (1) zeigt, dass symmetrische reelle Matrizen, aufgefasst als Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$, selbstadjungiert sind.

Das folgende Lemma besagt, dass in gewisser Weise alle selbstadjungierten Homomorphismen durch hermitesche Matrizen gegeben sind.

Lemma 8.15. *Es sei (V, φ) ein euklidischer oder ein unitärer Vektorraum und es sei $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis. Für einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ gilt:*

$$f \text{ ist selbstadjungiert} \iff \Phi(f)_{X,X} \text{ ist symmetrisch bzw. hermitesch.}$$

Beweis. Wir führen den Beweis für unitäre Vektorräume durch. Der Beweis für euklidische Vektorräume ist fast identisch, man muss sich nur keinerlei Sorgen um die komplexe Konjugation machen. Wir setzen $A := \Phi(f)_{X,X}$ und wir schreiben $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot v_i &= f(v_j) = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i, f(v_j)) \cdot v_i. \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\text{per Definition von } \Phi(f)_{X,X} \quad \text{nach Satz 8.13, da } X \text{ ONB} \end{aligned}$$

Also gilt per Definition, dass $a_{ij} = \varphi(f(v_i), v_j)$. Nun folgt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist selbstadjungiert} &\iff \varphi(v, f(w)) = \overline{\varphi(f(v), w)} \text{ für alle } v, w \in V \iff \\ &\iff \varphi(v, f(w)) = \overline{\varphi(w, f(v))} \text{ für alle } v, w \in V \\ &\iff \underbrace{\varphi(v_i, f(v_j))}_{=a_{ij}} = \overline{\underbrace{\varphi(v_j, f(v_i))}_{=\bar{a}_{ji}}} \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\} \iff A = \bar{A}^T. \end{aligned}$$

da φ (anti-) linear in den Argumenten genügt es die Aussage für eine Basis zu überprüfen

■

Satz 8.16. *Es sei (V, φ) ein unitärer Vektorraum. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Homomorphismus. Jeder Eigenwert von f ist reell.*

Beispiel. Satz 8.16 besagt also insbesondere, dass die Eigenwerte jeder hermiteschen Matrix reell sind. Insbesondere sind die Eigenwerte jeder symmetrischen reellen Matrix immer reell.

Beweis. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Homomorphismus, es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f und es sei $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda \cdot \varphi(v, v) & = & \varphi(v, \lambda \cdot v) & = & \varphi(v, f(v)) & = & \varphi(f(v), v) & = & \varphi(\lambda \cdot v, v) & = & \bar{\lambda} \cdot \varphi(v, v). \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{da } \varphi \text{ linear im} & & \text{da } \lambda \text{ Eigenwert} & & \text{da } f \text{ selbstadjungiert} & & \text{da } \lambda \text{ Eigenwert} & & \text{da } \varphi \text{ anti-linear im} & & \\ \text{zweiten Argument} & & & & & & & & \text{ersten Argument} & & \end{array}$$

Da φ positiv definit ist gilt $\varphi(v, v) > 0$, insbesondere ist $\varphi(v, v) \neq 0$. Es folgt also, dass $\lambda = \bar{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Lemma 8.17. *Es sei (V, φ) ein euklidischer oder ein unitärer Vektorraum und es sei f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V . Es sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Wenn $f(U) \subset U$, dann gilt auch $f(U^\perp) \subset U^\perp$.*

Beweis. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus mit $f(U) \subset U$. Wir müssen zeigen, dass $f(U^\perp) \subset U^\perp$. Es sei also

$$w \in U^\perp := \{v \in V \mid \varphi(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Wir müssen zeigen, dass auch $f(w) \in U^\perp$. Es sei also $u \in U$. Dann gilt in der Tat:

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(u, f(w)) & = & \varphi(f(u), w) & = & 0. \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{da } f \text{ selbstadjungiert} & & \text{da } f(u) \in U \text{ und } w \in U^\perp & & \end{array}$$
■

8.6. Der Spektralsatz. Folgender Satz ist ein wichtiger Spezialfall von [N1, Satz 22.9].

Satz 8.18. (Spektralsatz) *Es sei (V, φ) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ gibt es eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren. (Nach Satz 8.16 sind die zugehörigen Eigenwerte zudem reell.)*

Für den Beweis des Spektralsatzes 8.18 benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 8.19. *Es sei (V, φ) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Jeder selbstadjungierte Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ besitzt einen reellen Eigenwert.*

Beweis von Lemma 8.19. Wenn (V, φ) ein unitärer Vektorraum ist, dann folgt die Aussage sofort aus Korollar 8.12 zusammen mit Satz 8.16.

Für euklidische Vektorräume arbeiten wir mit einem kleinen Kniff. Es sei also (V, φ) ein euklidischer Vektorraum und es sei $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Homomorphismus. Satz 8.13 besagt, dass V eine Orthonormalbasis $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ besitzt. Lemma 8.15 besagt, dass die zugehörige darstellende Matrix $A = \Phi(f)_{X,X} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch ist.

Wir können A auch als hermitesche komplexe Matrix auffassen. Korollar 8.12 besagt, dass die Matrix A einen komplexen Eigenwert besitzt. Nach Satz 8.16 muss dieser jedoch schon reell sein. Also hat die Matrix A einen reellen Eigenwert. Es folgt nun aus Lemma 8.4, dass auch f einen reellen Eigenwert besitzt. ■

Beweis von Spektralsatz 8.18. Wir beweisen den Spektralsatz mithilfe von Induktion nach der Dimension des Vektorraums. Wenn $\dim(V) = 0$, dann gibt es nichts zu beweisen.

Nehmen wir nun an, dass die Aussage gilt, wenn $\dim(V) < k$. Es sei nun (V, φ) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = k$ und es sei $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus.

Lemma 8.19 besagt, dass f einen reellen Eigenwert besitzt. Es sei $w \in V$ ein zugehöriger Eigenwert. Indem wir notfalls w durch $\frac{w}{\|w\|}$ ersetzen, können wir annehmen, dass $\|w\| = 1$.

Wir setzen $W := \mathbb{R} \cdot w$ beziehungsweise $W := \mathbb{C} \cdot w$. Da w ein Eigenwert von f ist gilt $f(W) \subset W$. Aus Lemma 8.17 folgt, dass $f(W^\perp) \subset W^\perp$ und aus Lemma 8.14 folgt, dass $\dim(W^\perp) = \dim(V) - 1$.

Da $f: W \rightarrow W$ weiterhin selbstadjungiert ist greift unsere Induktionsvoraussetzung und wir erhalten eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_{k-1}$ von W , welche nur aus Eigenvektoren besteht.

Aus Lemma 8.14 folgt nun, dass $w, v_1, \dots, v_{k-1}$ in der Tat eine Orthonormalbasis von V ist. Per Konstruktion sind $w, v_1, \dots, v_{k-1}$ Eigenvektoren von f . ■

Der folgende Satz gibt uns eine hübsche Anwendung des Spektralsatzes.

Satz 8.20. (Spektralsatz für symmetrische Matrizen) Für jede symmetrische reelle Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gibt es eine orthogonale Matrix P , so dass $P^{-1}AP$ eine diagonale Matrix mit reellen Einträgen ist.

Beispiel. Wie auf Seite 79 betrachten wir die symmetrische Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit den Eigenvektoren} \quad v := \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w := \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$. Diese Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander. Wenn wir diese nun noch auf Länge 1 normieren erhalten wir eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^2$, welche aus Eigenvektoren besteht. Wir setzen $\mu_\pm = \frac{1}{\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}} = \left\| \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$. Für

$$P := \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_+ \cdot (1+\sqrt{2}) & \mu_- \cdot (1-\sqrt{2}) \\ \mu_+ & \mu_- \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Spalten sind Eigenvektoren} \\ \text{und die Matrix liegt in } O(2)}}, \quad \text{erhalten wir also} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Aus der Diskussion auf Seite 85 wissen wir, dass A , aufgefasst als Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ selbstadjungiert ist.

Aus dem Spektralsatz 8.18 folgt, dass es eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ gibt, welche aus Eigenvektoren von A besteht, wobei die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alle reell sind. Wir setzen $P := (v_1 \dots v_n)$.

(1) Es folgt aus Lemma 7.3, dass $P \in O(n)$.

(2) Es folgt aus Satz 8.6, dass $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. ■

8.7. Orthogonale Matrizen. In diesem Teilkapitel wollen wir noch einige Aussagen über orthogonale Matrizen herleiten.

Satz 8.21. *Es sei $A \in O(n)$. Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \in \{\pm 1\}$.*

Beweis. Es sei $A \in O(n)$, es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Es gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \langle v, v \rangle & = & \langle A \cdot v, A \cdot v \rangle & = & \langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle & = & \lambda^2 \cdot \langle v, v \rangle. \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{denn } A \in O(n) & & \text{denn } v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda & & \end{array}$$

Da $v \neq 0$ gilt $\langle v, v \rangle \neq 0$. Also folgt $\lambda^2 = 1$. Daraus wiederum folgt $\lambda = \pm 1$. ■

Lemma 8.22. *Es sei $A \in O(n)$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Wenn $A \cdot U = U$, dann gilt auch $A \cdot U^\perp = U^\perp$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $A \cdot U^\perp \subset U^\perp$. Es sei $v \in U^\perp$. Wir müssen zeigen, dass $A \cdot v \in U^\perp$. Es sei also $u \in U$. Dann gilt

$$\langle u, Av \rangle = \langle A^{-1} \cdot u, A^{-1} \cdot Av \rangle = \langle A^{-1} \cdot u, v \rangle = 0.$$

nach Lemma 7.4 ist auch $A^{-1} \in O(n)$

aus $A \cdot U = U$ folgt $U = A^{-1} \cdot U$
also ist $A^{-1} \cdot u \in U$ und da $v \in U^\perp$ gilt $\langle A^{-1} \cdot u, v \rangle = 0$

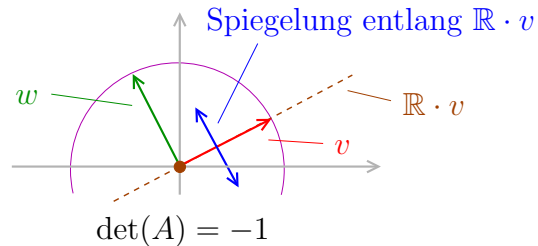
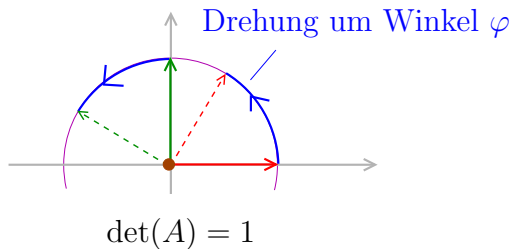
Nachdem A invertierbar ist, folgt, dass Multiplikation mit A injektiv ist, also besitzen $A \cdot U^\perp$ und $U^\perp$ die gleiche Dimension. Aus der Inklusion $A \cdot U^\perp \subset U^\perp$ folgt also auch, dass $A \cdot U^\perp = U^\perp$. ■

Satz 8.23. *Es sei $A \in O(2)$.*

- (1) *Wenn $\det(A) = 1$, dann ist $A = R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$.*
- (2) *Wenn $\det(A) = -1$, dann gibt es eine Orthonormalbasis v, w , wobei v ein Eigenvektor zum Eigenwert $+1$ und w ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist.*

Bemerkung. Es sei $A \in O(2)$. Satz 8.23 macht folgende Aussagen:

- (1) Wenn $\det(A) = 1$, dann ist Anwendung von A gerade Drehung um einen Winkel φ .
- (2) Wenn $\det(A) = -1$, dann ist Anwendung von A gerade Spiegelung entlang einer Geraden $\mathbb{R} \cdot v$.



Beweis.

- (1) Wir nehmen zuerst an, dass $\det(A) = 1$. Wir schreiben $A = (v \ w)$. Nach Lemma 7.3 bilden die Spalten v, w eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist $\|v\| = 1$. Aus dem Satz über die Polarkoordinatendarstellung, d.h. aus [Fr1, Satz 11.11], folgt, dass es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $v = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ gibt. Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Es ist $w = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

Wir schreiben $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$(I) \quad \underbrace{\cos(\varphi) \cdot a + \sin(\varphi) \cdot b}_{=\langle v, w \rangle} = 0 \quad \text{und} \quad (II) \quad \underbrace{\cos(\varphi) \cdot b - \sin(\varphi) \cdot a}_{=\det(A)} = 1.$$

Wir nehmen zuerst an, dass $\cos(\varphi) \neq 0$.

$$\underbrace{a = -b \cdot \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}_{\text{folgt aus (I)}}, \text{ also } \underbrace{\cos(\varphi) \cdot b + \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} \cdot b}_{\text{Einsetzen in (II)}} = 1 \text{ also } \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \cdot b}_{=1} = \cos(\varphi)$$

und dann folgt auch $a = -\sin(\varphi)$. Also ist $A = R(\varphi)$. Wenn $\cos(\varphi) = 0$, dann lösen wir nach b auf, und erhalten mit fast dem gleichen Argument die gleiche Aussage.

- (2) Es sei nun $\det(A) = -1$.

Behauptung. Die Matrix A besitzt einen reellen Eigenwert λ .

Nach Korollar 8.12 besitzt A einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Es folgt aus Lemma 8.5, dass $\bar{\lambda}$ ebenfalls ein Eigenwert ist. Wenn $\lambda \neq \bar{\lambda}$, dann folgt aus Satz 8.7, dass A diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $\lambda, \bar{\lambda}$. Aber dann folgt aus Lemma 8.2, dass $\det(A) = \lambda \cdot \bar{\lambda} > 0$. Dies wiederum widerspricht der Voraussetzung, dass $\det(A) = -1$. Also besitzt A einen reellen Eigenwert. $\square$

Es sei nun v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Wir können diesen auf $\|v\| = 1$ normieren. Da $(\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ 1-dimensional ist gibt es ein $w \in \mathbb{R}^2$ mit $\|w\| = 1$, so dass $w = (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$. Aus Lemma 8.22 folgt, dass $A \cdot w \in (\mathbb{R} \cdot v)^\perp = \mathbb{R} \cdot w$. Es gibt also ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $A \cdot w = \mu \cdot w$.

Wir haben also eine Basis v, w von Eigenvektoren gefunden, welche zudem eine Orthonormalbasis ist. Aus Lemma 8.6 folgt, dass $\lambda \cdot \mu = \det(A) = -1$. Aus Satz 8.21 folgt nun, dass einer der beiden Eigenwerte $= -1$ und einer der beiden Eigenwerte $= +1$. $\blacksquare$

Der Rest dieses Kapitels wurde in der Vorlesung nicht behandelt, und ist damit nicht offizieller Teil der Vorlesung.

Wir betrachten zum Abschluß noch Matrizen in $O(3)$. Der folgende Satz ist etwas vage formuliert, weil wir den Begriff “Drehung um eine Gerade” nicht eingeführt hatten. Nichtsdestotrotz sollte die Formulierung anschaulich klar sein.

Satz 8.24. *Jede Matrix $A \in O(3)$ mit $\det(A) = 1$ beschreibt die Drehung um eine Gerade in $\mathbb{R}^3$.*

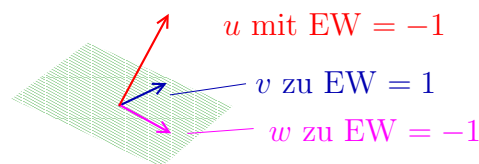
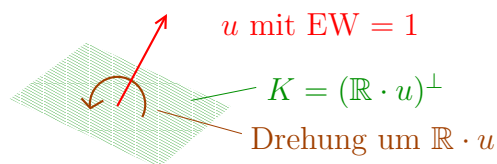
Beweisskizze. Es sei $A \in O(3)$ mit $\det(A) = 1$. Wir bezeichnen mit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ den Endomorphismus, welcher gegeben ist durch $v \mapsto A \cdot v$.

Da 3 natürlich ungerade ist folgt aus Satz 8.10, dass $A \in O(3)$ einen Eigenvektor u zu einem reellen Eigenwert λ besitzt. Wir setzen $K := (\mathbb{R} \cdot u)^\perp$. Nach Lemma 8.22 gilt $f(K) = K$. Zudem gilt:

$$\det(A) = \det(f) = \det(\text{Endomorphismus } f|_K: K \rightarrow K) \cdot \lambda.$$

Satz 8.21 besagt, dass $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$. Wir unterscheiden daher jetzt zwei Fälle.

- (1) Wenn $\lambda = 1$, dann folgt aus Satz 8.23, dass $f|_K: K \rightarrow K$ eine Drehung ist. Also ist f eine Drehung um die Gerade $\mathbb{R} \cdot u$.
- (2) Wenn $\lambda = -1$, dann folgt aus Satz 8.23, dass $f|_K$ einen Eigenvektor $v \in K$ zum Eigenwert $+1$ und einen Eigenvektor $w \in K$ zum Eigenwert -1 , und v und w stehen senkrecht aufeinander. Aber dann ist f gerade Drehung um die Gerade $\mathbb{R} \cdot v$ um den Winkel π . ■



Drehung um $\mathbb{R} \cdot v$ mit Winkel π

Skizze für den Beweis von Satz 8.24.

9. DER SATZ VON TAYLOR

In Analysis I hatten wir gesehen, dass wir Funktionen auf $\mathbb{R}$ in der Umgebung von einem Punkt durch die Taylorpolynome approximieren können. Ganz analog wollen wir jetzt Taylorpolynome in mehreren Variablen einführen, um Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ zu approximieren.

9.1. Die Taylorpolynome aus der Analysis I. Bevor wir Taylorpolynome für Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ einführen, erinnern wir an das Taylorpolynom aus der Analysis I.

Definition. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, es sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal differenzierbare Funktion und $c \in I$. Dann heißt

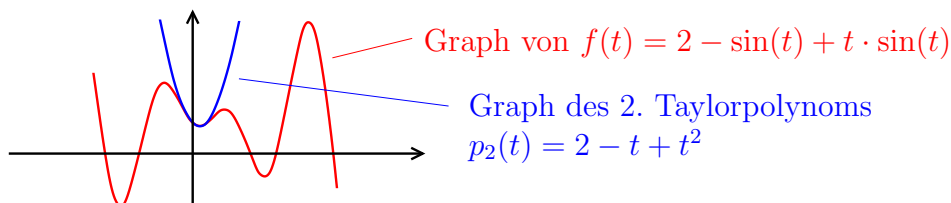
$$p_k(t) := p_{k,c}(t) := \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \cdot g^{(m)}(c) \cdot (t-c)^m$$

das k -te Taylorpolynom von g bei c . Wir bezeichnen die Differenz $g(t) - p_{k,c}(t)$ manchmal als das k -te Restglied bei c .

Bemerkung. Zur Erinnerung, das Taylorpolynom $p_k(t)$ am Punkt c zeichnet sich nach [Fr1, Lemma 21.3] dadurch aus, dass für alle $m = 0, \dots, k$ gilt:

$$p_k^{(m)}(c) = g^{(m)}(c),$$

d.h. die ersten k Ableitungen von $p_{k,c}(t)$ und g stimmen am Punkt c überein.



Taylorpolynome “approximieren” die ursprüngliche Funktion in der Nähe eines Punktes c . Der folgende Satz [Fr1, Satz 21.4] macht den anschaulichen Begriff einer “Approximation” präzise.

Satz 9.1. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, es sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal differenzierbare Funktion und $c \in I$. Dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{g(t) - p_{k,c}(t)}{(t-c)^k} = 0.$$

Oder, mithilfe von Lemma 6.4 anders ausgedrückt, es ist

$$g(c + \xi) = p_k(c + \xi) + o(\xi^k).$$

Im Folgenden wollen wir noch etwas besser verstehen, wie weit sich denn nun das Taylorpolynom von der ursprünglichen Funktion unterscheidet. Wir erinnern an die Restgliedformel von Taylor, welche wir als [Fr1, Satz 21.6] in Analysis I bewiesen hatten.

Satz 9.2. (Restgliedformel von Taylor) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, es sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal differenzierbare Funktion und $c \in I$. Dann gilt für jedes $t \in I$:

$$g(t) = p_{k-1,c}(t) + \int_c^t \frac{g^{(k)}(s)}{(k-1)!} \cdot (t-s)^{k-1} ds.$$

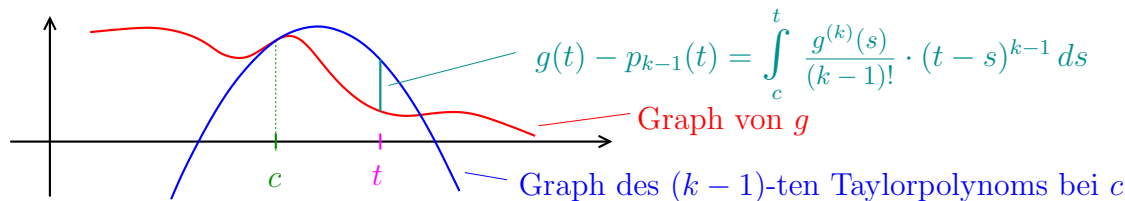


Abbildung: Illustration von Satz 9.2.

Folgender Satz gibt eine weitere Abschätzung des Restgliedes des Taylorpolynoms.

Satz 9.3. (Restgliedformel von Lagrange) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, es sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion und es sei $c \in I$. Zu jedem $t \in I$ existiert ein θ zwischen c und t , so dass

$$g(t) = p_{k-1,c}(t) + \frac{1}{k!} \cdot g^{(k)}(\theta) \cdot (t-c)^k.$$

Bemerkung.

- (1) Für $k = 1$ ist die Aussage der Restgliedformel von Lagrange nur eine Umformulierung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung, siehe [Fr1, Satz 15.11].
- (2) Der Term $\frac{1}{k!} \cdot g^{(k)}(\theta) \cdot (t-c)^k$ ähnelt dem k -ten Summanden des k -ten Taylorpolynoms

$p_k(t) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \cdot g^{(m)}(c) \cdot (t-c)^m$, der einzige Unterschied ist, dass wir $g^{(k)}(\theta)$ anstatt $g^{(k)}(c)$ betrachten.

Beweis ().* Wir betrachten im Folgenden nur den Fall, dass $c < t$. Der Fall, dass $c > t$ wird ganz analog bewiesen. Wir müssen zeigen, dass es ein $\theta \in (c, t)$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} g^{(k)}(\theta) &= \underbrace{(g(t) - p_{k-1,c}(t))}_{= \int_c^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot g^{(k)}(s) ds, \text{ nach}} \cdot \frac{k!}{(t-c)^k}. \\ &\quad \text{der Restgliedformel 9.2 von Taylor} \end{aligned}$$

Wir müssen also ein $\theta \in (c, t)$ finden, so dass

$$g^{(k)}(\theta) = \frac{k!}{(t-c)^k} \cdot \int_c^t (t-s)^{k-1} \cdot g^{(k)}(s) ds.$$

Wir wollen solch ein θ mithilfe des Zwischenwertsatzes [Fr1, Satz 8.3], angewandt auf die nach Voraussetzung stetige Funktion $g^{(k)}$, finden. Ganz analog zum Beweis des Mittelwertsatzes [Fr1, Satz 15.11] der Integralrechnung schränken wir uns dabei

ein auf ein Teilintervall $[a, b]$, so dass $g^{(k)}$ an den Endpunkten maximal und minimal wird.

Nach Voraussetzung ist die Funktion $g^{(k)}$ auf dem kompakten Intervall $[c, t]$ stetig. Nach dem Beschränktheitsatz [Fr1, Satz 8.1] existieren also $a, b \in [c, t]$, so dass

$$g^{(k)}(a) \leq g^{(k)}(s) \leq g^{(k)}(b)$$

für alle $s \in [c, t]$.

Damit der mittlere Term genauso aussieht, wie der gewünschte Wert für $g^{(k)}(\theta)$, vollziehen wir jetzt folgende drei Umformungen:

- (a) wir multiplizieren die Ungleichung mit der (auf dem Intervall $[c, t]$ nicht-negativen Funktion) $(t-s)^{k-1}$,
- (b) wir integrieren von c bis t ,
- (c) wir multiplizieren mit $\frac{k}{(t-c)^k}$.

Es folgt aus der Monotonieeigenschaft des Integrals [Fr1, Lemma 15.5], dass die Ungleichungen erhalten bleiben. Wir erhalten also, dass

$$\underbrace{\frac{k}{(t-c)^k} \cdot \int_c^t (t-s)^{k-1} \cdot g^{(k)}(a) \, ds}_{=g^{(k)}(a) \cdot \frac{(t-c)^k}{k}} \leq \frac{k}{(t-c)^k} \cdot \int_c^t (t-s)^{k-1} \cdot g^{(k)}(s) \, ds \leq \underbrace{\frac{k}{(t-c)^k} \cdot \int_c^t (t-s)^{k-1} \cdot g^{(k)}(b) \, ds}_{=g^{(k)}(b) \cdot \frac{(t-c)^k}{k}}.$$

Die linke und die rechte Seite vereinfachen sich zu $g^{(k)}(a)$ und $g^{(k)}(b)$, und wir erhalten die Ungleichung

$$g^{(k)}(a) \leq \frac{k}{(t-c)^k} \cdot \int_c^t (t-s)^{k-1} \cdot g^{(k)}(s) \, ds \leq g^{(k)}(b).$$

Nach Voraussetzung ist $g^{(k)}$ stetig. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz [Fr1, Satz 8.3] ein θ zwischen a und b , so dass

$$g^{(k)}(\theta) = \frac{k}{(t-c)^k} \cdot \int_c^t (t-s)^{k-1} \cdot g^{(k)}(s) \, ds. \quad \blacksquare$$

9.2. Die Taylorformel im $\mathbb{R}^n$. Die Idee ist nun eine Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in der Nähe eines Punktes P durch ein Polynom in n Variablen zu approximieren. Analog zum 1-dimensionalen Fall wollen wir jetzt ein Polynom, dieses Mal in n Variablen $\xi_1, \dots, \xi_n$ einführen, dessen partielle Ableitungen am Punkt P bis zu einem fest gewählten Grad k mit den partiellen Ableitungen von f übereinstimmen.

Wenn man sich diese Idee etwas durchdenkt landet man bei folgender Definition.

Definition 9.2.1 (Taylorpolynom). Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ k -mal partiell ableitbar ist. Das Taylorpolynom $T_k f$ von f in P ist das Polynom

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in U$. Wir bezeichnen ⁴⁰

$$p_k(\xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \cdot \underbrace{\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} f(P) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}}_{=: q_m(\xi_1, \dots, \xi_n)}$$

als das k -te Taylorpolynom von f im Punkt P .

Beispiel. Wenn $n = 1$, dann gibt es für jedes m genau die Möglichkeit $i_1 = \dots = i_m = 1$ zu berücksichtigen, d.h. wir bilden genau die m -te Ableitung von f . Es folgt, dass

$$p_k(\xi) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \cdot f^{(m)}(P) \cdot \xi^m.$$

Wenn $P = 0$, dann ist dies gerade das übliche Taylorpolynom aus der Analysis I. Wenn $P \neq 0$, dann erhalten wir das Taylorpolynom aus der Analysis I um “ P auf der x -Achse verschoben”.

Bemerkung. Diese Definition wirkt am Anfang etwas einschüchternd, aber wie für das k -te Taylorpolynom in Analysis I betrachten wir wieder für $m = 0, \dots, k$ die (partiellen) Ableitungen von Grad m . Nachdem es viele solche partiellen Ableitungen gibt, müssen wir notgedrungen auch alle partiellen Ableitungen von Grad m berücksichtigen.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir fast durchgehend nur die Taylorpolynome p_0, p_1, p_2 betrachten. Wir wollen daher im Folgenden explizite Formeln für die Polynome q_0, q_1 und q_2 und damit auch für die Taylorpolynome p_0, p_1 und p_2 geben.

Beobachtung 9.4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Für $P \in U$ hatten wir definiert:

$$q_m(\xi_1, \dots, \xi_n) := \frac{1}{m!} \cdot \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} f(P) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}.$$

Für kleine m vereinfacht sich das wie folgt:

$$\begin{aligned} (m=0) \quad q_0(\xi_1, \dots, \xi_n) &= f(P) \\ (m=1) \quad q_1(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(P) \cdot \xi_i \\ (m=2) \quad q_2(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(P) \cdot \xi_i \cdot \xi_j. \end{aligned}$$

Wir können jetzt den wichtigsten Satz dieses Kapitels formulieren: ⁴¹

⁴⁰Selbst wenn es die Notation etwas verheimlicht, der Ausdruck auf der rechten Seite ist ein Polynom in den Variablen $\xi_1, \dots, \xi_n$.

⁴¹Im Spezialfall $n = 1$ ist die Aussage von Satz 9.5 äquivalent zu der Aussage von Satz 9.1, allerdings mit einer etwas anderen Notation.

Satz 9.5. (Satz von Taylor) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in U$. Wir bezeichnen mit p_k das k -te Taylorpolynom von f im Punkt P . Dann gilt

$$f(P + \xi) = p_k(\xi) + o(\|\xi\|^k).$$

Der Beweis des Satz 9.5 von Taylor beruht auf folgendem Satz.

Satz 7.6. Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, es sei $P \in U$ und es sei zudem $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dt} f(P + t \cdot \xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(P + t \cdot \xi) \cdot \xi_i.$$

Wir stellen im Folgenden erst die Idee für den Beweis des Satzes 9.5 von Taylor vor. Danach werden wir die Details ausarbeiten.

Beweisidee. Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion und es sei $P \in \mathbb{R}^n$. Das Ziel ist also zu zeigen, dass man für “kurze” Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^n$ den Funktionswert $f(P + \xi)$ durch $p_k(\xi)$ annähern kann.

Der Beweis von Satz 9.5 besteht grob gesprochen aus den folgenden drei Schritten.

- (1) Für jedes “kurze” ξ wollen wir $f(P + \xi)$ annähern, dazu betrachten wir für jedes ξ die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto f(P + t \cdot \xi). \end{aligned}$$

Wir können nun die Restgliedformel 9.3 von Lagrange auf diese Funktion und mit $t = 1$ anwenden.

- (2) Um das Ergebnis aus (1) mit Satz 9.5 in Verbindung zu bringen, müssen wir die Ableitungen von $t \mapsto f(P + t \cdot \xi)$ durch die partiellen Ableitungen von f ausdrücken. Für $k = 1$ und $k = 2$ hatten wir solche Formeln schon in den Sätzen 7.6 und 7.7 formuliert und bewiesen.
- (3) Wir müssen dann noch zeigen, dass die Aussagen für jedes einzelne ξ dann auch in der Tat die gewünschte Aussage liefern. Hierbei verwenden wir, dass f k -mal stetig differenzierbar ist, d.h. wir können den Fehlerterm in der Restgliedformel 9.3 von Lagrange in der Nähe von 0 kontrollieren.

9.3. Beweis des Satz 9.5 von Taylor. In diesem Kapitel werden wir die obigen drei Schritte für den Beweis von Satz 9.5 ausführen. Wir beginnen dieses Kapitel mit folgendem Satz, welcher dem 2. Schritt entspricht.

Satz 9.6. Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in \mathbb{R}^n$ und zudem sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} g: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(P + t \cdot \xi) \end{aligned}$$

k-mal stetig differenzierbar, und es gilt⁴²

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(P + t \cdot \xi) \cdot \xi_{i_k} \cdots \xi_{i_1}.$$

Bemerkung. Für $k = 1$ entspricht dieser Satz gerade der Aussage des oben zitierten Satzes 7.6 und für $k = 2$ ist dies Satz 7.7. Wir werden den jetzigen Satz mithilfe eines Induktionsarguments auf Satz 7.6 zurückführen.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach k . Für $k = 1$ ist dies der gerade erst zitierte Satz 7.6. Wir führen nun den Induktionsschritt $k - 1 \rightsquigarrow k$ durch. Wir nehmen also an, dass die Aussage für $k - 1$ gilt. Dann folgt, dass

$$\begin{aligned} g^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} g^{(k-1)}(t) \stackrel{\text{Induktionsannahme}}{\downarrow} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(P + t \cdot \xi) \cdot \xi_{i_{k-1}} \cdots \xi_{i_1} \right) \stackrel{\text{Linearität von Ableitungen}}{\downarrow} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(P + t \cdot \xi) \right)}_{\text{hierauf wenden wir Satz 7.6 an}} \cdot \xi_{i_{k-1}} \cdots \xi_{i_1} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(P + t \cdot \xi) \right) \cdot \xi_j \cdot \xi_{i_{k-1}} \cdots \xi_{i_1} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(P + t \cdot \xi) \cdot \xi_{i_k} \cdots \xi_{i_1}. \\ &\quad \uparrow \text{ wir ersetzen } j \text{ durch } i_k. \end{aligned}$$

Wir haben damit den Induktionsschritt vollzogen, insbesondere haben wir jetzt den Satz bewiesen. ■

Der folgende Hilfssatz entspricht gerade den oben genannten ersten beiden Schritten im obigen Programm für den Beweis von Satz 9.5.

Satz 9.7. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Außerdem sei $P \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit p_{k-1} das $(k-1)$ -ste Taylorpolynom von f am Punkt P . Für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $\theta \in [0, 1]$, so dass*

$$f(P + \xi) = p_{k-1}(\xi) + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(P + \theta \cdot \xi) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Beweis. Wir wenden die Restgliedformel 9.3 von Lagrange an auf die Funktion

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) := f(P + t \cdot \xi), \end{aligned}$$

⁴²Die Notation $\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n$ ist eine Abkürzung von $\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n$.

mit $c = 0$ und $t = 1$. Es existiert also $\theta \in [0, 1]$, so dass

$$\begin{aligned} f(P + \xi) &= g(1) = p_{k-1}^g(1) + \frac{1}{k!} \cdot g^{(k)}(\theta) \\ &= p_{k-1}^f(\xi) + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(P + \theta \cdot \xi) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}. \\ &\quad \uparrow \\ &\text{folgt aus Satz 9.6} \end{aligned}$$

Wir können nun Satz 9.5 beweisen.

Beweis von Satz 9.5. Wir beweisen Satz 9.5 im Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^n$ und $P = 0$. Der allgemeine Fall wird fast genauso bewiesen. Es sei also $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Wir müssen nun zeigen, dass

$$f(\xi) - p_k(\xi) = o(\|\xi\|^k).$$

Mit anderen Worten, wir müssen folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(\xi) - p_k(\xi)| \leq \epsilon \cdot \|\xi\|^k \quad \text{für alle } \xi \in B_\delta(0).$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Nach Satz 9.7 existiert zu jedem $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein $\theta \in [0, 1]$, so dass

$$f(\xi) = p_{k-1}(\xi) + \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(\theta \cdot \xi) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} |f(\xi) - p_k(\xi)| &= |f(\xi) - p_{k-1}(\xi) - q_k(\xi)| \\ &= \left| \underbrace{\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(\theta \cdot \xi) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}}_{= f(\xi) - p_{k-1}(\xi) \text{ nach der Wahl von } \theta} - \underbrace{\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(0) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}}_{= q_k(\xi)} \right| \\ &\leq \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(\theta \cdot \xi) - \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(0) \right|}_{n^k \text{ Summanden}} \cdot \underbrace{|\xi_{i_1}| \cdots |\xi_{i_k}|}_{\leq \|\xi\| \leq \|\xi\|} \\ &\leq \|\xi\|^k \cdot \underbrace{\frac{1}{k!} \cdot n^k \cdot \max_{i_1, \dots, i_k} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(\theta \cdot \xi) - \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(0) \right|}_{\leq \|\xi\|^k} \\ &\quad \text{müssen } \delta > 0 \text{ finden, so dass der Term } \leq \epsilon \text{ für alle } \xi \in B_\delta(0) \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der k -fachen partiellen Ableitungen folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und $y \in B_\delta(0)$ gilt:

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(y) - \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} f(0) \right\| < \epsilon \cdot \frac{k!}{n^k}.$$

Es folgt aus der obigen Abschätzung, dass dieses δ die gewünschte Eigenschaft besitzt. ■

9.4. Das zweite Taylorpolynom und die Hesse-Matrix. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine genügend oft stetig differenzierbare Funktion. Zudem sei $P \in U$. Das erste Taylorpolynom ist gegeben durch

$$p_1(\xi) = q_0(\xi) + q_1(\xi) = f(P) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(P) \cdot \xi_i = f(P) + \langle \text{Grad } f(P), \xi \rangle = f(P) + Df_P \cdot \xi.$$

↑
Beobachtung 9.4

Mit anderen Worten, das erste Taylorpolynom ist im Prinzip nichts anderes die übliche Linearisierung. Insbesondere ist in diesem Fall die Aussage des Satz 9.5 von Taylor nichts anderes als die Aussage von Satz 6.8.

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Taylorpolynom zu. Es folgt aus der obigen Berechnung zusammen mit Beobachtung 9.4, dass

$$p_2(\xi) = f(P) + \langle \text{Grad } f(P), \xi \rangle + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(P) \cdot \xi_i \cdot \xi_j.$$

Unser Ziel ist nun den Term rechts notationsmäßig zu entschlacken. Wir führen dazu die Hesse-Matrix ein:

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $P \in U$ ein Punkt und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Die $n \times n$ -Matrix

$$\text{Hess } f(P) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(P) \right)_{i,j=1,\dots,n} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(P) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(P) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(P) \end{pmatrix}.$$

wird als die Hesse-Matrix von f im Punkt P bezeichnet.

Bemerkung. Nach dem Satz 5.1 von Schwarz sind die partiellen Ableitungen von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen vertauschbar. Es folgt, dass $\text{Hess } f(P)$ eine symmetrische Matrix ist.

Diese Hesse-Matrix erlaubt uns nun das zweite Taylorpolynom elegant aufzuschreiben.

Lemma 9.8. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $P \in U$ ein Punkt und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$p_2(\xi) = f(P) + \langle \text{Grad } f(P), \xi \rangle + \frac{1}{2} \cdot \langle \xi, \text{Hess } f(P) \cdot \xi \rangle.$$

Beweis. Das Korollar folgt aus der obigen Gleichung und der elementaren Berechnung, dass für eine beliebige $n \times n$ -Matrix $H = (h_{ij})$ und einen beliebigen Vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \xi, H \cdot \xi \rangle &= \left\langle (\xi_1, \dots, \xi_n), \left(\sum_{i=1}^n h_{1i} \cdot \xi_i, \dots, \sum_{i=1}^n h_{ni} \cdot \xi_i \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n h_{1i} \cdot \xi_1 \cdot \xi_i + \dots + \sum_{i=1}^n h_{ni} \cdot \xi_n \cdot \xi_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n h_{ji} \cdot \xi_i \cdot \xi_j. \end{aligned}$$

■

Wir beschließen das Kapitel mit folgender, hoffentlich hilfreicher Interpretation von den Werten $\langle v, \text{Hess } f(P) \cdot v \rangle$:

Lemma 9.9. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $P \in U$ und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $\epsilon > 0$, so dass $P + t \cdot v \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Für die Funktion*

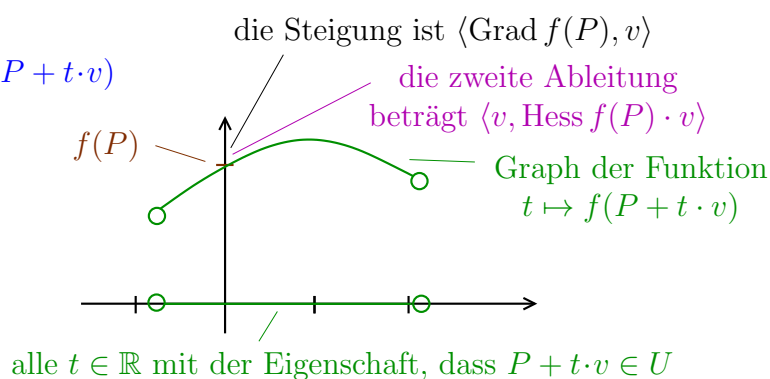
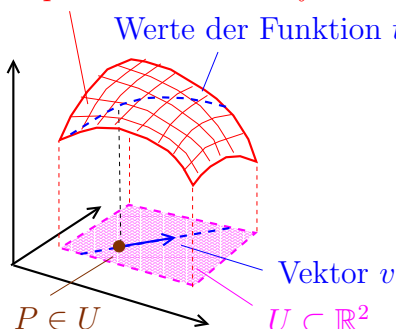
$$\begin{aligned} g: (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(P + t \cdot v). \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(P) \\ g'(0) &= \langle \text{Grad } f(P), v \rangle \\ g''(0) &= \langle v, \text{Hess } f(P) \cdot v \rangle. \end{aligned}$$

Beweis. In Satz 7.6 und Satz 7.7 hatten wir die erste und zweite Ableitung der Funktion $g(t) = f(P + t \cdot v)$ am Punkt $t = 0$ durch die einfachen und zweifachen partiellen Ableitungen von f ausgedrückt. Mithilfe der Definitionen und der Berechnung vom Beweis von Lemma 9.8 erhält man problemlos die Aussagen des Lemmas. ■

Graph einer Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$



10. LOKALE EXTREMA

10.1. Definition von lokalen Extrema. Folgende Definition erweitert die dementsprechende Definition aus [Fr1, Kapitel 13.1].

Definition. Es sei X ein metrischer Raum (z.B. eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) und es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (1) Wir sagen, f nimmt in $P \in X$ das **globale Minimum** an, wenn

$$f(P) \leq f(Q) \quad \text{für alle } Q \in X.$$

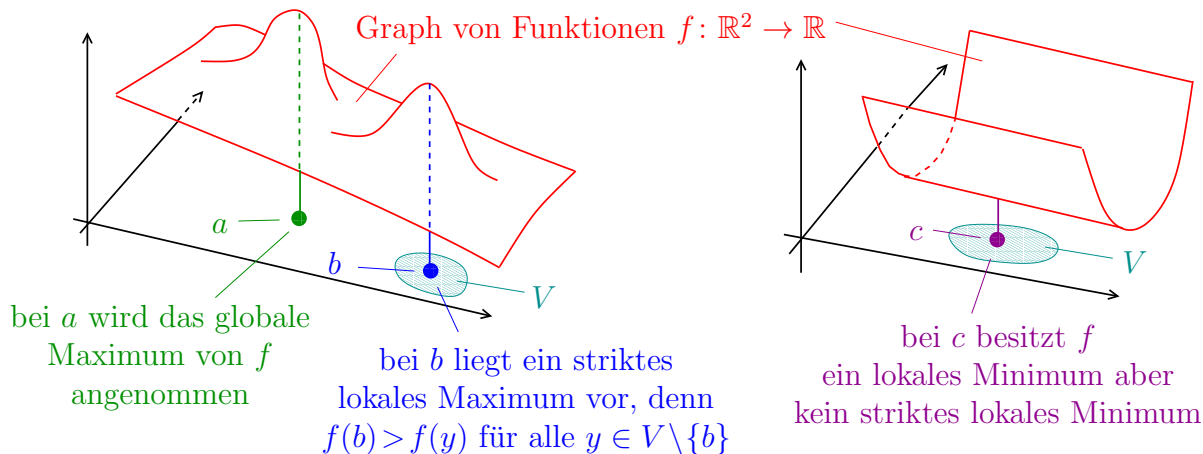
- (2) Wir sagen, f nimmt in $P \in X$ ein **lokales Minimum** an, wenn es eine offene Umgebung V von P gibt, so dass

$$f(P) \leq f(Q) \quad \text{für alle } Q \in V.$$

- (3) Wir sagen, f nimmt in $P \in X$ ein **striktes lokales Minimum** an, wenn es eine offene Umgebung V von P gibt, so dass

$$f(P) < f(Q) \quad \text{für alle } P \neq Q \in V.$$

Ganz analog definieren wir **globales Maximum** und **(striktes) lokales Maximum**. Ein **(striktes) lokales Extremum** ist ein (striktes) lokales Maximum oder Minimum.



Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 2 \cdot x^2 + 3 \cdot y^4 + 5. \end{aligned}$$

Die Funktion f nimmt bei $(0, 0)$ das globale Minimum an, denn für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt:

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot y^4 + 5 > 5 = f(0, 0).$$

aus $(x, y) \neq (0, 0)$ folgt $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, also ist $2 \cdot x^2 > 0$ oder $3 \cdot y^4 > 0$

Dies zeigt, dass man manchmal ganz leicht per Hand nachweisen kann, dass ein lokales oder globales Minimum vorliegt.

Folgendes einfaches Lemma wird sich immer wieder als hilfreich herausstellen.

Lemma 10.1. *Es sei $\varphi: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen und es sei $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $P \in X$. Wenn $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ bei $\varphi(P) \in Y$ ein lokales Maximum annimmt, dann nimmt $f \circ \varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ bei $P \in X$ ein lokales Maximum an.*

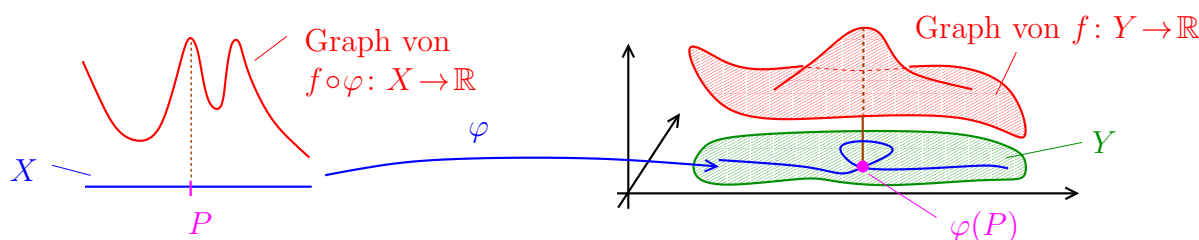


Illustration von Lemma 10.1.

Beweis. Wir nehmen also an, dass f bei $\varphi(P) \in Y$ ein lokales Maximum annimmt.

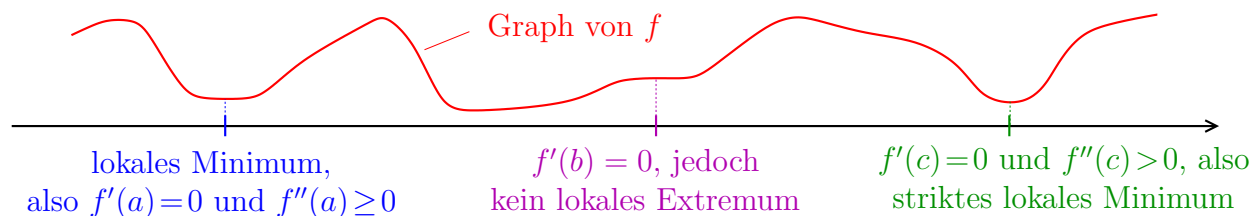
- (1) Es gibt also eine offene Umgebung V von $\varphi(P) \in Y$, so dass $f(\varphi(P)) \geq f(Q)$ für alle $Q \in V$.
- (2) Satz 2.15 besagt, dass $\varphi^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von P ist.
- (3) Für alle $\tilde{Q} \in \varphi^{-1}(V)$ gilt dann $(f \circ \varphi)(P) \geq (f \circ \varphi)(\tilde{Q})$. ■

Unser Ziel in den folgenden Kapiteln ist es Methoden kennenlernen, um lokale und globale Extrema von Funktionen explizit zu bestimmen. Wir erinnern dazu erst einmal an folgende Sätze aus der Analysis I.

Satz 10.2. [Fr1, Satz 13.1] *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn f ein lokales Extremum in $x_0 \in I$ annimmt, dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Satz 10.3. [Fr1, Satz 13.6] *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche zweifach differenzierbar ist. Zudem sei $x_0 \in I$.*

bei x_0 liegt ein lokales **Minimum** vor $\implies f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \geq 0$
 bei x_0 liegt ein **striktes** lokales **Minimum** vor $\iff f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.



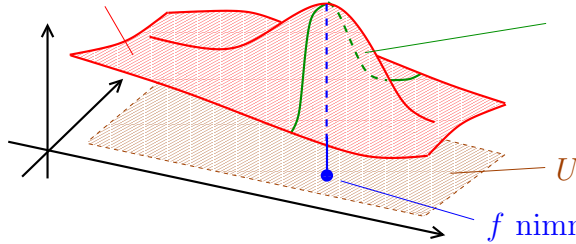
Wir wollen im Folgenden der Frage nachgehen, inwieweit sich Satz 10.2 und Satz 10.3 auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern.

10.2. Lokale Extrema I. Es ist offensichtlich, dass das Differential von $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ (oder äquivalent, der Gradient), die Rolle der 1. Ableitung spielt, und wir erhalten, nicht überraschend, folgenden Satz:

Satz 10.4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Wenn f in $P \in U$ ein lokales Extremum von f annimmt, dann gilt

$$\text{Grad } f(P) = 0.$$

Graph von $f: U \rightarrow \mathbb{R}$



die Funktion $t \mapsto f(P + t \cdot e_2)$ besitzt ein lokales Maximum in $t = 0$, also ist $\frac{\partial f}{\partial x_2} f(P) = \frac{d}{dt} f(P + t \cdot e_2) \Big|_{t=0} = 0$.

f nimmt in P ein lokales Maximum an

Beweis. Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Nachdem U offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $P + t \cdot e_i \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Es folgt:

$$\begin{array}{ccc} \text{per Definition} & & \text{Satz 10.2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) & = & \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\begin{array}{cc} (-\epsilon, \epsilon) & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(P + t \cdot e_i) \end{array}}_{\substack{\text{es folgt aus der Voraussetzung} \\ \text{und Lemma 10.1, dass diese} \\ \text{Funktion bei } t = 0 \text{ ein} \\ \text{lokales Extremum annimmt}}} \right) \Big|_{t=0} & = & 0. \end{array}$$

Wir haben also gezeigt, dass alle partiellen Ableitungen von f am Punkt P verschwinden. Insbesondere haben wir bewiesen, dass $\text{Grad } f(P) = 0$. ■

Die Rolle der 2. Ableitung einer Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ übernimmt im mehrdimensionalen die Hesse-Matrix. Es ist auf den ersten Blick vielleicht nicht offensichtlich, was die Verallgemeinerung von $g''(x) > 0$ sein soll. Der folgende Satz gibt uns eine Idee, wie wir diese Aussage auf den mehr-dimensionalen Fall verallgemeinern können.

Fast der gleiche Beweis wie von Satz 10.4 liefert uns folgende Aussage.

Satz 10.5. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Wenn f am Punkt $P \in U$ ein lokales Minimum annimmt, dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\langle \xi, \text{Hess } f(P) \cdot \xi \rangle \geq 0.$$

Beweis. Es sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Nachdem U offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $P + t \cdot \xi \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Es folgt:

$$\begin{array}{ccc} \text{folgt aus Lemma 9.9} & & \text{Satz 10.3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle \xi, \text{Hess } f(P) \cdot \xi \rangle & = & \frac{d^2}{dt^2} \left(\underbrace{\begin{array}{cc} (-\epsilon, \epsilon) & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(P + t \cdot \xi) \end{array}}_{\text{lokales Minimum bei } t = 0} \right) \Big|_{t=0} & \geq & 0. \end{array}$$

■

Im Hinblick auf Satz 10.5 stellt sich nun die Frage, wie man bei einer symmetrischen Matrix H feststellen kann, dass $\langle \xi, H \cdot \xi \rangle \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir werden dieser Frage im folgenden Exkurs beantworten.

10.3. Exkurs: Definite Bilinearformen. Wir bewegen uns noch einmal in den Bereich der linearen Algebra.

Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine **Bilinearform** ist eine bilineare Abbildung

$$\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Beispiel. Jede Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert eine Bilinearform:

$$\begin{aligned} \Theta_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto v^T \cdot A \cdot w = \langle v, A \cdot w \rangle \end{aligned}$$

Für $A = \text{id}$ ist dies das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Definition. [N1, S. 74] Es sei φ eine Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V .

$$\begin{aligned} \varphi \text{ heißt positiv definit} & \iff \varphi(v, v) > 0 \text{ für alle } v \in V \setminus \{0\} \\ \varphi \text{ heißt positiv semidefinit} & \iff \varphi(v, v) \geq 0 \text{ für alle } v \in V. \end{aligned}$$

Ganz analog definieren wir **negativ definit** und **negativ semidefinit**.

$$\begin{aligned} \varphi \text{ heißt indefinit} & \iff \varphi \text{ ist weder positiv noch negativ semidefinit} \\ & \text{d.h. es gibt } v \in V \text{ mit } \varphi(v, v) < 0 \text{ und } v \in V \text{ mit } \varphi(v, v) > 0. \end{aligned}$$

Beispiel. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reelle Zahlen. Wir betrachten die diagonale Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ dann gilt für } \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \text{ dass } \Theta_D(\xi, \xi) = \xi^T \cdot D \cdot \xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \xi_i^2.$$

Es folgt leicht aus dieser Berechnung:

$$\begin{aligned} \text{die Bilinearform } \Theta_D \text{ ist positiv definit} & \iff \text{alle } \lambda_i \text{ sind } > 0 \\ \text{die Bilinearform } \Theta_D \text{ ist positiv semidefinit} & \iff \text{alle } \lambda_i \text{ sind } \geq 0 \\ \text{die Bilinearform } \Theta_D \text{ ist indefinit} & \iff \text{es gibt positive und negative } \lambda_i. \end{aligned}$$

Definition. Wir sagen zwei Bilinearformen $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ sind **isometrisch**, wenn es einen Isomorphismus $f: V \rightarrow W$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi(v_1, v_2) = \psi(f(v_1), f(v_2)) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Bemerkung.

- (1) Isometrische Bilinearformen haben die gleiche Definitheit. D.h. wenn φ und ψ isometrisch sind, dann ist beispielsweise φ positiv definit genau dann, wenn ψ positiv definit ist.

- (2) Es sei (V, φ) eine Bilinearform auf einem Vektorraum mit Basis $v_1, \dots, v_n$. Man kann nun problemlos zeigen, dass (V, φ) isometrisch ist zu der Form $\Theta_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $A = (\varphi(v_i, v_j))_{i,j=1,\dots,n}$.

Das folgende Lemma beantwortet die Frage, welche Matrizen denn nun isometrische Bilinearformen definieren.

Lemma 10.6. *Es seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann gilt:*

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \atop (v, w) \mapsto v^T A w}_{=\Theta_A} \quad \text{und} \quad \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \atop (v, w) \mapsto v^T B w}_{=\Theta_B} \quad \text{sind isometrisch} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{es gibt ein} \\ P \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \\ \text{mit } A = P^T \cdot B \cdot P. \end{array}$$

Beweis. Es sei $P \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v \mapsto P \cdot v \text{ ist eine Isometrie} &\Longleftrightarrow \Theta_A(v, w) = \Theta_B(Pv, Pw) \text{ f\"ur alle } v, w \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow v^T A w = (Pv)^T B Pw \text{ f\"ur alle } v, w \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow v^T A w = v^T (P^T B P) w \text{ f\"ur alle } v, w \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow e_i^T A e_j = e_i^T (P^T B P) e_j \text{ f\"ur alle } i, j \in \{1, \dots, n\} \\ &\Longleftrightarrow A = P^T B P. \end{aligned}$$

■

Im Folgenden interessieren wir uns, auch im Hinblick auf Satz 10.5 und die obige Bemerkung, nur für Bilinearformen der Form $\Theta_A(v, w) = \langle v, A \cdot w \rangle$. Wir führen dazu folgende Definition ein.

Definition. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix.

$$\begin{aligned} A \text{ heißt positiv definit} &:\Longleftrightarrow \langle v, A \cdot v \rangle > 0 \text{ f\"ur alle } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ A \text{ heißt positiv semidefinit} &:\Longleftrightarrow \langle v, A \cdot v \rangle \geq 0 \text{ f\"ur alle } v \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ganz analog definieren wir negativ definit und negativ semidefinit. Zudem definieren wir:

$$A \text{ heißt indefinit} \quad : \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist weder positiv noch negativ semidefinit.}$$

Der folgende Satz besagt nun, dass man an den Eigenwerten ablesen kann, ob eine symmetrische Matrix A definit oder indefinit ist.

Satz 10.7. *Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\Longleftrightarrow \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv} \\ A \text{ ist positiv semidefinit} &\Longleftrightarrow \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } \geq 0 \\ A \text{ ist negativ definit} &\Longleftrightarrow \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind negativ} \\ A \text{ ist negativ semidefinit} &\Longleftrightarrow \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } \leq 0, \end{aligned}$$

zudem gilt

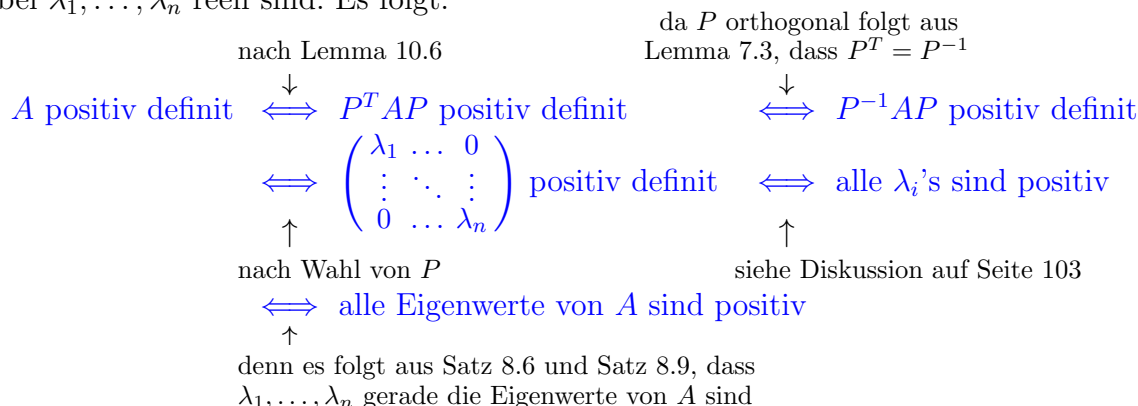
$$A \text{ ist indefinit} \Longleftrightarrow A \text{ besitzt positive und negative Eigenwerte.}$$

Bemerkung. In Übungsblatt 7 werden wir sehen, dass die Aussage von Satz 10.7 im Allgemeinen für nicht-symmetrische Matrizen nicht gilt.

Beweis. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Nach dem Spektralsatz 8.20 gibt es eine orthogonale Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reell sind. Es folgt:



Alle weiteren Aussagen werden ganz analog bewiesen. ■

Der folgende Satz macht die “ $\Leftarrow$ ”-Richtung der ersten beiden Aussagen vom vorherigen Satz noch etwas präziser.

Satz 10.8. *Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Wenn λ der kleinste Eigenwert von A ist, dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:*

$$\langle \xi, A \cdot \xi \rangle \geq \lambda \cdot \|\xi\|^2.$$

Beweis. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Wir betrachten zuerst den Fall, dass A eine diagonale Matrix ist mit diagonalen Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt für alle $\mu \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\langle \mu, A \cdot \mu \rangle = \mu^T A \mu = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\geq \lambda} \cdot \mu_i^2 \geq \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \lambda \cdot \|\mu\|^2.$$

Es sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine beliebige symmetrische Matrix. Der Spektralsatz 8.20 gibt uns eine orthogonale Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gerade die Eigenwerte von A sind. Es sei nun $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \xi, A \cdot \xi \rangle &= \langle \xi, P \cdot \underbrace{(P^{-1}AP)}_{=D} \cdot P^{-1} \cdot \xi \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } P \text{ orthogonal ist} \\ \text{nach Lemma 7.4} \\ \text{auch } P^{-1} \text{ orthogonal}}}}{=} \langle P^{-1} \cdot \xi, D \cdot P^{-1} \cdot \xi \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \lambda \text{ kleinster} \\ \text{Eigenwert von } D}}{\geq} \lambda \cdot \|P^{-1} \cdot \xi\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 7.3}}}{=} \lambda \cdot \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

■

Wir beschließen das Kapitel über Eigenwerte und definite Matrizen mit der Diskussion von 2×2 -Matrizen. Im Folgenden erinnern wir daran, dass die Spur einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ definiert ist als

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Summe der Diagonaleinträge von } A.$$

Folgendes Lemma gibt nun für 2×2 -Matrizen eine einfache Methode, um schnell festzustellen, ob die Matrix definit oder indefinit ist.

Lemma 10.9. *Es sei A eine symmetrische 2×2 -Matrix. Dann gilt*

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\iff \det(A) > 0 \text{ und } \operatorname{tr}(A) > 0, \\ A \text{ ist negativ definit} &\iff \det(A) > 0 \text{ und } \operatorname{tr}(A) < 0, \\ A \text{ ist indefinit} &\iff \det(A) < 0. \end{aligned}$$

Beweis. Nachdem A symmetrisch ist gibt es nach dem Spektralsatz 8.20 eine orthogonale Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

eine diagonale Matrix ist. Aus Lemma 8.2 wissen wir, dass

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

und

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A).$$

Da P orthogonal ist, folgt aus Lemma 7.3, dass $P^{-1} = P^T$. Also folgt aus Lemma 10.6:

$$\underbrace{P^{-1}AP}_{=P^T A P} \text{ ist positiv definit} \iff A \text{ ist positiv definit.}$$

Es genügt also das Lemma für diagonale 2×2 -Matrizen zu beweisen. Aber für solche Matrizen folgt die Aussage aus einer elementaren Fallunterscheidung, je nach Vorzeichen von λ und μ . ■

10.4. Lokale Extrema II. Nach dem kurzen Ausflug in die Lineare Algebra kehren wir jetzt gestärkt zur Analysis zurück. Wir wollen also jetzt unsere Analysis-Fähigkeiten und unsere erworbenen Kenntnisse aus der linearen Algebra kombinieren.

Wir führen erst einmal folgende Definition ein.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Wir sagen $P \in U$ ist ein kritischer Punkt von f , wenn $\operatorname{Grad} f(P) = 0$.

Mit dieser Definition können wir Satz 10.4 noch einmal etwas anders formulieren.

Satz 10.4. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Wenn f in $P \in U$ ein lokales Extremum von f annimmt, dann ist P ein kritischer Punkt von f , d.h. es ist $\operatorname{Grad} f(P) = 0$.*

Mit der Sprache vom vorherigen Teilkapitel können wir jetzt zudem die Aussage von Satz 10.5 wie folgt formulieren.

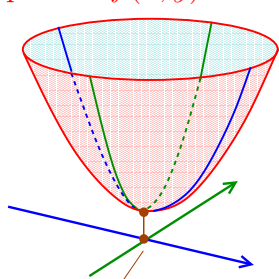
Satz 10.10. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Für $P \in U$ gilt:

f hat im Punkt P ein lokales **Minimum** $\implies$ Hess $f(P)$ ist **positiv semidefinit**
 f hat im Punkt P ein lokales **Maximum** $\implies$ Hess $f(P)$ ist **negativ semidefinit**.

Insbesondere gilt

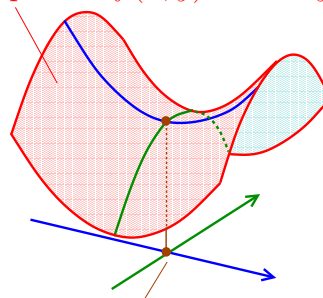
Hess $f(P)$ indefinit $\implies f$ nimmt im Punkt P weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum an.

Graph von $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$



Hess $f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit

Graph von $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3$



Hess $f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit

Beweis. Die erste Aussage ist genau die Aussage von Satz 10.5. Die zweite Aussage wird ganz analog zur ersten Aussage bewiesen. Die letzte Aussage folgt sofort aus den ersten beiden Aussagen. ■

Der folgende Satz gibt die deutlich interessantere Aussage, dass man mithilfe der Hesse-Matrix zeigen kann, dass ein striktes lokales Extremum vorliegt.

Satz 10.11. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in U$ ein kritischer Punkt, d.h. ein Punkt mit $\text{Grad } f(P) = 0$. Dann gilt:

Hess $f(P)$ ist **positiv definit** $\implies$ bei P liegt ein **striktes lokales Minimum** vor
Hess $f(P)$ ist **negativ definit** $\implies$ bei P liegt ein **striktes lokales Maximum** vor.

Bemerkung.

- (1) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Aus dem Satz 5.1 von Schwarz folgt, dass Hesse-Matrizen symmetrisch sind. Wir können also mithilfe von Satz 8.9 und Satz 10.7 leicht überprüfen, ob eine Hesse-Matrix positiv (semi-) definit ist.
- (2) Die Kombination aus Satz 10.11 und 10.10 gibt uns nun die ersehnte Verallgemeinerung von Satz 10.3 zum mehrdimensionalen Fall.

Beispiel. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 + a \cdot x \cdot y. \end{aligned}$$

Wir wollen alle lokalen und globalen Minima bestimmen. Wir machen uns also auf die Suche nach kritischen Punkten:

$$\underbrace{\text{Grad } f(x, y)}_{=(2x+a \cdot y, 2y+a \cdot x)} = (0, 0) \iff \begin{cases} 2 \cdot x + a \cdot y = 0 \\ 2 \cdot y + a \cdot x = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{\text{wenn } a \neq \pm 2, \\ \text{dann ist } \det \neq 0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- ($a = +2$) Wenn $a = 2$, dann ist $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$. Die kritischen Punkte sind genau die Punkte der Form $(t, -t)$. An diesen Punkten ist $f = 0$, und an allen anderen Punkten gilt $f > 0$. Wir sehen also, dass f an jedem Punkt der Form $(t, -t)$ ein lokales (aber nicht striktes) Minimum annimmt.
- ($a = -2$) Wenn $a = -2$, dann ist $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$. Wir sehen also, dass f an jedem Punkt der Form (t, t) ein lokales (aber nicht striktes) Minimum annimmt.
- ($a \neq \pm 2$) Wenn $a \neq \pm 2$, dann ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt. Wir berechnen

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $\text{tr}(\text{Hess } f(0, 0)) = 4 > 0$ und da $\det(\text{Hess } f(0, 0)) = 4 - a^2$ folgt aus Lemma 10.9 und Satz 10.10 und Satz 10.11, dass gilt:

$$\begin{aligned} |a| < 2 &\iff \text{Hess } f(0, 0) \text{ ist positiv definit} &\iff f \text{ hat lokales Minimum in } (0, 0) \\ |a| > 2 &\iff \text{Hess } f(0, 0) \text{ ist indefinit} &\iff f \text{ besitzt kein lokales Minimum.} \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage. Die zweite wird natürlich ganz analog bewiesen. Wir betrachten also den Fall, dass $\text{Grad } f(P) = 0$, und dass $H := \text{Hess } f(P)$ positiv definit ist. Wir müssen folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$f(P + \xi) > f(P) \quad \text{für alle } \xi \in B_\delta(0) \setminus \{0\}.$$

Es sei nun λ der kleinste Eigenwert von H . Nachdem H positiv definit ist, folgt aus Satz 10.7, dass $\lambda > 0$. Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt nun:

$$\begin{aligned} f(P + \xi) &= f(P) + \underbrace{\langle \text{Grad } f(P), \xi \rangle}_{=0 \text{ nach Voraussetzung}} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\langle \xi, H \cdot \xi \rangle}_{\geq \lambda \cdot \|\xi\|^2, \text{ nach Satz 10.8}} + \varphi(\xi), \quad \text{wobei } \varphi(\xi) = o(\|\xi\|^2). \\ \uparrow & \\ \text{folgt aus dem Satz 9.5} & \\ \text{von Taylor zusammen} & \\ \text{mit Lemma 9.8} & \end{aligned}$$

Nachdem $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|^2)$ gibt es insbesondere ein $\delta > 0$, so dass

$$|\varphi(\xi)| \leq \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot \|\xi\|^2 \quad \text{für alle } \xi \text{ mit } \|\xi\| < \delta.$$

Dann folgt für alle $\xi \neq 0 \in B_\delta(P)$, dass

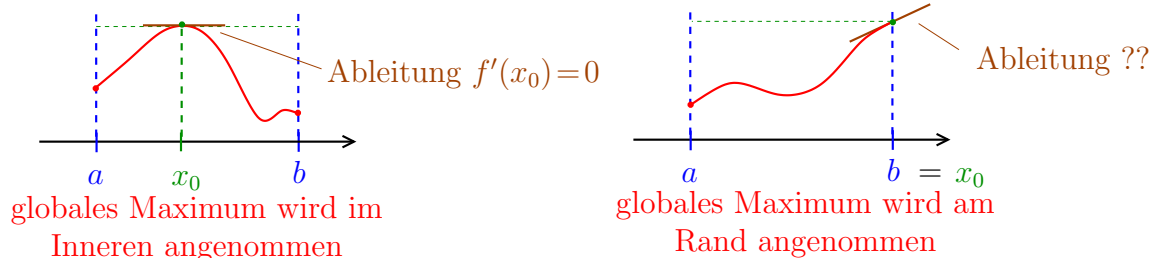
$$f(P+\xi) \geq f(P) + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \|\xi\|^2 + \varphi(\xi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn aus } \|\xi\| < \delta \\ \text{folgt } \varphi(\xi) \geq -\frac{1}{4}\lambda \cdot \|\xi\|^2}}{\geq} f(P) + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \|\xi\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot \|\xi\|^2 = f(P) + \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot \|\xi\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \xi \neq 0 \text{ und } \lambda > 0}}{\geq} f(P).$$

Wir haben also gezeigt, dass f im Punkt P ein striktes lokales Minimum annimmt. ■

11. GLOBALE EXTREMA

11.1. Das Innere und der Rand. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Nach [Fr1, Satz 8.2], beziehungsweise Korollar 3.10, nimmt f ein globales Maximum an einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ an. Es gibt zwei Möglichkeiten:

- (1) Der Punkt x_0 liegt im Inneren des Intervalls. Wenn f auf (a, b) differenzierbar ist, dann folgt aus Satz 10.2, dass $f'(x_0) = 0$.
- (2) Der Punkt x_0 ist einer der Randpunkte des Intervalls.



Diese Beobachtung führt uns zu folgendem Algorithmus.

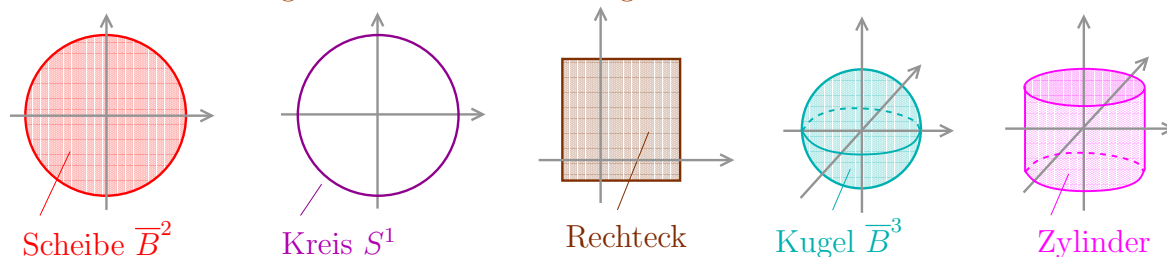
Algorithmus 11.1. (Bestimmung von globalen Maxima) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall. Wir nehmen an, dass f auf (a, b) differenzierbar ist.

- (1) Wir bestimmen alle kritischen Punkte von f , d.h. alle Punkte in (a, b) an denen die Ableitung verschwindet und wir berechnen die zugehörigen Funktionswerte.
- (2) Wir berechnen f an den Randpunkten des Intervalls.

Das globale Maximum von f auf $[a, b]$ ist dann das Maximum der Funktionswerte, welche wir in (1) und (2) berechnet haben.

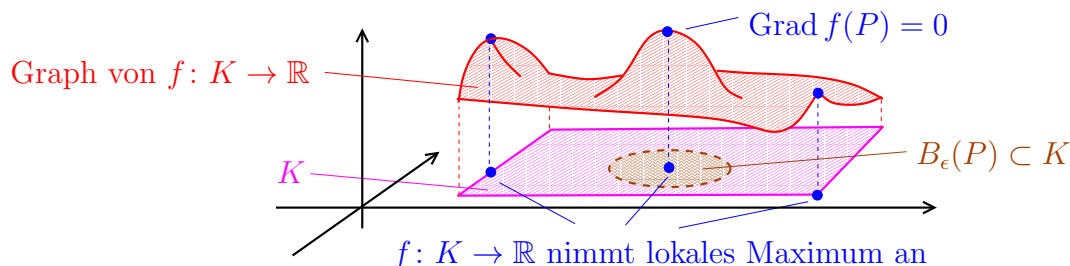
In diesem Kapitel wollen wir uns überlegen, wie wir diesen Algorithmus verallgemeinern können, um für Funktionen auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ das globale Maximum zu bestimmen.

wie kann man das globale Maximum bei folgenden Definitionsbereichen bestimmen?



Wir beginnen unsere Diskussion des mehrdimensionalen Falls mit folgendem Lemma.

Lemma 11.2. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und es sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $P \in K$ ein lokales Extremum annimmt, und wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(P) \subset K$ und so dass f auf $B_\epsilon(P)$ differenzierbar ist, dann gilt $\text{Grad } f(P) = 0$.

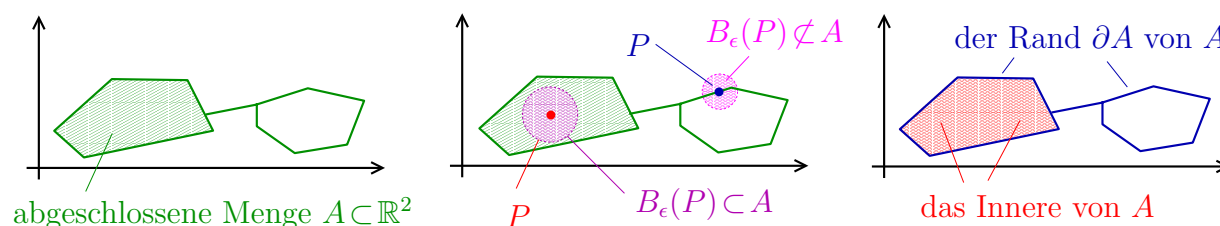


Beweis. Es folgt aus Lemma 1.5, dass $B_\epsilon(P)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Es folgt also aus Satz 10.4, angewandt auf die Einschränkung $f: B_\epsilon(P) \rightarrow \mathbb{R}$, dass $\text{Grad } f(P) = 0$. ■

Lemma 11.2 motiviert nun folgende Definition.

Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge.

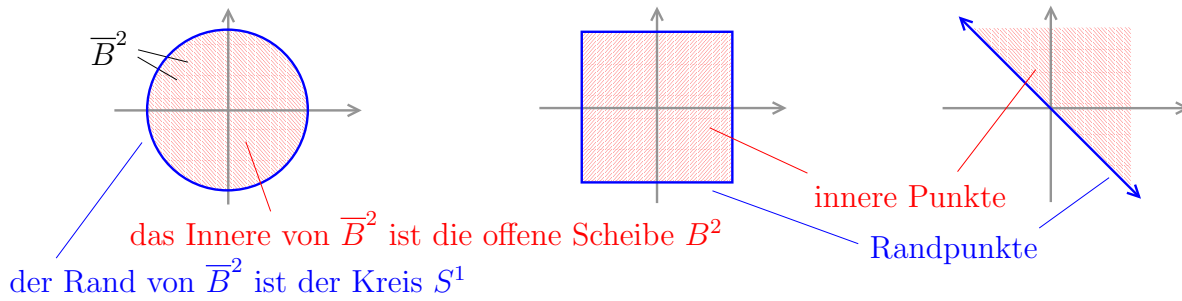
- (1) Wir sagen, $P \in A$ ist ein innerer Punkt von A , wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(P) \subset A$. Andernfalls sagen wir, dass P ein Randpunkt von A ist.
- (2) Die Menge der inneren Punkte bezeichnen wir als das Innere von A , und die Menge der Randpunkte bezeichnen wir als den Rand ∂A von A .



Beispiel. In der folgenden Tabelle bestimmen wir das Innere und den Rand von mehreren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Teilmenge A von $\mathbb{R}$	das Innere von A	der Rand von A
$[a, b]$	(a, b)	$\{a, b\}$
$[a, \infty)$	(a, ∞)	$\{a\}$
Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$	das Innere von A	der Rand von A
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$	$\emptyset$
$\overline{B}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \ v\ \leq 1\}$	$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ v\ < 1\}$	$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ v\ = 1\}$
$S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \ v\ = 1\}$	$\emptyset$	S^{n-1}

In der Abbildung sehen wir zudem für drei verschiedene abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ das Innere und den Rand.



Es sei nun $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Korollar 3.10 besagt, dass f ein globales Maximum besitzt. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

- (1) Das globale Maximum wird an einem Punkt P im Inneren angenommen, oder
- (2) das globale Maximum wird an einem Punkt P am Rand angenommen.

Im ersten Fall können wir dieses P mithilfe von Lemma 11.2 und etwas Glück aufspüren. Für den zweiten Fall benötigen wir einen neuen Gedanken. Wir betrachten dazu erst einmal ein Beispiel.

Beispiel. Wir wollen das globale Maximum der Funktion

$$\begin{aligned} f: \overline{B}^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

bestimmen.

- (1) Nachdem $\text{Grad } f(x, y) = (1, 1)$ immer ungleich null ist, besitzt f im Inneren von $\overline{B}^2$ keine kritischen Punkte.
- (2) Das globale Maximum von f wird also auf dem Rand

$$\partial \overline{B}^2 = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

angenommen. Um das Maximum dort zu finden betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} p: [0, 2\pi] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, also gilt:

$$\text{maximaler Wert von } f \text{ auf } S^1 = \text{maximaler Wert von } f \circ p \text{ auf } [0, 2\pi].$$

Es genügt also das globale Maximum der Funktion

$$\begin{aligned} f \circ p: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (f \circ p)(t) = \cos(t) + \sin(t) \end{aligned}$$

zu bestimmen. Mithilfe von Algorithmus 11.1 kann man problemlos zeigen, dass das globale Maximum dieser Funktion $\sqrt{2}$ beträgt.

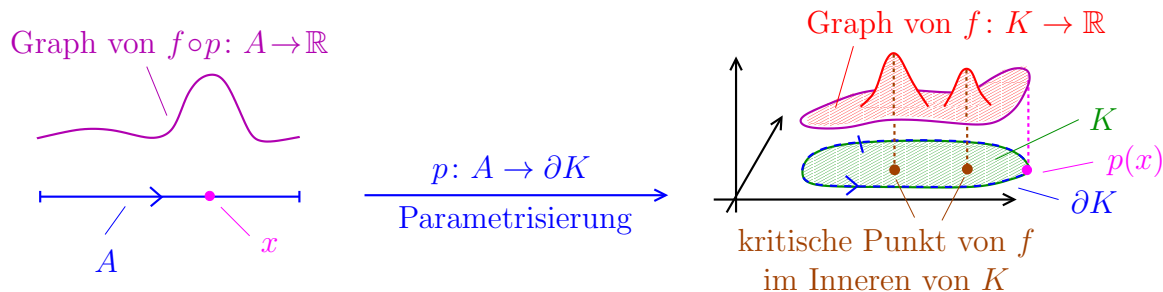
Wir haben also gezeigt, dass das globale Maximum von $f: \overline{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $\sqrt{2}$.

Der folgende Algorithmus – welcher nicht unbedingt immer anwendbar ist – verallgemeinert jetzt den obigen Lösungsansatz.

Algorithmus 11.3. (Bestimmung von globalen Maxima II) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf dem Inneren von K differenzierbar ist.

- (1) Wir bestimmen alle kritischen Punkte von f im Inneren von K und berechnen die zugehörigen Funktionswerte.
- (2) Wir wählen eine geeignete surjektive Abbildung $p: A \rightarrow \partial K$ (genannt “Parametrisierung”) und bestimmen das globale Maximum von $f \circ p: A \rightarrow \mathbb{R}$. (Beispielsweise kann es hilfreich sein, wenn A ein Intervall oder ein Rechteck ist.)

Das globale Maximum von $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann das Maximum der Funktionswerte, welche wir in (1) und (2) berechnet haben.



Beweis. Es folgt aus Korollar 3.10, dass $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ das globale Maximum an einem Punkt P annimmt.

- (i) Wenn P im Inneren von K liegt, dann folgt aus Lemma 11.2, dass wir mit (1) den Punkt P finden.
- (ii) Wir nehmen nun an, dass P am Rand von K liegt. Da $p: A \rightarrow \partial K$ surjektiv ist, ist $f(P)$ nun auch der maximale Funktionswert von $f \circ p: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dieses haben wir in (2) bestimmt.

In beiden Fällen haben wir also den maximalen Funktionswert bestimmt. ■

Beispiel. Es seien $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2$ und es sei

$$f: \underbrace{K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]}_{= \{(x,y) \mid x \in [a_1, a_2] \text{ und } y \in [b_1, b_2]\}} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, welche im Inneren des Rechtecks K differenzierbar ist. Eine leichte Verallgemeinerung von Algorithmus 11.3 schlägt nun folgendes Verfahren vor um das globale Maximum von f zu finden:

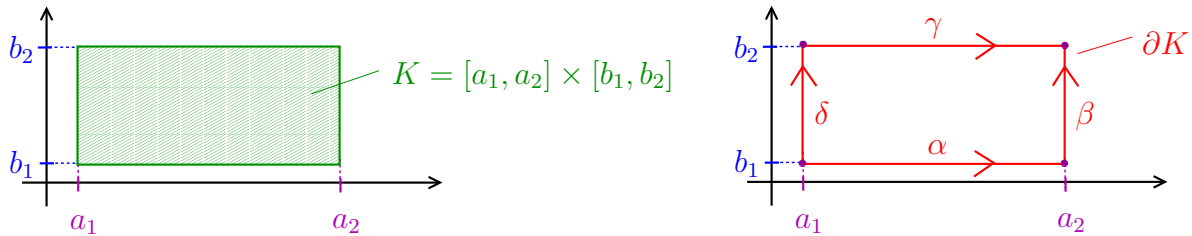
- (1) Wir finden alle kritischen Punkte von f im offenen Rechteck $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ und berechnen die zugehörigen Funktionswerte.

- (2) Wir verwenden insgesamt vier Parametrisierungen um den Rand des Rechtecks abzudecken:

$$\begin{array}{llll} [a_1, a_2] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2 & [b_1, b_2] \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}^2 & [a_1, a_2] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 & [b_1, b_2] \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, b_1), & t \mapsto (a_2, t), & t \mapsto (t, b_2), & t \mapsto (a_1, t). \end{array}$$

Wir bestimmen jeweils das globale Maximum der Verknüpfung der Parametrisierung mit der Funktion f .

Wir nehmen dann wieder das Maximum aller Werte, welche wir in (1) und (2) bestimmt haben, und erhalten den maximalen Funktionswert von f .



Um Algorithmus 11.3 auf interessantere Beispiele anzuwenden, müssen wir Kreise, Scheiben, Kugeln und Sphären sowie Zylinder (-Oberflächen) parametrisieren. Wir werden im folgenden Teilkapitel verschiedene wichtige Abbildungen kennenlernen, welche, manchmal mit gewissen Abwandlungen, verwendet werden können um diese Objekte zu parametrisieren.

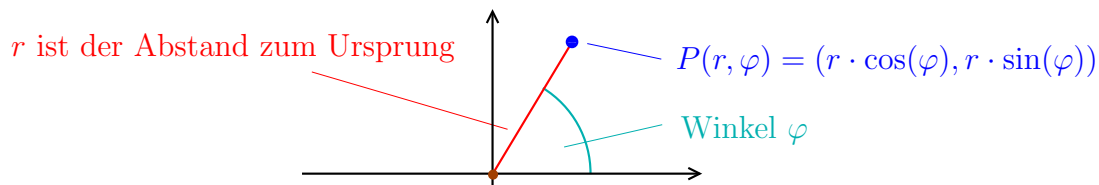
11.2. Polarkoordinaten, zylindrische Koordinaten und sphärische Koordinaten.

Wir führen in diesem Teilkapitel die Polarkoordinaten, zylindrische Koordinaten und sphärische Koordinaten ein. Diese sind ganz allgemein – auch losgelöst von der jetzigen Diskussion – wichtig. Im darauffolgenden Teilkapitel werden wir dann sehen, wie wir diese verwenden können um Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ zu parametrisieren.

11.2.1. Polarkoordinaten.

Notation. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} P: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Bemerkung. Der Satz über die Polarkoordinatendarstellung [Fr1, Satz 11.11] besagt, dass die Abbildung $P: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ surjektiv ist, und dass für $r, r' > 0$ und $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$

gilt, dass

$$P(r, \varphi) = P(r', \varphi') \iff r = r' \text{ und } \varphi = \varphi' + 2\pi \cdot k \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}.$$

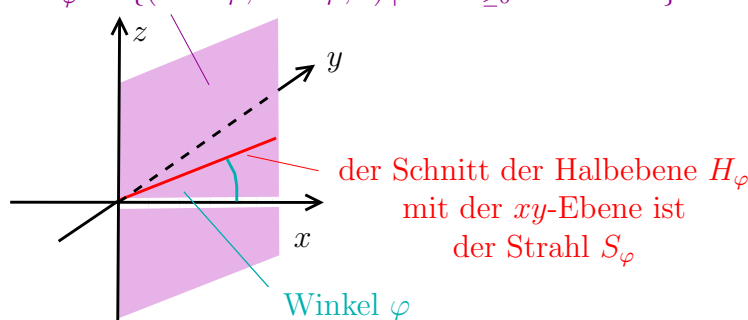
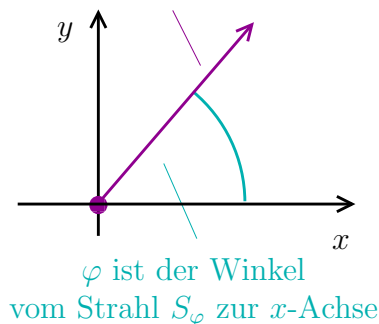
Definition. Wenn $(x, y) = P(r, \varphi)$, dann bezeichnen wir r und φ als Polarkoordinaten von (x, y) . Die Diskussion oben zeigt, dass für einen Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ die Polarkoordinaten (r, φ) , bis auf Addition von einem Vielfachen von 2π zu φ , eindeutig bestimmt sind.

11.2.2. *Zylindrische Koordinaten.* Bevor wir die Zylinderkoordinaten und die sphärischen Koordinaten betrachten, führen wir noch eine Definitionen ein, welche uns in der Beschreibung der verschiedenen Koordinaten behilflich sein werden.

Notation. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ schreiben wir:

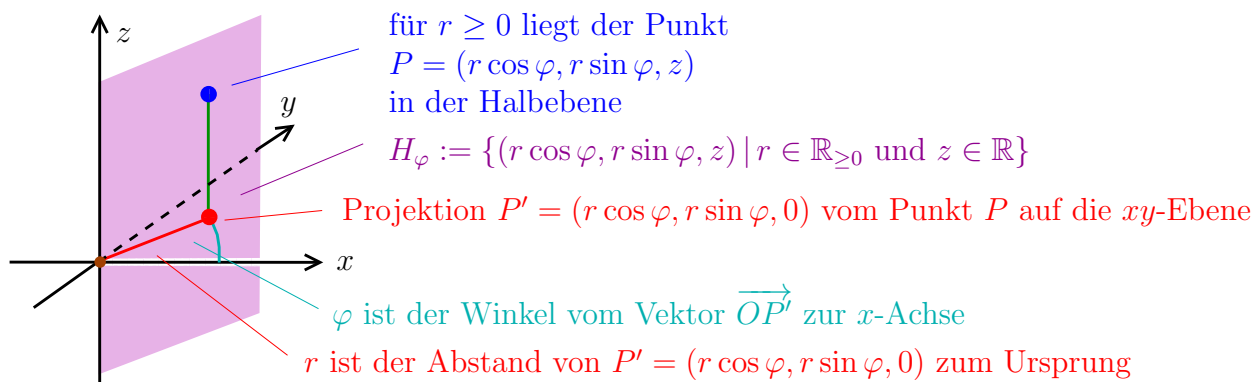
$$\begin{aligned} \text{Strahl} \quad S_\varphi &:= \{(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \mid r \geq 0\} \\ \text{Halbebene} \quad H_\varphi &:= \{(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), z) \mid r \geq 0 \text{ und } z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$$S_\varphi := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \quad H_\varphi := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } z \in \mathbb{R}\}$$



Notation. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} Z: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, z) &\mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Bemerkung. Aus der obigen Diskussion von Polarkoordinaten folgt, dass die Abbildung $Z: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ surjektiv ist. Zudem folgt, dass für $r, r' > 0$, $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ und $z, z' \in \mathbb{R}$ gilt

$$Z(r, \varphi, z) = Z(r', \varphi', z') \iff r = r', z = z' \text{ und } \varphi = \varphi' + 2\pi \cdot k \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}.$$

Definition. Es sei $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wenn $P = Z(r, \varphi, z)$, dann bezeichnen wir (r, φ, z) als **Zylinderkoordinaten** von P . Die obige Bemerkung besagt, dass für einen Punkt (x, y, z) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ die Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , bis auf Addition von einem Vielfachen von 2π zu φ , eindeutig bestimmt sind.

11.2.3. *Sphärische Koordinaten.* Zuletzt führen wir noch die sphärischen Koordinaten ein.

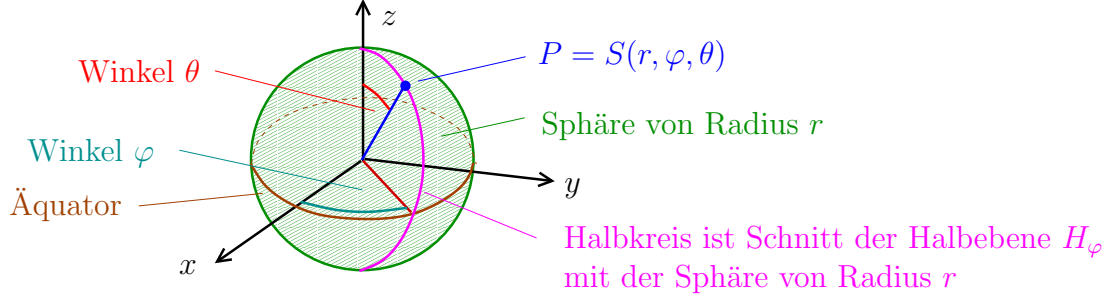
Notation. Wir betrachten die Abbildung

$$S: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Lemma 11.4.

- (1) Der Punkt $P = S(r, \varphi, \theta)$ hat Abstand r vom Ursprung.
- (2) Für $r \geq 0$ und $\theta \in [0, \pi]$ liegt der Punkt $P := S(r, \varphi, \theta)$ in der Halbebene H_φ .
- (3) Für $\theta \in [0, \pi]$ beträgt der Winkel vom Vektor $\overrightarrow{OP}$ zur positiven z -Achse gerade θ .



Lemma. 11.4.

- (4) Für ein fest gewähltes $r > 0$ ist die Abbildung

$$S: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung der 2-dimensionalen Sphäre mit Radius r .

Beweis. Es seien $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$.

- (1) Es folgt aus einer leicht heroischen Rechnung, unter Verwendung von $\cos^2 + \sin^2 = 1$, dass $\|S(r, \varphi, \theta)\| = r$.

(2) Es ist

$$\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \in H_\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} s \cdot \cos(\varphi) \\ s \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) Es ist

$$\angle(S(r, \varphi, \theta), e_3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Definition auf Seite 70}}}{=} \arccos\left(\frac{\langle S(r, \varphi, \theta), e_3 \rangle}{\|S(r, \varphi, \theta)\| \cdot \|e_3\|}\right) = \arccos\left(\frac{r \cos(\theta) \cdot 1}{r \cdot 1}\right) = \theta.$$

(4) Diese Aussage kann mit etwas Nachdenken auf den Satz über die Polarkoordinatendarstellung sowie den Zwischenwertsatz der Analysis I zurückgeführt werden. ■

Definition. Es sei $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wenn $P = S(r, \varphi, \theta)$, dann bezeichnen wir (r, φ, θ) als **sphärische Koordinaten** (oder auch **Kugelkoordinaten**) von $P = (x, y, z)$.

Bemerkung. Wenn $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt ist, welcher nicht auf der z -Achse liegt, d.h. wenn $(x, y) \neq (0, 0)$, dann kann man sich leicht davon überzeugen, dass für $r, r' > 0$, $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ und $\theta, \theta' \in (0, \pi)$ gilt

$$S(r, \varphi, \theta) = S(r', \varphi', \theta') \iff r = r', \theta = \theta' \text{ und } \varphi = \varphi' + 2\pi \cdot k \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}.$$

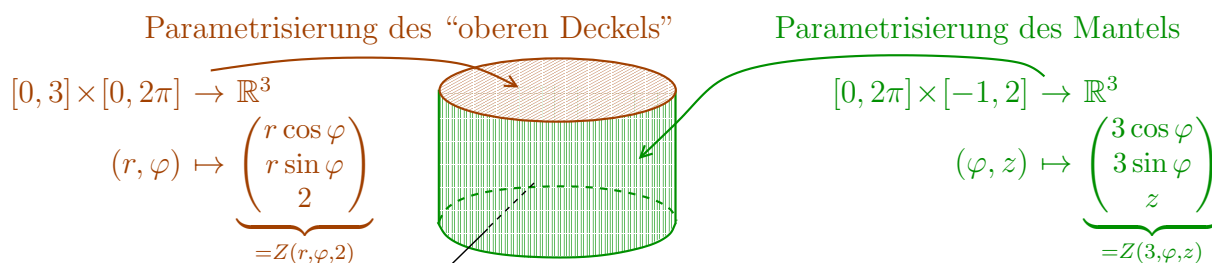
Anders ausgedrückt, für einen Punkt (x, y, z) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ sind die sphärischen Koordinaten (r, φ, θ) mit $\theta \in (0, \pi)$, bis auf Addition von einem Vielfachen von 2π zu φ , eindeutig bestimmt.

11.3. Parametrisierungen. Mit den Abbildungen des vorherigen Teilkapitels kann man nun verschiedene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ elegant parametrisieren. Wir führen das nur an zwei Beispielen aus.

(1) Wir betrachten den Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9 \text{ und } z \in [-1, 2]\}.$$

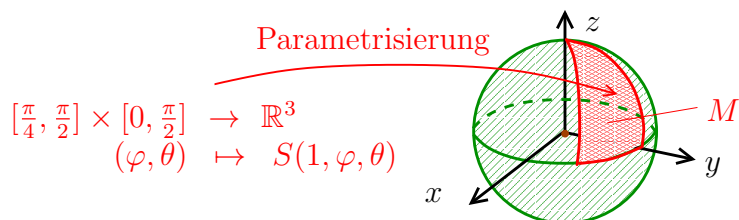
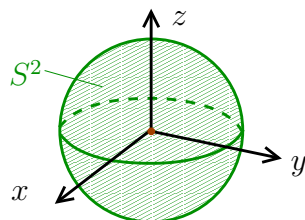
Wir geben eine Parametrisierung des “oberen Deckels” und der “Mantelfläche”.



Zylinder mit Radius 3 und z -Koordinate zwischen $z = -1$ und $z = 2$

(2) Wir betrachten

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } x \geq 0, y \geq x, z \geq 0\}.$$



12. DIE NORM VON MATRIZEN UND ABSCHÄTZUNGEN VON FUNKTIONSWERTEN

Folgender Satz ist ein Korollar zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus der Analysis I, siehe [Fr1, Satz 13.2].

Satz 12.1. (Schränkensatz) Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall I . Wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in I$, dann gilt für beliebige $s, t \in I$, dass

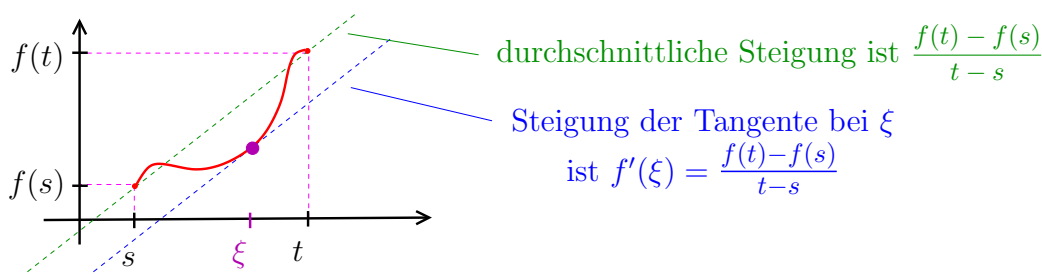
$$|f(s) - f(t)| \leq C \cdot |s - t|.$$

Beweis. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall I mit der Eigenschaft, dass $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in I$. Es seien zudem $s, t \in I$. Wenn $s = t$, dann ist die gewünschte Ungleichung trivialerweise erfüllt. Wir nehmen also an, dass $s \neq t$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein ξ zwischen s und t , so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(s) - f(t)}{s - t}.$$

Es folgt, dass

$$|f(s) - f(t)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq C} \cdot |s - t|.$$



Anders ausgedrückt, Satz 12.1 besagt, dass wenn wir eine Schranke für den Absolutbetrag der Ableitung besitzen, dann können wir den Abstand zwischen Funktionswerten abschätzen.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist eine analoge Aussage für differenzierbare Abbildungen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ zu finden. Diese Verallgemeinerung wird dann im weiteren Verlauf der Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen.

Definition. Für eine stetige Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$\int_a^b f(t) dt := \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_m(t) dt \right) \in \mathbb{R}^m$$

d.h. wir integrieren die Abbildung f komponentenweise.

Wir erinnern an folgendes Lemma.

Lemma. 4.3. Für jede stetige Abbildung $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\left\| \int_a^b v(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\| dt \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir geben hier einen zweiten Beweis des Lemmas. Der erste Beweis auf Seite 45 war direkt, der Beweis den wir jetzt geben ist sehr elegant, aber fällt etwas vom Himmel. Wir setzen

$$u := \int_a^b v(t) dt \in \mathbb{R}^m.$$

Wenn $\|u\| = 0$, dann gibt es nichts zu zeigen. Wir können also annehmen, dass $\|u\| > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u\| \cdot \left\| \int_a^b v(t) dt \right\| &= \|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \left\langle u, \int_a^b v(t) dt \right\rangle \\ &= \left\langle (u_1, \dots, u_m), \left(\int_a^b v_1(t) dt, \dots, \int_a^b v_m(t) dt \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m u_i \cdot \int_a^b v_i(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m u_i \cdot v_i(t) dt \\ &= \int_a^b \langle u, v(t) \rangle dt \leq \int_a^b \|u\| \cdot \|v(t)\| dt = \|u\| \cdot \int_a^b \|v(t)\| dt. \end{aligned}$$

die Cauchy-Ungleichung besagt, dass für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Das Lemma folgt nun indem wir durch $\|u\|$ kürzen. ■

Wir können jetzt die Verallgemeinerung des Schrankensatz 12.1 formulieren und beweisen. Die Rolle der Ableitung spielt dabei natürlich das Differential, und anstatt dem Absolutbetrag der Ableitung betrachten wir die Norm des Differentials. Wir erinnern an folgende Definition von Seite 62.

Definition. Die Norm einer reellen $m \times n$ -Matrix A ist definiert als

$$\|A\| := \max \{ \|A \cdot v\| \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \}.$$

Wir können jetzt das einzige echte Ergebnis von diesem kurzen Kapitel formulieren und beweisen.

Satz 12.2. (Schranksatz) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so dass $x + t \cdot v \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Wir setzen*

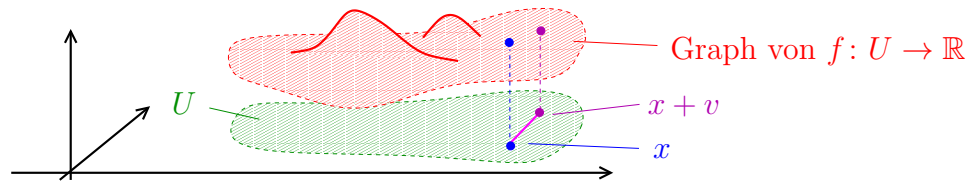
$$C := \sup_{t \in [0, 1]} \|Df(x + t \cdot v)\|.$$

Dann gilt

$$\|f(x + v) - f(x)\| \leq C \cdot \|v\|.$$

Beweis. Für eine stetige Abbildung $f: [a, b] \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$ definieren wir das Integral

$$\int_a^b f(t) dt \in M(m \times n, \mathbb{R})$$



indem wir jeden Matrixeintrag separat integrieren. Mit dieser Definition können wir nun folgende Behauptung aufstellen.

Behauptung. Es gilt:

$$f(x+v) - f(x) = \underbrace{\left(\int_0^1 Df(x+t \cdot v) dt \right)}_{m \times n\text{-Matrix}} \cdot v \in \mathbb{R}^m.$$

Es genügt die Aussage für die m verschiedenen Koordinaten zu beweisen. Es sei also $i \in \{1, \dots, m\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 f_i(x+v) - f_i(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f_i(x+t \cdot v) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+t \cdot v) \cdot v_j dt = \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+t \cdot v) dt \cdot v_j \\
 &\quad \uparrow \text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit } g(t) = f_i(x+t \cdot v) \quad \uparrow \text{Satz 7.6} \quad \uparrow \text{Linearität des Integrals} \\
 &= i\text{-te Koordinate von } \underbrace{\left(\int_0^1 Df(x+t \cdot v) dt \right)}_{m \times n\text{-Matrix}} \cdot v.
 \end{aligned}$$

□

Mithilfe der Behauptung können wir jetzt die eigentliche Aussage des Satzes beweisen:

$$\begin{aligned}
 \|f(x+v) - f(x)\| &\stackrel{\text{folgt aus der Behauptung}}{\downarrow} \left\| \left(\int_0^1 Df(x+t \cdot v) dt \right) \cdot v \right\| \stackrel{\text{folgt aus der Linearität des Integrals}}{\downarrow} \left\| \int_0^1 Df(x+t \cdot v) \cdot v dt \right\| \\
 &\leq \int_0^1 \|Df(x+t \cdot v) \cdot v\| dt \leq \int_0^1 \underbrace{\|Df(x+t \cdot v)\| \cdot \|v\|}_{\leq C} dt \leq \int_0^1 C \cdot \|v\| dt = C \cdot \|v\|. \\
 &\quad \uparrow \text{nach Lemma 4.3} \quad \quad \quad \uparrow \text{nach Lemma 6.12 (2) gilt } \|A \cdot v\| \leq \|A\| \cdot \|v\|
 \end{aligned}$$

■

13. BANACHRÄUME UND DER BANACHSCHE FIXPUNKTSATZ

In diesem Kapitel formulieren und beweisen wir den Banachschen Fixpunktsatz. Auf den ersten Blick hat dieser wenig Bezug zu dem eigentlichen Ziel dieser Vorlesung, nämlich dem Studium von Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wir werden aber später sehen, dass der Banachsche Fixpunktsatz eine essentielle Rolle im Beweis von zwei sehr wichtigen Aussagen spielt.

13.1. Banachräume. Wir erinnern an folgende Definition von Seite 5.

Definition. Ein **normierter Vektorraum** ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ und einer **Norm auf V** , d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ v &\mapsto \|v\| \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- | | | |
|-----|---|------------------------|
| (1) | $\ v\ = 0 \iff v = 0$ | (positive Definitheit) |
| (2) | $\ \lambda \cdot v\ = \lambda \cdot \ v\ $ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ | (Homogenität) |
| (3) | $\ v + w\ \leq \ v\ + \ w\ $ für alle $v, w \in V$ | (Dreiecksungleichung). |

Beispiel. In Lemma 1.1 hatten wir gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x_1, \dots, x_n) = x &\mapsto \|x\| := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad (\text{Euklidische Norm}) \end{aligned}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Notation. Für eine nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$C(A, \mathbb{R}^m) := \text{Vektorraum aller stetigen Abbildungen } A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

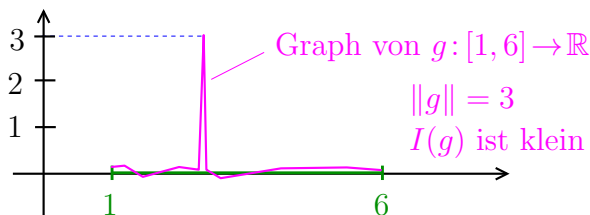
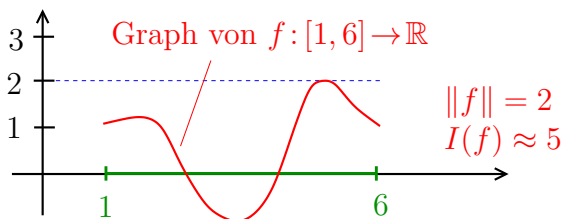
Wenn A ein kompaktes Intervall ist, dann können wir auf diesen Vektorräumen zwei interessante Normen einführen.

Definition. Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Für $f \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$ definieren wir:

$$\text{Supremumsnorm} \quad \|f\| := \sup \{ \|f(x)\| \mid x \in [a, b] \}$$

$$\text{Integralnorm} \quad I(f) := \int_a^b \|f(x)\| dx$$

Lemma 13.1. Sowohl die Supremumsnorm als auch die Integralnorm sind in der Tat Normen auf dem Vektorraum $C([a, b], \mathbb{R}^m)$.



Beweis. Die Supremumsnorm hatten wir schon auf Seite 7 behandelt. Mithilfe der Eigenschaften des Integrals kann man auch problemlos nachweisen, dass die Integralnorm in der Tat eine Norm ist. ■

Es sei $(V, \| - \|)$ ein normierter Vektorraum. Nach Satz 1.3 definiert $d(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V . Wir erhalten also den Begriff von Konvergenz von Folgen, sowie den Begriff von Cauchy-Folgen. Wir schreiben im Folgenden die Definitionen von Seite 16 und 18 in unserem Kontext noch einmal auf.

Definition. Es sei $(V, \| - \|)$ ein normierter Vektorraum, es sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V und es sei $v \in V$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v & \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|v_n - v\| < \epsilon \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge} & \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \|v_m - v_n\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Beispiel. Wir betrachten den Vektorraum $C([0, 1], \mathbb{R})$ und die Folge von Funktionen

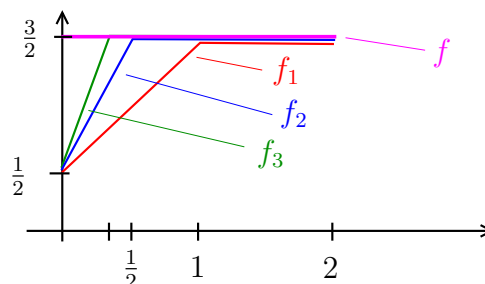
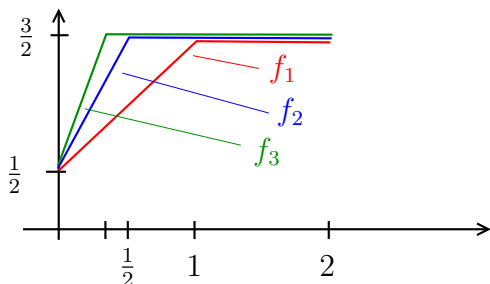
$$\begin{aligned} f_n: [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} + n \cdot x, & \text{wenn } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ \frac{3}{2}, & \text{wenn } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind alle stetig, also definieren diese Funktionen eine Folge von Elementen des Vektorraums $C([0, 1], \mathbb{R})$. Es sei zudem f die konstante Funktion $f(x) = \frac{3}{2}$.

- (1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\|f_n - f\| = 1$.
- (2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $I(f_n - f) = \frac{1}{2n}$.

Es folgt:

- (1) Im normierten Vektorraum $(C([0, 1], \mathbb{R}), \| - \|)$ **konvergiert** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **nicht** gegen f .
- (2) Im normierten Vektorraum $(C([0, 1], \mathbb{R}), I)$ **konvergiert** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f .



Definition. Ein normierter Vektorraum $(V, \| - \|)$ heißt **Banachraum**, wenn der zugehörige metrische Raum vollständig ist, d.h. wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiel.

- (1) In Lemma 2.6 hatten wir gesehen, dass der normierte Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \| - \|_{\text{eukl}})$ vollständig ist. Also ist dies ein Banachraum.

- (2) Wir betrachten den Vektorraum $C([-1, 2], \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $[-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen mit der *Integralnorm*. Wir werden im Folgenden sehen, dass der normierte Vektorraum $(C([-1, 2], \mathbb{R}), I)$ *kein Banachraum* ist. Wir betrachten dazu die Folge von Funktionen

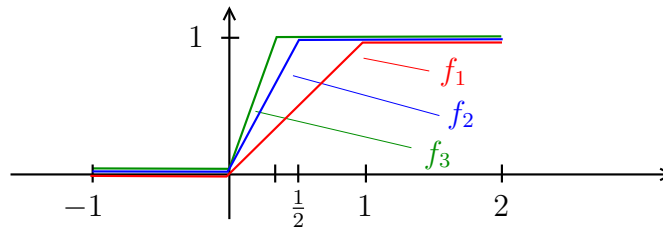
$$f_n: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in [-1, 0), \\ n \cdot x, & \text{wenn } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 1, & \text{wenn } x \in [\frac{1}{n}, 2]. \end{cases}$$

Diese Funktionen sind alle stetig, also definieren diese Funktionen eine Folge von Elementen des Vektorraums $C([-1, 2], \mathbb{R})$. Für $n \geq m$ gilt:

$$I(f_n - f_m) = \int_{-1}^2 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{m}} |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \frac{1}{m}.$$

$\uparrow$ die Funktionen unterscheiden sich nur auf dem Intervall $[0, \frac{1}{m}]$
 $\uparrow$ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{m}]$ unterscheiden sich die beiden Funktionen maximal um den Wert 1

Es folgt, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Integralnorm I ist. Andererseits konvergiert die Folge nicht in dem normierten Vektorraum $(C([-1, 2]), I)$. In der Tat, wenn es einen Grenzpunkt f der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(C([-1, 2]), I)$ gäbe, dann müsste gelten $f(x) = 0$ für $x \in [-1, 0)$ und $f(x) = 1$ für $x \in (0, 2]$. Aber es gibt keine stetige Funktion auf $[-1, 2]$ mit solchen Eigenschaften.



Der folgende Satz besagt nun, dass sich die Supremumsnorm ganz anders als die Integralnorm verhält.

Satz 13.2. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Der Vektorraum*

$$C([a, b], \mathbb{R}^k) = \text{Menge aller stetigen Abbildungen } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

mit der Supremumsnorm, d.h. mit der Norm

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| \mid x \in [a, b] \}$$

ist ein Banachraum.

Beweis. Wir beginnen mit zwei Vorbereitungen:

- (i) Für eine beliebige (nicht notwendigerweise stetige) Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ definieren wir nun

$$\|g\| := \sup\{\|g(x)\| \mid x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Es gilt also $\|g\| = \infty$, wenn g unbeschränkt ist.

(ii) Für jedes $x \in [a, b]$ folgt dann aus der Definition des Supremums, dass

$$\|g(x)\| \leq \|g\|.$$

Wir beginnen jetzt mit dem eigentlichen Beweis. Es sei also $(f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in dem normierten Vektorraum $((C[a, b], \mathbb{R}^k), \|\cdot\|)$. Wir müssen nun zeigen, dass es ein $f \in C([a, b], \mathbb{R}^k)$ gibt, so dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Supremumsnorm gegen f konvergiert.

Behauptung 1. Für jedes $x \in [a, b]$ existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Es sei $x \in [a, b]$. Da $\mathbb{R}^k$ nach Lemma 2.6 vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^k$ ist. Wir müssen also zeigen

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \|f_m - f_n\| < \epsilon \quad \implies \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \underbrace{\|f_m(x) - f_n(x)\|}_{=(f_m - f_n)(x)} < \epsilon.$$

Dies folgt sofort aus der Vorbereitung (ii) angewandt auf $g = f_m - f_n$. $\square$

Behauptung 2.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|f - f_n\| < \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $\|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{2}$. Insbesondere gilt für alle $n \geq N$, dass

$$\begin{aligned} \|f - f_n\| &= \sup\{\|f(x) - f_n(x)\| \mid x \in [a, b]\} \\ &= \sup\left\{\left\|\lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{(f_m(x) - f_n(x))}_{\substack{\text{für } m \geq N \text{ gilt nach Vorbereitung (ii) } \\ \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|f_m - f_n\| < \frac{\epsilon}{2}}} \right\| \mid x \in [a, b]\right\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \\ &\quad \uparrow \\ &\text{folgt aus } f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \end{aligned} \quad \square$$

Es verbleibt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung 3. Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist stetig.

Es sei also $x_0 \in [a, b]$ und es sei zudem $\epsilon > 0$ gegeben. Wir müssen nun zeigen: es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b].$$

Die vorherige Behauptung zusammen mit Vorbemerkung (ii) besagt, dass wir Kontrolle über $\|f(x) - f_n(x)\|$ für alle $x \in [a, b]$ zugleich haben. Die Stetigkeit der f_n besagt, dass wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ Kontrolle über $\|f_n(x) - f_n(x_0)\|$ erhalten. Mithilfe

folgender Abschätzung können wir dann diese Informationen auf unsere Problemstellung anwenden:

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|.$$

Die Idee ist nun, $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ so geschickt zu wählen, dass alle drei Terme jeweils kleiner als $\frac{\epsilon}{3}$ sind.

Es folgt aus Behauptung 2, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

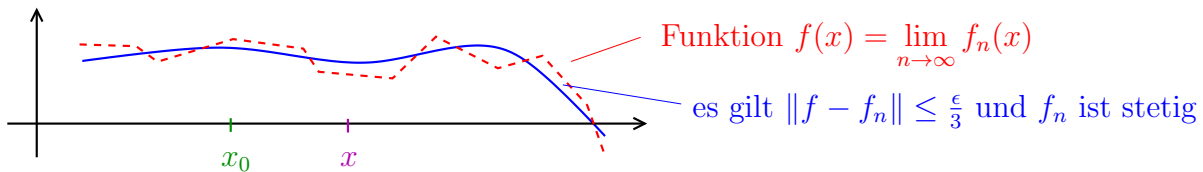
$$(A) \quad \|f(y) - f_n(y)\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } y \in [a, b].$$

Wegen der Stetigkeit von f_n existiert zudem ein $\delta > 0$, so dass

$$(B) \quad \|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$$

Dann gilt für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$, dass

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \underbrace{\|f(x) - f_n(x)\|}_{< \frac{\epsilon}{3} \text{ wegen (A)}} + \underbrace{\|f_n(x) - f_n(x_0)\|}_{< \frac{\epsilon}{3} \text{ wegen (B)}} + \underbrace{\|f_n(x_0) - f(x_0)\|}_{< \frac{\epsilon}{3} \text{ wegen (A)}} < \epsilon. \quad \blacksquare$$



13.2. Der Banachsche Fixpunktsatz. Bevor wir den Banachschen Fixpunktsatz formulieren, führen wir noch zwei Begriffe ein:

Definition.

- (1) Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und es sei $A \subset V$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $\Phi: A \rightarrow V$ heißt **Kontraktion**, wenn es ein $\Theta \in [0, 1)$ gibt, so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \Theta \cdot \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Solch ein $\Theta \in [0, 1)$ wird **Kontraktionsfaktor** genannt.

- (2) Es sei $\Phi: X \rightarrow X$ eine beliebige Abbildung. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Fixpunkt von Φ** , wenn $\Phi(x) = x$.

Beispiel.

- (1) Es sei $\alpha \in (0, 2\pi)$. Wir betrachten die Abbildung

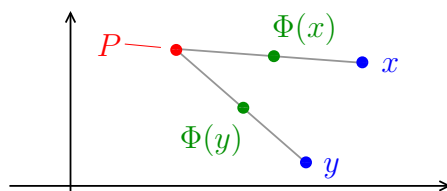
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto R(\alpha) \cdot v = \text{Drehung von } v \text{ um den Winkel } \alpha \text{ im Uhrzeigersinn.} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist nach Lemma 7.3 längenerhaltend, also keine Kontraktion. Diese Abbildung besitzt genau einen Fixpunkt, nämlich den Ursprung.

(2) Es sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \cdot (P + x)\end{aligned}$$

eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$,⁴³ und der Punkt P ist (der einzige) Fixpunkt von Φ . Geometrisch bildet Φ jeden Punkt x auf den Mittelpunkt von x und P ab.



(3) Die Abbildung

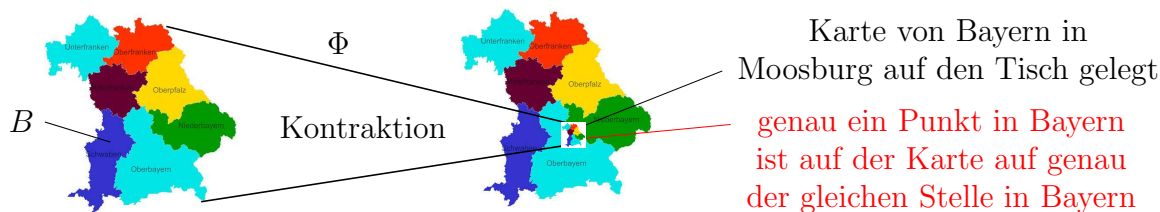
$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \frac{1}{3} \cdot x\end{aligned}$$

ist eine Kontraktion, aber die Abbildung besitzt keinen Fixpunkt.

Satz 13.3. (Banachscher Fixpunktsatz) Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und es sei $A \subset V$ eine nichtleere **abgeschlossene** Teilmenge. Jede Kontraktion $\Phi: A \rightarrow A$ besitzt genau einen Fixpunkt.

Dieser unscheinbare Satz spielt eine wichtige Rolle in der Mathematik, wir werden ihn später bei mehreren Gelegenheiten wieder treffen.

Beispiel. Es sei B der Freistaat Bayern, aufgefasst als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Wenn man nun irgendwo in Bayern eine Karte K von Bayern im Maßstab 1:100000 auf den Tisch legt, dann ist die Kartenabbildung $\Phi: B \rightarrow K \subset B$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{100000}$. Der Banachsche Fixpunktsatz besagt also, dass es genau einen Punkt auf der Karte gibt, welcher mit dem direkt darunter liegenden Punkt in der realen Welt übereinstimmt.



Im Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes werden wir folgendes Lemma verwenden.

⁴³In der Tat, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \left\| \frac{1}{2}(P + x) - \frac{1}{2}(P + y) \right\| = \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\| = \frac{1}{2} \cdot \|x - y\|.$$

Lemma 13.4. *Es sei V ein normierter Vektorraum, $A \subset V$ eine Teilmenge und $f: A \rightarrow V$ eine Abbildung. Wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x, y \in A$ folgende Ungleichung gilt: $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \cdot \|x - y\|$, dann ist f stetig.*

Beweis. Es sei $a \in A$ und $\epsilon > 0$. Wenn $\lambda \leq 0$, dann hat $\delta = 1$ schon die gewünschte Eigenschaft. Ansonsten hat $\delta = \frac{\epsilon}{\lambda}$ die gewünschte Eigenschaft. ■

Wir wenden uns nun dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes zu.

Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, es sei $A \subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge und es sei zudem $\Phi: A \rightarrow A$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\Theta \in [0, 1)$.

Behauptung. Die Kontraktion $\Phi: A \rightarrow A$ besitzt höchstens einen Fixpunkt.

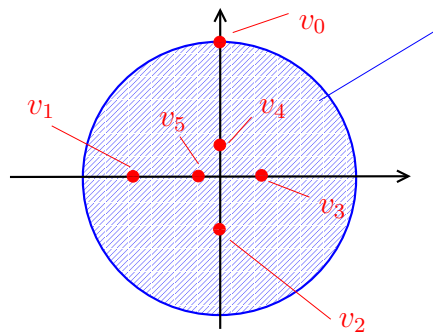
Es seien also $v, w \in A \subset V$ zwei Fixpunkte. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccc} \|v - w\| & = & \|\Phi(v) - \Phi(w)\| & \leq & \Theta \cdot \|v - w\|. \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{da } v \text{ und } w \text{ Fixpunkte} & & \text{da } \Theta \text{ Kontraktionsfaktor} & \end{array}$$

Nachdem $\Theta \in [0, 1)$ ist dies nur möglich, wenn $\|v - w\| = 0$. Aus der positiven Definitheit von $\|\cdot\|$ folgt, dass $v = w$. □

Wir zeigen nun, dass Φ einen Fixpunkt besitzt.

Behauptung. Die Kontraktion $\Phi: A \rightarrow A$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.



wir betrachten die abgeschlossene Teilmenge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ des Banachraums $\mathbb{R}^2$ mit der Kontraktion

$$\begin{aligned} \Phi: A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto \left(-\frac{2}{3}y, \frac{2}{3}x\right) = \frac{2}{3} \cdot \text{Drehung von } (x, y) \text{ um } \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

die Folge $v_0 = (0, 1)$ und $v_i = \Phi(v_{i-1})$ für $i \geq 1$ konvergiert gegen den Fixpunkt $(0, 0)$

In dem Beispiel auf Seite 127, welches gegeben ist durch $\Phi(x) = \frac{1}{2}(P + x)$ kann man leicht den Fixpunkt P finden: man fängt mit irgendeinem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und wendet die Abbildung Φ immer wieder darauf an und erhält eine Folge von Punkten in $\mathbb{R}^n$, welche gegen den Fixpunkt P konvergiert. Das legt nahe, dass dieses Prozedere vielleicht immer funktioniert.

Es sei $v_0 \in A$ beliebig. Wir betrachten die durch $v_k := \Phi(v_{k-1})$ rekursiv definierte Folge. Wir wollen zeigen, dass diese Folge gegen einen Fixpunkt in A konvergiert. Wir wenden

uns erst dem Beweis der Konvergenz der Folge zu. Da $(V, \|\cdot\|)$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist. Für beliebige $m \geq k \in \mathbb{N}$ berechnen wir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Nullergänzung} & & \text{Dreiecksungleichung} & & \text{per Definition} & & \text{da } \Theta \text{ Kontraktionsfaktor} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \|v_m - v_k\| & = & \left\| \sum_{i=k}^{m-1} (v_{i+1} - v_i) \right\| & \leq & \sum_{i=k}^{m-1} \|v_{i+1} - v_i\| & = & \sum_{i=k}^{m-1} \|\Phi(v_i) - \Phi(v_{i-1})\| \leq \sum_{i=k}^{m-1} \Theta \cdot \|v_i - v_{i-1}\| \\
 & \leq & \sum_{i=k}^{m-1} \underbrace{\Theta^i \cdot \|v_1 - v_0\|}_{=: c} & = & c \cdot \Theta^k \cdot \sum_{i=0}^{m-1-k} \Theta^i & \leq & c \cdot \Theta^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \Theta^i = c \cdot \Theta^k \cdot \frac{1}{1-\Theta}. \\
 \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 \text{iterieren des Arguments} & & & & & & \text{geometrische Reihe}
 \end{array}$$

Wir machen folgende Beobachtungen:

- Nachdem $c \cdot \Theta^k \cdot \frac{1}{1-\Theta} = \frac{c}{1-\Theta} \cdot \Theta^k$ und nachdem $\Theta \in [0, 1)$ sieht man leicht, dass $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V ist.⁴⁴
- Da V nach Voraussetzung vollständig ist, konvergiert die Folge gegen ein $v \in V$.
- Da A nach Voraussetzung abgeschlossen ist, und nachdem alle Folgenglieder v_n in A liegen, folgt aus Lemma 2.3, dass der Grenzpunkt $v \in A$.

Wir wollen nun noch zeigen, dass $v \in A$ ein Fixpunkt von $\Phi: A \rightarrow A$ ist. In der Tat gilt:

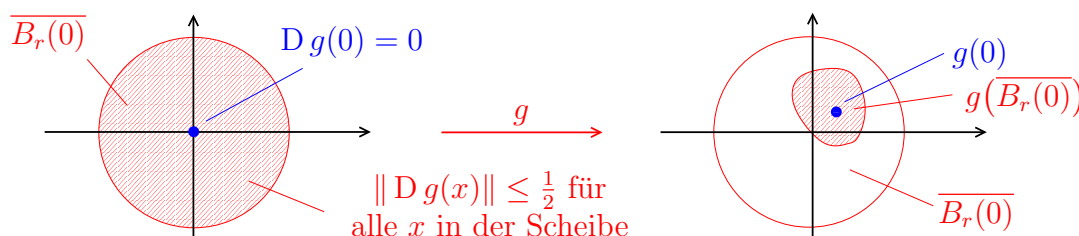
$$\Phi(v) = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = v.$$

nach Lemma 13.4 ist Φ stetig, die Aussage folgt nun aus Satz 2.8 ■

Der folgende Satz gibt uns ein Beispiel für eine kontrahierende Abbildung, welches im nächsten Kapitel noch wichtig werden wird.

Satz 13.5. Es sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $Dg(0) = 0$.

- (1) Es gibt ein $r > 0$, so dass für alle $x \in \overline{B_r(0)}$ gilt: $\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}$.
- (2) Die Einschränkung $g: \overline{B_r(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist kontrahierend mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.
- (3) Wenn $\|g(0)\| \leq \frac{r}{2}$, dann gilt $g(\overline{B_r(0)}) \subset \overline{B_r(0)}$.



Beispiel. Wir betrachten die Funktion $g(x) = x^2$. Dann ist $Dg(x) = g'(x) = 2x$. Insbesondere gilt $Dg(0) = g'(0) = 0$, und in diesem Fall hat $r = \frac{1}{4}$ die gewünschte Eigenschaft. Die Einschränkung von $g(x) = x^2$ auf

⁴⁴In der Tat, nachdem $\Theta \in [0, 1)$ existiert für gegebenes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{c}{1-\Theta} \cdot \Theta^N < \epsilon$. Für alle $k, m \geq N$ folgt dann: $\|v_m - v_k\| < \frac{c}{1-\Theta} \cdot \Theta^N < \epsilon$.

$$\begin{array}{ccc} [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] & \rightarrow & [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

ist also nach Satz 13.5 eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.⁴⁵

Beweis. Es sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $Dg(0) = 0$.

$$(1) \text{ Für } x \in \mathbb{R}^n \text{ gilt: } \|Dg(x)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 6.12 (3)}}}{\leq} n^2 \cdot \max \left\{ \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| \mid i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Lemma 6.12 (3)

Es folgt also aus $Dg(0) = 0$ und der Stetigkeit der partiellen Ableitungen, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass $\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \overline{B_r(0)}$.

(2) Es seien nun $x, y \in \overline{B_r(0)}$. Dann gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schranksatz 12.2}}}{\leq} \sup \left\{ \|Df(\underbrace{x + t \cdot (y - x)}_{\in \overline{B_r(0)}})\| \mid t \in [0, 1] \right\} \cdot \|y - x\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (1)}}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \|y - x\|.$$

(3) Wir nehmen an, dass $\|g(0)\| \leq \frac{r}{2}$. Es sei nun $x \in \overline{B_r(0)}$. Dann gilt:

$$\|g(x)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} \|g(x) - g(0)\| + \|g(0)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (2)}}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \|x - 0\| + \|g(0)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \|x\| \leq r \text{ und } \|g(0)\| \leq \frac{r}{2}}}{\leq} \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Wir haben also gezeigt, dass $g(\overline{B_r(0)}) \subset \overline{B_r(0)}$. ■

⁴⁵Dies kann man auch direkt sehen, denn für $x, y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ gilt

$$|g(x) - g(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot \underbrace{|x + y|}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

14. DER SATZ ÜBER DIE UMKEHRABBILDUNG

14.1. **Erinnerung an Analysis I.** Wir erinnern zuerst an [Fr1, Monotoniesatz 13.4].

Satz 14.1. (Monotoniesatz) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

- (1) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \implies f$ ist streng monoton steigend
- (2) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \implies f$ ist streng monoton fallend.

Insbesondere gilt:

- (3) $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I \implies f$ ist injektiv.

Der folgende Satz kombiniert einige Aussagen, welche wir in Analysis I bewiesen hatten.

Satz 14.2. (Umkehrregel) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x_0 \in I$. Wenn $f'(x_0) \neq 0$, dann gibt es ein $U \subset I$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) (a) U ist ein offenes Intervall um x_0 .
 (b) Die Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv.
 (c) Das Bild $f(U)$ ist ein offenes Intervall um $f(x_0)$.
- (2) Die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ ist stetig.
- (3) Die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ ist sogar differenzierbar.
- (4) Für alle $y \in f(U)$ gilt:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

- (5) Die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ ist sogar stetig differenzierbar.

Beweis.

- (1) Nach Voraussetzung ist die Ableitung f' stetig. Da $f'(x_0) \neq 0$ existiert ein offenes Intervall $U = (a, b)$ um x_0 , so dass $f' \neq 0$ auf (a, b) . Es folgt aus dem Monotoniesatz 14.1, dass $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist. Es folgt aus [Fr1, Lemma 9.2], dass das Bild f von $U = (a, b)$ gerade das offene Intervall mit Grenzen $f(a)$ und $f(b)$ ist.
- (2) Es folgt aus [Fr1, Satz 9.6], dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ stetig ist.
- (3) Die Umkehrregel [Fr1, Satz 12.9] besagt, dass $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ differenzierbar ist.
- (4) Es gilt:

$$1 = \frac{d}{dy}y = \frac{d}{dy}(f \circ f^{-1})(y) \underset{\uparrow}{=} f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y).$$

Kettenregel, welche wir anwenden können, da f^{-1} nach (3) differenzierbar ist

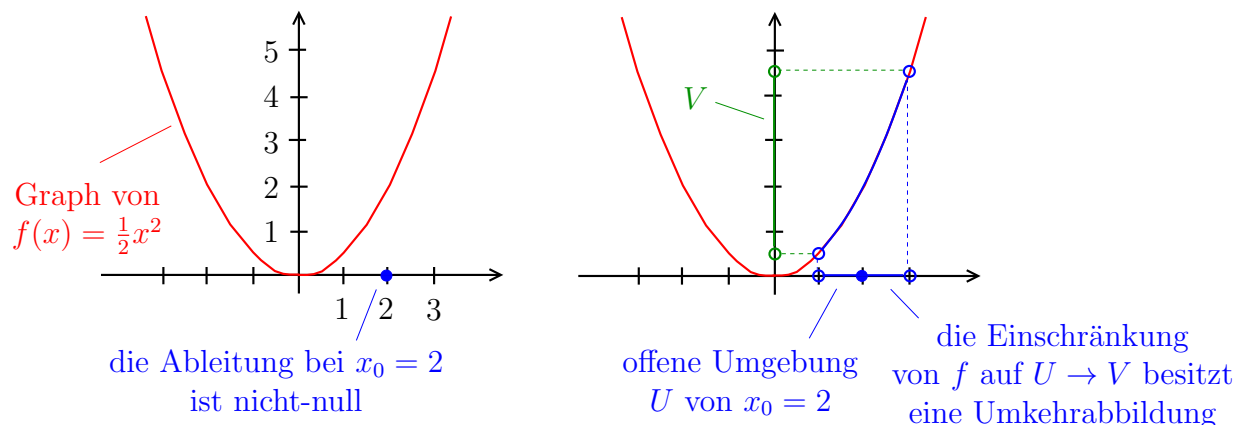
Wir erhalten die gewünschte Gleichheit, durch Auflösen nach $(f^{-1})'(y)$.

- (5) Es folgt aus (4), dass $(f^{-1})'$ die Verknüpfung von stetigen Funktionen ist, also ist $(f^{-1})'$ stetig. Dies bedeutet gerade, dass f^{-1} stetig differenzierbar ist. ■

Beispiel. Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2 \end{aligned}$$

und den Punkt $x_0 = 2$ in $\mathbb{R}$. Dann ist $f'(x_0) = x_0 = 2$ ungleich null. Wir betrachten das offene Intervall $U = (1, 3)$ um $x_0 = 2$. Die Abbildung f ist auf U injektiv und das Bild ist das offene Intervall $V := f(U) = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ um $y_0 = f(x_0) = 2$. Die zugehörige Umkehrabbildung $f^{-1}: V \rightarrow U$ ist gegeben durch $x \mapsto \sqrt{x}$, welche auf dem offenen Intervall $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ stetig und stetig differenzierbar ist.



14.2. Der Satz über die Umkehrabbildung. Wir wollen nun der Frage nachgehen, ob und wie man den Monotoniesatz 14.1 und die Umkehrregel 14.2 auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern kann. Die Verallgemeinerung der Voraussetzung $f'(x_0) \neq 0$ ist, dass wir nun annehmen, dass das Differential $Df(x_0)$ eine invertierbare Matrix ist. Damit erhalten wir folgende Fragen:

Frage 14.3. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

- (1) Können wir eine allgemeine Aussage über Injektivität treffen, wenn $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in X$?
- (2) Es sei $a \in X$. Wenn $Df(a)$ invertierbar ist, was für eine Aussage über f können wir in einer offenen Umgebung um a treffen?

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

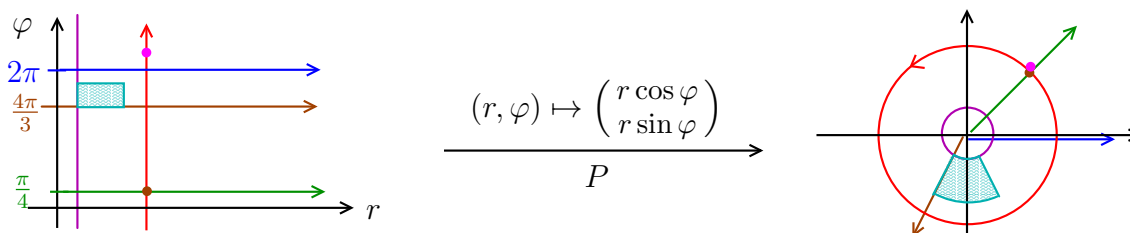
$$P: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Das Differential der Abbildung P an einem Punkt $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$DP(r, \varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Determinante} = r > 0}, \quad \text{insbesondere ist } DP(r, \varphi) \text{ invertierbar.}$$

Das Differential ist also an jedem Punkt $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ invertierbar. Aber P ist natürlich nicht injektiv, nachdem immer gilt $P(r, \varphi) = P(r, \varphi + 2\pi)$. Wir sehen also, dass die Verallgemeinerung des Monotoniesatzes 14.1 auf den mehrdimensionalen Fall nicht gilt.



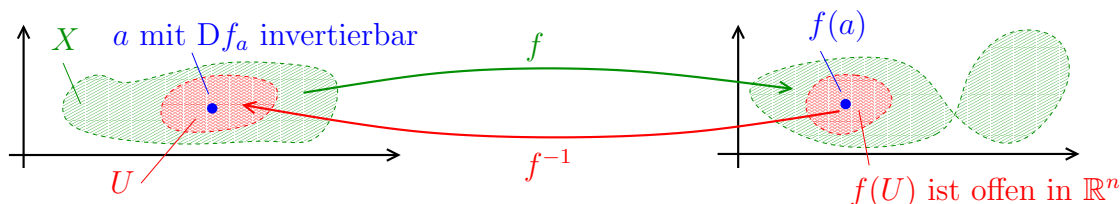
Der folgende Satz verallgemeinert nun die Umkehrregel 14.2 auf den mehrdimensionalen Fall.

Satz 14.4. (Satz über die Umkehrabbildung) *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und zudem sei $a \in X$. Wenn $Df_a \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix ist, dann gibt es eine Teilmenge $U \subset X$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) (a) U ist eine offene Umgebung von a .
- (b) Die Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist injektiv.
- (c) Das Bild $f(U)$ ist eine offene Umgebung von $f(a) \in \mathbb{R}^n$.
- (2) Die Umkehrabbildung $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ ist stetig.
- (3) Die Umkehrabbildung $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ ist sogar differenzierbar.
- (4) Für alle $b \in f(U)$ gilt:

$Df^{-1}(b) = \text{das Inverse des Differentials } Df \text{ am Punkt } f^{-1}(b).$

- (5) Die Umkehrabbildung $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ ist sogar stetig differenzierbar.



Bemerkung. Es ist sehr leicht zu überprüfen, ob eine lineare Abbildung invertierbar ist, beispielsweise genügt es die Determinante zu berechnen. Andererseits ist es im Allgemeinen sehr schwer festzustellen, ob eine beliebige Abbildung $f: U \rightarrow V$ umkehrbar ist. Der Satz 14.4 über die Umkehrabbildung besagt nun, dass wenn das Differential $Df(a)$ einer stetig differenzierbaren Funktion f an einem Punkt a invertierbar ist, dann ist f “lokal umkehrbar”⁴⁶, d.h. es gibt eine kleine Umgebung U von a , so dass die Einschränkung von f auf U umkehrbar ist.

Die Teilaussagen des Satzes 14.4 über die Umkehrabbildung werden im Folgenden separat behandelt.

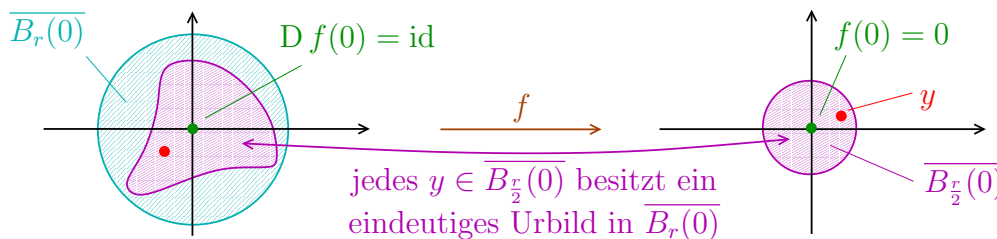
⁴⁶Die Begriffe “(lokal) umkehrbar” und “(lokal) invertierbar” sind völlig austauschbar.

Beweis von Aussagen (1) und (2) des Satzes 14.4 über die Umkehrabbildung. Wir beginnen mit zwei Vorbemerkungen:

- Wir beweisen den Satz über die Umkehrabbildung für $X = \mathbb{R}^n$, $a = 0$ und $f(a) = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen.
- Es sei $A = Df(0)$. Indem wir gegebenenfalls die Abbildung f durch die Abbildung $g(x) := A^{-1} \cdot f(x)$ ersetzen, genügt es den Fall zu betrachten, dass $Df(0) = \text{id}$.⁴⁷

Es sei nun also $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$ und $Df(0) = \text{id}$. Wir müssen zeigen, dass es offene Umgebungen U von 0 und V von $f(0)$ gibt, so dass $f: U \rightarrow V$ eine Bijektion ist und so dass die Umkehrfunktion $f^{-1}: V \rightarrow U$ stetig ist. Wir fangen mit folgender ähnlich klingender Behauptung an.

Behauptung 1. Es existiert ein $r > 0$, so dass es zu jedem Punkt $y \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ genau ein $x \in \overline{B_r(0)}$ mit $f(x) = y$ gibt.



Unser Ziel ist also, in der Nähe des Ursprungs eine Umkehrfunktion f^{-1} zu finden. Es sei also $y \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt nahe am Ursprung. Das Ziel ist nun zu zeigen, dass es ein x mit $y = f(x)$ gibt. Wir wollen solch ein x mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes 13.3 finden. Wir müssen die Problemstellung also als Fixpunktproblem umformulieren. Offensichtlich gilt

$$y = f(x) \iff x = \underbrace{y + (x - f(x))}_{=: g_y(x)}.$$

Um den Banachschen Fixpunktsatz 13.3 anwenden zu können, müssen wir nun die Lage so arrangieren, dass die Abbildung g_y kontrahierend ist.

Für ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} g_y: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto g_y(x) := y + (x - f(x)). \end{aligned}$$

Wir schreiben $g := g_0$, also $g(x) = x - f(x)$. Wir machen folgende Bemerkungen:

- (i) Es sei $y \in \mathbb{R}^n$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $Dg_y(x) = Dg(x)$, denn y ist nur eine Konstante.

⁴⁷In der Tat, denn wenn $x \mapsto g(x) = A^{-1} \cdot f(x)$ eine lokale Umkehrabbildung φ besitzt, dann ist $x \mapsto \varphi(A^{-1} \cdot x)$ eine Umkehrabbildung für f .

(ii) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$Dg_y(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe (i)}}}{=} Dg(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } g = \text{id} - f}}{=} D(\text{id} - f)(0) = \underbrace{D\text{id}(0)}_{=\text{id}} - \underbrace{Df(0)}_{=\text{id}} = \text{id} - \text{id} = 0.$$

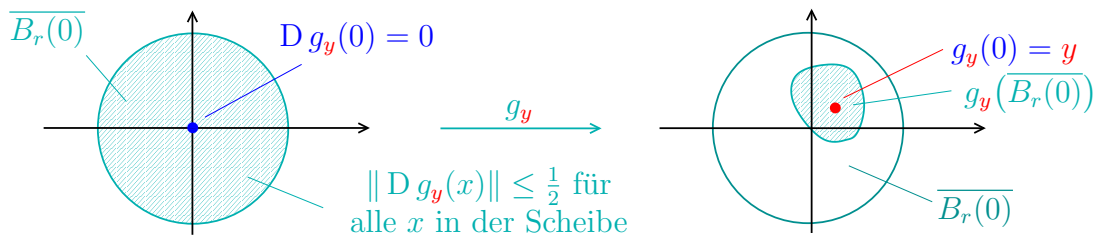
(iii) Aus (i), (ii) und Satz 13.5 folgt, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \overline{B_r(0)}$ gilt: $\|Dg_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$.

(iv) Zudem folgt aus $g_y(0) = y$ und aus Satz 13.5 (2) und (3), dass für alle $y \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ die Abbildung g_y sich einschränkt auf eine kontrahierende Abbildung

$$g_y: \underbrace{\overline{B_r(0)}}_{\substack{\text{abgeschlossene Teilmenge} \\ \text{des Banachraums } \mathbb{R}^n}} \longrightarrow \overline{B_r(0)}$$

mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

(v) Der Banachsche Fixpunktsatz 13.3 besagt nun, dass es für jedes $y \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ genau ein $x \in \overline{B_r(0)}$ mit $g_y(x) = x$, also mit $f(x) = y$, gibt. $\square$



Es folgt aus Behauptung 1, dass wir nun folgende Abbildung einführen können:

$$f^{-1}: \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)} \rightarrow \overline{B_r(0)}$$

$y \mapsto$ das nach Behauptung 1 eindeutig bestimmte $x \in \overline{B_r(0)}$ mit $f(x) = y$.

Behauptung 2. Für alle $y, z \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ gilt

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| \leq 2 \cdot \|y - z\|.$$

Es seien also $y, z \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \text{folgt aus } g(w) = w - f(w), \text{ mit } w = f^{-1}(y) \text{ und } w = f^{-1}(z) \quad \text{Dreiecksungleichung} \\ \|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| & \stackrel{\downarrow}{=} \left\| \underbrace{g(f^{-1}(y))}_{=f^{-1}(y)} + \underbrace{f(f^{-1}(y))}_{=y} - \underbrace{(g(f^{-1}(z)) + f(f^{-1}(z)))}_{=f^{-1}(z)} \right\| \stackrel{\downarrow}{\leq} \\ & \leq \underbrace{\|g(f^{-1}(y)) - g(f^{-1}(z))\|}_{\substack{\leq \frac{1}{2}\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\|, \text{ da } g \\ \text{kontrahierend auf } V \subset \overline{B_r(0)} \\ \text{mit Kontraktionsfaktor } \frac{1}{2}}} + \|y - z\| \leq \frac{1}{2}\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| + \|y - z\|. \end{aligned}$$

Indem wir die Ungleichung nach $\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\|$ auflösen erhalten wir die gewünschte Ungleichung

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| \leq 2 \cdot \|y - z\|. \quad \boxplus$$

Wir müssen nun eine *offene* Umgebung U von $a = 0$ finden, so dass $f(U)$ offen ist, so dass $f: U \rightarrow f(U)$ bijektiv ist, und so dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ stetig ist. Wir setzen nun

$$U := B_r(0) \cap f^{-1}(B_{\frac{r}{2}}(0)).$$

Nach Satz 2.15 ist U eine offene Umgebung von $a = 0$. Es folgt aus Behauptung 1, dass $f: U \rightarrow f(U)$ injektiv ist. Also ist $f: U \rightarrow f(U)$ bijektiv. Zudem folgt aus Behauptung 2, zusammen mit Lemma 13.4, dass $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ stetig ist.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Wir werden folgende etwas genauere Behauptung beweisen.

Behauptung 3. Es ist $f(U) = B_{\frac{r}{2}}(0)$.

Per Definition gilt $f(U) \subset B_{\frac{r}{2}}(0)$. Wir müssen nun noch zeigen, dass auch $B_{\frac{r}{2}}(0) \subset f(U)$. Es sei also $y \in B_{\frac{r}{2}}(0)$. Da f^{-1} auf $B_{\frac{r}{2}}(0)$ definiert ist, gibt es nach Behauptung 1 ein $x \in \overline{B_r(0)}$ mit $f(x) = y$. Wir müssen zeigen, dass $x \in U$, d.h. wir müssen zeigen, dass $\|x\| < r$. In der Tat ist

$$\|x\| = \|x - 0\| = \|f^{-1}(y) - f^{-1}(0)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Behauptung 2}}}{\leq} 2 \cdot \|y - 0\| < 2 \cdot \frac{r}{2} = r.$$

■

Beweis von Aussagen (3) und (4) des Satzes 14.4 über die Umkehrabbildung. Es sei also wiederum $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und zudem sei $a \in X$, so dass $Df(a) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix ist. Wir hatten gerade gesehen, dass es eine offene Umgebung U um a gibt, so dass $f(U)$ offen ist, so dass $f: U \rightarrow f(U)$ eine Bijektion ist, und so dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ stetig ist.

(3) Der Beweis, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ sogar differenzierbar ist, ist vom Ansatz her ganz ähnlich zum Beweis der Umkehrregel [Fr1, Satz 12.9] aus Analysis I. Allerdings ist der Beweis technisch aufwändiger. Aus Zeit und Platzgründen verweisen wir auf [K2, Seite 104] beziehungsweise [Br2, Seite 47] für die Details.

(4) Es sei also $b \in f(U)$. Wir schreiben $g = f^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccc} \text{id} & = & D \text{id}(b) & = & D(f \circ g)(b) & = & Df_{g(b)} \cdot Dg_b. \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{Lemma 6.6} & & \text{da } g \text{ Umkehrabbildung} & & \text{nach der Kettenregel 6.13, welche wir anwenden} & & \\ & & \text{gilt } f \circ g = \text{id} & & \text{können, da wir gerade in (4) gesehen haben,} & & \\ & & & & \text{dass die Umkehrabbildung differenzierbar ist} & & \end{array}$$

Durch Auflösen nach $Dg_b = D(f^{-1})_b$ erhalten wir die erwünschte Aussage. ■

Bevor wir uns dem Beweis von Aussage (5) des Satzes 14.4 über die Umkehrabbildung zuwenden, wollen wir erst folgendes Lemma beweisen.

Lemma 14.5. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und es sei

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto A(x) = (a_{ij}(x)) \end{aligned}$$

eine Abbildung, so dass die Matrixeinträge stetig sind, d.h. die Funktionen $x \mapsto a_{ij}(x)$ sind stetig. Dann sind auch die Einträge von

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto A(x)^{-1} \end{aligned}$$

stetig.

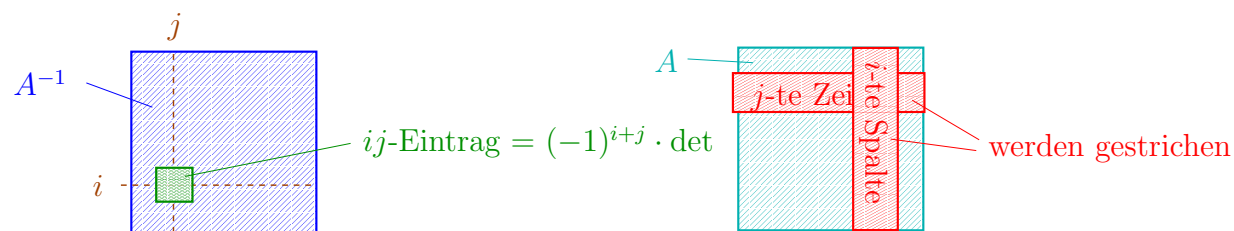
Beweis. Die Cramersche Regel [N1, Satz 13.4] besagt, dass für eine beliebige quadratische reelle Matrix A mit $\det(A) \neq 0$ gilt⁴⁸

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\mathrm{adj}},$$

wobei A^{adj} die Adjungierte der Matrix A ist, d.h. der ij -Eintrag von A^{adj} ist gegeben durch

$$(-1)^{i+j} \cdot \begin{array}{l} \text{Determinante der Matrix, welche man aus } A \text{ durch} \\ \text{Streichen der } i\text{-ten Spalte und der } j\text{-ten Zeile erhält.} \end{array}$$

Es folgt also, dass die Einträge von A^{-1} rationale Funktionen⁴⁹ in den Einträgen von A sind. Insbesondere, wenn die Einträge von $x \mapsto A(x)$ stetig sind, dann sind auch die Einträge von $x \mapsto A(x)^{-1}$ stetig. ■



Beweis von Aussage (5) des Satzes 14.4 über die Umkehrabbildung. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und zudem sei $a \in X$, so dass $Df(a) \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix ist. Wir hatten schon gesehen, dass es eine offene Umgebung U um a gibt, so dass $f(U)$ offen ist, so dass $f: U \rightarrow f(U)$ eine Bijektion ist, so dass die Umkehrabbildung $g := f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ differenzierbar ist, und so dass das

⁴⁸Für eine invertierbare 2×2 -Matrix besagt die Regel, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

⁴⁹Eine rationale Funktion ist ein Bruch von Polynom, möglicherweise in mehreren Variablen.

Differential von $g = f^{-1}$ gegeben ist durch

$$\begin{array}{rcl}
 f(U) & \rightarrow & M(n \times n, \mathbb{R}) \\
 b & \mapsto & \left(\underbrace{Df_{g(b)}}_{\substack{\text{Differential von } f \\ \text{am Punkt } g(b)}} \right)^{-1} = \text{das Inverse der Matrix mit Einträgen } \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g(b))}_{\substack{\text{die Funktion } b \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g(b)) \text{ ist stetig} \\ \text{da die partiellen Ableitungen} \\ \text{stetig sind und da } g \text{ stetig ist}}}
 \end{array}$$

$\uparrow$
 folgt aus Satz 6.7

Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt also:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(b) & = & ij\text{-Eintrag von } Dg_b = (Df_{g(b)})^{-1}. \\
 & \uparrow & \\
 & \text{Satz 6.7} &
 \end{array}$$

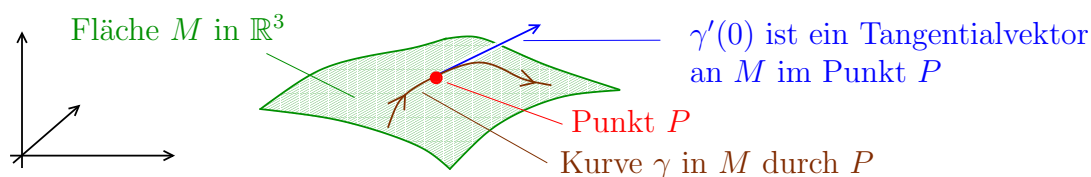
Es folgt nun aus diesen Beobachtungen und Lemma 14.5, dass alle partiellen Ableitungen von g stetig sind. Mit anderen Worten, g ist stetig differenzierbar. ■

15. TANGENTIALVEKTOREN UND LAGRANGE-MULTIPLIKATOREN

15.1. Tangentialvektoren.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und es sei $P \in M$.

- (1) Eine **Kurve in M durch P** ist eine stetige Abbildung $\gamma: I \rightarrow M$ auf einem offenen Intervall I mit $\gamma(0) = P$.
- (2) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor an M im Punkt P** , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve γ in M durch P gibt, so dass $\gamma'(0) = v$.
- (3) Die Menge aller Tangentialvektoren am Punkt P wird mit $T_P M$ bezeichnet. Wir nennen $T_P M$ den **Tangentialraum am Punkt P** .



Bemerkung. Bildlich gesprochen ist ein Tangentialvektor am Punkt P ein Vektor, welcher sich am Punkt P an die Teilmenge M “anschmiegt”.

Beispiel.

- (1) Der Nullvektor ist die Ableitung der konstanten Kurve durch P , also ist der Nullvektor immer ein Tangentialvektor.
- (2) Wir betrachten den Kreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

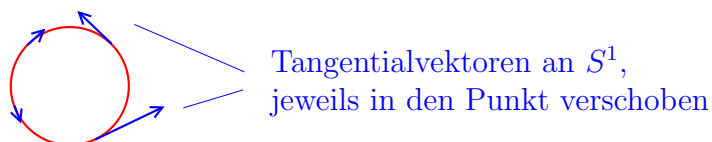
Es sei $(x, y) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ ein Punkt auf S^1 . Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir die differenzierbare Kurve

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda: (-\pi, \pi) &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(\varphi + \lambda \cdot t), \sin(\varphi + \lambda \cdot t)). \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma_\lambda(0) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x, y)$ und

$$\gamma'_\lambda(0) = (-\lambda \cdot \sin(\varphi), \lambda \cos(\varphi)) = (-\lambda \cdot y, \lambda \cdot x).$$

Die Menge aller dieser Ableitungen ist gerade die Menge der Vektoren, welche orthogonal zum Vektor (x, y) sind. Wir werden gleich in Satz 15.2 sehen, dass dies in der Tat alle Tangentialvektoren zum Punkt (x, y) sind.



Lemma 15.1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $P \in M$. Für jeden Vektor $v \in T_P M$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt auch, dass $\lambda \cdot v \in T_P M$.

Beweis. Es sei $v = \gamma'(0) \in T_P M$ ein Tangentialvektor und $\lambda \in \mathbb{R}$. Der Vektor $\lambda \cdot v$ ist die Ableitung der Kurve $t \mapsto \gamma(\lambda \cdot t)$, also ebenfalls ein Tangentialvektor. ■

Satz 15.2. Für jedes $P \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt: $T_P S^n = P^\perp := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, P \rangle = 0\}$. Insbesondere ist $T_P S^n$ ein n -dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n+1}$.



Beweis. Es sei $P \in S^n$. Wir müssen zeigen, dass $T_P M = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, P \rangle = 0\}$. Wir beweisen die beiden Inklusionen “ $\subset$ ” und “ $\supset$ ”.

(“ $\subset$ ”) Es sei $\gamma: I \rightarrow S^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = P$. Für jedes $t \in I$ gilt dann

$$0 = \frac{d}{dt} 1 = \frac{d}{dt} \|\gamma(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 2 \cdot \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle.$$

da γ auf S^n verläuft gilt $\|\gamma(t)\| = 1$ folgt aus der Produktregel

Insbesondere erhalten wir für $t = 0$, dass $0 = \langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle = \langle \gamma'(0), P \rangle$.

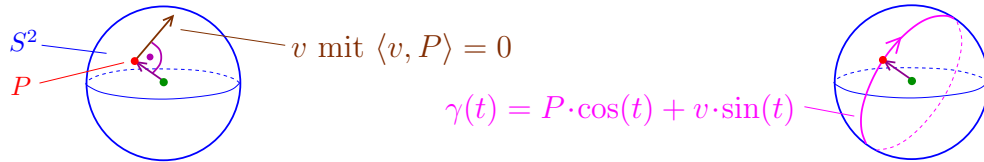
(“ $\supset$ ”) Es sei nun $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle v, P \rangle = 0$. Der Nullvektor ist sowieso ein Tangentialvektor, wir müssen also nur den Fall $v \neq 0$ betrachten. Es folgt aus Lemma 15.1, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass $\|v\| = 1$. Wir betrachten die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ t &\mapsto P \cdot \cos(t) + v \cdot \sin(t). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\gamma(0) = P$ und $\gamma'(0) = v$. Wir müssen nur noch zeigen, dass γ wirklich auf S^n verläuft. In der Tat gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\|^2 &= \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle P \cdot \cos(t) + v \cdot \sin(t), P \cdot \cos(t) + v \cdot \sin(t) \rangle \\ &= \underbrace{\langle P \cdot \cos(t), P \cdot \cos(t) \rangle}_{=\cos^2(t) \cdot \|P\|^2 = \cos^2(t)} + 2 \cdot \underbrace{\langle v \cdot \sin(t), P \cdot \cos(t) \rangle}_{=0, \text{ da } \langle v, P \rangle = 0} + \underbrace{\langle v \cdot \sin(t), v \cdot \sin(t) \rangle}_{=\sin^2(t) \cdot \|v\|^2 = \sin^2(t)} = 1. \end{aligned}$$

■



15.2. Der Satz vom regulären Wert.

Lemma 15.3. Es sei A eine $k \times n$ -Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) A besitzt Rang k ,
- (2) die Zeilen von A sind linear unabhängig
- (3) die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, v \mapsto A \cdot v$ ist surjektiv.

Beispiel. Eine $1 \times n$ -Matrix $(b_1 \dots b_n)$ hat Rang 1 genau dann, wenn es mindestens einen Eintrag b_i gibt, der nicht Null ist.

Wir führen nun folgende Definition ein.

Definition. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung.

- (1) Wir sagen $P \in X$ ist ein regulärer Punkt von g , wenn das Differential $Dg(P)$ den Rang k besitzt. Ein Punkt, welcher nicht regulär ist, wird singulär genannt.
- (2) Wir sagen $w \in \mathbb{R}^k$ ist ein regulärer Wert von g , wenn alle Punkte im Urbild $g^{-1}(\{w\})$ regulär sind.⁵⁰

Beispiel. Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ positive reelle Zahlen.

- (1) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_n^2. \end{aligned}$$

Für jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$Dg(x_1, \dots, x_n) = (2 \cdot \underbrace{a_1}_{\neq 0} \cdot x_1 \quad \dots \quad 2 \cdot \underbrace{a_n}_{\neq 0} \cdot x_n).$$

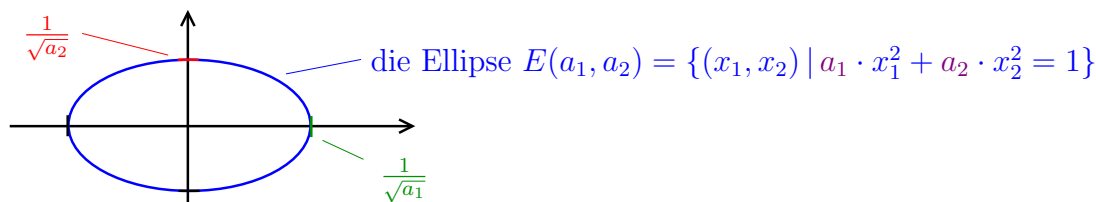
Nach dem vorherigen Beispiel hat diese Matrix Rang = 1, genau dann, wenn gilt $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. Mit anderen Worten, alle $P \in \mathbb{R} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ sind regulär.

- (2) Es folgt aus (1), dass alle Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ reguläre Werte sind.

Von besonderem Interesse ist das Urbild von $1 \in \mathbb{R}$, nämlich

$$E(a_1, \dots, a_n) := g^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_n^2 = 1\}.$$

Dies ist eine Ellipse ($n = 2$) oder Ellipsoid ($n \geq 3$).



Satz 15.4. (Satz vom regulären Wert) Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $g: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Abbildung und es sei $w \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert. Wir setzen $M := g^{-1}(\{w\})$. Für jedes $P \in M = g^{-1}(\{w\})$ gilt

$$T_P M = \ker(Dg_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k).$$

Insbesondere ist $T_P M$ ein $(n - k)$ -dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

⁵⁰Anders ausgedrückt, ein Wert $w \in \mathbb{R}^k$ ist regulär, wenn dieser nicht das Bild von einem singulären Punkt in X ist.

Bemerkung. Mit “Satz vom regulären Wert” wird in der Literatur normalerweise die Aussage bezeichnet, dass das Urbild eines regulären Wertes eine “Untermannigfaltigkeit” ist. Wir werden den Begriff einer “Untermannigfaltigkeit” in dieser Vorlesung jedoch nicht einführen.

Beweis. Es sei $P \in M := g^{-1}(\{w\})$. Wir zeigen zuerst die Inklusion “ $\subset$ ”. Es sei also $v \in T_P M$. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccccc} Dg_P \cdot v & = & Dg_P \cdot \gamma'(0) & = & \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)|_{t=0} & = & 0. \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{wir wählen } \gamma: I \rightarrow M & & \text{Kettenregel 6.13} & & \text{denn } g \circ \gamma \text{ hat den} & & \\ \text{mit } \gamma'(0) = v & & & & \text{konstanten Wert } w & & \end{array}$$

Wir zeigen nun die Inklusion “ $\supset$ ”.

Es sei $v \in \ker(Dg_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k)$. Wir müssen eine geeignete Kurve $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ finden. Aber die einzige Abbildung, welche wir besitzen ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, welche “in die falsche Richtung” geht. Um eine Abbildung in die richtige Richtung zu erhalten wollen wir den Satz 14.4 über die Umkehrabbildung anwenden. Dazu brauchen wir jedoch eine Abbildung mit invertierbarem Differential. Diese erhalten wir, in dem wir $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ durch eine weitere Abbildung $\Theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ergänzen.

Nach Voraussetzung ist w ein regulärer Wert, also ist P per Definition ein regulärer Punkt, d.h. das Differential $Dg_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist ein Epimorphismus. Wir benötigen nun folgende allgemeine Aussage aus der linearen Algebra.

Behauptung. Es sei $\delta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein Epimorphismus. Dann existiert ein Epimorphismus $\Theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \delta \times \Theta: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (\delta(v), \Theta(v)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Da $\delta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein Epimorphismus ist können wir für $i = 1, \dots, k$ jeweils ein $v_i \in \mathbb{R}^n$ mit $\delta(v_i) = e_i$ wählen. Man kann nun leicht zeigen, dass $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig sind. Nach dem Basisergänzungssatz [N1, Satz 5.13] gibt es Vektoren $w_1, \dots, w_{n-k} \in \mathbb{R}^n$, so dass $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Wir betrachten nun den Epimorphismus

$$\begin{aligned} \Theta: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ \sum_{i=1}^k \mu_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{n-k} \nu_i \cdot w_i &\mapsto \sum_{i=1}^{n-k} \nu_i \cdot e_i. \end{aligned}$$

Dieser Epimorphismus hat nun die gewünschte Eigenschaft, denn $\delta \times \Theta$ schickt die Basis $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}$ auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$. $\square$

Es folgt also aus der Behauptung, dass es einen Epimorphismus $\Theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} Dg_P \times \Theta: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (Dg_P \cdot v, \Theta(v)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. Wir setzen $\mu := \Theta(P)$. Wir betrachten nun die Abbildung

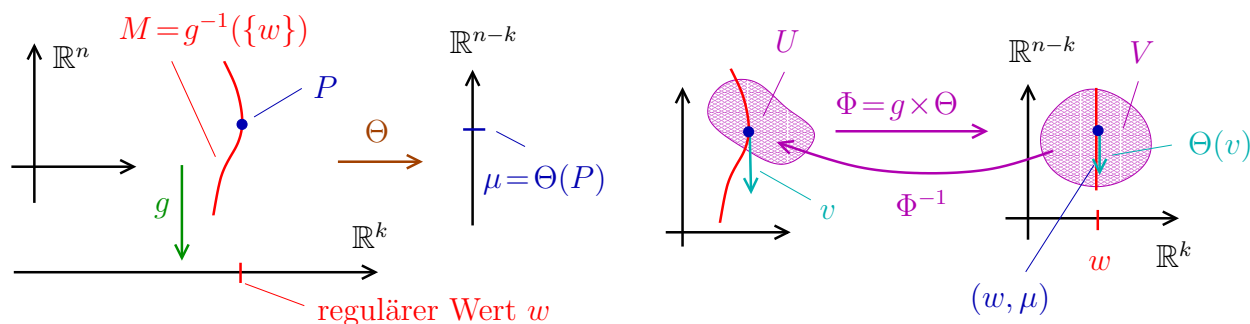
$$\begin{aligned}\Phi &:= g \times \Theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (g(v), \Theta(v)).\end{aligned}$$

Man kann leicht überprüfen, dass $D\Phi_P = Dg_P \times \Theta$. Insbesondere ist $D\Phi_P$ also ein Isomorphismus. Es folgt aus dem Satz 14.4 über die Umkehrabbildung, dass es eine offene Umgebung U von $P \in \mathbb{R}^n$ und eine offene Umgebung V von $\Phi(P) = (w, \mu) \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\Phi: U \rightarrow V$ bijektiv ist, und so dass die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}: V \rightarrow U$ stetig differenzierbar ist.

Es sei nun $v \in \ker(Dg_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \underbrace{\Phi^{-1}((w, \mu) + t \cdot (0, \Theta(v)))}_{\text{Kurve in } M = g^{-1}(\{w\}) \text{ durch } P} \Big|_{t=0} &= \underbrace{D(\Phi^{-1})_{(w, \mu)}}_{\text{Kettenregel 6.13}} \cdot (0, \Theta(v)) = \underbrace{(D\Phi_P^{-1})(0, \Theta(v))}_{\text{Satz 14.4 über die Umkehrabbildung}} = \underbrace{v}_{\text{da aus } v \in \ker(Dg_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k) \text{ folgt } D\Phi_P(v) = (0, \Theta(v))}.\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $v \in T_P M$. ■



Skizze für den Beweis von Satz 15.4.

Bemerkung. In der folgenden Diskussion werden wir nur noch den Fall $k = 1$ betrachten. Für $k = 1$ entspricht das Differential gerade dem Gradienten. Wir sehen also, dass ein Punkt $P \in X$ ein regulärer Punkt einer Abbildung $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist, genau dann, wenn $\text{Grad } g(P) \neq 0$.

Wir können jetzt folgendes freundliche Korollar zum Satz 15.4 vom regulären Wert formulieren.

Korollar 15.5. *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und es sei $w \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Wir setzen $M := g^{-1}(\{w\})$. Für jeden Punkt $P \in M$ gilt:*

$$T_P M = (\text{Grad } g(P))^\perp.$$

Beweis. Für jedes $P \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}T_P M &\underset{\text{Satz 15.4}}{=} \ker \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ v \mapsto Dg_P \cdot v \end{array} \right) \underset{\text{aus Satz 7.6 folgt } Dg_P \cdot v = \langle \text{Grad } g(P), v \rangle}{=} \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{Grad } g(P), v \rangle = 0\} = (\text{Grad } g(P))^\perp.\end{aligned}$$

■

Beispiel. Es seien nun $a_1, \dots, a_n$ positive reelle Zahlen. Wie oben betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_n^2. \end{aligned}$$

Wir hatten oben schon angemerkt, dass jedes $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein regulärer Wert von g . Wir betrachten wiederum das Ellipsoid

$$E(a_1, \dots, a_n) := g^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_n^2 = 1\}.$$

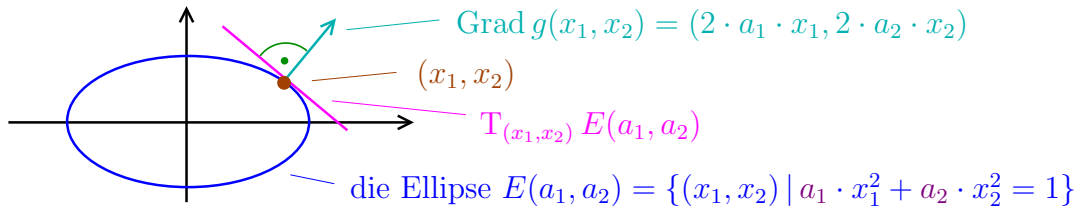
Aus Korollar 15.5 folgt, dass für jeden Punkt $(x_1, \dots, x_n) \in E(a_1, \dots, a_n)$ gilt:

$$T_{(x_1, \dots, x_n)} E(a_1, \dots, a_n) = \underbrace{(2 \cdot a_1 \cdot x_1, \dots, 2 \cdot a_n \cdot x_n)}_{=\text{Grad } g(x_1, \dots, x_n)}^\perp.$$

Wenn wir nun den Spezialfall $a_1 = \dots = a_n = 1$ betrachten, dann erhalten wir die Kugel S^{n-1} und wir sehen, dass

$$T_{(x_1, \dots, x_n)} S^{n-1} = (2x_1, \dots, 2x_n)^\perp = (x_1, \dots, x_n)^\perp.$$

Dies gibt uns einen neuen Beweis von Satz 15.2.



Beispiel. Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ offen, es sei $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und es sei $C \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist

$$M = g^{-1}(\{C\}) = \{x \in X \mid g(x) = C\}$$

insbesondere eine Niveaulinie von g . Korollar 15.5 besagt nun, dass diese Niveaulinie orthogonal zu den Gradienten von g ist. Dies ist genau die Aussage, welche wir schon auf Seite 74, ohne Beweis, formuliert hatten.

15.3. Die Methode der Lagrangemultiplikatoren. In diesem Kapitel werden wir eine Methode einführen, welche es in vielen Fällen erlaubt elegant lokale Extrema einer Funktion auf geeigneten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen.

Satz 15.6. (Satz über den Lagrange-Multiplikator) *Wir haben folgende Lage:*

- (1) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge der Form*

$$M = g^{-1}(\{w\}),$$

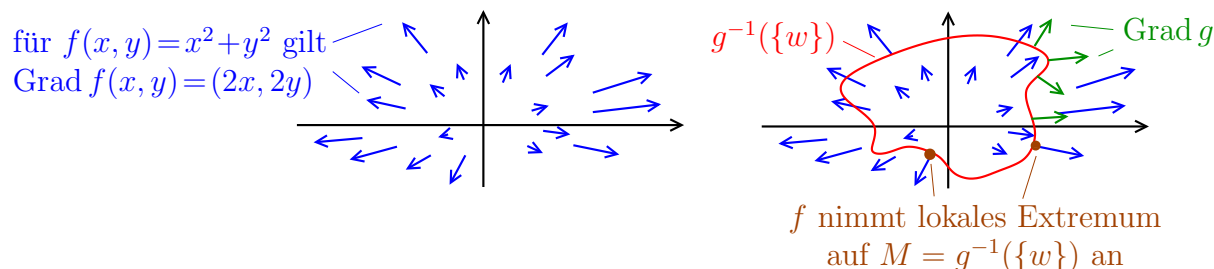
wobei $w \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert einer stetig differenzierbaren Funktion $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist, welche auf einer offenen Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist.

- (2) *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere differenzierbare Funktion.*

Wenn $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ an einem Punkt $x \in M$ ein lokales Extremum annimmt,⁵¹ dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass⁵²

$$\text{Grad } f(x) = \lambda \cdot \text{Grad } g(x).$$

↑
solch λ wird als **Lagrangemultiplikator** bezeichnet



Beispiel. Ganz ähnlich zur Diskussion auf Seite 112 betrachten wir die Funktion

$$f: S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overbrace{x^2 + y^2}^{=: g(x, y)} = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y.$$

Da S^1 kompakt ist folgt aus Korollar 3.10, dass f ein globales Maximum und Minimum annimmt. Die Punkte an denen das globale Maximum angenommen wird sind natürlich auch Punkte, an denen ein lokales Extremum angenommen wird. Es genügt also alle solche Punkte und deren Funktionswerte zu bestimmen. Wir finden diese Punkte nun mithilfe von Satz 15.6:

- (1) Wir suchen also Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, welche folgende Bedingungen erfüllen:
- (I) $x^2 + y^2 = 1$ (dies garantiert, dass $(x, y) \in S^1$),
 - (II) $\underbrace{\text{Grad } f(x, y)}_{=(1,1)} = \lambda \cdot \underbrace{\text{Grad } g(x, y)}_{=(2x, 2y)}$, d.h.
 - (II') $1 = \lambda \cdot 2x$
 - (II'') $1 = \lambda \cdot 2y$.

Dies sind nun also drei Gleichungen (I), (II') und (II'') in drei Variablen x, y, λ .

(a) Aus (II') folgt $\lambda \neq 0$.

(b) Aus (II') und (II'') folgt $x = \frac{1}{2\lambda}$ und $y = \frac{1}{2\lambda}$.

(c) Wir setzen (b) in (I) ein und erhalten $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$, also $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) Wir setzen (c) in (b) ein und erhalten die Punkte $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) =: P_+$ sowie $(x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) =: P_-$.

- (2) Die Extrema von f auf S^1 werden also bei den beiden Punkten P_+ und P_- angenommen.
- (3) Wir berechnen $f(P_-) = -\sqrt{2}$ und $f(P_+) = \sqrt{2}$.

⁵¹In der Literatur bezeichnet man öfters ein lokales Extremum der Funktion $f: M = g^{-1}(\{w\}) \rightarrow \mathbb{R}$ als *lokales Extremum von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $g = w$* .

⁵²Dies ist, wie so oft, nur eine notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums. Mit anderen Worten, wenn es solch einen Lagrangemultiplikator gibt, heißt das noch lange nicht, dass ein lokales Extremum vorliegt.

- (4) Wir erhalten aus (3), dass $f(P_-) = -\sqrt{2}$ das globale Minimum, und dass $f(P_+) = \sqrt{2}$ das globale Maximum von f auf S^1 ist.

Wir erhalten also das gleiche Ergebnis wie auf Seite 112. Die Rechnung verläuft ganz anders, je nach Geschmack ist die eine oder die andere Variante effizienter. Auf ähnliche Weise kann man den Satz 15.6 über den Lagrange-Multiplikator auch anwenden, um das globale Maximum einer Funktion $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Für den Beweis von Satz 15.6 benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 15.7. *Für jeden Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt: $U = (U^\perp)^\perp$.*

Beweis von Lemma 15.7. Wir machen folgende Beobachtungen:

- (1) Es folgt direkt aus der Definition, dass $U \subset (U^\perp)^\perp$.
- (2) Für einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ folgt aus Lemma 8.14: $\dim(V^\perp) = n - \dim(V)$.
- (3) Aus (2) folgt: $\dim((U^\perp)^\perp) = n - \dim(U^\perp) = \dim(U)$.

Aus (1) und (3) folgt: $U = (U^\perp)^\perp$. ■

Beweis von Satz 15.6. Wir nehmen an, dass die Funktion $f: M = g^{-1}(\{w\}) \rightarrow \mathbb{R}$ bei $x \in M$ ein lokales Extremum annimmt. Wir wollen zeigen, dass

$$\text{Grad } f(x) \in \mathbb{R} \cdot \text{Grad } g(x).$$

Aus Korollar 15.5 und Lemma 15.7 folgt, dass

$$\mathbb{R} \cdot \text{Grad } g(x) = (\text{T}_x M)^\perp.$$

Es genügt also folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Der Gradient $\text{Grad } f(x)$ ist orthogonal zu allen Vektoren in $\text{T}_x M$.

Sei also $v \in \text{T}_x M$. Dann gilt in der Tat:

$$\begin{array}{ccccccc} \langle \text{Grad } f(x), v \rangle & = & \langle \text{Grad } f(x), \gamma'(0) \rangle & = & \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0} & = & 0. \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{wir wählen eine Kurve } \gamma & & \text{nach Satz 7.6} & & \text{folgt aus Satz 10.2, denn nach} & \\ & \text{auf } M \text{ durch } x \text{ mit } \gamma'(0)=v & & & & \text{Lemma 10.1 nimmt } f \circ \gamma \text{ bei } t=0 & \\ & & & & & \text{ein lokales Extremum an} & \end{array}$$
■

Mithilfe des Fundamentalsatzes 8.11 der Algebra, welchen wir erst in Analysis III beweisen werden, hatten wir in Lemma 8.19 gesehen, dass jede symmetrische reelle Matrix einen reellen Eigenwert besitzt. Wir können nun einen weiteren Beweis dieser Aussage geben.

Satz 15.8. *Jede symmetrische Matrix $A \in \text{M}(n \times n, \mathbb{R})$ besitzt einen reellen Eigenwert.*

Mithilfe von Satz 15.8 kann man nun den Spektralsatz 8.20 für symmetrische Matrizen beweisen, ohne auf den Fundamentalsatz 8.11 der Algebra zurückgreifen zu müssen.

Beweis. Es sei $A \in \text{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, A \cdot x \rangle \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2. \end{array}$$

Da S^{n-1} kompakt ist folgt aus Korollar 3.10, dass f auf $S^{n-1} = g^{-1}(\{1\})$ ein globales Maximum an einem Punkt $x \in S^{n-1} = g^{-1}(\{1\})$ annimmt. Insbesondere nimmt f dort auch ein lokales Extremum an. Es folgt also aus Satz 15.6, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$(*) \quad \text{Grad } f(x) = \lambda \cdot \underbrace{\text{Grad } g(x)}_{=(2x_1, \dots, 2x_n)=2x}.$$

Behauptung. Es ist $\text{Grad } f(x) = 2 \cdot A \cdot x$.

Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} i\text{-te Koordinate von } \text{Grad } f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \langle x, A \cdot x \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \cdot a_{jk} \cdot x_k \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot x_k + \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_k = \sum_{j=1}^n 2 \cdot a_{ji} \cdot x_j = i\text{-te Koordinate von } 2 \cdot A \cdot x. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{denn } A \text{ ist symmetrisch} \end{aligned} \quad \boxplus$$

Wenn wir (*) mit den Berechnungen der Gradienten kombinieren erhalten wir, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass:

$$2 \cdot A \cdot x = \lambda \cdot 2 \cdot x.$$

Da $2 \cdot x \neq 0$ haben wir also gezeigt, dass A einen reellen Eigenwert, nämlich λ , besitzt. ■

16. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN: DEFINITION UND BEISPIELE

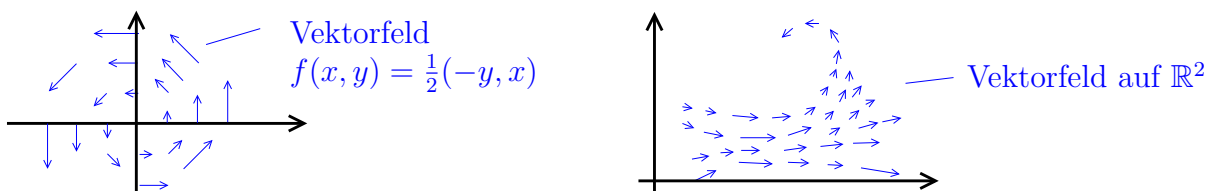
16.1. Definition von Differentialgleichungen.

Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Ein **Vektorfeld auf A** ist eine stetige Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Beispiel. Ein Vektorfeld auf A ordnet also jedem Punkt in $A \subset \mathbb{R}^n$ einen Vektor in $\mathbb{R}^n$ zu. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2}(-y, x) \end{aligned}$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Dieses Vektorfeld ist in der Abbildung auf der linken Seite skizziert.



Definition. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Eine **Lösung der Differentialgleichung**

$$y' = f(y)$$

ist eine differenzierbare Kurve $\varphi: I \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall, so dass für alle $t \in I$ gilt

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)).$$

Bemerkung. Eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist also eine Kurve φ , so dass zu jedem Zeitpunkt t die Ableitung durch den Vektor des Vektorfeldes f am Punkt $\varphi(t)$ gegeben ist.

Beispiel. Wir betrachten wiederum das Vektorfeld

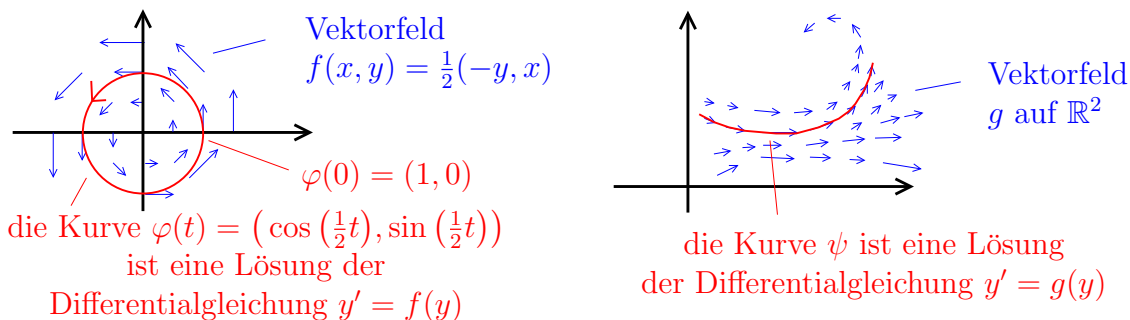
$$f(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x).$$

Dann ist

$$\varphi(t) = \left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right), \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt in der Tat

$$\varphi'(t) = \left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right), \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{2}t\right), \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \right) = f(\varphi(t)).$$



Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Ein variables Vektorfeld auf A besteht aus einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und einer stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} f: I \times A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, y) &\mapsto f(t, y). \end{aligned}$$

Bemerkung. Ein variables Vektorfeld definiert also insbesondere für ein fest gewähltes $t \in I$ ein Vektorfeld $y \mapsto f(t, y)$. Anders ausgedrückt, f ist ein Vektorfeld auf A , welches sich mit der “Zeit” t verändern kann. Umgedreht definiert jedes Vektorfeld v auf A durch $f(t, y) := v(y)$ auch ein variables Vektorfeld.

Wir können jetzt auch die obige Definition einer Lösung einer Differentialgleichung etwas verallgemeinern.

Definition. Es sei $f: I \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld auf $A \subset \mathbb{R}^n$. Eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

ist eine differenzierbare Kurve $\varphi: J \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $J \subset I$, so dass für alle $t \in J$ gilt

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Bemerkung. Eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist also eine Kurve φ , so dass zu jedem Zeitpunkt t die Ableitung gerade durch den Vektor des variablen Vektorfeldes am Punkt $\varphi(t)$ zur Zeit t gegeben ist.

Beispiel. Wir betrachten das variable Vektorfeld⁵³

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y) &\mapsto \frac{1}{t} \cdot y \end{aligned}$$

und die dazugehörige Differentialgleichung $y' = f(t, y) = \frac{1}{t} \cdot y$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto t \cdot \lambda \end{aligned}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$. In der Tat, denn für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\varphi'(t) = \lambda = \frac{1}{t} \cdot t \cdot \lambda = f(t, t \cdot \lambda) = f(t, \varphi(t)).$$

Bemerkung. Es gibt kein allgemeines Verfahren, um Differentialgleichungen zu lösen. Wir werden in diesem Kapitel verschiedene Verfahren kennenlernen, um bestimmte Typen von Differentialgleichungen zu lösen. In den folgenden Kapiteln werden wir dann die Theorie der Differentialgleichungen behandeln.

⁵³Das Vektorfeld zeigt an einem Punkt $y \in \mathbb{R}^2$ “nach außen” und hat die Länge $\frac{1}{t} \cdot \|y\|$, d.h. mit zunehmender Zeit werden die Vektoren immer kürzer.

16.2. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Wir betrachten jetzt im verbleibenden Teil des Kapitels nur noch Differentialgleichungen im Fall $n = 1$.

Definition. Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und es seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y' = f(t) \cdot g(y)$$

heißt **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**.

Beispiel. Die Differentialgleichung $y' = 2 \cdot t \cdot y^2$ ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Wir versuchen zuerst einmal die Differentialgleichung $y' = f(t) \cdot g(y)$ ganz naiv zu lösen. Hierbei führen wir folgende suggestive “Physikerrechnung” durch:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t) \cdot g(y) \\ \Rightarrow \frac{1}{g(y)} dy &= f(t) dt && \text{“wir bringen alle } y \text{ auf die gleiche Seite”} \\ \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int f(t) dt \\ \Rightarrow G(y) &= F(t) && \text{wobei } F, G \text{ Stammfunktionen von } f \text{ und } \frac{1}{g} \text{ sind} \\ \Rightarrow y &= G^{-1}(F(t)). \end{aligned}$$

Der folgende Satz besagt nun, dass unter geeigneten Voraussetzungen diese naive Rechnung in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t) \cdot g(y)$ liefert.

Satz 16.1. *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und es seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so dass $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Es sei $t_0 \in I$ und es sei $y_0 \in J$. Wir definieren*

$$\begin{aligned} F: I &\rightarrow \mathbb{R} && \text{und} && G: J &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^t f(s) ds && y &\mapsto \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds. \end{aligned}$$

Wenn $F(I) \subset G(J)$, dann ist⁵⁴

$$\begin{aligned} \varphi: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto G^{-1}(F(t)) \end{aligned}$$

die einzige Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t) \cdot g(y)$ auf dem Intervall I , welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = y_0$ erfüllt.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ in der Tat eine Lösung ist. Für jedes $t \in I$ gilt:

⁵⁴Die Voraussetzung $g(y) \neq 0$ impliziert, dass $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ durchgehend das gleiche Vorzeichen besitzt, d.h. G ist eine streng monotone Funktion, insbesondere besitzt G eine Umkehrfunktion.

$$\begin{array}{ccccc}
& \text{Kettenregel 6.13} & & \text{Umkehrregel 14.2} & \\
\varphi'(t) & = (G^{-1}(F(t)))' & \xrightarrow{\downarrow} & (G^{-1})'(F(t)) \cdot F'(t) & \xrightarrow{\downarrow} \frac{1}{G'(G^{-1}(F(t)))} \cdot F'(t) \\
& & & = \underbrace{g(G^{-1}(F(t)))}_{=\varphi(t)} \cdot f(t) & = g(\varphi(t)) \cdot f(t). \\
& \uparrow & & \uparrow & \\
& \text{aus dem Hauptsatz der Differential-} & & \text{Definition von } \varphi & \\
& \text{und Integralrechnung folgt } G' = \frac{1}{g} & & &
\end{array}$$

Wir haben also gezeigt, dass φ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(y) \cdot f(t)$ ist. Man kann zudem leicht verifizieren, dass $\varphi(t_0) = y_0$.

Wir zeigen nun noch die Eindeutigkeit der Lösung. Es sei also $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t) \cdot g(y)$ mit $\psi(t_0) = y_0$. Wir wollen zeigen, dass $\psi(t) = G^{-1}(F(t))$, oder anders ausgedrückt, dass $G(\psi(t)) = F(t)$ für alle $t \in I$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
G(\psi(t)) &= \int_{y_0=\psi(t_0)}^{\psi(t)} \frac{1}{g(u)} du && \text{Definition von } G \\
&= \int_{t_0}^t \frac{\psi'(s)}{g(\psi(s))} ds && \text{Substitutionsregel mit } u = \psi(s) \text{ rückwärts angewandt} \\
&= \int_{t_0}^t f(s) ds && \text{denn } \psi'(s) = f(s) \cdot g(\psi(s)), \text{ da } \psi \text{ Lösung von } y' = f(t) \cdot g(y) \\
&= F(t) && \text{Definition von } F. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel. Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung

$$y' = 2t \cdot y^2.$$

Es sei $c \neq 0$. Wir suchen die Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ erfüllt. Mit der Physikermethode erhalten wir Lösungen der Differentialgleichung $y' = 2 \cdot ty^2$ wie folgt

$$\frac{dy}{dt} = 2ty^2 \implies \frac{1}{y^2} dy = 2t dt \implies \int \frac{1}{y^2} dy = \int 2t dt \implies -\frac{1}{y} = t^2 + \underset{\uparrow}{D} \implies y = \frac{-1}{t^2 + D}.$$

da Stammfunktionen nur bis auf eine Konstante bestimmt sind
führen wir noch eine Konstante D ein

Wir wollen nun eine Lösung mit $\varphi(0) = c$. Wir setzen $t = 0$ ein und erhalten $D = -\frac{1}{c}$. Zusammengefasst erhalten wir aus Satz 16.1, dass

$$\varphi(t) = \frac{-1}{t^2 - \frac{1}{c}}$$

die einzige Lösung der Differentialgleichung $y' = 2ty^2$ mit $\varphi(0) = c$ ist. Wir betrachten nun noch das maximale Intervall auf dem φ definiert ist, und welches 0 enthält.

- Wenn $c < 0$, dann ist $\varphi(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

- Wenn $c > 0$, dann ist φ nicht für $t = \pm\sqrt{1/c}$ definiert. Also ist das maximale Intervall um 0 gegeben durch

$$I = (-\sqrt{1/c}, \sqrt{1/c}).$$

Anders ausgedrückt, für $c > 0$ divergiert die Lösung $\varphi(t)$ für $t \rightarrow \pm c^{-1/2}$. Insbesondere gibt es zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = c > 0$ keine Lösung der Differentialgleichung, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.⁵⁵

16.3. Homogene lineare Differentialgleichungen.

Definition. Es sei $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall I . Wir nennen eine Differentialgleichung der Form⁵⁶

$$y' = a(t) \cdot y$$

homogene lineare Differentialgleichung.

Satz 16.2. Es sei $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall I , es sei $t_0 \in I$ und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann besitzt die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' = a(t) \cdot y$$

genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt, nämlich

$$\varphi(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Beispiel. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Satz 16.2 besagt insbesondere, dass es genau eine differenzierbare Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi'(t) = a \cdot \varphi(t)$ und $\varphi(t_0) = c$ gibt, nämlich $\varphi(t) = c \cdot e^{a(t-t_0)}$.

Nachdem homogene lineare Differentialgleichungen ein Spezialfall von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen sind, kann man Satz 16.2 insbesondere mithilfe von Satz 16.1 beweisen. Wir geben im Folgenden allerdings einen unabhängigen, etwas einfacheren Beweis.

Beweis. Wir setzen also

$$\varphi(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Dann gilt

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \underset{\uparrow}{=} c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \cdot a(t) = \varphi(t) \cdot a(t).$$

folgt aus $\exp(g(t))' = \exp(g(t)) \cdot g'(t)$ und dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Zudem ist offensichtlich die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt.

⁵⁵Die Differentialgleichung $y' = 2ty^2$ ist für alle $t, y \in \mathbb{R}$ definiert. Warum besagt dann Satz 16.1 nicht, dass auch die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert?

⁵⁶Eine homogene lineare Differentialgleichung ist also ein Spezialfall einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Es sei nun $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung mit $\psi(t_0) = c$. Wir wollen zeigen, dass $\psi(t) = \varphi(t)$ für alle t . Nachdem $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ genügt es zu zeigen, dass die Quotientenfunktion $t \mapsto \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$ konstant ist. Dies ist aber der Fall, denn

$$\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)' = \frac{\varphi(t) \cdot \psi'(t) - \psi(t) \cdot \varphi'(t)}{\varphi(t)^2} = \frac{\varphi(t) \cdot a(t) \cdot \psi(t) - \psi(t) \cdot a(t) \cdot \varphi(t)}{\varphi(t)^2} = 0.$$

$\uparrow$ Quotientenregel $\uparrow$ da φ, ψ Lösung der DGL $y' = a(t) \cdot y$

16.4. Inhomogene lineare Differentialgleichungen. Wir betrachten jetzt eine Verallgemeinerung der homogenen linearen Differentialgleichung des letzten Teilkapitels.

Definition. Es seien $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I . Wir nennen eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(t) \cdot y + b(t)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung.

Sei nun $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Das Ziel ist eine Lösung φ der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ zu finden, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt.

- Sei $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung der *homogenen* linearen Differentialgleichung $y' = a(t) \cdot y$ zu der Anfangsbedingung $\psi(t_0) = 1$, welche wir beispielsweise mithilfe von Satz 16.2 finden können.
- Es sei $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere beliebige differenzierbare Funktion.

Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen das Produkt $\varphi(t) = \psi(t) \cdot u(t)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a \cdot y + b$ ist, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt. Es ist

$$\varphi' = (\psi \cdot u)' = \underbrace{\psi' \cdot u}_{\text{Produktregel}} + \underbrace{\psi \cdot u'}_{\substack{\text{da } \psi \text{ Lösung} \\ \text{von } y' = a(t) \cdot y}} = \underbrace{a \cdot \psi \cdot u}_{=\varphi} + \psi \cdot u' = \underbrace{a \cdot \varphi}_{\text{Definition von } \varphi} + \psi \cdot u'.$$

Wir sehen also, dass

$$\varphi' = a \cdot \varphi + b$$

genau dann, wenn

$$b = \psi \cdot u'.$$

Nachdem ψ und b schon gegeben sind, müssen wir nach u “auflösen”, und dieses geschieht wählen. Die obige Gleichung gilt *genau dann*, wenn⁵⁷

$$u' = \frac{1}{\psi} \cdot b,$$

oder mit anderen Worten, *genau dann* wenn

$$u(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\psi(s)} \cdot b(s) ds + \text{const.}$$

⁵⁷Aus Satz 16.2 folgt, dass $\psi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Wir können also in der Tat durch ψ teilen.

Die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ ist zudem genau dann erfüllt, wenn wir die Integrationskonstante gleich c setzen. Wir erhalten nun folgenden Satz:

Satz 16.3. *Es seien $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I . Es sei $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Die einzige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = a(t) \cdot y + b(t),$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt, ist gegeben durch die Funktion

$$\varphi(t) = \psi(t) \cdot \left(c + \int_{t_0}^t \frac{1}{\psi(s)} \cdot b(s) ds \right)$$

wobei

$$\psi(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Beweis. Wir haben vor dem Satz schon bewiesen, dass φ eine Lösung der Differentialgleichung ist (und man kann das auch noch mal leicht durch Einsetzen nachweisen). Zudem ist $\psi(t_0) = 1$, es folgt, dass $\varphi(t_0) = c$. Die Funktion φ erfüllt also auch die gewünschte Anfangsbedingung.

Wir müssen nun noch zeigen, dass ψ die einzige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ ist, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt. Sei dazu $\theta(t)$ eine weitere Lösung. Nachdem $\psi(t) \neq 0$ für alle t , existiert eine Funktion v , nämlich $v(t) = \frac{\theta(t)}{\psi(t)}$, so dass $\theta(t) = \psi(t) \cdot v(t)$. Aber vor dem Satz hatten wir schon gesehen, dass es genau eine solche Funktion v mit $v(t_0) = c$ gibt, nämlich $v = u$. Es folgt also, dass $\theta = \varphi$. ■

Beispiel. Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' = 2 \cdot t \cdot y + t^3.$$

Wir suchen eine Lösung, welche die Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ erfüllt. Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung $y' = 2t \cdot y$ besitzt nach Satz 16.2 die Lösung

$$\psi(t) = \exp \left(\int_0^t 2s ds \right) = \exp(t^2),$$

welche die Anfangsbedingung $\psi(0) = 1$ erfüllt. Aus dem obigen Satz 16.3 folgt, dass die einzige Lösung der Differentialgleichung $y' = 2y + t^3$ mit $\varphi(0) = c$ gegeben ist durch

$$\varphi(t) = e^{t^2} \cdot \left(c + \int_0^t s^3 \cdot e^{-s^2} ds \right) = e^{t^2} \cdot \left(c + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (t^2 + 1) \cdot e^{-t^2} \right).$$

das Integral bestimmt man mithilfe der Substitution $u = -s^2$ und partieller Integration

17. DER EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ

Es sei $y' = f(t, y)$ eine Differentialgleichung. Es stellen sich folgende Fragen:

- (1) Besitzt die Differentialgleichung immer eine Lösung?
- (2) Ist eine Lösung, zu einer gegebenen Anfangsbedingung, eindeutig bestimmt?

In allen bisherigen Beispielen haben wir gesehen, dass beide Fragen bejaht werden können. In diesem Kapitel wollen wir auf beide Fragen ganz allgemein eingehen.

17.1. Lipschitz-stetige Abbildungen. Bevor wir uns den oben genannten Fragen zuwenden, müssen wir allerdings noch kurz ein etwas trockenes Kapitel abarbeiten.

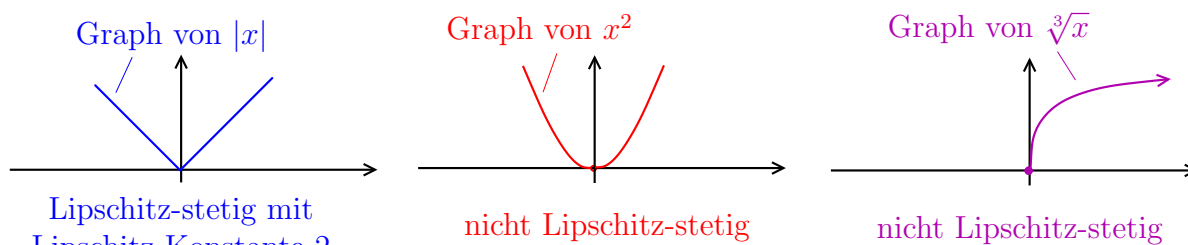
Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir sagen, f ist **Lipschitz-stetig** mit Lipschitz-Konstante L , wenn für alle $x, y \in D$ gilt, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|.$$

Bemerkung. Es folgt aus Lemma 13.4, dass jede Lipschitz-stetige Abbildung auch stetig ist.

Beispiel. Wir werden folgende Beispiele teilweise im (Präsenz-) Übungsblatt 11 behandeln:

$a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 2 \cdot x$	$b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x $	$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$	$d: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \sqrt{x}$
Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 2	Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1	nicht Lipschitz-stetig	nicht Lipschitz-stetig



Der folgende Satz, welcher direkt aus dem Schrankensatz 12.1 folgt, gibt uns nun viele weitere Beispiele von Lipschitz-stetigen Funktionen.

Satz 17.1. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass $|f'(x)| \leq C$ für alle inneren Punkte x von I , dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante C .

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir sagen, f ist **lokal Lipschitz-stetig** mit Lipschitz-Konstante L , falls jeder Punkt $P \in D$ eine Umgebung U besitzt, so dass $f: D \cap U \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig ist.

Beispiel.

- (1) Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} c: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist zwar nicht Lipschitz-stetig, jedoch ist sie lokal Lipschitz-stetig. In der Tat, denn für $a \in \mathbb{R}$ ist die Einschränkung von f auf $[a-1, a+1]$ nach Satz 17.1 Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $2 \cdot (|a| + 1)$.

(2) Die Funktion

$$\begin{aligned} d: [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

ist auf keinem Intervall $[0, \epsilon]$ Lipschitz-stetig, also ist d nicht lokal Lipschitz-stetig.

Wir schreiten jetzt zur Definition einer etwas verwirrenderen Version von Lipschitz-Stetigkeit.

Definition. Es sei $G \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und es sei

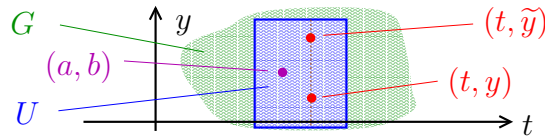
$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (t, y) &\mapsto f(t, y) \end{aligned}$$

eine Abbildung.

- (1) Wir sagen die Abbildung f ist Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen mit Lipschitzkonstante $L \geq 0$, wenn für alle $(t, y), (t, \tilde{y}) \in G$ gilt:

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|.$$

- (2) Wir sagen f ist **lokal** Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable, falls jeder Punkt $(a, b) \in G$ eine Umgebung U besitzt, so dass $f: G \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist.



Beispiel.

- (1) Wie oben sieht man, dass die Funktion
- $$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) &\mapsto y^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

am Punkt $(0, 0)$ nicht lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist.

- (2) Wir betrachten die Funktion
- $$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) &\mapsto t^{\frac{2}{3}} + y^2. \end{aligned}$$

Für alle $(t, y), (t, \tilde{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t, y) - f(t, \tilde{y}) = (t^{\frac{2}{3}} + y^2) - (t^{\frac{2}{3}} + \tilde{y}^2) = y^2 - \tilde{y}^2.$$

Es folgt nun, fast mit dem gleichen Argument wie zuvor, dass die Funktion f zwar nicht Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable ist, aber dass die Funktion f immerhin lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable ist.

Satz 17.2. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen und es sei*

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, y) &\mapsto f(t, y) \end{aligned}$$

eine Abbildung, welche bezüglich der Variablen $y = (y_1, \dots, y_n)$ stetig partiell differenzierbar ist. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen.

Beispiel. Wir betrachten wiederum die Funktion $f(t, y) = t^{\frac{2}{3}} + y^2$. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, diese Funktion ist stetig, also ist f bezüglich der y -Variable stetig partiell differenzierbar. Satz 17.2 macht also noch einmal die Aussage, dass die Funktion f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable ist.

Beweis. Wir betrachten den Fall $G = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, der allgemeine Fall wird ganz ähnlich bewiesen. Es sei also $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Wir wählen ein beliebiges $r > 0$. Wir betrachten folgende Umgebung von (a, b) :

$$U := \{(t, y) \mid \|t - a\| \leq r \text{ und } \|y - b\| \leq r\},$$

welche nach dem Satz 3.7 von Heine–Borel kompakt ist.

Wir werden jetzt zeigen, dass f Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen auf U ist. Es seien also (t, y) und $(t, y + v)$ in U . Dann gilt

$$\|f(t, y) - f(t, y + v)\| \leq \|v\| \cdot n^2 \cdot \max_{\substack{t \in [0, 1] \\ i, j = 1, \dots, n}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x + t \cdot v) \right| \leq \|v\| \cdot n^2 \cdot \underbrace{\max_{w \in U} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(w) \right|}_{\substack{\text{da } U \text{ kompakt, ist dieser} \\ \text{Term nach Korollar 3.10} \\ \text{durch ein } C \text{ beschränkt}}} \leq \|v\| \cdot n^2 \cdot C.$$

$\uparrow$
 folgt aus dem
 Schrankensatz 12.2
 angewandt auf $w \mapsto f(t, w)$
 und aus Lemma 6.12

Wir haben also gezeigt, dass f auf U Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen mit Lipschitzkonstante $n^2 \cdot C$ ist. ■

17.2. Der Existenzsatz von Picard–Lindelöf.

Herausforderung. *Es sei*

$$y' = f(t, y)$$

*eine Differentialgleichung. Wir möchten nun gerne zeigen, dass es zu jeder Anfangsbedingung $\varphi(s) = c$ eine Lösung φ gibt, welche zumindest auf einem kleinen offenen Intervall $(s - \epsilon, s + \epsilon)$ definiert ist.*⁵⁸

Das Hilfsmittel, welches wir dabei verwenden wollen, um solch ein φ zu finden ist der Banachsche Fixpunktsatz 13.3. Zur Erinnerung, dieser lautet wie folgt.

⁵⁸Im Beispiel nach Satz 16.1 hatten wir gesehen, dass selbst wenn die Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert ist, und wenn $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld ist, welches lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist, dann ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ nicht notwendigerweise auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wir können also nicht hoffen, eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ zu finden.

Satz 13.3. (Banachscher Fixpunktsatz) *Es sei A eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes⁵⁹ $(V, \|\cdot\|)$ und es sei $T: A \rightarrow A$ eine Kontraktion⁶⁰. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $a \in A$ mit $a = T(a)$.*

Es stellen sich nun verschiedene Fragen:

- (A) Was soll der Banachraum in unserem Fall sein?
- (B) Wie können wir das Lösen einer Differentialgleichung als Fixpunktproblem formulieren?
- (C) Welche Kontraktion T wollen wir verwenden?
- (D) Welche abgeschlossene Teilmenge A wollen wir verwenden?

Antwort zu (A). Wir suchen die Lösung einer Differentialgleichung, d.h. wir suchen eine Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall I . Oder noch mal anders ausgedrückt, wir suchen einen Punkt im Vektorraum der Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Satz 13.2 besagt, dass für jedes beliebige kompakte Intervall $[a, b]$ der Vektorraum

$$C([a, b], \mathbb{R}^n) = \text{Vektorraum aller stetigen Abbildungen } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit der Supremumsnorm, d.h. mit der Norm

$$\|\varphi\| = \sup \{ \|\varphi(t)\| \mid t \in [a, b] \}$$

ein Banachraum ist.

Antwort zu (B). Das folgende Lemma erlaubt es uns nun das Auffinden einer Funktion φ mit $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ als Fixpunktproblem umzuformulieren.

Lemma 17.3. *Es sei I ein Intervall, es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f: I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld und es sei $(s, c) \in I \times C$. Für eine Kurve $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $J \subset I$ sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

- (1) φ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(s) = c$, d.h. es ist

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{für alle } t \in J, \text{ und es gilt } \varphi(s) = c.$$

- (2) Es gilt

$$\varphi(t) = c + \int_s^t f(z, \varphi(z)) dz \quad \text{für alle } t \in J.$$

Beweis.

⁵⁹Zur Erinnerung, ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Vektorraum, d.h. ein normierter Vektorraum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

⁶⁰Eine Abbildung $T: A \rightarrow A$ heißt *Kontraktion*, wenn es einen Kontraktionsfaktor $\Theta \in [0, 1)$ gibt, d.h. so dass

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \Theta \cdot \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in A.$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Nehmen wir zuerst an, dass φ eine Lösung der Differentialgleichung bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(s) = c$ ist. Dann folgt für alle $t \in J$, dass

$$\int_s^t f(z, \varphi(z)) dz \stackrel{\uparrow}{=} \int_s^t \varphi'(z) dz \stackrel{\uparrow}{=} \varphi(t) - \varphi(s) = \varphi(t) - c.$$

denn φ ist Lösung der DGL $y' = f(t, y)$ folgt aus dem HDI

(2) $\Rightarrow$ (1) Nehmen wir nun an, dass φ die Integralgleichung erfüllt. Dann gilt $\varphi(s) = c$ und für alle $t \in J$ gilt:

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t) = \frac{d}{dt} \left(c + \int_s^t f(z, \varphi(z)) dz \right) \stackrel{\uparrow}{=} f(t, \varphi(t)).$$

folgt aus dem HDI ■

Antwort zu (C). Es sei $y' = f(t, y)$ eine Differentialgleichung, wobei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist. Wir suchen eine Lösung mit $\varphi(s) = c$. Es sei erst einmal $\epsilon > 0$ beliebig. Wir betrachten im Folgenden den Banachraum $C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ zusammen mit der Abbildung

$$T: C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$$

$$\psi \mapsto \left(\begin{array}{ll} T(\psi): [s - \epsilon, s + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto c + \int_s^t f(z, \psi(z)) dz \end{array} \right).$$

Für $\varphi \in C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ gilt, per Definition von T :

$$\begin{aligned} \varphi = T(\varphi) &\iff \varphi(t) = T(\varphi)(t) = c + \int_s^t f(z, \varphi(z)) dz \quad \text{für alle } t \in [s - \epsilon, s + \epsilon] \\ &\iff \varphi \text{ löst die Integralgleichung aus Lemma 17.3 (2).} \end{aligned}$$

Es genügt nun also zu zeigen, dass T einen Fixpunkt besitzt. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz 13.3 folgt, dass wir eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ finden müssen, so dass $T: A \rightarrow A$ eine Kontraktion ist.

Antwort zu (D). Wir müssen also besser verstehen, unter welchen Voraussetzungen die Abbildung T kontrahierend ist. Es seien nun $\varphi, \psi \in C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|T(\varphi) - T(\psi)\| &= \sup_{t \in [s - \epsilon, s + \epsilon]} \|T(\varphi)(t) - T(\psi)(t)\| \\ &= \sup_{t \in [s - \epsilon, s + \epsilon]} \left\| \int_s^t f(z, \varphi(z)) - f(z, \psi(z)) dz \right\| \\ &\leq \sup_{\substack{\uparrow \\ t \in [s - \epsilon, s + \epsilon]}} \int_s^t \|f(z, \varphi(z)) - f(z, \psi(z))\| dz = (*) \end{aligned}$$

folgt aus Lemma 4.3

Um zu zeigen, dass T kontrahierend ist wollen wir als ersten Schritt zumindest $(*)$ durch $\|\varphi - \psi\|$ abschätzen. Anders ausgedrückt, wir müssen den Integranden durch $\|\varphi - \psi\|$ abschätzen. Wir können dies dadurch bewerkstelligen, dass wir im Folgenden annehmen, dass f (lokal) Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen mit einer Lipschitz-Konstante $L > 0$ ist.

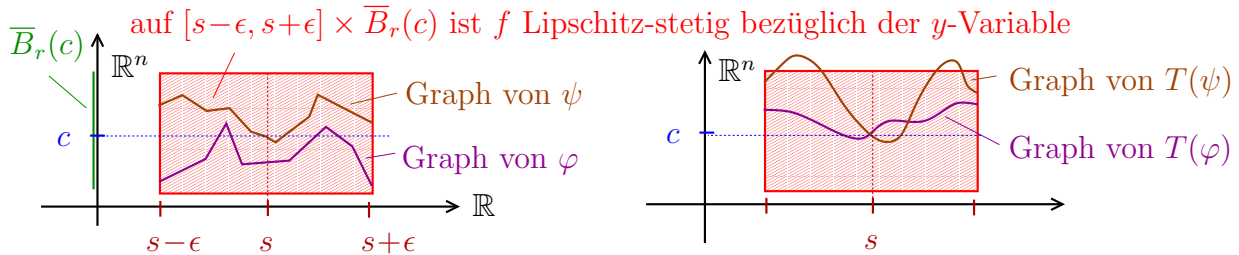
Wir nehmen jetzt an, es gibt ein $r > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Abbildung f , eingeschränkt auf $[s - \epsilon, s + \epsilon] \times \overline{B}_r(c)$ ist Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable mit Lipschitz-Konstante L .
- (2) Für alle $z \in [s - \epsilon, s + \epsilon]$ gilt $\varphi(z), \psi(z) \in \overline{B}_r(c)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (*) &= \sup_{t \in [s-\epsilon, s+\epsilon]} \int_s^t \|f(z, \varphi(z)) - f(z, \psi(z))\| dz \\
 &\leq \sup_{t \in [s-\epsilon, s+\epsilon]} \int_s^t L \cdot \|\varphi - \psi\| dz \leq L \cdot |t - s| \cdot \|\varphi - \psi\| \leq L \cdot \epsilon \cdot \|\varphi - \psi\|. \\
 &\quad \uparrow \\
 &\text{aus (1) und (2) folgt, dass für alle } z \in [s - \epsilon, s + \epsilon] \text{ gilt:} \\
 &\quad f(z, \varphi(z)) - f(z, \psi(z)) \leq L \cdot \|\varphi(z) - \psi(z)\| \leq L \cdot \|\varphi - \psi\|
 \end{aligned}$$

Wenn wir uns jetzt beispielsweise auf $\epsilon = \frac{1}{2L}$ einschränken, dann ist also die Abbildung T kontrahierend, mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$. Also liegt es nahe A als eine geeignete Teilmenge von $C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ zu wählen. Die genaue Wahl von A wird im nächsten Beweis erarbeitet.



Wir sehen also, dass es hilfreich ist anzunehmen, dass f Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Nachdem wir uns nur Gedanken über Lösungen auf kleinen Intervallen machen, genügt es wohl anzunehmen, dass f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wir können also jetzt den Hauptsatz von diesem Kapitel formulieren.

Satz 17.4. (Existenzsatz von Picard–Lindelöf) *Es sei I ein Intervall, es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f: I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld, welches lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable ist. Dann gibt es zu jedem $(s, c) \in I \times C$ ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi: (s - \epsilon, s + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung*

$$y' = f(t, y),$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(s) = c$ erfüllt.

Bemerkung. Die Existenzaussage für Lösungen gilt auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass f stetig ist. Dies ist dann der Satz von Peano [W, Seite 76], welchen wir nicht beweisen werden.

Beweis. Wir beweisen den Existenzsatz für den Spezialfall $I = \mathbb{R}$ und $C = \mathbb{R}^n$. Der allgemeine Fall wird ganz ähnlich bewiesen. Es sei also $s \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung

ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable. Es existiert daher ein $\delta > 0$ und ein $r > 0$, so dass die Einschränkung von f auf die kompakte Teilmenge

$$Q := [s - \delta, s + \delta] \times \overline{B}_r(c) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable mit einer Lipschitzkonstante $L > 0$ ist. Es sei nun $\epsilon \in (0, \delta]$. Es folgt aus der Diskussion vor Satz 17.4, dass für Funktionen auf dem Intervall $[s - \epsilon, s + \epsilon]$ gilt

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq L \cdot \epsilon \cdot \|\varphi - \psi\|,$$

solange auf dem Definitionsbereich gilt, dass $\|\varphi(z) - c\| \leq r$ und $\|\psi(z) - c\| \leq r$. Insbesondere ist also für jedes $\epsilon \in (0, \delta]$ mit $\epsilon \leq \frac{1}{2L}$ die Abbildung

$$T: A_\epsilon := \underbrace{\{\psi \in C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|\psi - c\| \leq r\}}_{\substack{\text{abgeschlossene Teilmenge} \\ \text{nach der Diskussion auf Seite 24}}} \rightarrow C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$$

kontrahierend mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$. Wir müssen nun also noch sicher stellen, dass $T(A_\epsilon) \subset A_\epsilon$. Es sei also $\psi \in A_\epsilon$. Wir wollen also wissen, ob $\|T(\psi) - c\| \leq r$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|T(\psi) - c\| &= \sup_{t \in [s - \epsilon, s + \epsilon]} \|T(\psi)(t) - c\| = \sup_{t \in [s - \epsilon, s + \epsilon]} \left\| \int_s^t f(z, \psi(z)) dz \right\| \leq \sup_{t \in [s - \epsilon, s + \epsilon]} \int_s^t \underbrace{\|f(z, \psi(z))\|}_{\substack{\in Q, \text{ da } \psi \in A_\epsilon}} dz \\ &\quad \uparrow \text{Definition von } T(\psi) \quad \uparrow \text{nach Lemma 4.3} \\ &\leq \sup_{t \in [s - \epsilon, s + \epsilon]} |t - s| \cdot \underbrace{\max \{\|f(r, y)\| \mid (r, y) \in Q\}}_{\substack{=: M, \text{ das Maximum existiert nach} \\ \text{nach Korollar 3.10, da } Q \text{ kompakt}}} = \epsilon \cdot M. \end{aligned}$$

Damit $T(A_\epsilon) \subset A_\epsilon$ muss auch $\|T(\psi)\| \leq r$ gelten. Dies können wir dadurch erreichen, dass $\epsilon \cdot M \leq r$, d.h. in dem wir sicher stellen, dass $\epsilon \leq \frac{r}{M}$.

Zusammengefasst haben wir nun folgende Aussage bewiesen. Für

$$\epsilon := \min \left\{ \delta, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L} \right\} \quad \text{und} \quad A := A_\epsilon := \{\psi \in C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|\psi - c\| \leq r\}.$$

schränkt sich $T: A \rightarrow C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ auf eine kontrahierende Abbildung $T: A \rightarrow A$ ein. Diese Abbildung $T: A \rightarrow A$ besitzt nun nach dem Banachschen Fixpunktsatz 13.3 genau einen Fixpunkt $\varphi \in A \subset C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$. Es folgt aus Lemma 17.3, dass die Abbildung φ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist. ■

17.3. Das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren. In dem Beweis vom Banachschen Fixpunktsatz 13.3 hatten wir folgende, etwas stärkere Aussage bewiesen:

Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes $(V, \|\cdot\|)$ und es sei $T: A \rightarrow A$ eine Kontraktion. Es sei $v_0 \in A$ beliebig. Dann konvergiert die durch $v_k := T(v_{k-1})$ rekursiv definiert Folge gegen ein $v \in A$ mit $T(v) = v$.

Es sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld, welches lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist und es sei zudem $(s, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir suchen eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y),$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(s) = c$ erfüllt. Es sei nun $\varphi_0: [s - \epsilon, s + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ erst einmal eine beliebige stetige Abbildung mit $\varphi_0(s) = c$.⁶¹ Wir erinnern uns an folgende Abbildung, welche wir auf Seite 159 eingeführt hatten:

$$T: C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$$

$$\psi \mapsto \left(\begin{array}{ll} T(\psi): [s - \epsilon, s + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto c + \int_s^t f(z, \psi(z)) dz \end{array} \right).$$

Wir wenden diese Abbildung nun iterativ an und wir erhalten die Folge von Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) &:= c + \int_s^t f(z, \varphi_0(z)) dz \\ \varphi_2(t) &:= c + \int_s^t f(z, \varphi_1(z)) dz \\ \varphi_3(t) &:= c + \int_s^t f(z, \varphi_2(z)) dz \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für geeignetes $\epsilon > 0$ folgt aus der obigen Formulierung des Banachschen Fixpunktsatzes und aus der Diskussion auf Seite 161, dass diese Folge von Funktionen im Banachraum $C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ gegen eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ konvergiert.

Beispiel. Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung $y' = 2t \cdot y$. Wir wollen eine Lösung finden, welche die Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ erfüllt. Wir setzen

$$\varphi_0(t) = c.$$

Mit $f(t, y) = 2t \cdot y$ erhalten wir die Funktionenfolge

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= c + \int_0^t 2z \cdot \varphi_0(z) dz = c + \int_0^t 2z \cdot c dz = c \cdot (1 + t^2) \\ \varphi_2(t) &= c + \int_0^t 2z \cdot \varphi_1(z) dz = c + \int_0^t 2z \cdot c \cdot (1 + z^2) dz = c \cdot (1 + t^2 + \frac{t^4}{2}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mit einem Induktionsargument kann man nun beweisen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\varphi_k(t) = c \cdot \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2k}}{k!} \right).$$

Für jedes $b > 0$ konvergiert diese Folge von Funktionen im Banachraum $C([-b, b], \mathbb{R})$ gegen

$$\varphi(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} c \cdot \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2k}}{k!} \right) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^k}{k!} = c \cdot \exp(t^2).$$

⁶¹Wir könnten beispielsweise die konstante Funktion $\varphi_0(t) = c$ wählen.

Die Funktion $\varphi(t) = c \cdot \exp(t^2)$ ist also eine Lösung der Differentialgleichung $y' = 2 \cdot t \cdot y$. Dies kann man natürlich auch durch Einsetzen leicht verifizieren oder mithilfe der Methode der getrennten Variablen beweisen.

Bemerkung. Es ist natürlich unwahrscheinlich, dass für eine beliebige vorgegebene Differentialgleichung, die Rechnung so schön aufgeht, wie in dem gerade durchgeführten Beispiel $y' = 2 \cdot t \cdot y$. Das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren kann aber durchaus verwendet werden, um Näherungslösungen von Differentialgleichungen zu finden.

17.4. Der Eindeutigkeitssatz. Wir gehen nun der Frage nach, ob eine Lösung einer Differentialgleichung zu einer vorgegebenen Anfangsbedingung immer eindeutig ist.

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y^{\frac{2}{3}}.$$

Offensichtlich ist

$$\varphi(t) := 0$$

eine Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi(0) = 0$. Andererseits kann man diese Differentialgleichung mithilfe der Methode der getrennten Variablen von Seite 150 lösen. Man erhält die Funktion

$$\psi(t) := \frac{1}{27} t^3.$$

Es gilt $\psi(0) = 0$ und

$$\psi'(t) = \frac{1}{9} t^2 = \left(\frac{1}{27} t^3\right)^{\frac{2}{3}} = \psi(t)^{\frac{2}{3}}.$$

Wir sehen also, dass $\psi(t)$ in der Tat eine Lösung für die gleiche Anfangsbedingung ist. Die Differentialgleichung $y' = y^{\frac{2}{3}}$ besitzt also keine eindeutig bestimmte Lösung zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$. Man kann das obige Beispiel noch wie folgt verallgemeinern: es sei $a \leq 0$ und $b \geq 0$, dann kann man leicht nachweisen, dass

$$\phi(t) := \begin{cases} \frac{1}{27} \cdot (t - a)^3, & \text{für } t < a, \\ 0, & \text{für } t \in [a, b], \\ \frac{1}{27} \cdot (t - b)^3, & \text{für } t > b. \end{cases}$$

ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist, welche die Anfangsbedingung $\phi(0) = 0$ erfüllt.

Wir sehen also, dass eine Differentialgleichung im Allgemeinen keine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Im Hinblick auf die Tatsache, dass in unserem Beispiel die Funktion $f(y) = y^{\frac{2}{3}}$ nicht Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist, und im Hinblick auf den Existenzsatz 17.4 von Picard-Lindelöf liegt es nahe sich einzuschränken, auf variable Vektorfelder $f(t, y)$, welche lokal Lipschitz-stetig in der y -Variable sind. In der Tat gilt folgender Satz.

Satz 17.5. (Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $C \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und es sei $f: I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld,*

welches lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wenn die Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

zwei Lösungen $\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt, welche an einem Punkt $s \in J$ übereinstimmen, dann ist

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad \text{für alle } t \in J.$$

Bemerkung. Der Eindeutigkeitssatz 17.5 hat die gleichen Voraussetzungen wie der Existenzsatz 17.4. Es folgt also insbesondere, dass die Lösung von Satz 17.4 auf dem Intervall $(s - \epsilon, s + \epsilon)$ zudem eindeutig ist.

Bevor wir den Eindeutigkeitssatz 17.5 beweisen, formulieren wir zuerst folgendes Lemma, welches ein Kriterium dafür gibt, dass zwei Funktionen auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen.

Lemma 17.6. *Es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei stetige Funktionen. Wir nehmen an, dass folgende zwei Aussagen erfüllt sind:*

- (1) *es gibt ein $s \in \mathbb{R}$ mit $f(s) = g(s)$,*
- (2) *zu jedem $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) = g(b)$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass f und g auf dem Intervall $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ übereinstimmen.*

Dann stimmen f und g auf ganz $\mathbb{R}$ überein.

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass f und g auf dem Intervall $[s, \infty)$ übereinstimmen. Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall, es gibt also ein $x > s$ mit $f(x) \neq g(x)$. Wir betrachten

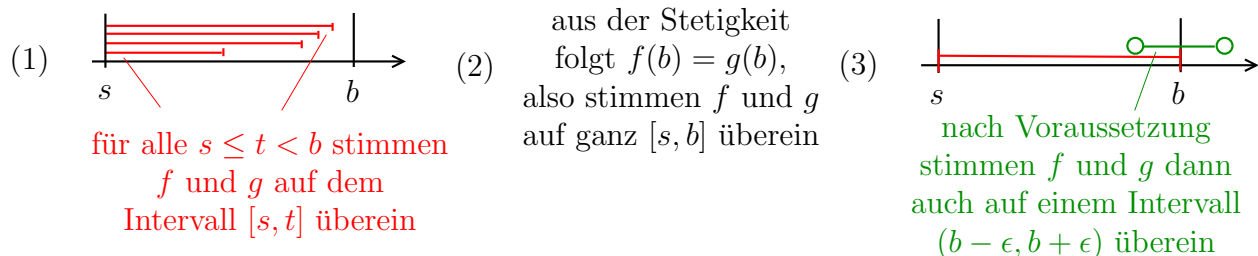
$$T := \{t \geq s \mid \text{die Funktionen } f \text{ und } g \text{ stimmen auf } [s, t] \text{ überein}\}.$$

Nach unserer Annahme ist $s \in T$ und T ist durch x nach oben beschränkt. Wir setzen

$$b := \sup(T).$$

Aus der Definition von b folgt, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $t \in [b - \epsilon, b]$ mit $f(t) = g(t)$ gibt. Aus der Stetigkeit von f und g erhalten wir, dass $f(b) = g(b)$. Nach Voraussetzung gibt es dann aber ein $\epsilon > 0$, so dass f und g auf dem Intervall $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ übereinstimmen. Nachdem f und g zudem auf $[s, b]$ übereinstimmen, sehen wir also, dass f und g sogar auf dem Intervall $[s, b + \epsilon)$ gleich sind. Wir sehen also, dass $b + \frac{\epsilon}{2} \in T$, im Widerspruch zur Definition von b . Wir haben also bewiesen, dass f und g auf dem Intervall $[s, \infty)$ übereinstimmen.

Die Aussage, dass f und g auf dem Intervall $(-\infty, s]$ ebenfalls übereinstimmen wird ganz analog bewiesen. ■



Wir wenden uns jetzt dem Beweis des Eindeutigkeitsatzes zu:

Beweis von Satz 17.5. Wir behandeln nur den Fall, dass $I \times C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $J = \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall wird ganz ähnlich bewiesen. Es sei also $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Zudem seien $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$, welche an einem Punkt $s \in \mathbb{R}$ übereinstimmen. Wir wollen zeigen, dass $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 17.6 genügt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es sei $b \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi(b) = \psi(b)$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad \text{für alle } t \in (b - \epsilon, b + \epsilon).$$

Das Ziel ist mithilfe der Eindeutigkeitsaussage vom Banachschen Fixpunktsatz 13.3 zu beweisen, dass φ und ψ auf einem kleinen Intervall übereinstimmen.

Wir setzen $c := \varphi(b) = \psi(b)$. Nach Voraussetzung ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable. Es existiert deswegen ein $\delta > 0$ und ein $r > 0$, so dass die Einschränkung von f auf

$$Q := [b - \delta, b + \delta] \times \overline{B}_r(c) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable ist.

Im Beweis vom Existenzsatz 17.4 von Picard-Lindelöf hatten wir gesehen, dass es ein $\eta \in (0, \delta]$ gibt, so dass sich für jedes $\epsilon \in (0, \eta]$ die Abbildung

$$T: C([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n)$$

$$\gamma \mapsto \left(\begin{array}{ll} T(\gamma): [b - \epsilon, b + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto c + \int_b^t f(z, \gamma(z)) dz \end{array} \right).$$

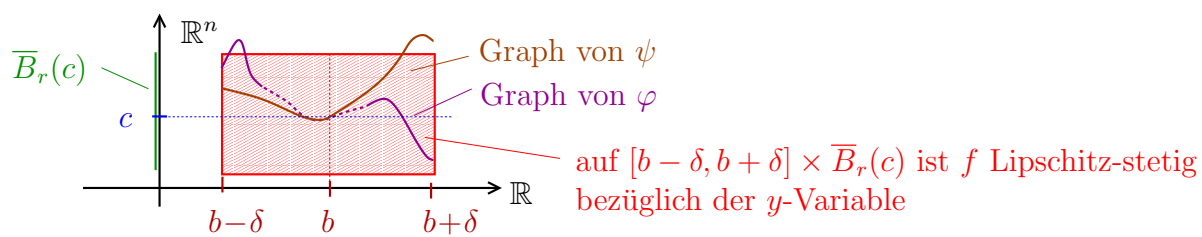
einschränkt auf eine Kontraktion $T: A_\epsilon \rightarrow A_\epsilon$ auf der abgeschlossenen Teilmenge

$$A_\epsilon := \{ \gamma \in C([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|\gamma - c\| \leq r \}$$

von $C([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n)$.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz 13.3 besitzt also $T: A_\epsilon \rightarrow A_\epsilon$ genau einen Fixpunkt. Wir müssen jetzt nur noch ϵ so wählen, dass die Einschränkungen von φ und ψ auf $[b - \epsilon, b + \epsilon]$ in A_ϵ liegen, denn dann greift die Eindeutigkeitsaussage des Banachschen Fixpunktsatzes.

Da $\varphi(b) = c$ und $\psi(b) = c$ und da φ und ψ stetig sind, existiert ein $\epsilon \in (0, \eta]$, so dass $\|\varphi(t) - c\| \leq r$ und $\|\psi(t) - c\| \leq r$ für alle $t \in [b - \epsilon, b + \epsilon]$. Also liegen die Einschränkungen von φ und ψ auf $[b - \epsilon, b + \epsilon]$ in A_ϵ , zudem folgt aus Lemma 17.3, dass diese Einschränkungen von φ und ψ Fixpunkte von T sind. Es folgt also aus der Eindeutigkeitsaussage des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Einschränkungen von φ und ψ auf $[b - \epsilon, b + \epsilon]$ übereinstimmen. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen. ■



18. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

Definition. Es sei $G \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k)^n$ eine Teilmenge und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion. Wir nennen

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine **Differentialgleichung n -ter Ordnung** auf $\mathbb{R}^k$. Eine Lösung davon ist eine n -mal differenzierbare Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ auf einem offenen Intervall I , mit der Eigenschaft, dass⁶²

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Bemerkung. Eine Differentialgleichung erster Ordnung ist also gerade eine Differentialgleichung der Form $y' = f(t, y)$, wie wir sie schon auf Seite 148 eingeführt hatten.

Physikalisches Beispiel. Wir betrachten einen Körper der Masse m und wir bezeichnen mit y die Lage bezüglich des Mittelpunkts der Erde zum Zeitpunkt t . Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt für die Bahn y des Körpers

$$y'' = \underbrace{\frac{1}{m} \cdot F}_{\text{Kraft, welche auf den Körper wirkt}} \in \mathbb{R}^3,$$

Die Kraft F kann dabei von der Zeit, vom Ort, aber auch von der Geschwindigkeit abhängen. Beispielsweise gilt für einen Körper der Ladung q bei in einem elektrischen Feld $\vec{E} = \vec{E}(t, y)$ und bei einem magnetischen Feld $\vec{B} = \vec{B}(t, y)$, welche beide vom Ort y und der Zeit t abhängen können, dass

$$F(y, t) = -G \cdot m \cdot M_{\text{Erde}} \cdot \frac{y}{\|y\|^3} + q \cdot \left(\vec{E} + \underbrace{(y' \times \vec{B})}_{\text{Kreuzprodukt}} \right).$$

Wir sehen also, dass die Bahn durch folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben wird:

$$y'' = \frac{1}{m} \cdot F(t, y) = -G \cdot M_{\text{Erde}} \cdot \frac{y}{\|y\|^3} + \frac{1}{m} \cdot q \cdot (\vec{E}(t, y) + (y' \times \vec{B}(t, y))).$$

Mathematisches Beispiel. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y$$

wird gelöst von den Funktionen $\sin(t)$ und $\cos(t)$. Genauer gesagt sogar von allen Linearkombinationen

$$\varphi(t) = a \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(t), \quad \text{wobei } a, b \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ jede Funktion der Form $\varphi(t) = a \cdot \sin(t)$ eine Lösung. Wir sehen also, dass es keine eindeutige Lösung gibt, wenn wir nur den Anfangspunkt festlegen. Wir werden in Satz 18.3 sehen, dass man für Differentialgleichungen n -ter Ordnung die Anfangswerte für die ersten $(n - 1)$ Ableitungen vorgeben muss, um eine eindeutige Lösung zu erhalten.

⁶²Damit die rechte Seite definiert ist, muss für alle $t \in I$ gelten, dass $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in G$.

Wie bei Differentialgleichungen erster Ordnung stellen sich jetzt folgende Fragen:

- (1) Unter welchen Voraussetzungen besitzen solche Differentialgleichungen Lösungen?
- (2) Unter welchen Voraussetzungen sind die Lösungen eindeutig?

Wir werden beide Fragen dadurch beantworten, indem wir im Folgenden geschickt das Studium von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf das Studium von Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen. Wir führen dazu folgende Notation ein.

Notation. Es sei $f: \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k)^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion. Wir definieren⁶³

$$F: \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k)^n \rightarrow (\mathbb{R}^k)^n$$

$$(t, Y) \mapsto F(t, Y) := F(t, \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{=Y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun im Folgenden zeigen, dass die Lösungen der Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

in ein-eindeutiger Beziehung zu den Lösungen der Differentialgleichung erster Ordnung

$$Y' = F(t, Y) \quad \text{stehen.}$$

Lemma 18.1. *Es sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Lösung der Differentialgleichung n -ter Ordnung*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Dann ist

$$\Phi: I \rightarrow (\mathbb{R}^k)^n$$

$$t \mapsto \Phi(t) := \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(t, Y)$ erster Ordnung.

Beweis. Dieses Lemma folgt sofort durch Einsetzen. In der Tat, es sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Lösung der Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

D.h. es ist

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)).$$

Dann gilt

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix} = F(t, \Phi(t)). \quad \blacksquare$$

⁶³Jedes y_i ist also jeweils ein Punkt in $\mathbb{R}^k$.

Das folgende Lemma ist das Gegenstück zu Lemma 18.1.

Lemma 18.2. *Es sei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): I \rightarrow (\mathbb{R}^k)^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(t, Y)$ erster Ordnung, dann ist $\varphi_1: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Lösung der Differentialgleichung $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ n -ter Ordnung.*

Beweis. Es sei nun also $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): I \rightarrow (\mathbb{R}^k)^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(t, Y)$. Ausgeschrieben bedeutet dies, dass

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t) \end{pmatrix} = \Phi'(t) = F(t, \Phi(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \vdots \\ f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{pmatrix}$$

Indem wir die ersten $n-1$ Einträge betrachten sehen wir, dass für jedes $j \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt:

$$(**) \quad \varphi_{j+1}(t) = \varphi_j'(t) = \varphi_{j-1}''(t) = \dots = \varphi_1^{(j)}(t)$$

Es folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_1^{(n)}(t) & = & \varphi_n'(t) & = & f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) & = & f(t, \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \dots, \varphi_1^{(n-1)}(t)), \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{folgt aus } (**) & & \text{folgt aus } (*) & & \text{folgt aus } (**) & & \end{array}$$

d.h. φ_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad \blacksquare$$

Mithilfe von Lemmas 18.1 und 18.2 können wir jetzt das Studium von Differentialgleichungen n -ter Ordnung auf das Studium von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Dies erlaubt es uns jetzt kurz- und schmerzlos den Existenz- und Eindeigkeitssatz für Lösungen von Differentialgleichungen beliebiger Ordnung zu beweisen.

Satz 18.3. (Existenz- und Eindeigkeitssatz) *Es sei $G \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k)^n$ eine offene Teilmenge und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wir betrachten die Differentialgleichung n -ter Ordnung*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) (Existenz) Für jeden Punkt $(s, a_0, \dots, a_{n-1}) \in G$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung

$$\varphi: (s - \epsilon, s + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rcl} \varphi(s) & = & a_0 \\ \varphi'(s) & = & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(s) & = & a_{n-1} \end{array} \quad \text{erfüllt.}$$

(2) (*Eindeutigkeit*) Es seien $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ zwei Lösungen der Differentialgleichung n -ter Ordnung. Wenn es ein $s \in I$ gibt, so dass gilt

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \psi(s) \\ \varphi'(s) &= \psi'(s) \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(s) &= \psi^{(n-1)}(s)\end{aligned}$$

Dann gilt $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$.

Beweisskizze. Um die Notation zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k)^n$. Es sei $f: \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k)^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Abbildung, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Dann kann man leicht sehen, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k)^n \rightarrow (\mathbb{R}^k)^n$$

$$\left(t, \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{=Y}\right) \mapsto F(t, Y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

ebenfalls lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Der Satz folgt nun sofort aus Lemmas 18.1 und 18.2, sowie aus dem Existenzsatz 17.4 und dem Eindeutigkeitssatz 17.5. ■

Beispiel. Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y.$$

Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}$. Es gibt genau eine Lösung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Anfangsbedingung $\varphi(0) = x$ und $\varphi'(0) = v$ erfüllt, nämlich

$$\varphi(t) = x \cdot \cos(t) + v \cdot \sin(t).$$

Nachdem wir jetzt gesehen haben, dass man die Theorie der Differentialgleichungen höherer Ordnung auf die Theorie von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen kann, werden wir uns im Folgenden hauptsächlich mit Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigen.

19. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Auf Seite 153 hatten wir (in-) homogene lineare Differentialgleichungen im eindimensionalen Fall eingeführt. Wir verallgemeinern nun die Definition auf den mehrdimensionalen Fall.

Definition. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Wir nennen⁶⁴

$$y' = A(t) \cdot y$$

eine **homogene lineare Differentialgleichung**. Es sei zudem $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere stetige Abbildung, dann heißt

$$y' = A(t) \cdot y + b(t)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung.

Satz 19.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Es seien zudem $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ sowie $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Es sei $a \in I$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Die inhomogene lineare Differentialgleichung*

$$y' = A(t) \cdot y + b(t)$$

besitzt genau eine Lösung φ , welche die Anfangsbedingung $\varphi(a) = c$ erfüllt und welche auf dem ganzen Intervall I definiert ist.

Bemerkung. Die Funktion b kann natürlich die Nullfunktion sein, d.h. der Satz gilt insbesondere für homogene lineare Differentialgleichungen.

Der Satz besagt insbesondere, dass die *Lösung auf dem ganzen Intervall I existiert*. Dies ist eine stärkere Aussage als der Existenzsatz 17.4 von Picard-Lindelöf liefert, denn dieser liefert nur die Existenz von Lösungen auf einem Intervall der Form $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Im Beispiel auf Seite 151 hatten wir gesehen, dass im Allgemeinen Lösungen von Differentialgleichungen nicht notwendigerweise den Definitionsbereich der Differentialgleichung besitzen. Die Tatsache, dass die Lösung auf ganz I definiert ist, ist also eine Besonderheit von inhomogenen linearen Differentialgleichungen.

19.1. Beweis von Satz 19.1 (*). In diesem Kapitel werden wir Satz 19.1 beweisen. Aus Zeitgründen ist dieses Kapitel nicht Teil der offiziellen Vorlesung.

Um Satz 19.1 zu beweisen brauchen wir also ein Kriterium dafür, dass eine Lösung auf dem ganzen Intervall I definiert ist. Folgender Satz gibt uns solch ein Kriterium.

Satz 19.2. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass es zu jedem kompakten Intervall $J \subset I$ ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in J$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|.$$

Dann gibt es zu jedem $(a, c) \in I \times \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y),$$

⁶⁴Eine Lösung ist also eine differenzierbare Abbildung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi'(t) = A(t) \cdot \varphi(t)$.

welche die Anfangsbedingung $\varphi(a) = c$ erfüllt.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall $I = \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen.

Die Abbildung f ist insbesondere lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt also sofort aus Satz 17.5. Der Existenzsatz von Picard-Lindelöf garantiert nur die Existenz einer Lösung auf einem Intervall der Form $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Wir wollen aber zeigen, dass es eine Lösung gibt, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Ganz analog zum Picard-Lindelöf Iterationsverfahren betrachten wir folgende Folge von Abbildungen $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &:= c \\ \varphi_1(t) &:= c + \int_a^t f(s, \varphi_0(s)) ds \\ \varphi_2(t) &:= c + \int_a^t f(s, \varphi_1(s)) ds \\ &\vdots\end{aligned}$$

Alle diese Abbildungen sind auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar.

Behauptung. Für jedes $r > 0$ konvergiert die Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[a - r, a + r]$ bezüglich der Supremumsnorm gegen eine stetige Abbildung $\varphi: [a - r, a + r] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Es sei also $r > 0$. Wir werden zuerst zeigen, dass die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf dem kompakten Teilintervall $[a - r, a + r] \subset I$ bezüglich der Supremumsnorm gegen eine Funktion konvergiert. Es sei dazu L die Lipschitz-Konstante für die Abbildung f auf dem kompakten Teilintervall $[a - r, a + r]$, welche nach Voraussetzung existiert. Da φ_0 und φ_1 stetig sind existiert

$$K := \max \{ \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| \mid t \in [a - r, a + r] \}.$$

Wir zeigen nun mit Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \in [a - r, a + r]$ gilt

$$\|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \leq K \cdot \frac{L^k \cdot |t - a|^k}{k!}.$$

Die Aussage gilt für $k = 0$ per Definition von K . Der Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$ verläuft wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \text{per Definition von } \varphi_{k+2} \text{ und } \varphi_{k+1} & & \text{nach Lemma 4.3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \|\varphi_{k+2}(t) - \varphi_{k+1}(t)\| &= \left\| \int_a^t f(s, \varphi_{k+1}(s)) - f(s, \varphi_k(s)) ds \right\| &\leq \int_a^t \left\| f(s, \varphi_{k+1}(s)) - f(s, \varphi_k(s)) \right\| ds \\ &\leq L \cdot \int_a^t \|\varphi_{k+1}(s) - \varphi_k(s)\| ds &\leq K \cdot L^{k+1} \cdot \int_a^t \frac{|t-a|^k}{k!} ds = K \cdot \frac{L^{k+1} \cdot |t-a|^{k+1}}{(k+1)!}. \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Eigenschaft von } L & & \text{Induktionsvoraussetzung} \end{array}$$

Wir haben damit also den Induktionsbeweis abgeschlossen.

Für also $t \in [a - r, a + r]$ gilt also

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} K \cdot \frac{L^k \cdot |t-a|^k}{k!} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot K \cdot L^k \cdot r^k &= K \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k r^k}{k!} &= K \cdot \exp(L \cdot r). \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{siehe oben} & & \text{da } t \in [a - r, a + r] & & \text{Definition von exp} \end{array}$$

Es folgt nun aus dem Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen [Fr1, Satz 19.5], dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ auf $[a-r, a+r]$ bezüglich der Supremumsnorm gegen eine Funktion konvergiert. Zudem folgt aus dem Beweis von Behauptung 3 im Beweis von Satz 13.2 dass die Funktion

$$\varphi := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

auf $[a-r, a+r]$ stetig ist. $\square$

Wir fahren mit der Notation der vorherigen Behauptung fort. Wir müssen nun noch zeigen, dass φ in der Tat auf $(a-r, a+r)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Nach Lemma 17.3 genügt es dabei folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $t \in (a-r, a+r)$ gilt: $\varphi(t) = c + \int_a^t f(s, \varphi(s)) ds$.

Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\begin{array}{ll} \text{Definition von } \varphi_k & \text{Satz 19.6 aus Analysis I besagt, dass wir} \\ & \text{Grenzwert und Integral vertauschen können} \\ \varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) & \downarrow \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \left(c + \int_a^t f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \right) \\ & \downarrow \\ & c + \int_a^t \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \\ & \downarrow \\ & c + \int_a^t f(s, \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k-1}(s)) ds \\ & \downarrow \\ & c + \int_a^t f(s, \varphi(s)) ds. \end{array}$$

Stetigkeit von f Definition von φ $\square$

Wir haben nun also bewiesen, dass für jedes $r > 0$ die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf dem Intervall $(a-r, a+r)$ bezüglich der Supremumsnorm gegen eine Lösung $\Phi_r: (a-r, a+r) \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung konvergiert. Alle diese Funktionen Φ_r zusammengefasst ergeben eine Lösung, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. $\blacksquare$

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 19.1 zu.

Beweis von Satz 19.1. Wir schreiben $f(t, y) = A(t) \cdot y + b(t)$. Mit Verweis auf Satz 19.2 genügt es nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es sei $J \subset I$ ein kompaktes Intervall. Dann gibt es ein $L \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in J$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|.$$

Es sei also $J \subset I$ ein kompaktes Intervall. Wir setzen

$$L := n^2 \cdot \max_{i,j=1,\dots,n} \{|a_{ij}(s)| \mid s \in J\}.^{65}$$

Nun gilt für alle $t \in J$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\begin{aligned} \|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| &= \|(A(t) \cdot y + b(t)) - (A(t) \cdot \tilde{y} + b(t))\| \\ &= \|A(t) \cdot (y - \tilde{y})\| \leq \|A(t)\| \cdot \|y - \tilde{y}\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Lemma 6.12 (2) Lemma 6.12 (3)

⁶⁵Nach Voraussetzung ist $t \mapsto a_{ij}(t)$ stetig, also existiert L nach Korollar 3.10.

Wir haben also damit die Behauptung bewiesen. ■

19.2. Homogene lineare Differentialgleichungen. In diesem und dem nächsten Teilkapitel wollen wir die Menge aller Lösungen einer (in-) homogenen linearen Differentialgleichungen studieren.

Notation. Für eine (in-) homogene lineare Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y + b(t)$ auf einem offenen Intervall I bezeichnen wir

$\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y + b(t)) :=$ Menge aller Lösungen von $y' = A(t) \cdot y + b(t)$ auf I als die Lösungsmenge.

Das folgende Lemma besagt, dass für *homogene* lineare Differentialgleichungen die Lösungsmenge einen Vektorraum bildet.

Lemma 19.3. *Für eine homogene lineare Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ auf einem offenen Intervall I ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y)$ ein Vektorraum.*⁶⁶

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} V := \{\text{differenzierbare Abbildungen } I \rightarrow \mathbb{R}^n\} &\rightarrow W := \{\text{alle Abbildungen } I \rightarrow \mathbb{R}^n\} \\ \varphi &\mapsto \varphi' - A(t) \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Abbildung zwischen zwei reellen Vektorräumen. Der Kern dieser Abbildung ist gerade $\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y)$. Nachdem der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist, ist $\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y)$ also in der Tat ein Untervektorraum von V . ■

Nachdem die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ ein Vektorraum ist, genügt es eine Basis zu finden, um die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ zu beschreiben.

Wir erinnern an folgende Definition aus der linearen Algebra.

Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum. Wir sagen Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ sind linear unabhängig, wenn für beliebige $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Wir erinnern an folgende Aussage, welche wir in Übungsblatt 6 bewiesen hatten.

Lemma 19.4. *Es sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus zwischen zwei reellen Vektorräumen. Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Wenn $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ linear unabhängig sind, dann sind auch $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig.*

Beweis. Wir nehmen also an, dass $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ linear unabhängig sind. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 &\implies f(\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n) = 0 \\ &\implies \lambda_1 \cdot f(v_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0. \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\text{denn } f \text{ ist linear} \qquad \text{denn } f(v_1), \dots, f(v_n) \text{ sind linear unabhängig} \end{aligned}$$

⁶⁶Genauer gesagt, die Lösungsmenge $\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y)$ bildet einen Untervektorraum des Vektorraums aller Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Der folgende Satz gibt ein Kriterium dafür, dass Lösungen linear unabhängig sind.

Satz 19.5. *Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = A(t) \cdot y$$

auf dem offenen Intervall I . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) *Die Abbildungen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sind linear unabhängig im reellen Vektorraum $C(I, \mathbb{R}^n)$ aller stetigen Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$.*
- (2) *Es existiert ein $t_0 \in I$, so dass die Vektoren*

$$\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_k(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad \text{linear unabhängig sind.}$$

- (3) *Für jedes $t_0 \in I$ sind die Vektoren*

$$\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_k(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad \text{linear unabhängig.}$$

Beweis.

(3) $\Rightarrow$ (2) Diese Implikation ist trivial.

(2) $\Rightarrow$ (1) Es sei $t_0 \in I$. Die Abbildung $C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $f \mapsto f(t_0)$

ist linear. Also folgt die Implikation aus Lemma 19.4.

(1) $\Rightarrow$ (3) Es seien also $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ linear unabhängige Lösungen von $y' = A(t) \cdot y$ und es sei $t_0 \in I$. Wir müssen zeigen, dass $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. Es seien also $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda_1 \cdot \varphi_1(t_0) + \dots + \lambda_k \cdot \varphi_k(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) Die Linearkombination $\varphi := \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \dots + \lambda_k \cdot \varphi_k$ ist nach Lemma 19.3 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = 0$.

(b) Die Nullabbildung $\psi(t) = 0$ ist offensichtlich ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ bezüglich der Anfangsbedingung $\psi(t_0) = 0$.

(c) Aus (a) und (b), sowie Satz 19.1 folgt, dass gilt $\varphi = \psi$. Mit anderen Worten, es gilt

$$\lambda_1 \cdot \varphi_1 + \dots + \lambda_k \cdot \varphi_k = 0 \in C(I, \mathbb{R}^n).$$

(d) Aus der linearen Unabhängigkeit der Abbildungen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ folgt nun, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. ■

Satz 19.6. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = A(t) \cdot y$$

ist ein n -dimensionaler Vektorraum.

Beweis. Es sei $t_0 \in I$. Aus Satz 19.1 folgt, dass es für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ genau eine Lösung $\varphi_i: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ gibt, welche die Anfangsbedingung

$$\varphi_i(t_0) = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Koordinate}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

erfüllt. Wir werden nun zeigen, dass $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ eine Basis von $\mathbb{L}$ ist.

Aus Satz 19.5 (2) $\Rightarrow$ (1) folgt, dass die Abbildungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig sind. Es sei nun ψ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$. Wir setzen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \psi(t_0)$. Dann gilt

$$\psi(t_0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdot \underbrace{\varphi_1(t_0)}_{=e_1} + \dots + \lambda_n \cdot \underbrace{\varphi_n(t_0)}_{=e_n} \in \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildungen ψ und $\lambda_1 \cdot \varphi_1 + \dots + \lambda_n \cdot \varphi_n$ sind also Lösungen der Differentialgleichung und haben den gleichen Wert zur Zeit t_0 . Aus Satz 19.1 folgt nun, dass $\psi = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \dots + \lambda_n \cdot \varphi_n$. ■

Definition. Es sei $y' = A(t) \cdot y$ eine homogene lineare Differentialgleichung. Eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung wird **Lösungsfundamentalsystem** genannt.

Beispiel. Es sei $c \in \mathbb{R}$. Wie auf Seite 148 betrachten wir die homogene lineare Differentialgleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y}$$

Dann kann man durch Einsetzen leicht zeigen, dass

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(c \cdot t) \\ \sin(c \cdot t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(c \cdot t) \\ \cos(c \cdot t) \end{pmatrix}$$

Lösungen der Differentialgleichung sind. Nachdem die Vektoren

$$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ sind, folgt aus Satz 19.5 und Satz 19.6, dass φ_1 und φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = A \cdot y$ bilden. Insbesondere kann jede andere Lösung ψ der Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ geschrieben werden als Linearkombination $\psi = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2$.

19.3. Inhomogene lineare Differentialgleichungen.

Notation. Für einen Vektorraum V , einen Vektor $v \in V$ und einen Untervektorraum $U \subset V$ schreiben wir

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}.$$

Anders ausgedrückt, $v + U$ ist die Translation des Untervektorraums U um den Vektor v . Eine solche Teilmenge von V wird manchmal auch als **affiner Unterraum** von V bezeichnet.

Mit dieser Notation können wir den nächsten Satz formulieren.

Satz 19.7. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es seien $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Es sei ψ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y + b(t)$. Dann ist

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y + b(t)$

$$\underbrace{\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y + b(t))}_{\text{Lösungsmenge der inhomogenen linearen Differentialgleichung}} = \underbrace{\psi}_{\text{Lösung}} + \underbrace{\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y)}_{\text{Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung}}$$

ψ ist eine Lösung von $y' = A(t) \cdot y + b(t)$

$\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y + b(t))$, d.h. Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y + b(t)$

$\mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y)$, d.h. Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$

Vektorraum aller differenzierbaren Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}^n$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 19.3 betrachten wir die lineare Abbildung

$$V := \{\text{differenzierbare Abbildungen } I \rightarrow \mathbb{R}^n\} \xrightarrow{\Theta} W := \{\text{alle Abbildungen } I \rightarrow \mathbb{R}^n\}$$

$$\varphi \mapsto \varphi' - A(t) \cdot \varphi.$$

Für eine differenzierbare Abbildung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine stetige Abbildung $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt also:

$$(*) \quad \varphi \in \mathbb{L}(y' = A(t) \cdot y + c(t)) \iff \varphi' = A(t) \cdot \varphi + c(t) \iff \Theta(\varphi) = c(t).$$

$\uparrow$ Definition von $\mathbb{L}$
 $\uparrow$ Definition von Θ

Es folgt aus (*), dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Wir betrachten die lineare Abbildung $\Theta: V \rightarrow W$. Es sei $b \in W$ und es sei $\psi \in V$ mit $\Theta(\psi) = b$. Dann gilt⁶⁷

$$\{\varphi \in V \mid \Theta(\varphi) = b\} = \psi + \ker(\Theta).$$

Es sei also $\varphi \in V$. Dann gilt:

$$\Theta(\varphi) = b \iff \Theta(\varphi - \psi) = 0 \iff \varphi - \psi \in \ker(\Theta) \iff \varphi \in \psi + \ker(\Theta).$$

$\uparrow$
 da $\Theta(\psi) = b$ und da Θ linear

Bemerkung. Satz 19.7 besagt, dass wir zur vollständigen Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y + b(t)$ folgende zwei Schritte durchführen müssen.

- Wir müssen ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene lineare Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ finden.
- Wir müssen zumindest *eine* Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y + b(t)$ finden.

⁶⁷Diese Aussage entspricht fast der Aussage von [N1, Proposition 16.2] aus der linearen Algebra.

Wir werden (a) später noch allgemein behandeln. Im Folgenden wollen wir (b) beantworten, unter der Voraussetzung, dass wir schon eine Lösung zu (a) besitzen.

Bemerkung. Für den Fall $n = 1$ hatten wir schon gesehen, wie wir aus einer Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t) \cdot y$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ erhalten. Genauer gesagt, in Satz 16.3 hatten wir folgende Aussage bewiesen: wenn $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t) \cdot y$ ist, dann ist für jedes $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$

$$\psi(t) = \varphi(t) \cdot u(t), \quad \text{wobei} \quad u(t) = c + \int_{t_0}^t \varphi(s)^{-1} \cdot b(s) ds$$

eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t) \cdot y + b(t)$. Wir wollen nun dieses Verfahren verallgemeinern. Allerdings stellt sich nun die Frage, was die Rolle von $\psi(s)^{-1}$ spielen soll, wo doch nun die Lösungen Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind.

Demnächst werden wir Satz 19.8 auf den mehr-dimensionalen Fall verallgemeinern. Um diese Verallgemeinerung zu formulieren benötigen wir allerdings noch folgende Definition.

Definition. Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = A(t) \cdot y$$

auf einem offenen Intervall I . Für beliebiges $t \in I$ heißt

$$W(t) := \underbrace{(\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))}_{n \times n\text{-Matrix}}$$

Wronski-Matrix⁶⁸ der Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Beispiel. Es sei $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten wiederum die homogene lineare Differentialgleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y}.$$

Die Lösungen φ_1 und φ_2 von Seite 176 ergeben die Wronski-Matrix

$$W(t) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(c \cdot t) \\ \sin(c \cdot t) \end{pmatrix}}_{=\varphi_1(t)} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(c \cdot t) \\ \cos(c \cdot t) \end{pmatrix}}_{=\varphi_2(t)} \right).$$

Der folgende Satz ist nun eine Verallgemeinerung von Satz 16.3.

Satz 19.8. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, es seien $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen, und es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = A(t) \cdot y.$$

⁶⁸Diese Matrix ist benannt nach dem polnischen Mathematiker Józef Hoëné-Wronski.

Für jedes $t \in I$ bezeichne

$$W(t) := \underbrace{(\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))}_{n \times n\text{-Matrix}}$$

die Wronski-Matrix der Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Es seien $t_0 \in I$ und $C \in \mathbb{R}^n$. Dann ist ⁶⁹

$$\psi(t) = W(t) \cdot u(t), \quad \text{wobei} \quad u(t) = \int_{t_0}^t \underbrace{W(s)^{-1} \cdot b(s)}_{\in \mathbb{R}^n} ds + C.$$

eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y + b(t)$.

Beweis. Wir zeigen durch Einsetzen, dass ψ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y + b(t)$ ist. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} \psi' &= (W \cdot u)' = \underbrace{W' \cdot u + W \cdot u'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Produktregel für Ableitungen} \\ \text{komponentenweise angewandt}}} = \underbrace{(\varphi_1' \dots \varphi_n') \cdot u + W \cdot W^{-1} \cdot b(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung} \\ \text{angewandt auf } u \text{ ergibt } u' = W^{-1} \cdot b}} \\ &= (A(t) \cdot \varphi_1 \dots A(t) \cdot \varphi_n) \cdot u + b(t) = A(t) \cdot \underbrace{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}_{=W} \cdot u + b(t) = A(t) \cdot \underbrace{\psi}_{\substack{\uparrow \\ \text{denn } W \cdot u = \psi}} + b(t). \\ &\quad \uparrow \quad \text{denn } \varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ sind Lösungen der Differentialgleichung } y' = A(t) \cdot y \end{aligned}$$

■

⁶⁹Es folgt aus Satz 19.5, dass für jedes $t \in I$ die Vektoren $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ linear unabhängig sind, d.h. für jedes t ist die Matrix $W(t)$ invertierbar.

20. DER FLUSS VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

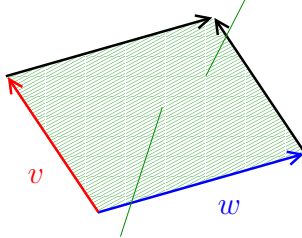
20.1. Exkurs: Volumen und Matrizen.

Notation. Für Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$P(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1] \right\}$$

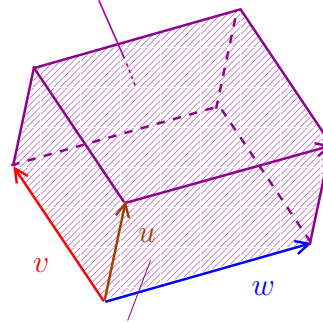
das durch $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte Parallelotop. Für $n = 2$ ist dies insbesondere das durch v_1 und v_2 aufgespannte Parallelogramm. Für $n = 3$ ist dies der durch v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Spat.

$P(v, w) = \{ \lambda \cdot v + \mu \cdot w \mid \lambda, \mu \in [0, 1] \}$
ist das von den Vektoren v und w
aufgespannte Parallelogramm



der Flächeninhalt beträgt $|\det(v \ w)|$

das Parallelotop $P(u, v, w)$ in $\mathbb{R}^3$



das Volumen beträgt $|\det(u \ v \ w)|$

In Analysis III werden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen allgemeinen Volumenbegriff für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einführen. Wir werden dann insbesondere folgendes Lemma beweisen.

Lemma 20.1. Es seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\text{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = \left| \det \underbrace{(v_1 \ \dots \ v_n)}_{n \times n\text{-Matrix}} \right|.$$

Beweisskizze. Zur Veranschaulichung wollen wir zumindest den Fall $n = 2$ betrachten, obwohl wir streng genommen den Begriff des Flächeninhalts gar nicht eingeführt hatten. Wir wollen also nun folgende Aussage zumindest plausibel machen.

Behauptung. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei Vektoren. Dann gilt

$$\text{Flächeninhalt von } P(v, w) = |\det(v \ w)|.$$

Wenn v der Nullvektor ist, dann ist sowohl der Flächeninhalt als auch die Determinante null. Insbesondere gilt die Aussage der Behauptung.

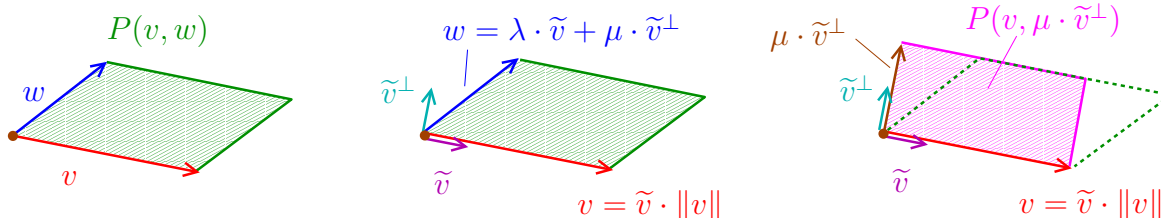
Wir betrachten nun den Fall, dass v nicht der Nullvektor ist. Wir schreiben

$$\tilde{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v \quad \text{und} \quad \tilde{v}^\perp := R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \tilde{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{v}.$$

Mit anderen Worten, $\tilde{v}$ ist die Normierung von v auf Länge 1. Zudem ist $\tilde{v}^\perp$ ist der Vektor $\tilde{v}$, welchen wir erhalten, indem wir $\tilde{v}$ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn drehen. Nachdem $v \neq 0$ bilden die Vektoren $\tilde{v}$ und $\tilde{v}^\perp$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Wir schreiben $w = \lambda \cdot \tilde{v} + \mu \cdot \tilde{v}^\perp$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Flächeninhalt von } P(v, w) &\stackrel{\text{Cavalierisches Prinzip}}{=} \text{Flächeninhalt von } P(v, \mu \cdot \tilde{v}^\perp) \stackrel{\text{Flächeninhalt von Rechteck}}{=} \|v\| \cdot \|\mu \cdot \tilde{v}^\perp\| \\
 &= \|v\| \cdot |\mu| = \left| \underbrace{\det(\tilde{v} \ \tilde{v}^\perp)}_{=1, \text{ da orthogonale Matrix}} \cdot \det \begin{pmatrix} \|v\| & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right| \stackrel{\text{Multiplikativität der Determinante}}{=} \left| \det \left((\tilde{v} \ \tilde{v}^\perp) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \|v\| & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}_{=(v \ w)} \right) \right|.
 \end{aligned}$$



20.2. Differentialgleichungen in Abhängigkeit vom Anfangspunkt. Der Existenzsatz 17.4 von Picard–Lindelöf besagt, dass eine Differentialgleichung, unter vernünftigen Voraussetzungen, zu jeder Anfangsbedingung eine eindeutige Lösung besitzt. Der folgende Satz besagt nun, dass diese Lösung “stetig von der Anfangsbedingung abhängt”.

Satz 20.2. *Es sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung φ_x der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ zur Anfangsbedingung $\varphi_x(0) = x$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}
 \Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
 (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) := \varphi_x(t) \quad \text{stetig.}
 \end{aligned}$$

Beweis. Wir werden diesen, nicht ganz einfachen, Satz nicht beweisen. Der Satz wird jedoch beispielsweise in [Br3, Kapitel 2] bewiesen. ■

Korollar 20.3. *Unter den gleichen Voraussetzungen und der gleichen Notation wie in Satz 20.2 gilt: für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}
 A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
 x &\mapsto \Phi(t, x) = \varphi_x(t) \quad \text{stetig.}
 \end{aligned}$$

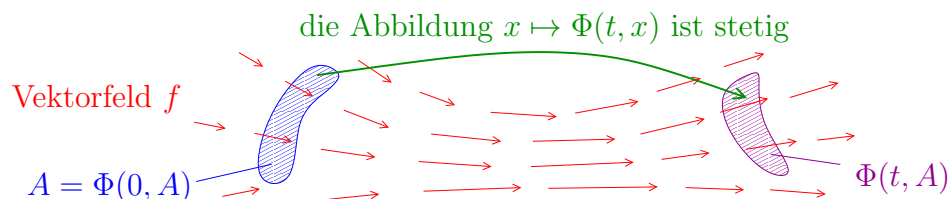


Illustration von Korollar 20.3.

Beweis. Es sei $t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \varphi_x(t) \end{aligned}$$

ist die Verknüpfung der Abbildungen

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (t, x) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, x) &\mapsto \varphi_x(s) = \Phi(s, x). \end{aligned}$$

Die erste Abbildung ist offensichtlich stetig, und die zweite Abbildung ist stetig nach Satz 20.2. Das Korollar folgt nun aus der Tatsache, siehe Satz 2.16, dass die Verknüpfung von zwei stetigen Abbildungen wiederum stetig ist. ■

Definition. Es sei $y' = f(t, y)$ eine Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^n$, wobei f Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung φ_x der Differentialgleichung mit $\varphi_x(0) = x$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(1) Wir bezeichnen die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) := \varphi_x(t) \end{aligned}$$

als den Fluss der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$.

(2) Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt die Kurve

$$\begin{aligned} \varphi_x: \mathbb{R} &\rightarrow M \\ t &\mapsto \Phi(t, x) = \varphi_x(t) \end{aligned}$$

die Flusslinie zum Anfangspunkt x .

Physikalisches Beispiel. Wir betrachten die “Welt” $\mathbb{R}^3$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, P) &\mapsto \text{Windstärke} \cdot \text{Windrichtung zur Zeit } t \text{ am Punkt } P \end{aligned}$$

ist ein Vektorfeld. Es sei $Q \in \mathbb{R}^3$ der Ort eines Moleküls zum Zeitpunkt $t = 0$. Mit der obigen Notation ist

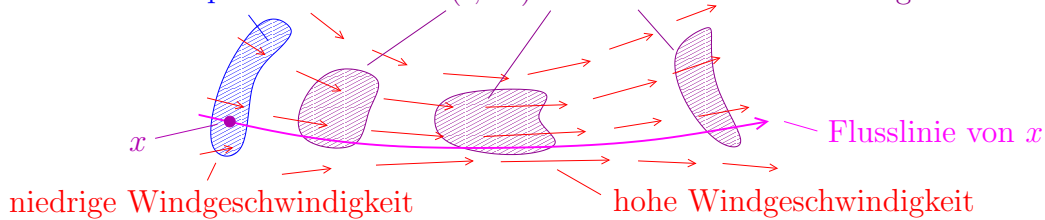
$$\Phi(t, Q) = \text{der Ort des Luftmoleküls zum Zeitpunkt } t.$$

Allgemeiner gilt: wenn $W \subset \mathbb{R}^3$ eine Wolke zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt, dann ist

$$\Phi(t, W) = \text{Ausdehnung der Wolke zum Zeitpunkt } t.$$

Korollar 20.3 besagt also, bildlich gesprochen, dass sich die Form einer Wolke stetig verändert.

Wolke W zum Zeitpunkt $t = 0$ $\Phi(t, W)$ beschreibt die Entwicklung der Wolke



Im Folgenden betrachten wir hauptsächlich homogene lineare Differentialgleichungen.

Lemma 20.4. Es sei $y' = A(t) \cdot y$ eine homogene lineare Differentialgleichung auf einem offenen Intervall I . Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\varphi_x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die nach Satz 19.1 eindeutige Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $\varphi_x(0) = x$ erfüllt. Für jedes $t \in I$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \Phi(t, x) := \varphi_x(t) \quad \text{linear.} \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage wird in Übungsblatt 13, mithilfe von Satz 19.1 bewiesen. ■

Definition. Es sei $y' = f(t, y)$ eine Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^n$, wobei f Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung φ_x der Differentialgleichung mit $\varphi_x(0) = x$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

- (1) Ein Punkt x heißt **Fixpunkt** des Flusses, wenn $\varphi_x(t) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (2) Eine Flusslinie φ_x heißt **periodisch**, wenn diese nicht konstant ist, und wenn es ein $p > 0$ gibt, so dass

$$\varphi_x(t) = \varphi_x(t + p) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel. Wir betrachten wiederum die lineare Differentialgleichung

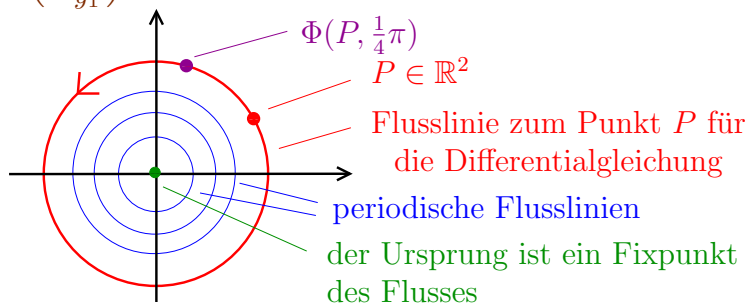
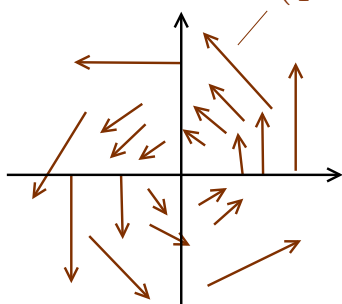
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=y}, \quad \text{dabei ist } \varphi_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ und } \varphi_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Aus Lemma 20.4, oder einfache Nachrechnen, folgt nun, dass der Fluss gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &\mapsto \varphi_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}(t) = x \cdot \varphi_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}(t) + y \cdot \varphi_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}}_{\text{Rotation um Winkel } t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im obigen Beispiel ist $(0, 0)$ der einzige Fixpunkt des Flusses. Für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die dazugehörige Flusslinie periodisch.

Vektorfeld $f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$

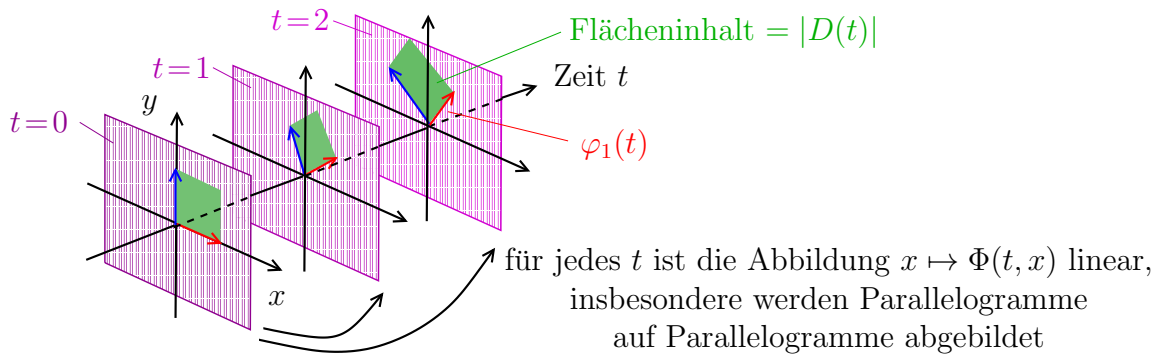


20.3. Die Wronski–Determinante und der Satz von Liouville. Wir wollen in diesem Kapitel untersuchen, wie sich das Volumen unter einer homogenen linearen Differentialgleichung verändert.

Definition. Es sei $y' = A(t) \cdot y$ eine homogene lineare Differentialgleichung auf einem offenen Intervall I . Zudem sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lösungsfundamentalsystem dieser Differentialgleichung. Wir nennen

$$D(t) := \det \underbrace{(\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))}_{\text{Wronski-Matrix } W(t)}$$

die Wronski–Determinante der Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.



Bemerkung. Nach Lemma 20.1 gibt die Funktion $t \mapsto |D(t)|$ also an, wie sich unter der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ das Volumen eines Parallelotops verändert. In vielen Fällen studiert man volumenerhaltende Differentialgleichungen, d.h. Differentialgleichungen, so dass $|D(t)|$ konstant ist für ein Lösungsfundamentalsystem. Beispielsweise ist jede Differentialgleichung, welche den Fluss von Wasser beschreibt, notwendigerweise volumenerhaltend.

Satz 20.5. (Satz von Liouville) Es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lösungsfundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$. Die dazugehörige Wronski–Determinante $D(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$D'(t) = \text{tr}(A(t)) \cdot D(t).$$

Bemerkung.

(1) Sei $t_0 \in I$. Aus dem Satz von Liouville zusammen mit Satz 16.2 folgt, dass

$$D(t) = D(t_0) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \right).$$

Insbesondere folgt, dass $D(t_0) \neq 0$, genau dann, wenn $D(t) \neq 0$ für alle t . Der Satz von Liouville gibt damit insbesondere einen neuen Beweis der Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) in Satz 19.5.

- (2) Die homogene lineare Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$ ist also volumenerhaltend, genau dann, wenn $\text{tr}(A(t)) = 0$ für alle t . Für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir beispielsweise wiederum die homogene lineare Differentialgleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y}.$$

In diesem Fall ist also $\text{tr}(A) = 0$. Der Satz von Liouville besagt also, dass der Fluss Volumenerhaltend ist. Dies kann man auch direkt sehen, denn die Lösungen φ_1 und φ_2 von Seite 176 ergeben die Wronski-Matrix

$$W(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(c \cdot t) & -\sin(c \cdot t) \\ \sin(c \cdot t) & \cos(c \cdot t) \end{pmatrix}}_{\substack{= \varphi_1(t) & = \varphi_2(t) \\ \text{Drehung um den Winkel } c \cdot t}}.$$

Die Determinante der Wronski-Matrix ist hierbei immer 1. Das Volumen bleibt also in der Tat konstant.

Der Beweis des Satzes von Liouville beruht auf folgendem Lemma.

Lemma 20.6. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $B: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ eine differenzierbare Abbildung⁷⁰. Für $i = 1, \dots, n$ bezeichnen wir mit $b_i(t)$ den i -ten Zeilenvektor von $B(t)$. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt} \det(B(t)) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ \textcolor{red}{b_i'(t)} \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Beweis von Lemma 20.6.

Anstatt die Ableitung direkt zu berechnen, schreiben wir die Abbildung $t \mapsto \det(B(t))$ geschickt als Verknüpfung von zwei Abbildungen, bei denen es einigermaßen leicht ist die partiellen Ableitungen zu bestimmen. Wir erhalten dann die Ableitung der Abbildung $t \mapsto \det(B(t))$ mithilfe der Kettenregel.

Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} d: I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} &\mapsto \det \begin{pmatrix} b_1(t_1) \\ \vdots \\ b_n(t_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

⁷⁰D.h. alle n^2 Einträge der Matrix sind differenzierbar.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \det(B(t)) &= \frac{d}{dt} (\Phi \circ d)(t) \stackrel{\text{Kettenregel 6.13}}{=} D\Phi_{d(t)} \cdot d'(t) \stackrel{\text{Satz 6.7}}{=} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t, \dots, t) \dots \frac{\partial \Phi}{\partial t_n}(t, \dots, t) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}(t, \dots, t).
\end{aligned}$$

Es genügt nun also folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_n) = \det \begin{pmatrix} b_1(t_1) \\ \vdots \\ b'_i(t_i) \\ \vdots \\ b_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

Es sei also $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir berechnen die i -te partielle Ableitung wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_n) &\stackrel{\text{per Definition auf Seite 49}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\Phi(t_1, \dots, \textcolor{red}{t}_i + h, \dots, t_n) - \Phi(t_1, \dots, \textcolor{red}{t}_i, \dots, t_n)) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\det \begin{pmatrix} b_1(t_1) \\ \vdots \\ \textcolor{red}{b}_i(t_i + h) \\ \vdots \\ b_n(t_n) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1(t_1) \\ \vdots \\ \textcolor{red}{b}_i(t_i) \\ \vdots \\ b_n(t_n) \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} b_1(t_1) \\ \vdots \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\textcolor{red}{b}_i(t_i + h) - \textcolor{red}{b}_i(t_i)}{h} \\ \vdots \\ b_n(t_n) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_1(t_1) \\ \vdots \\ \textcolor{red}{b}'_i(t_i) \\ \vdots \\ b_n(t_n) \end{pmatrix}. \\
&\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
&\quad \text{Definition von } \Phi \qquad \qquad \text{Multilinearität und Stetigkeit der Determinante} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes von Liouville. Es sei also $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t) \cdot y$.

- Wir bezeichnen mit $W(t) = (\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))$ die Wronski-Matrix der Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Wir bezeichnen mit $w_1, \dots, w_n$ die *Zeilen* von W .

Wir können nun folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \det(W(t)) &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w'_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Lemma 20.6}}{=} \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile.} \\
&\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
&\quad \text{aus } \varphi'_i = A \cdot \varphi_i \text{ folgt } W' = A \cdot W, \qquad \text{Multilinearität} \\
&\quad \text{daraus folgt } w'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j \qquad \text{der Determinante} \qquad \underbrace{\det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{= 0 \text{ für } i \neq j, \text{ denn für } i \neq j \text{ sind zwei Zeilen gleich}} \\
&= \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{=W} \leftarrow i\text{-te Zeile} = \text{tr}(A) \cdot \det(W(t)). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

21. HOMOGENE LINEARE AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' = a \cdot y$$

mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ ist leicht zu lösen, nämlich die Lösung ist gegeben durch

$$\varphi(t) = c \cdot e^{a \cdot t},$$

wobei die Exponentialfunktion natürlich definiert ist durch die Exponentialreihe

$$e^x := \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}.$$

Es sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $C \in \mathbb{R}$. Wir wollen jetzt die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' = A \cdot y$$

mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = C$ lösen. Anstatt einen echt neuen Gedanken aufzubringen, verwenden wir einfach den gleichen Ansatz wie für $n = 1$, und verallgemeinern diesen:

Satz 21.1. *Es sei A eine beliebige reelle $n \times n$ -Matrix. Dann konvergiert⁷¹*

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}$$

im Vektorraum der reellen $n \times n$ -Matrizen bezüglich der Norm

$$\|B\|_{\max} := \max \{|b_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, n\}.$$

Beispiel. Es sei D eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot D^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für die Nullmatrix, dass $e^0 = \text{id}_n$.

Im Beweis von Satz 21.1 verwenden wir folgendes Konvergenzkriterium.

Lemma 21.2. (Majoranten-Kriterium) *Es sei $\sum_{k=w}^{\infty} B_k$ eine Reihe in $M(n \times n, \mathbb{R})$. Wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{k=w}^{\infty} c_k$ von reellen Zahlen gibt, so dass für alle $k \geq w$ gilt: $\|B_k\|_{\max} \leq c_k$, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=w}^{\infty} B_k$.*

⁷¹Wir verwenden die Konvention, dass $\text{Nullmatrix}^0 = \text{id}_n$. Daraus folgt insbesondere $e^{\text{Nullmatrix}} = \text{id}_n$.

Beweis ()*. Wort-wörtlich der gleiche Beweis wie vom Majoranten-Kriterium für Reihen von reellen Zahlen, siehe [Fr1, Satz 6.8] zeigt, dass die Folge von Partialsummen $\sum_{k=0}^m B_k$ eine Cauchy-Folge im normierten Vektorraum $(M(n \times n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\max})$ bildet. Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Der normierte Vektorraum $(M(n \times n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\max})$ ist vollständig.

Der normierte Vektorraum $(M(n \times n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\max})$ ist offensichtlich isomorph zum normierten Vektorraum $(\mathbb{R}^{n^2}, \|\cdot\|_{\max})$. Es folgt aus Lemma 1.2, dass eine Folge von Punkte in $\mathbb{R}^{n^2}$, welche eine Cauchy-Folge bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\max}$ bildet, auch eine Cauchy-Folge bezüglich der euklidischen Norm bildet. Aber in Lemma 2.6 hatten wir gesehen, dass jede solche Cauchy-Folge konvergiert. ■

Beweis von Satz 21.1. Wir wollen den Satz mithilfe von Lemma 21.2 beweisen. Um Lemma 21.2 anwenden zu können müssen wir natürlich zuerst die Normen der Summanden, also insbesondere die Normen der Potenzen A^n abschätzen. Wir beweisen dazu zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Es seien $P, Q \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\|P \cdot Q\|_{\max} \leq n \cdot \|P\|_{\max} \cdot \|Q\|_{\max}.$$

Es seien also $P, Q \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$|ij\text{-Eintrag der Matrix } P \cdot Q| = \left| \sum_{k=1}^n p_{ik} \cdot q_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{|p_{ik}|}_{\leq \|P\|_{\max}} \cdot \underbrace{|q_{kj}|}_{\leq \|Q\|_{\max}} \leq \|P\|_{\max} \cdot \|Q\|_{\max}.$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus der Definition von $\|P \cdot Q\|_{\max}$.

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Satzes zu.

Der Gedanke ist nun das Majoranten-Kriterium auf die Exponentialreihe und eine geeignete geometrische Reihe $\sum_{k=w}^{\infty} \lambda^k$ anzuwenden.

Es sei also $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \frac{1}{k!} \cdot \|A^k\| \leq \frac{1}{k!} \cdot n^{k-1} \cdot \|A\|^k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \|A\|)^k = \frac{1}{n} \cdot \prod_{j=1}^k \frac{n \cdot \|A\|}{j} = (*).$$

$\uparrow$
 $(k-1)$ -faches Anwenden der Behauptung

Wir wählen nun ein $w \in \mathbb{N}$ mit $w \geq 2n \cdot \|A\|$. Dann gilt für $k \geq w$, dass

$$(*) = \frac{1}{n} \cdot \prod_{j=1}^m \frac{n \cdot \|A\|}{j} \cdot \prod_{j=w+1}^k \underbrace{\frac{n \cdot \|A\|}{j}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^m \frac{n \cdot \|A\|}{j}}_{=: C} \cdot 2^w \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Zusammengefasst haben wir also gezeigt, dass für alle $k \geq w$ gilt:

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq C \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Nachdem die geometrische Reihe $\sum_{k=w}^{\infty} C \cdot \frac{1}{2^k}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majoranten-Kriterium 21.2 auch die Reihe $\sum_{k=w}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, und damit auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. ■

Satz 21.3. *Es seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Wenn A und B kommutieren, das heißt wenn $A \cdot B = B \cdot A$, dann gilt*

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

Insbesondere gilt für alle $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, dass

$$(e^A)^{-1} = e^{-A},$$

insbesondere ist die Matrix e^A invertierbar.

Beweis. Die erste Aussage wird fast genauso bewiesen wie die analoge Aussage für reelle Zahlen. Die einzige echte Subtilität ist, dass wir dabei den binomischen Lehrsatz verwendet hatten. Dieser besagt, ganz allgemein, dass wenn R ein Ring ist und wenn $A, B \in R$ kommutieren, dann gilt:

$$(A + B)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \cdot A^m \cdot B^{k-m}.$$

In unserem Fall arbeiten wir mit dem Ring $M(n \times n, \mathbb{R})$. Um den binomischen Lehrsatz anwenden zu können müssen wir eben fordern, dass A und B kommutieren.

Die zweite Aussage folgt, wie in [Fr1, Satz 6.19] leicht aus der ersten Aussage. In der Tat gilt:

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = \text{id}_n, \quad \text{daraus folgt: } (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 denn A und $-A$ kommutieren siehe Beispiel auf Seite 187

Wir wenden uns jetzt wieder den Differentialgleichungen zu. Wir betrachten dabei nun hauptsächlich folgenden Typ von homogenen linearen Differentialgleichung.

Definition. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Wir bezeichnen

$$y' = A \cdot y$$

als **homogene lineare autonome Differentialgleichung**. Eine solche homogene lineare Differentialgleichung wird manchmal auch **zeitunabhängig** genannt.

Bemerkung. Dieser Typ von Differentialgleichung erscheint erst einmal natürlich sehr restriktiv. Andererseits können viele Differentialgleichungen durch homogene lineare Differentialgleichungen approximiert werden.

Mithilfe der Abbildung $A \mapsto e^A$ können wir jetzt die vollständige Lösung einer homogenen linearen autonomen Differentialgleichung hinschreiben.

Satz 21.4. *Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung φ der homogenen linearen autonomen Differentialgleichung*

$$y' = A \cdot y$$

bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(0) = v$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto e^{At} \cdot v.\end{aligned}$$

Bemerkung. Mit anderen Wort, Satz 21.4 besagt, dass der Fluss, welcher durch die Differentialgleichung $y' = A \cdot y$ definiert ist, gegeben ist durch die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, v) &\mapsto e^{At} \cdot v.\end{aligned}$$

Beweisskizze. Es sei also $\varphi(t) = e^{At} \cdot v$.

Wir bestimmen die Ableitung von φ' mit fast dem gleichen Argument wie im Beweis von [Fr1, Satz 12.6], bei dem wir gezeigt hatten, dass $\frac{d}{dt} \exp(x) = \exp(x)$.

Dann gilt $\varphi(0) = e^{A0} \cdot v = e^0 \cdot v = \text{id} \cdot v = v$. Zudem gilt:

nach Satz 21.3, da die Matrizen Ah und At kommutieren

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{A(t+h)} \cdot v - e^{At} \cdot v) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{Ah} \cdot e^{At} - e^{At}) \cdot v \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{Ah} - \text{id}) \cdot e^{At} \cdot v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\text{id} + Ah + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} h^k}_{=e^{Ah}} - \text{id} \right) \cdot e^{At} \cdot v \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} h^{k-1} \right) \cdot e^{At} \cdot v \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution} \\ l = k - 2}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \underbrace{A^2 h}_{\lim_{h \rightarrow 0} = 0} \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{(l+2)!} h^l}_{\substack{=e^{Ah} \\ \text{Beweis von Satz 21.1} \\ \text{zeigt, dass die Norm für} \\ h \in [-1, 1] \text{ beschränkt ist}}} \right) \cdot e^{At} \cdot v = A \cdot \underbrace{e^{At} \cdot v}_{=\varphi(t)}.\end{aligned}$$

Wir haben damit, zumindest theoretisch, eine Lösung der homogenen linearen autonomen Differentialgleichung

$$y' = A \cdot y$$

gefunden. Es stellt sich aber die Frage, ob man denn die Matrizen e^{At} auch berechnen kann. Wir werden dieser Frage im nächsten Kapitel nachgehen.

22. HOMOGENE LINEARE AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN DIMENSION 2

Wir wollen zum Abschluß der Vorlesung die homogenen linearen autonomen Differentialgleichungen $y' = A \cdot y$ für eine reelle 2×2 -Matrix A explizit lösen.

22.1. Reelle 2×2 -Matrizen. Folgende Definition präzisiert die Definition von Seite 76.

Definition.

$A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißen **reell ähnlich** $\iff$ es gibt $P \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $P^{-1}AP = B$
 $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißen **komplex ähnlich** $\iff$ es gibt $P \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $P^{-1}AP = B$.

Lemma 22.1. *Es seien A, B zwei reelle $n \times n$ -Matrizen. Wenn A und B komplex ähnlich sind, dann sind sie auch reell ähnlich.*

Beweis. Es seien A, B zwei reelle $n \times n$ -Matrizen. Wir beginnen mit der Vorbemerkung, dass A und B komplex (bzw. reell) ähnlich sind, genau dann, wenn es eine invertierbare komplexe (bzw. reelle) Matrix P mit $A \cdot P = P \cdot B$ gibt.

Wir nehmen nun an, dass A und B komplex ähnlich sind. Es gibt also eine Matrix $Z \in GL(n, \mathbb{C})$ mit

$$A \cdot Z = Z \cdot B.$$

Wir schreiben $Z = X + iY$, wobei X und Y reelle Matrizen sind. Durch Ausmultiplizieren und Trennen nach Real- und Imaginärteil erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} A \cdot X &= X \cdot B, \\ \text{und} \quad A \cdot Y &= Y \cdot B. \end{aligned}$$

Es sei nun $s \in \mathbb{R}$. Indem wir die untere Gleichung mit $s \in \mathbb{R}$ multiplizieren und beide Gleichungen addieren, erhalten wir, dass

$$A \cdot (X + s \cdot Y) = (X + s \cdot Y) \cdot B.$$

Nachdem $X + s \cdot Y$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine reelle Matrix ist, müssen wir nur noch zeigen, dass es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $X + s \cdot Y$ invertierbar ist, d.h. so dass $\det(X + s \cdot Y) \neq 0$.

Das Polynom $p(t) := \det(X + t \cdot Y)$ ist nicht das Nullpolynom, denn nach Voraussetzung gilt $p(i) = \det(X + iY) = \det(Z) \neq 0$. Also besitzt das Polynom p nur endlich viele Nullstellen. Für jedes $s \in \mathbb{R}$, welches keine Nullstelle des Polynoms ist, gilt dann also, dass $\det(X + s \cdot Y) = p(s) \neq 0$. ■

Definition. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Wir definieren:

A ist **reell diagonalisierbar** $\iff A$ ist ähnlich zu einer **reellen** Diagonalmatrix
 A ist **komplex diagonalisierbar** $\iff A$ ist ähnlich zu einer **komplexen** Diagonalmatrix.

Satz 22.2. *Es sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix.*

- (1) *Wenn $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist auch die komplex-konjugierte Zahl $\bar{\lambda} = x - iy$ ein Eigenwert von A .*

- (2) Wenn es n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zu A gibt, dann ist A diagonalisierbar. Genauer gesagt, es seien $v_1, \dots, v_n$ Eigenvektoren zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir bezeichnen mit $P = (v_1 \dots v_n)$ die Matrix deren Spalten gerade $v_1, \dots, v_n$ sind. Dann ist P invertierbar und es gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wenn alle Eigenwerte reell sind, dann kann P auch reell gewählt werden.

Beweis. Die erste Aussage ist gerade Lemma 8.5 und die zweite Aussage folgt aus Satz 8.7 und Satz 8.6. ■

Satz 22.3. Es sei A eine reelle 2×2 -Matrix. Dann tritt genau eine der folgenden Möglichkeiten ein.

- (1) A ist reell diagonalisierbar,
- (2) A ist komplex diagonalisierbar aber nicht reell diagonalisierbar,
- (3) A ist nicht diagonalisierbar.

Darüber hinaus gelten folgende Aussagen:

- (1) Wenn A reell diagonalisierbar ist, dann gibt es eine invertierbare reelle Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A sind.

- (2) Wenn A komplex aber nicht reell diagonalisierbar ist, dann gibt es eine invertierbare reelle Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha \neq 0$ und wobei $\lambda \pm i\alpha$ die Eigenwerte von A sind.

- (3) Wenn A nicht diagonalisierbar ist, dann gibt es eine invertierbare reelle Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ der einzige Eigenwert von A ist.

Beweis. Es sei A eine reelle 2×2 -Matrix. Die Aussage, dass A in genau eine der drei Klassen fällt ist klar. Wir wenden uns nun dem zweiten Teil des Satzes zu.

- (1) Diese Aussage ist gerade die Definition von reell diagonalisierbar.
- (2) Es sei also A komplex diagonalisierbar aber nicht reell diagonalisierbar. Es folgt aus Satz 8.9 und Satz 22.2, dass A genau zwei Eigenwerte besitzt und diese sind von der Form $\lambda \pm i\alpha$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir schreiben⁷²

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}.$$

⁷²Die Matrix B beschreibt gerade den Homomorphismus $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ des 2-dimensionalen reellen Vektorraums $\mathbb{C}$, welcher gegeben ist durch $\varphi(z) = (\lambda + i\alpha) \cdot z$, bezüglich der Basis $1, i$.

Eine elementare Rechnung, beispielsweise mithilfe von Satz 8.9 zeigt, dass die Matrix B ebenfalls die komplexen Eigenwerte $\lambda \pm i\alpha$ besitzt. Die beiden Matrizen A und B sind also nach Satz 22.2 komplex ähnlich zu der diagonalen Matrix mit Diagonaleinträgen μ und $\bar{\mu}$. Insbesondere sind auch A und B komplex ähnlich. Es folgt nun aus Lemma 22.1, dass A und B sogar reell ähnlich sind.

- (3) Es sei nun A nicht diagonalisierbar. Der Satz über die Jordan-Transformation [N2, Satz 14.13] besagt, dass es eine invertierbare komplexe Matrix P gibt, so dass

$$P^{-1}AP = J := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist λ der einzige Eigenwert von A . Nachdem A eine reelle Matrix ist, ist nach Satz 22.2 auch das komplex-konjugierte $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A . Aber λ ist der einzige Eigenwert, also muss $\lambda = \bar{\lambda}$ gelten, d.h. λ ist reell. Wir sehen also, dass A komplex ähnlich zu der reellen Matrix J ist. Nach Lemma 22.1 sind die Matrizen A und J auch reell ähnlich. ■

Es sei also A eine reelle 2×2 -Matrix. Wir wollen nun die homogene lineare autonome Differentialgleichung $y' = A \cdot y$ studieren. In Satz 22.3 hatten wir gesehen, dass wir eine invertierbare Matrix P finden können, so dass $P^{-1}AP$ “besonders einfach” ist. Dies motiviert folgendes Vorgehen:

- (1) Wir versuchen die Differentialgleichung für die “besonders einfachen” drei Typen zu lösen. Dies erfolgt in den folgenden drei Teilkapiteln.
- (2) Wir müssen einen Zusammenhang zwischen Lösungen der Differentialgleichungen $y' = Ay$ und $y' = P^{-1}AP \cdot y$ herstellen.

Das folgende Lemma gibt uns die Antwort zu (2).

Lemma 22.4. *Es sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix und es sei P eine invertierbare reelle $n \times n$ -Matrix. Für eine differenzierbare Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\varphi(t) \text{ ist Lösung von } y' = P^{-1}AP \cdot y \iff P \cdot \varphi(t) \text{ ist Lösung von } y' = A \cdot y.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(t) \text{ ist Lösung der DGL } y' = P^{-1}AP \cdot y &\iff \varphi'(t) = P^{-1}AP \cdot \varphi(t) \iff P \cdot \varphi'(t) = AP \cdot \varphi(t) \\ &\iff (P \cdot \varphi(t))' = A \cdot P \cdot \varphi(t) \iff P \cdot \varphi(t) \text{ ist Lösung der DGL } y' = A \cdot y. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{aus der Linearität der} \\ &\quad \text{Ableitung folgt } (P \cdot \varphi(t))' = P \cdot \varphi'(t) \end{aligned}$$

22.2. Der reell diagonalisierbare Fall. Wir betrachten zuerst die Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot y,$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Lösung φ mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = (a, b)$ gegeben durch

$$\varphi_{(a,b)}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 21.4}}}{\exp \begin{pmatrix} \lambda \cdot t & 0 \\ 0 & \mu \cdot t \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Seite 187}}}{\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e^{\lambda t} \\ b \cdot e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

Für den Ausgangspunkt $(1, 0)$ erhalten wir insbesondere

$$\varphi_{(1,0)}(t) = (e^{\lambda t}, 0).$$

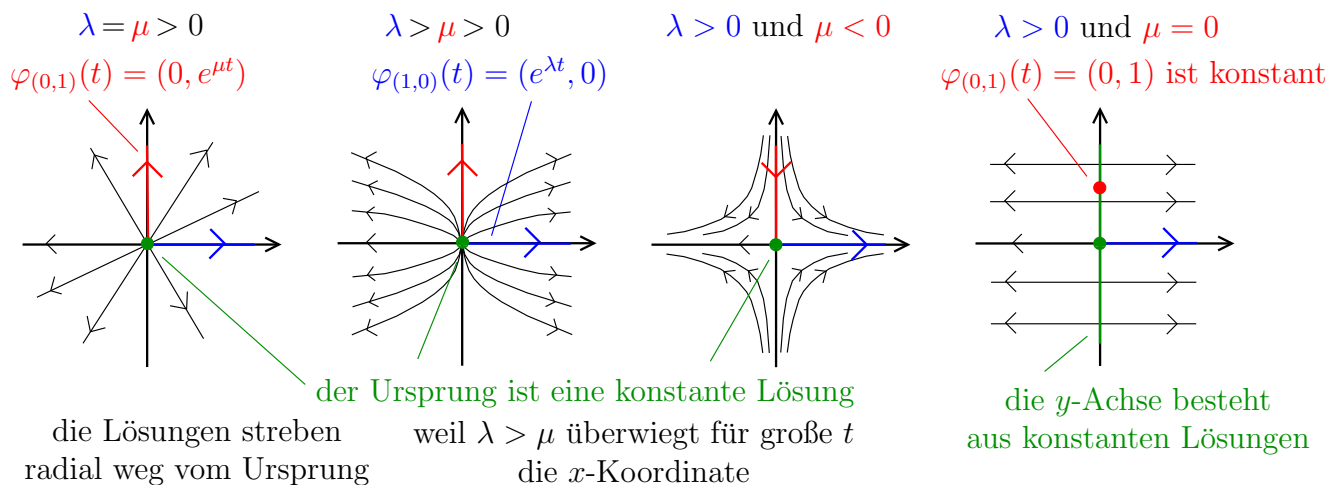
Diese Kurve verläuft also auf der positiven x -Achse. Das Verhalten der Kurve hängt dabei von λ ab. Genauer gesagt,

- wenn $\lambda > 0$, dann läuft die Lösung für $t \rightarrow \infty$ ins Unendliche,
- wenn $\lambda = 0$, dann ist die Lösung konstant,
- wenn $\lambda < 0$, dann läuft die Lösung für $t \rightarrow \infty$ gegen den Ursprung.

Eine ganz analoges Verhalten zeigt auch die Lösung $\varphi_{(0,1)}$, welche sich auf der positiven y -Achse bewegt. Etwas schwieriger sind die anderen Lösungen. Beispielsweise ist

$$\varphi_{(1,1)}(\mathbb{R}) = \{(e^{\lambda t}, \underbrace{e^{\mu t}}_{=(e^{\lambda t})^{\frac{\mu}{\lambda}}}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x, x^{\frac{\mu}{\lambda}}) \mid x \in (0, \infty)\}.$$

Anders ausgedrückt, die Lösung $\varphi_{(1,1)}(\mathbb{R})$ ist der Graph der Funktion $x \mapsto x^{\frac{\mu}{\lambda}}$. In der Abbildung skizzieren wir qualitativ die Lösungen für verschiedene Spezialfälle⁷³



Wir betrachten jetzt allgemeiner eine Differentialgleichung $y' = A \cdot y$, wobei A eine diagonalisierbare 2×2 -Matrix ist, welche zwei reelle Eigenwerte λ und μ besitzt. Wir bezeichnen mit v einen Eigenvektor zu λ und wir bezeichnen mit w einen Eigenvektor zu μ . Zudem sei $P = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}$ die 2×2 -Matrix, deren Spalten aus den Vektoren v und w besteht. Aus Satz 22.2 folgt, dass

⁷³Alle weiteren Fälle kann man sich aus diesen Fällen herleiten. Zum Beispiel, wenn $\lambda < \mu < 0$, dann erhalten wir die gleichen Linien wie in der Abbildung, der einzige Unterschied ist, dass wir die Orientierungen der Lösungen umdrehen müssen.

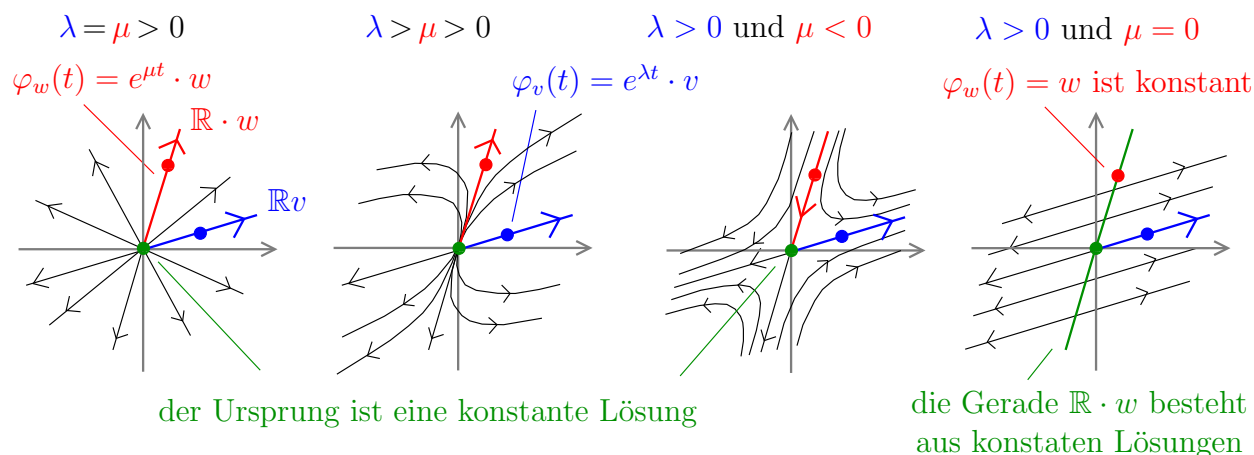
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir wenden nun Lemma 22.4 an. Für eine beliebige differenzierbare Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt also

$$\varphi(t) \text{ ist Lösung von } y' = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{=P^{-1}AP} y \iff P \cdot \varphi(t) \text{ ist Lösung von } y' = P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} y.$$

Anders ausgedrückt, in dem wir die Matrix P auf die uns bekannten Lösungen der Differentialgleichung $y' = P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} y$ anwenden, erhalten wir die gewünschten Lösungen von $y' = A \cdot y$.

Insbesondere erhalten wir die Lösungen von $y' = A \cdot y$, in dem wir die Matrix P , oder genauer gesagt die lineare Abbildung $u \mapsto P \cdot u$, auf die Lösungen in der Abbildung oben anwenden. Das Ergebnis wird in der Abbildung unten illustriert. Die x -Achse wird dabei auf die Gerade $\mathbb{R} \cdot v$ geschickt und die y -Achse wird in die Gerade $\mathbb{R} \cdot w$ übergeführt.



22.3. Der komplex diagonalisierbare Fall. Wir betrachten zuerst wieder einen Spezialfall. Genauer gesagt, für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir im Folgenden die Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix} \cdot y.$$

Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix} \cdot t\right) &= \exp\left(\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha t \\ \alpha t & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}\right) \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\alpha t \\ \alpha t & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad \uparrow \text{ nach Satz 21.3, da die beiden Matrizen kommutieren} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}. \\ &\quad \uparrow \text{ siehe Seite 187 und Übungsblatt 13} \end{aligned}$$

Es folgt aus dieser Berechnung und Satz 21.4, dass die Lösung φ mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = (1, 0)$ gegeben ist durch:

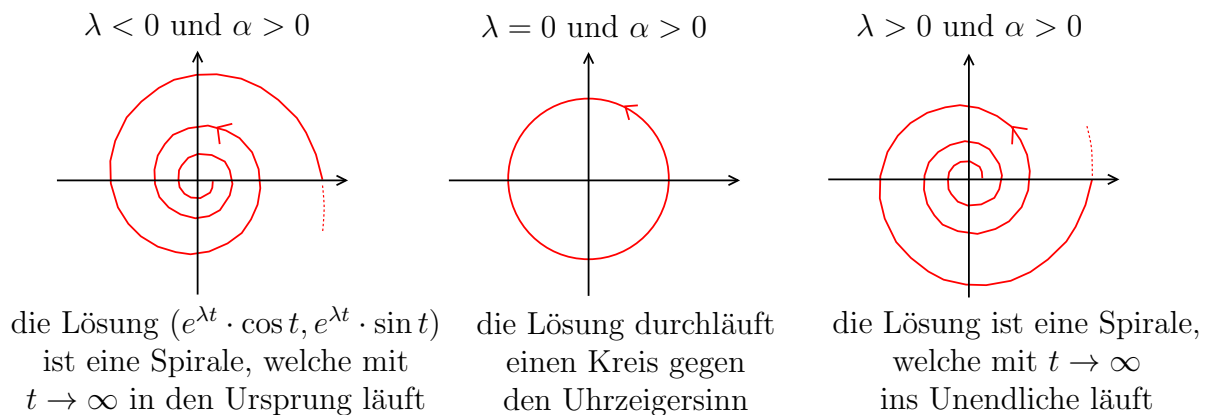
$$\varphi_{(1,0)}(t) = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) \end{pmatrix}.$$

Das Verhalten der Kurve hängt dabei von λ und α ab. Genauer gesagt

- wenn $\lambda > 0$, dann beschreibt die Lösung eine Spirale, welche für $t \rightarrow \infty$ ins Unendliche läuft,
- wenn $\lambda = 0$, dann ist die Lösung ein Kreis,
- wenn $\lambda < 0$, dann beschreibt die Lösung eine Spirale, welche für $t \rightarrow \infty$ gegen den Ursprung läuft.

Zudem gilt:

- wenn $\alpha > 0$, dann wird die Lösung gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen,
- wenn $\alpha < 0$, dann wird die Lösung hingegen im Uhrzeigersinn durchlaufen.



Wir betrachten jetzt allgemeiner eine Differentialgleichung $y' = A \cdot y$, wobei A eine diagonalisierbare 2×2 -Matrix ist, welche zwei komplexe, nicht-reelle Eigenwerte $\lambda \pm i\alpha$ besitzt.

Es folgt aus Satz 22.3, dass es eine invertierbare reelle Matrix $P = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}$ mit

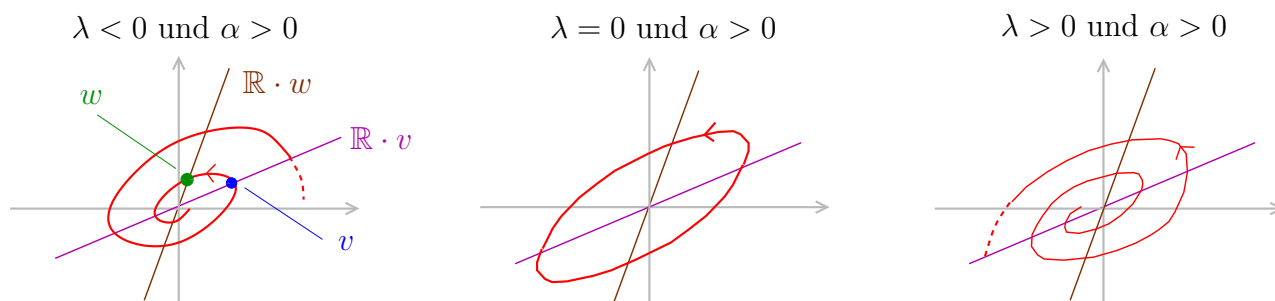
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

gibt. Wie im vorherigen Kapitel erhalten wir also die Lösungen für die Differentialgleichung $y' = A \cdot y$ indem wir die Matrix $P = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}$ auf die uns schon bekannten Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix} \cdot y$$

anwenden. Das Ergebnis wird in der Abbildung unten illustriert.⁷⁴

⁷⁴Die Frage, ob die Lösung sich nun im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn dreht ist allerdings etwas subtil. Genauer überlegen zeigt, dass sich die Lösung gegen den Uhrzeigersinn dreht, genau dann, wenn $\alpha \cdot \det(vw) > 0$.



22.4. Der nicht diagonalisierbare Fall. Auch in diesem Kapitel betrachten wir zuerst einen Spezialfall. Genauer gesagt, für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot y.$$

In diesem Fall ist

nach Satz 21.3, da die beiden Matrizen kommutieren

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ t & \lambda t \end{pmatrix} &= \exp \left(\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \right) \stackrel{\downarrow}{=} \exp \begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}}_{=: U} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}}_{= e^{\lambda t} \text{id}_2} \cdot \left(\text{id} + U + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{U^2}_{=0} + \frac{1}{3!} \cdot \underbrace{U^3}_{=0} + \dots \right) = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir also aus Satz 21.4, dass

$$\begin{aligned} \varphi_{(1,0)}(t) &= (e^{\lambda t}, t \cdot e^{\lambda t}), \\ \varphi_{(0,1)}(t) &= (0, e^{\lambda t}). \end{aligned}$$

Diese beiden Lösungskurven werden, mit weiteren Lösungen, in der Abbildung unten qualitativ skizziert.⁷⁵

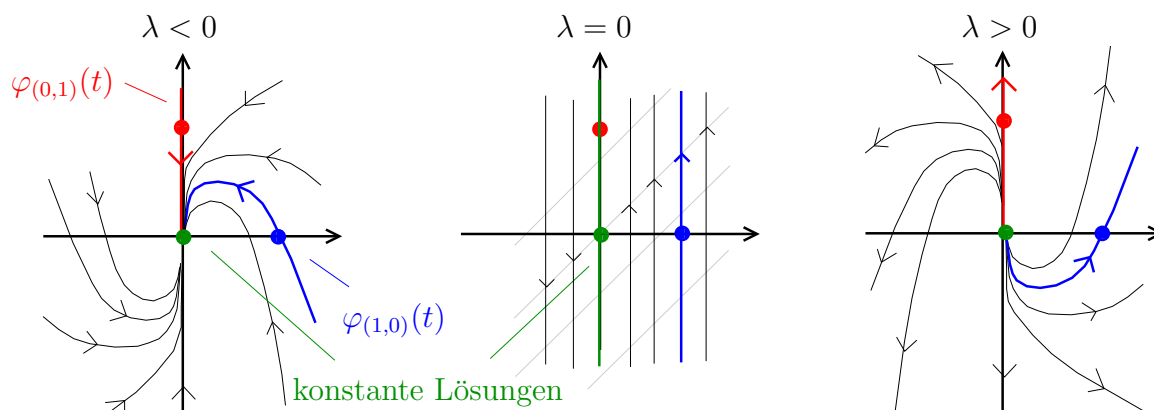
Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall einer Differentialgleichung $y' = A \cdot y$, wobei A eine 2×2 -Matrix ist, welche nicht diagonalisierbar ist. Nach Satz 22.3 besitzt A einen reellen Eigenwert λ mit Eigenvektor v . Zudem gibt es eine Matrix P mit Spalten v und w , so dass

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Wie in den beiden vorherigen Unterkapiteln erhalten wir also die Lösungen für die Differentialgleichung $y' = A \cdot y$ indem wir

⁷⁵Die Lösungskurve $\varphi_{(0,1)}$ kann man wie folgt bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi_{(0,1)}(\mathbb{R}) &= \{(e^{\lambda t}, t \cdot e^{\lambda t}) \mid t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\uparrow}{=} \{(x, \tfrac{1}{\lambda} \ln(x) \cdot x) \mid x \in (0, \infty)\} = \text{Graph von } x \mapsto \tfrac{1}{\lambda} \ln(x) \cdot x. \\ &\quad \text{folgt durch Substitution } x = e^{\lambda t} \end{aligned}$$



die Matrix $P = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}$ auf die uns schon bekannten Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot y$$

anwenden.

