Analysis III - Wintersemester 2021-2022

Stefan Friedl

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Fo1] O. Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Springer Spektrum (2015).

[Fo2] O. Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im* $\mathbb{R}^n$*, gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer Spektrum (2017).

[Fo3] O. Forster. *Analysis 3. Maß- und Integrationstheorie*, Springer Spektrum (2017).

[Fr1] S. Friedl. *Analysis 1*, Vorlesungsskript (2021).

[Fr2] S. Friedl. *Analysis 2*, Vorlesungsskript (2021).

[Ft] K. Fritzsche. *Funktionentheorie*, Springer Spektrum (2019).

[Ja] K. Jänich. *Funktionentheorie*, Springer Lehrbuch (2021).

[Na1] N. Naumann. *Lineare Algebra I*, Vorlesungsskript (2021).

[Na2] N. Naumann. *Lineare Algebra II*, Vorlesungsskript (2021).

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skript. Die Vorlesung besteht aus zwei Teilen, der Funktionentheorie sowie der Integrations- und Maßtheorie. Die erste Teil der Vorlesung über Funktionentheorie orientiert sich an [**Ja, Ft**]. Der zweite Teil über Maß- und Integrationstheorie basiert auf [**Fo3**].

I. Funktionentheorie

==================================

1. Die komplexen Zahlen

Die Funktionentheorie behandelt die Theorie der komplexen Funktionen, das heißt der komplex-wertigen Funktionen auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$. In diesem Kapitel erinnern wir zuerst an die Definition der komplexen Zahlen, und wir erinnern uns dann an einige der Eigenschaften und Aussagen, welche wir schon in Analysis I und Analysis II nachgewiesen hatten.

1.1. **Der Körper der komplexen Zahlen.**

Definition.

(1) Die *Menge der komplexen Zahlen* ist gegeben durch

$$\mathbb{C} \ := \ \{a + b\,\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

dies ist die Menge aller formalen Summen $a + b\mathrm{i}$, wobei i ein festgewähltes Symbol ist. Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir hierbei $a + 0\mathrm{i} = a$ und $0 + a\mathrm{i} = a\mathrm{i}$. Wir fassen also die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen auf.

(2) Wir können komplexe Zahlen wie folgt addieren

$$(x + y\mathrm{i}) + (x' + y'\mathrm{i}) \ := \ (x + x') + (y + y')\mathrm{i}, \qquad \text{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R},$$

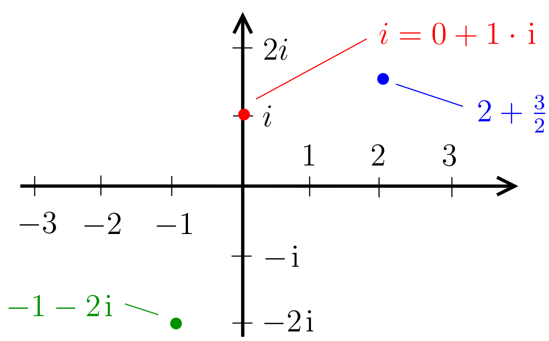
und wie folgt mit einem Skalar, d.h. mit einer reellen Zahl, multiplizieren

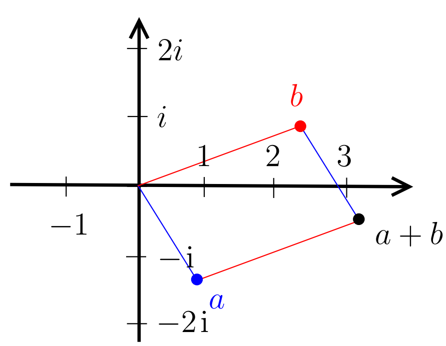
$$\lambda \cdot (x + y\mathrm{i}) \ := \ \lambda x + \lambda y\mathrm{i}, \qquad \text{wobei } x, y, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Man kann nun leicht überprüfen, dass $\mathbb{C}$ mit dieser Addition und dieser Skalarmultplikation ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum ist. Zudem kann man leicht überprüfen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + y\mathrm{i} \end{array}$$

ein Isomorphismus von reellen Vektorräumen ist. Wir stellen uns deswegen die komplexen Zahlen bildlich auch als die 2-dimensionale Ebene vor.





Folgender Satz besagt, dass man auf den komplexen Zahlen eine Multiplikation einführen kann, so dass alle Körperaxiome erfüllt sind.

Satz 1.1. *Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit der Addition*

$$(x+y\mathrm{i})+(x'+y'\mathrm{i}) \;:=\; (x+x')+(y+y')\mathrm{i}, \qquad \text{wobei } x,y,x',y'\in\mathbb{R},$$

und der Multiplikation

$$(x+y\mathrm{i})\cdot(x'+y'\mathrm{i}) \;:=\; (xx'-yy')+(xy'+x'y)\mathrm{i}, \quad \text{wobei } x,y,x',y'\in\mathbb{R}.$$

ist ein Körper.

Beweis. Der Satz wurde in [**Fr1**, Satz 10.1] bewiesen. ■

Bemerkung. Die Multiplikation

$$(x+y\mathrm{i})\cdot(x'+y'\mathrm{i}) \;=\; (xx'-yy')+(xy'+x'y)\mathrm{i}$$

erfolgt also durch Ausmultiplizieren und indem wir $\mathrm{i}^2=-1$ setzen. Der vielleicht überraschendste Aspekt ist, dass es zu jeder komplexen Zahl $z\neq 0$ ein multiplikativ inverses Element gibt. In der Tat gilt für $x+y\mathrm{i}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, dass

$$(x+\mathrm{i}y)\cdot\tfrac{1}{x^2+y^2}(x-y\mathrm{i}) \;=\; \tfrac{1}{x^2+y^2}(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}) \;=\; \tfrac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2) \;=\; 1.$$

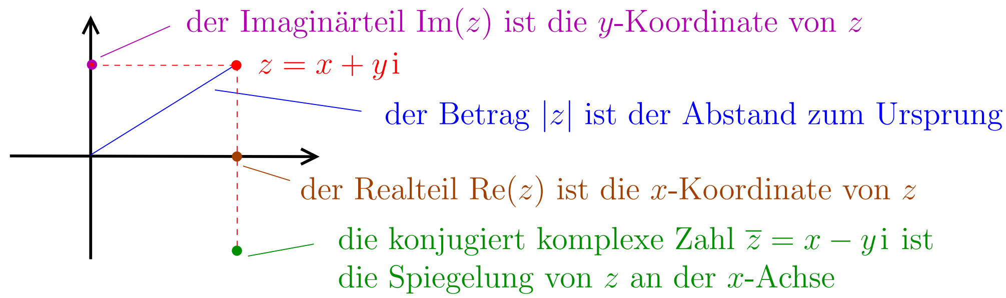
Mit anderen Worten, es ist

$$(x+y\mathrm{i})^{-1} \;=\; \tfrac{1}{x^2+y^2}(x-y\mathrm{i}).$$

Definition. Für $z=x+\mathrm{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ heißt

$\mathrm{Re}(z)$	$:=$	x	der Realteil von z,
$\mathrm{Im}(z)$	$:=$	y	der Imaginärteil von z,
$\overline{z}$	$:=$	$x-y\mathrm{i}$	die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ wird oft als z quer bezeichnet.



Bemerkung. Durch elementares Nachrechnen kann man leicht zeigen, dass für $w,z\in\mathbb{C}$ folgende Aussagen gelten

(1) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, (3) $\overline{w+z} = \overline{w}+\overline{z}$,

(2) $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$, (4) $\overline{w\cdot z} = \overline{w}\cdot\overline{z}$.

Definition. Es sei $z=x+y\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl. Wir definieren[1]

$$|z| \;:=\; \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{Betrag von } z.$$

Lemma 1.2. *Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & |z| & \geq & 0 & \textit{und es gilt: } |z| = 0 \iff z = 0, \\
(2) & |z| & = & \sqrt{z \cdot \overline{z}}, & \textit{insbesondere ist } |z|^2 = z \cdot \overline{z}, \\
(3) & |\overline{z}| & = & |z|, & \\
(4) & |w \cdot z| & = & |w| \cdot |z|, & \\
(5) & |z| & \geq & |\operatorname{Re}(z)| & \textit{und } |z| \geq |\operatorname{Im}(z)|, \\
(6) & |w + z| & \leq & |w| + |z| & (\textit{Dreiecksungleichung}).
\end{array}$$

Zudem gilt für $z \neq 0$ folgende Gleichheit:

$$(7) \qquad z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}$$

Beweis. Die meisten Aussagen kann man durch elementares Nachrechnen beweisen. Die einzige Aussage, welche etwas Nachdenken erfordert ist die Dreiecksungleichung. Wir hatten alle Aussagen in [**Fr1**, Lemma 10.5] bewiesen. ■

Korollar 1.3. *Der reelle Vektorraum $\mathbb{C}$ mit dem Betrag ist ein normierter Vektorraum. Insbesondere ist $\mathbb{C}$ mit der Abstandsfunktion $d(z, w) = |z - w|$ ein metrischer Raum.*

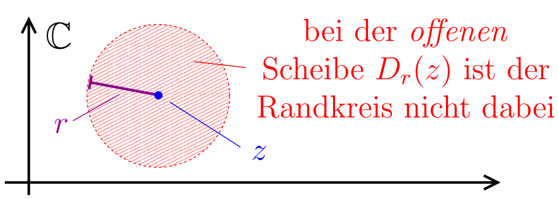
Beweis. Das Korollar folgt sofort aus den Eigenschaften (1), (4) und (5), welche wir in Lemma 1.2 formuliert hatten. ■

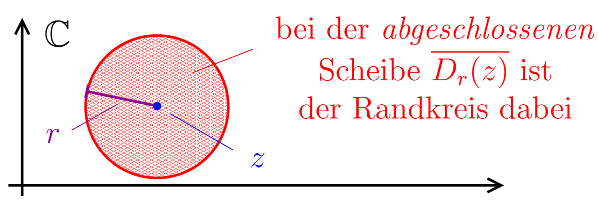
Konvention. Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{C}$ durchgehend als metrischen Raum bezüglich der Abstandsfunktion $d(z, w) = |z - w|$. Insbesondere übertragen sich alle Aussagen aus der Analysis II für metrische Räume auf die komplexen Zahlen.

1.2. **Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$.** Wir erinnern im Folgenden noch an ein paar weitere Notationen und Definitionen, welche wir in der Analysis II kennen gelernt hatten.

Notation. Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen[2]

$$\begin{array}{lcll}
D_r(z) & := & \{w \in \mathbb{C} \,|\, |w - z| < r\} & \text{als die offene Scheibe von Radius } r \text{ um } z \\
\overline{D_r(z)} & := & \{w \in \mathbb{C} \,|\, |w - z| \leq r\} & \text{als die abgeschlossene Scheibe von Radius } r \text{ um } z.
\end{array}$$





[1] Mit anderen Worten, $|z|$ ist gerade die euklidische Norm von $z = x + y\mathrm{i}$ aufgefasst als Punkt in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

[2] In Analysis II hatten wir die gleiche Menge mit $B_r(z)$ bezeichnet. Der Wechsel von„B" auf„D" rührt daher, dass wir in Analysis II allgemeine metrische Räume betrachtet hatten, und wir uns die Menge als Kugeln oder Bälle vorgestellt haben. Im komplexen, d.h. im reell 2-dimensionalen Fall, sind diese Mengen jedoch Scheiben und wir bezeichnen diese mit„D" für„diskus" oder„disk".

Definition.

(1) Wir sagen eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist offen, wenn es zu jedem $z \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $D_r(z)$ noch ganz in U liegt.
(2) Eine Menge $X \subset \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $\mathbb{C} \setminus X$ offen ist.

Beispiel.

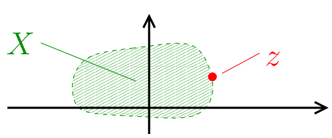
(1) Aus [**Fr2**, Lemma 1.6] wissen wir, dass $\mathbb{C}$ und die leere Menge $\varnothing$ offen und abgeschlossen sind.
(2) [**Fr2**, Lemma 1.5] besagt, dass jede offene Scheibe $D_r(z)$ in der Tat offen im obigen Sinne ist. Zudem hatten wir in [**Fr2**, Kapitel 2.5] gesehen, dass jede abgeschlossene Scheibe $\overline{D_r(z)}$ abgeschlossen im obigen Sinne ist.

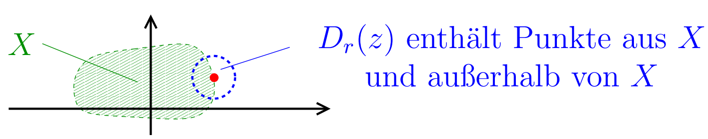
Definition. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Wir sagen $U \subset \mathbb{C}$ ist eine Umgebung von $z \in \mathbb{C}$, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $D_r(z) \subset U$.

Beispiel. Die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_2(0)}$ ist eine Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$, aber nicht von dem Punkt $2\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, obwohl dieser in der abgeschlossenen Scheibe enthalten ist.

Definition. Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
\text{Innere von } X &:= \mathring{X} &&:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \text{es gibt ein } \epsilon > 0, \text{ so dass } D_\epsilon(z) \subset X \right\} \\
\text{Abschluss von } X &:= \overline{X} &&:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \text{für alle } \epsilon > 0 \text{ gilt } D_\epsilon(z) \cap X \neq \varnothing \right\} \\
\text{Rand von } X &:= \partial X &&:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{für alle } \epsilon > 0 \text{ enthält } D_\epsilon(z) \text{ einen Punkt in } X \\ \text{und einen Punkt außerhalb von } X. \end{array} \right\}
\end{aligned}$$





Bemerkung. In den meisten Fällen ist das Innere, der Abschluss und der Rand„was man sich denkt". Beispielsweise kann man leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned}
\text{Innere von } D_r(z) &= \text{Innere von } \overline{D_r(z)} &&= D_r(z) \\
\text{Abschluss von } D_r(z) &= \text{Abschluss von } \overline{D_r(z)} &&= \overline{D_r(z)} \\
\text{Rand von } D_r(z) &= \text{Rand von } \overline{D_r(z)} &&= \left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, |w - z| = r \right\}.
\end{aligned}$$

1.3. **Konvergenz von Folgen und Reihen von komplexen Zahlen.** Wir hatten gerade in Korollar 1.3 gesehen, dass $\mathbb{C}$ mit der Betragsfunktion $|-| \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein normierter Vektorraum. Wir können nun die verschiedenen Definitionen und Ergebnisse aus der Analysis I und Analysis II über konvergente Folgen auf die komplexen Zahlen übertragen:

Definition. Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq N}{\forall} \; |z_n - z| < \epsilon.$$

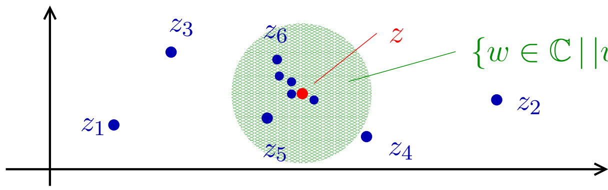


Illustration von $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

Für die Konvergenz von Folgen von komplexen Zahlen gelten fast die gleichen Aussagen wie für die Konvergenz von reellen Folgen. Insbesondere gilt:

(1) Wenn eine komplexe Folge konvergiert, dann ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.
(2) Eine komplexe Folge (z_n), welche konvergiert, ist auch beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen von komplexen Zahlen. Dann gilt mit den gleichen Beweisen wie in Analysis I, dass

(3) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

(5) für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $$\lim_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n,$$

(6) $$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

(7) Wenn $b_n \neq 0$ für alle n und wenn zudem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Der folgende Satz aus der Analysis I besagt nun, dass man die Konvergenz von Folgen von komplexen Zahlen auf die Konvergenz von den Real- und Imaginärteilen zurückführen kann.

Satz 1.4. *Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt* [3]

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z).$$

Beweis. Diese Aussage wurde in [**Fr1**, Satz 10.6] bewiesen. ■

Definition. Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$(z_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge} \quad :\iff \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n,m\geq N}{\forall} \ |z_n - z_m| < \epsilon.$$

Satz 1.5. *Jede Cauchy-Folge von komplexen Zahlen konvergiert in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Der Satz wird in [**Fr1**, Satz 10.7] bewiesen. Die Beweisidee ist ganz einfach: In Satz 1.4 hatten wir gesehen, dass wir die Konvergenz von Folgen von komplexen Zahlen

[3] Die linke Seite betrifft die Konvergenz von einer Folge von komplexen Zahlen, während die rechte Seite von der Konvergenz von zwei Folgen von reellen Zahlen handelt.

auf die Konvergenz von Folgen von reellen Zahlen zurückführen kann. Die Aussage folgt nun aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen. ■

Definition. Für eine Folge (z_n) von komplexen Zahlen definieren wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ als die Folge der Partialsummen. Wenn die Reihe konvergiert, dann schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} z_n.$$

Beispiel. Das Argument von [**Fr1**, Satz 3.16] zeigt, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{“geometrische Reihe”}.$$

Bemerkung. Für konvergente Reihen komplexer Zahlen gelten die üblichen Rechenregeln. Zudem verträgt sich nach Lemma 1.4 Reihenbildung mit komplexer Konjugation. D.h. für eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ von komplexen Zahlen gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} z_n}.$$

Definition. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ von komplexen Zahlen heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ der Beträge konvergiert.

Bemerkung. In Analysis I hatten wir gesehen, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Zudem hatten wir das Majorantenkriterium und das Quotientenkriterium für die absolute Konvergenz von Reihen formuliert und bewiesen.

Der folgende Satz erinnert an die schönste aller Reihen.

Satz 1.6.

(1) *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Exponentialreihe*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{k\to\infty} \left(1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^k}{k!}\right).$$

(2) (a) *Für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp(z+z') = \exp(z)\cdot\exp(z')$ (*Funktionalgleichung*).

(b) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp\left(\overline{z}\right) = \overline{\exp(z)}$.

Beweis. Dies ist gerade die Aussage von [**Fr1**, Satz 10.8]. ■

Bemerkung. Wir haben jetzt also gesehen, dass sich viele Definitionen und Aussagen über reelle Folgen und Reihen problemlos auf Folgen und Reihen von komplexen Zahlen übertragen. Insbesondere alle Aussagen, welche nur mit dem Absolutbetrag $|\ |$ von reellen Zahlen formuliert wurden, übertragen sich problemlos. Allerdings können die Definitionen und Aussagen über reelle Zahlen, Folgen und Reihen, welche die Anordnung $>$ verwenden, *nicht* auf die komplexen Zahlen übertragen werden. Insbesondere gilt:

(1) es gibt *kein* Analogon des Leibniz-Kriteriums für komplexe Folgen,
(2) das Supremum und Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist *nicht* definiert,
(3) es macht keinen Sinn zu sagen, dass eine Folge von komplexen Zahlen (z_n) bestimmt gegen $-\infty$ oder $+\infty$ divergiert.

1.4. **Stetige Funktionen.** Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass wir ohne größere Probleme viele der Definitionen und Sätze von reellen Funktionen auf komplexe Funktionen übertragen können.

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion und es sei $z_0 \in D$. Wir definieren

$$f \text{ ist stetig im Punkt } z_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{z \in D \text{ mit} \\ |z-z_0|<\delta}}{\forall} \ |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Durch einfaches Umschreiben der Beweise für reelle Funktionen erhalten wir folgende Aussagen:

(1) Es sei $c \in \mathbb{C}$. Die folgenden Funktionen sind stetig:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & c \end{array} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & |z|. \end{array}$$

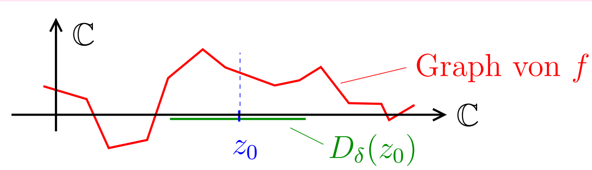
(2) Die Summe, das Produkt, der Quotient und die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen sind stetig.
(3) Die Einschränkung einer stetigen Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf eine Teilmenge $E \subset D$ ist wiederum stetig.

In [**Fr1**, Satz 7.8] hatten wir gezeigt, dass die reelle Exponentialfunktion stetig ist. Der Beweis überträgt sich wort-wörtlich auf komplexe Zahlen. Wir erhalten daher, dass die komplexe Exponentialfunktion

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \exp(z) \end{array} \qquad \text{ebenfalls stetig ist.}$$

Folgendes, zu diesem Zeitpunkt etwas unmotivierte, Lemma werden wir im späteren Verlauf der Vorlesung noch mehrmals verwenden.

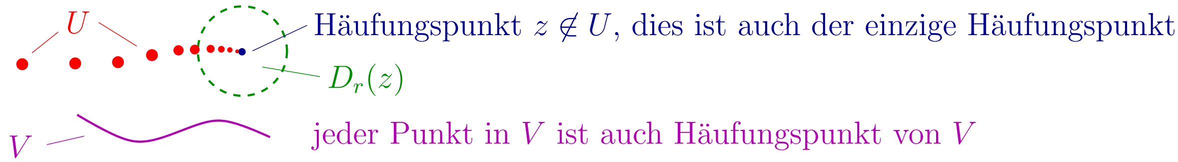
Lemma 1.7. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig. Es sei $z_0 \in U$ mit $f(z_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D_\delta(z_0) \cap U$.*



Beweis. Wir wenden die Definition der Stetigkeit auf $\epsilon := |f(z_0)|$ an und erhalten ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in D_\delta(z_0) \cap U$ gilt, dass $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Es folgt aus der Dreiecksungleichung, dass dieses $\delta > 0$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. ∎

1.5. **Grenzwerte von komplexen Funktionen.**

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Wir sagen $z \in \mathbb{C}$ ist ein Häufungspunkt von U, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $z \neq w \in U$ mit $|z - w| < \epsilon$ gibt.



Beispiel.

$$\begin{aligned} \text{Menge der Häufungspunkte von } D_r(z) &= \overline{D_r(z)} \\ \text{Menge der Häufungspunkte von } \mathbb{Q} &= \mathbb{R} \\ \text{Menge der Häufungspunkte von } \mathbb{Z} &= \varnothing. \end{aligned}$$

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von U. Für $w \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{z_0 \neq z \in D_\delta(z_0) \cap U}{\forall} |f(z) - w| < \epsilon.$$

Wenn solch ein w existiert, dann nennen wir diesen den Grenzwert von f am Punkt z_0.[4] Zudem schreiben wir[5]

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{C>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{z_0 \neq z \in D_\delta(z_0) \cap U}{\forall} |f(z)| \geq C.$$

Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von U. Wenn $z_0 \in U$, dann gilt wie in [**Fr1**, Satz 7.9], dass

$$g \text{ stetig im Punkt } z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

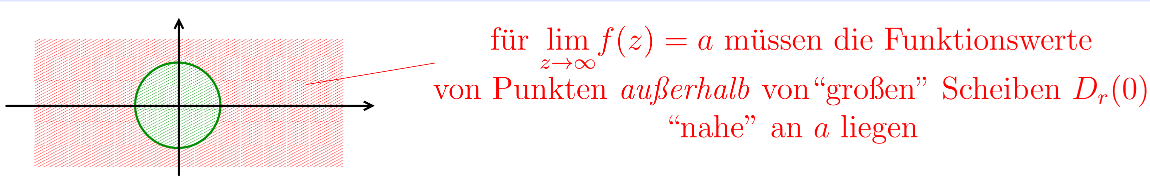
Definition. Es sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ wiederum eine Funktion. Für $a \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{r \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{z \in U \text{ mit } |z| \geq r}{\forall} |f(z) - a| < \epsilon$$

und

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{C>0}{\forall} \ \underset{r \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{z \in U \text{ mit } |z| \geq r}{\forall} |f(z)| \geq C.$$

Wir bezeichnen dann $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ als den Grenzwert von f für z gegen ∞.



Definition.

---

[4] In Präsenzübungsblatt 1 zeigen wir, dass der Grenzwert, wenn er existiert, eindeutig bestimmt ist.

[5] Im Gegensatz zum reellen Fall betrachten wir den *Betrag* der Funktionswerte.

(1) Ein Polynom von Grad n ist eine Funktion der Form

$$f(z) \;=\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + z_0,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und wobei $a_n \neq 0$. Wir nennen a_n den höchsten Koeffizienten von $f(z)$. Zudem sagen wir, dass das Nullpolynom $f(z) = 0$ ein Polynom von Grad -1 ist.[6]

(2) Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form

$$f(z) \;=\; \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei $p(z)$ und $q(z) \neq 0$ Polynome sind.

Lemma 1.8.

(1) *Es sei* $p(z)$ *eine Polynom mit* $\operatorname{Grad}(p) \geq 1$. *Dann gilt*

$$\lim_{z \to \infty} p(z) \;=\; \infty.$$

(2) *Es seien* $p(z), q(z) \neq 0$ *zwei Polynome. Dann gilt*

$$\lim_{z \to \infty} \frac{p(z)}{q(z)} \;=\; \begin{cases} 0, & \textit{wenn } \operatorname{Grad}(p) < \operatorname{Grad}(q), \\ \frac{\text{höchster Koeffizient von } p}{\text{höchster Koeffizient von } q}, & \textit{wenn } \operatorname{Grad}(p) = \operatorname{Grad}(q), \\ \infty, & \textit{wenn } \operatorname{Grad}(p) > \operatorname{Grad}(q). \end{cases}$$

Beweis. Das Lemma wird ganz ähnlich wie die analoge Aussage für reelle Polynome und reelle rationale Funktionen bewiesen. ■

Beispiel.

$$\lim_{z \to \infty} \frac{3z^2+1}{5z^2-2z+7} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 1.8}}}{=} \frac{\text{höchster Koeffizient von } 3z^2+1}{\text{höchster Koeffizient von } 5z^2-2z+7} \;=\; \frac{3}{5}.$$

[6]Es werden in der Literatur auch andere Konventionen verwendet, beispielsweise kann es Sinn machen den Grad des Nullpolynoms als $-\infty$ zu definieren.

2. Holomorphe Funktionen

2.1. **Definition von holomorphe Funktionen und erste Eigenschaften.** Viele Definitionen übertragen sich ganz natürlich von den reellen Funktionen auf die komplexen Funktionen. Dies gilt beispielsweise auch für die Differenzierbarkeit.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $z_0 \in U$.

(1) Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar im Punkt $z_0 \in U$, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\frac{d}{dz}f(z_0) \;:=\; f'(z_0) \;:=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \;\in \mathbb{C}.$$

(2) Wenn f in allen Punkten komplex differenzierbar ist, dann nennen wir die Funktion komplex differenzierbar oder kürzer, holomorph. Wir nennen dann die Funktion

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f'(z) \end{array}$$

die Ableitung von f.

(3) Ganz analog führen wir auch den Begriff k-mal komplex differenzierbar ein, und bezeichnen die k-te komplexe Ableitung mit $f^{(k)}$.

Beispiel. Man kann leicht„per Hand” zeigen, dass die konstanten Funktionen $f(z) = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und die Funktion $f(z) = z$ holomorph sind.

Bemerkung. Wie in [**Fr1**, Satz 12.3] zeigt man, dass holomorphe Funktionen stetig sind.

Satz 2.1. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind die Funktionen $f+g$ und $f \cdot g$ holomorph, wobei*

$$\begin{array}{rcll} (f+g)' & = & f'+g' & \qquad (\textit{Summenregel}) \\ (f\cdot g)' & = & f'\cdot g + f\cdot g' & \qquad (\textit{Produktregel}). \end{array}$$

Wenn zudem $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ holomorph mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \;=\; \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \qquad (\textit{Quotientenregel}).$$

Beweis. Der Beweis ist fast identisch zum Beweis der analogen Aussage aus der Analysis I, nämlich [**Fr1**, Satz 12.4]. ■

Beispiel. Mithilfe der Produktregel und einem Induktionsargument kann man leicht zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{d}{dz}\,z^n \;=\; nz^{n-1}.$$

Satz 2.2. *Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen, es seien $f\colon U \to \mathbb{C}$ und $g\colon V \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f(U) \subset V$. Dann ist auch $g \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei*

$$(g\circ f)'(z) \;=\; g'(f(z))\cdot f'(z) \qquad (\textit{Kettenregel}).$$

Beweis. Der Beweis ist ebenfalls fast identisch zum Beweis der„reellen Kettenregel”, siehe [**Fr1**, Satz 12.7]. ■

Wir erinnern nun noch an die„klein-o” Notation aus der Analysis II.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung von 0 und es seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ Funktionen. Wir definieren

$$f(z) = o(g(z)) \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{z\in D_\delta(0)\cap U}{\forall} |f(z)| \leq \epsilon \cdot |g(z)|.$$

Für Funktionen $f, g, h\colon U \to \mathbb{R}$ definieren wir auch

$$f(z) = g(z) + o(h(z)) \quad :\Longleftrightarrow \quad f(z) - g(z) = o(h(z)).$$

Beispiel. Auf $U = \mathbb{C}$ gilt beispielsweise, dass $z^3 = o(\frac{1}{2}z^2)$. In der Tat, denn für $\epsilon > 0$ setzen wir $\delta = \frac{1}{2}\cdot\epsilon$, und dann gilt für ein beliebiges $z \in D_\delta(0)$, dass

$$|z^3| = |z^2| \cdot |z| < |z^2| \cdot \delta = |z^2| \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \epsilon = \epsilon \cdot \tfrac{1}{2} \cdot z^2.$$

Folgendes Lemma gibt nun eine Umformulierung von komplexer Differenzierbarkeit.

Lemma 2.3. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, es sei $z_0 \in U$ und es sei $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt*[7]

$$\begin{array}{c} f \text{ ist komplex differenzierbar} \\ \text{im Punkt } z_0 \text{ mit } f'(z_0) = a \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad f(z_0 + h) = f(z_0) + h \cdot a + o(h).$$

Beweis. Das Lemma, welches das komplexe Analogon zu [**Fr2**, Lemma 6.5] ist, folgt leicht aus den Definitionen. ■

2.2. **Der Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit.** Das nächste Lemma besagt, auf welche Weise wir die Multiplikation mit komplexen Zahlen durch Matrizen ausdrücken können.

Lemma 2.4. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (a + b\mathrm{i}) \cdot z \end{array}$$

eine lineare Selbstabbildung (Endomorphismus) des reellen Vektorraums $\mathbb{C}$. Bezüglich der Basis $\{1, \mathrm{i}\}$ von $\mathbb{C}$ wird diese lineare Selbstabbildung durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

repräsentiert.

Beweis. Der Beweis vom Lemma besteht nur darin, die Definition von einer Matrix, welche eine lineare Selbstabbildung bezüglich einer gegebenen Basis repräsentiert, hinzuschreiben. In diesem Fall ist die Basis $\{1, \mathrm{i}\}$ und die lineare Abbildung ist die Multiplikation mit $a+b\mathrm{i}$. Wir berechnen, dass

$$(a + b\mathrm{i}) \cdot 1 = a + b\mathrm{i} = \begin{array}{c} a \cdot 1 \\ + \\ b \cdot \mathrm{i} \end{array} \quad \text{und} \quad (a + b\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} = -b + a\mathrm{i} = \begin{array}{c} -b \cdot 1 \\ + \\ a \cdot \mathrm{i} \end{array}.$$

Wir erhalten nun die gesuchte Matrix aus den Koeffizienten, welche jeweils rechts rot markiert sind. ■

[7] Auf der rechten Seite erlauben wir alle $h \in \mathbb{C}$ mit $z_0 + h \in U$.

Bemerkung. Lemma 2.4 besagt also, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rr, "v\mapsto\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}\cdot v"] \arrow[d, "(x,y)\mapsto x+y\,\mathrm{i}"', "\cong"] & & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\cong"', "(x,y)\mapsto x+y\,\mathrm{i}"] \\
\mathbb{C} \arrow[rr, "z\mapsto(a+b\mathrm{i})\cdot z"] & & \mathbb{C}.
\end{tikzcd}$$

Insbesondere entspricht Multiplikation mit $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ gerade den Drehungen um den Winkel φ in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung. Es sei nun $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Mit der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ von Seite 8 können wir also f auch als Abbildung $U \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Es sei $z_0 \in U$. Wir haben nun zwei verschiedene Begriffe von Differenzierbarkeit am Punkt z_0:

(1) Wir hatten gerade den Begriff von komplex differenzierbar eingeführt.
(2) In Analysis II hatten wir auch den Begriff von reell differenzierbar eingeführt. In unserem jetzigen Zusammenhang ist $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ im Punkt z_0 reell differenzierbar, wenn es eine reelle 2×2–Matrix A gibt, so dass
$$\lim_{v\to 0} \frac{f(z_0+v) - f(z_0) - A\cdot v}{\|v\|} \;=\; 0.$$
Die Matrix A wird das *Differential* $\mathrm{D}f_{z_0}$ *von* f *am Punkt* z_0 *genannt.*

Der folgende Satz erklärt nun den Zusammenhang zwischen den beiden Formulierungen von Differenzierbarkeit.

Satz 2.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine Funktion, es sei $z_0 \in U$ und es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\begin{array}{c} f \text{ ist komplex differenzierbar} \\ \text{am Punkt } z_0 \text{ mit Ableitung } a+b\mathrm{i} \end{array} \iff \begin{array}{c} f \text{ ist reell differenzierbar am Punkt } z_0 \\ \text{mit Differential } \mathrm{D}f_{z_0} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{array}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{array}{ccl}
\begin{array}{c} f \text{ komplex differenzierbar} \\ \text{mit Ableitung } a+b\mathrm{i} \end{array} & \iff & \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = a+b\mathrm{i} \\
& \iff & \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-(a+b\mathrm{i})\cdot h}{h} = 0 \\
& \iff & \underbrace{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-(a+b\mathrm{i})\cdot h}{|h|}}_{\text{komplexer Grenzwert in } \mathbb{C}} = 0 \\
& \underset{\text{Lemma 2.4}}{\underset{\uparrow}{\iff}} & \underbrace{\lim\limits_{v\to 0} \frac{f(z_0+v)-f(z_0)-\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot v}{\|v\|}}_{\text{reeller Grenzwert in } \mathbb{R}^2} \;=\; 0 \\
& \iff & f \text{ reell differenzierbar mit } \mathrm{D}f_{z_0} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.
\end{array}$$

■

Satz 2.6. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f = u + \mathrm{i}v \colon U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine reell differenzierbare Funktion mit $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$.*

(1) *Es gilt*
$$\mathrm{D}f \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

(2) *Die Abbildung $f \colon U \to \mathbb{C}$ ist holomorph genau dann, wenn*
$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Bemerkung. Die Gleichungen
$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
aus Satz 2.6 (2) werden die *Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen* genannt.

Beweis. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von [**Fr2**, Satz 6.10]. Die zweite Aussage folgt aus der ersten Aussage und Satz 2.5. ■

Beispiel. Wir betrachten die Funktion
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + y\,\mathrm{i} & \mapsto & \mathrm{Re}(z) = x. \end{array}$$
In diesem Fall ist
$$\begin{array}{rcl} u \colon \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ x + y\,\mathrm{i} & \mapsto & x \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} v \colon \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ x + y\,\mathrm{i} & \mapsto & 0. \end{array}$$
Wir sehen nun, dass
$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 1 \neq 0 \;=\; \frac{\partial v}{\partial y}.$$
Es folgt also aus Satz 2.6, dass $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ *keine* holomorphe Abbildung ist.

Mithilfe von Satz 2.5 können wir nun auch die Umkehrregel für holomorphe Funktionen beweisen.

Satz 2.7. (Umkehrregel für holomorphe Funktionen) *Es sei $f \colon U \to V$ eine holomorphe bijektive Abbildung zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Wir nehmen an, dass f' stetig ist.*[8] *Wenn $f'(v) \neq 0$ für alle $v \in U$, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} \colon V \to U \subset \mathbb{C}$ holomorph und für alle $v \in V$ gilt:*
$$\left(f^{-1}\right)'(v) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(v))}.$$

Beweis. Es sei $f \colon U \to V$ eine holomorphe bijektive Abbildung zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, so dass $f'(v) \neq 0$ für alle $v \in U$.

Behauptung 1. Die Umkehrfunktion $f^{-1} \colon V \to U \subset \mathbb{C}$ ist holomorph.

Aus Satz 2.5 folgt, dass f insbesondere reell differenzierbar ist mit invertierbaren Differentialen. Zudem folgt, da f' stetig ist, dass f sogar stetig differenzierbar ist. Es sei nun $v \in V$. Der Satz über die Umkehrabbildung aus der Analysis II Vorlesung besagt in unserem Fall, dass die Umkehrabbildung f^{-1} im Punkt v reell differenzierbar ist mit Differential
$$(*) \qquad \mathrm{D}(f^{-1})_v \;=\; (\mathrm{D}f_{f^{-1}(v)})^{-1}.$$

[8] Wir werden später sehen, dass die Ableitung f' immer stetig ist, aber im Moment wissen wir das noch nicht.

Da f nach Voraussetzung holomorph ist gibt es nach Satz 2.5 reelle Zahlen $c, d \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mathrm{D}f_{f^{-1}(v)} \;=\; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Es folgt also, dass

$$\mathrm{D}(f^{-1})_v \;=\; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \tfrac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist also von der Form wie auf der rechten Seite von Satz 2.5. Es folgt daher aus Satz 2.5, dass f^{-1} im Punkt v holomorph ist. ⊞

Behauptung 2. Es ist
$$\big(f^{-1}\big)'(v) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(v))}.$$

Die Aussage folgt sofort aus $(*)$ und Satz 2.5. Wir geben im Folgenden noch einen ausführlicheren Beweis, mit dem man sich die Umkehrregel leichter merken kann. Es gilt:

$$1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } f^{-1}}}{=} \big(f(f^{-1}(v))\big)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel, welche wir anwenden können, da} \\ \text{wir gezeigt hatten, dass } f^{-1} \text{ holomorph}}}{=} f'(f^{-1}(v)) \cdot (f^{-1})'(v) \quad \text{und damit} \quad \big(f^{-1}\big)'(v) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(v))}.$$

■

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem kleinen Lemma, welches man als den komplexen Tachosatz bezeichnen könnte.

Lemma 2.8. *Es sei $f\colon D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn $f'(z) = 0$ für alle z, dann ist die Funktion $f(z)$ konstant.*

Beweis. Wir fassen f auf als Abbildung von $D_r(z_0) \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Nach Satz 2.5 und der Voraussetzung, dass $f' \equiv 0$ folgt nun, dass das Differential $\mathrm{D}f$ dieser Abbildung überall verschwindet. Es folgt dann aus dem Schranksatz [**Fr2**, Satz 12.2], dass die Funktion f konstant ist. ■

3. Potenzreihen

3.1. **Potenzreihen.** Wir führen jetzt den Begriff einer Potenzreihe ein. Dieser Begriff kann als Verallgemeinerung von Polynomen aufgefasst werden.

Definition. Eine Potenzreihe mit *Entwicklungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f(z) \;=\; \sum_{n=w}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n,$$

wobei $(c_n)_{n \geq w}$ eine Folge von *komplexen Zahlen* und z eine Variable ist.

Beispiel.

(1) Wenn $c_n = 0$ für alle $n > N$, dann ist eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$ nichts anderes als ein Polynom von Grad $\leq N$. In diesem Fall konvergiert die Reihe natürlich für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Wir betrachten die Potenzreihe $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

   (a) Wenn $|z| < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, denn dies ist dann gerade die geometrische Reihe.

   (b) Wenn $|z| \geq 1$, dann ist $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$, keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe.

(3) In [**Fr1**, Kapitel 21.5] hatten wir für jede C^∞-Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und jeden Punkt $a \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \cdot (z-a)$$

von f am Punkt a eingeführt. Dies sind also gerade Potenzreihen.

(4) Wir betrachten die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Für $z \in C$ gilt:

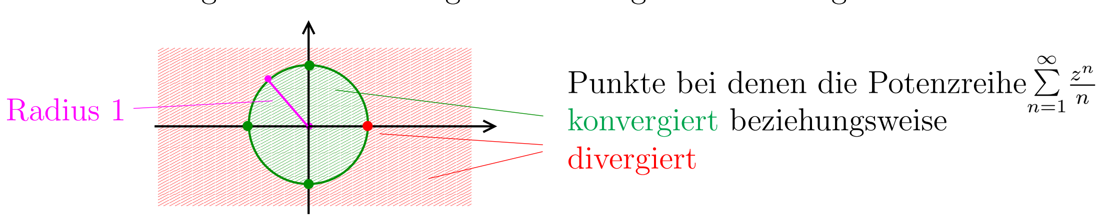
   (a) Wenn $|z| < 1$ dann konvergiert die Potenzreihe nach dem Quotientenkriterium.

   (b) Wenn $|z| > 1$ dann divergiert die Reihe, nachdem $\frac{z^n}{n}$ keine Nullfolge ist.

   (c) Für $z = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, welche divergiert.

   (d) Für $z = -1$ konvergiert die Potenzreihe nachdem Leibniz-Kriterium.

   (e) Die Reihe konvergiert sogar für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$. Der Beweis dieser allgemeineren Aussage ist allerdings etwas knifflig.



Definition. Es sei $f(z) = \sum\limits_{n=w}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$ eine Potenzreihe. Wir bezeichnen

$$R \;:=\; \sup\left\{ |z-a| \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_{n=w}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n \text{ konvergiert} \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

als den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z)$.

Beispiel. Aus der Diskussion oben und Satz 1.6 folgt:

(1) Der Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist $R = 1$.

(2) Der Konvergenzradius der Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist $R = \infty$.

Das folgende Lemma zeigt, dass bestimmte Abänderungen einer Potenzreihe den Konvergenzradius nicht beeinflussen.

Lemma 3.1. *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $s \in \mathbb{Z}$, dass folgende Potenzreihen den gleichen Konvergenzradius besitzen:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n \quad \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^{n+k} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot (z-a)^n \quad \& \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^s \cdot c_n \cdot (z-a)^n.$$

Beweis. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass die Konvergenzradien der ersten drei Potenzreihen übereinstimmen. Es folgt aus [**Fr1**, Lemma 20.5], dass die Konvergenzradien der ersten und der letzten Potenzreihe übereinstimmen. Der Beweis von [**Fr1**, Lemma 20.5] kann auch leicht adaptiert werden um zu zeigen, dass die Konvergenzradien der ersten und der vierten Potenzreihe übereinstimmen. ■

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass Potenzreihen holomorphe Funktionen definieren. Um diese Aussage zu beweisen, müssen wir deutlich ausholen und Potenzreihen ganz allgemein besser verstehen lernen.

3.2. **Der erste Hauptsatz über Potenzreihen.** Folgende Definition ist eine leichte Verallgemeinerung der Definition der Supremumsnorm von [**Fr2**, Kapitel 13].

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine kompakte[9] nichtleere Teilmenge.

(1) Für eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ definieren wir die Supremumsnorm

$$\|f\| \ := \ \sup\{|f(z)|\,|\, z \in D\} \ \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

(2) Wir schreiben

$$C(D,\mathbb{C}) \ := \ \text{Menge aller stetigen Abbildung } D \to \mathbb{C}.$$

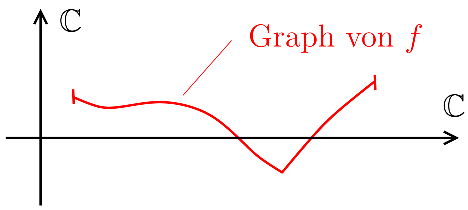
Wie in [**Fr2**, Lemma 13.1] sieht man, dass $C(D,\mathbb{C})$ mit $d(f,g) := \|f - g\|$ einen metrischen Raum bildet.

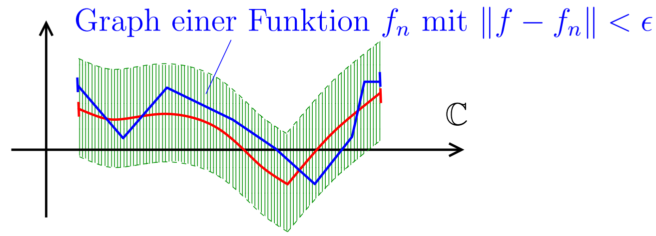
(3) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{C}$. Wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$, wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $C(D,\mathbb{C})$ gegen f konvergiert.[10]

[9]Im weiteren Verlauf der Vorlesung wird D immer eine abgeschlossene Scheibe sein. Diese sind kompakt nach dem Satz von Heine-Borel aus Analysis II.

[10]Ausgeschrieben bedeutet das:

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f\colon D \to \mathbb{C} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ \ \|f_n - f\| < \epsilon.$$





Satz 3.2. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine kompakte nichtleere Teilmenge. Wir betrachten die Metrik $d(f, g) := \|f - g\|$. Der metrische Raum $(C(D, \mathbb{C}), d)$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in dem metrischen Raum $(C(D, \mathbb{C}), d)$ konvergiert in $(C(D, \mathbb{C}), d)$.*

Beweis. Der Beweis des Satzes ist eigentlich identisch zum Beweis von [**Fr2**, Satz 13.2]. In [**Fr2**, Satz 13.2] hatten wir nur den Fall betrachtet, dass der Definitionsbereich ein kompaktes Intervall $[a, b]$ ist. Aber der allgemeinere Fall wird ganz genauso bewiesen. ■

Satz 3.3. (Erster Hauptsatz über Potenzreihen) *Es sei R der Konvergenzradius einer Potenzreihe*

$$f \;=\; \sum_{n=w}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n.$$

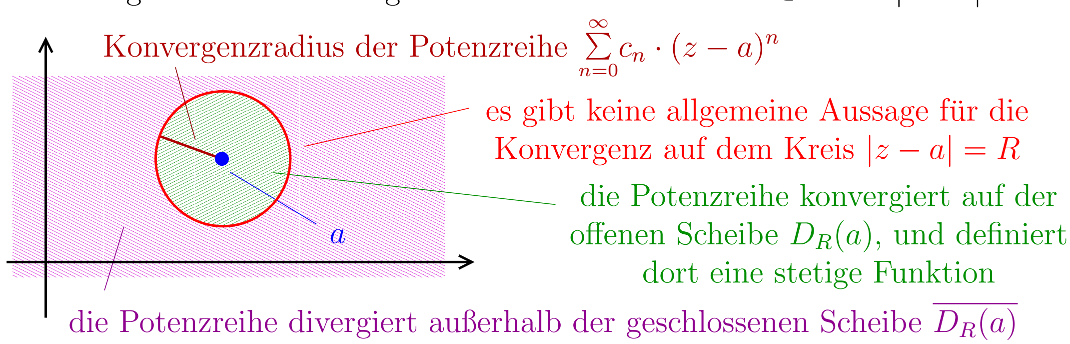
(1) *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\begin{aligned} |z-a| < R &\implies f(z) \text{ konvergiert,} \\ |z-a| > R &\implies f(z) \text{ divergiert.} \end{aligned}$$

(2) *Für alle $s < R$ konvergiert die Funktionenreihe*[11] *$f(z)$ auf der abgeschlossenen Scheibe $\overline{D_s(a)}$ gleichmäßig.*[12]

(3) *Die Funktion $z \mapsto f(z)$ ist auf der offenen Scheibe $D_R(a)$ stetig.*

Bemerkung. Wie wir am Beispiel der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ gesehen hatten, können wir keine allgemeine Aussage über die Konvergenz einer Potenzreihe für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| = R$ treffen.



3.3. **Beweis des ersten Hauptsatzes über Potenzreihen.** Wir beginnen das Teilkapitel mit ein paar Vorbereitungen, bevor wir uns dem eigentlichen Beweis des ersten Hauptsatzes über Potenzreihen zuwenden.

[12]D.h. wir betrachten die Funktionenfolge $f_k(z) := \sum\limits_{n=0}^{k} c_n \cdot (z-a)^n$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$.

Satz 3.4. (Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen) *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge und es sei $\{f_n \colon D \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stetigen Funktionen. Wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $\theta \in [0,1)$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $\|f_n\| \leq C \cdot \theta^n$, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion in $C(D,\mathbb{C})$.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$. Wir müssen zeigen, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen eine Funktion in $C(D,\mathbb{C})$ konvergiert. Satz 3.2 besagt, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchy-Folge in $(C(D,\mathbb{C}),d)$.

Es seien $m,n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Dann gilt

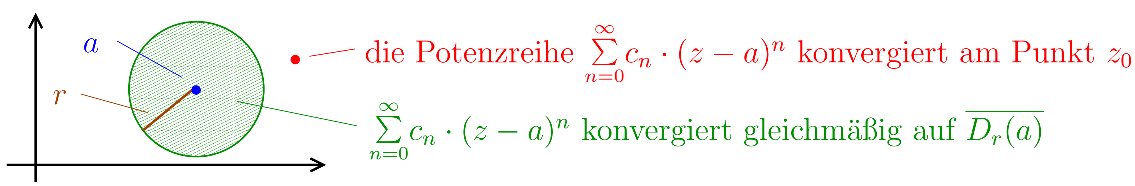
$$\begin{aligned} d(s_m,s_n) &= \|s_n - s_m\| = \Big\|\sum_{k=0}^{n} f_k - \sum_{k=0}^{m} f_k\Big\| = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} f_k\Big\| \underset{\text{da } \|-\| \text{ eine Norm ist gilt die Dreiecksungleichung}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\| \\ &\underset{\text{nach Voraussetzung}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} C\cdot\theta^k \underset{\text{Ausklammern}}{\leq} C\cdot\theta^{m+1}\cdot\sum_{k=0}^{n-m-1}\theta^k \leq C\cdot\theta^{m+1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k \underset{\text{da } \theta\in[0,1) \text{ ist dies eine geometrische Reihe}}{\leq} C\cdot\theta^{m+1}\cdot\frac{1}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Es sei nun $\epsilon > 0$. Da $\theta \in [0,1)$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $C\cdot\theta^{m+1}\cdot\frac{1}{1-\theta} < \epsilon$ für alle $m \geq N$. Aus der obigen Abschätzung folgt, dass dieses N die gewünschte Eigenschaft besitzt. ∎

Hilfslemma 3.5. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(z-a)^n$$

eine Potenzreihe, welche für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für jedes $0 \leq r < |z_0 - a|$ konvergiert die Potenzreihe auf der abgeschlossenen Scheibe $\overline{D_r(a)}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion.



Beweis des Hilfslemmas 3.5. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir nur den Fall $a = 0$. Es sei jetzt also $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\cdot z^n$ eine Potenzreihe, welche für ein $z_0 \neq 0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Es sei zudem $0 \leq r < |z_0|$. Wir müssen zeigen, dass die Reihe auf $\overline{D_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq r\}$ gleichmäßig konvergiert. Es folgt aus dem Majoranten-Kriterium 3.4 für Funktionenreihen, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $\theta \in [0,1)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\| \underbrace{c_n \cdot z^n}_{\substack{\text{als Funktion} \\ \text{auf } \overline{D_r(0)}}} \| \leq C \cdot \theta^n \qquad \text{mit anderen Worten} \qquad |c_n \cdot z^n| \leq C \cdot \theta^n \quad \text{alle } z \in \overline{D_r(0)}.$$

Für $z \in \overline{D_r(0)}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist $|c_n \cdot z^n| = |c_n \cdot z_0^n| \cdot |\frac{z}{z_0}|^n$. Wir wollen jetzt also den ersten Faktor durch eine feste Zahl C abschätzen und den zweiten Term durch einen Term θ^n, wobei $\theta \in [0,1)$.

Nachdem die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z_0^n$ konvergiert, bilden nach [**Fr1**, Satz 6.3] die Reihenglieder eine Nullfolge. Insbesondere folgt aus [**Fr1**, Satz 3.3], dass die Folge $(c_n \cdot z_0^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist. Es existiert also ein $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$|c_n \cdot z_0^n| \leq C$$

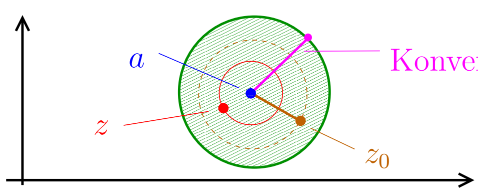
für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen $\theta := |\frac{r}{z_0}|$. Dann gilt für alle $z \in \overline{D_r(0)}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$|c_n \cdot z^n| = |c_n \cdot z_0^n| \cdot \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } z\in\overline{D_r(0)}}}{\leq} |c_n \cdot z_0^n| \cdot \underbrace{\left|\frac{r}{z_0}\right|^n}_{=\theta} \leq C \cdot \theta^n.$$

■

Beweis des Hauptsatzes 3.3 über Potenzreihen. Wir beweisen die Aussage des Satzes in umgekehrter Reihenfolge.

(2) Es sei $s < R$. Es folgt leicht aus der Definition des Konvergenzradius, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z-0| \in (s,R)$ gibt, so dass die Potenzreihe bei z_0 konvergiert. Es folgt aus dem Hilfslemma 3.5, dass die Potenzreihe auf der abgeschlossenen Scheibe $\overline{D_s(a)}$ gleichmäßig konvergiert.



(3) Wir wollen zeigen, dass die Funktion $z \mapsto f(z)$ auf der offenen Scheibe $D_R(a)$ stetig ist. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $z_0 \in D_R(a)$ eine Umgebung gibt, auf der f stetig ist. Es sei also $z_0 \in D_R(a)$. Da $|z_0| < R$ existiert ein $s \in (|z_0|, R)$. Nach (2) ist f auf $\overline{D_s(a)}$ stetig. Aber $\overline{D_s(a)}$ ist eine Umgebung von z_0.

(1)
- Es sei also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < R$. Dann existiert per Definition des Konvergenzradius ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < |z_0-a|$, und so dass die Potenzreihe $f(z_0)$ konvergiert. Es folgt dann aus Satz 3.3, angewandt auf $r := |z-a|$, dass die Potenzreihe $f(z)$ ebenfalls konvergiert.
- Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition des Konvergenzradius R. ■

3.4. **Potenzreihen definieren holomorphe Funktionen.**

Satz 3.6. (Zweiter Hauptsatz über Potenzreihen) *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f auf $D_R(a)$ holomorph mit Ableitung[13]

$$f'(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (z-a)^{n-1} \qquad \text{“gliedweises Ableiten”.}$$

Bemerkung. Für *reelle* Potenzreihen hatten wir in [**Fr1**, Satz 20.6] gezeigt, dass die zugehörige *reelle* Funktion differenzierbar ist. Wir können diesen Beweis aus der Analysis I allerdings nicht auf den komplexen Fall übertragen, weil wir damals den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet hatten, welcher uns im jetzigen Fall nicht zur Verfügung steht.

Das folgende Korollar erlaubt es uns die Koeffizienten einer Potenzreihe $f(z)$ durch Ableiten und Einsetzen abzulesen.

Korollar 3.7. *Es sei*

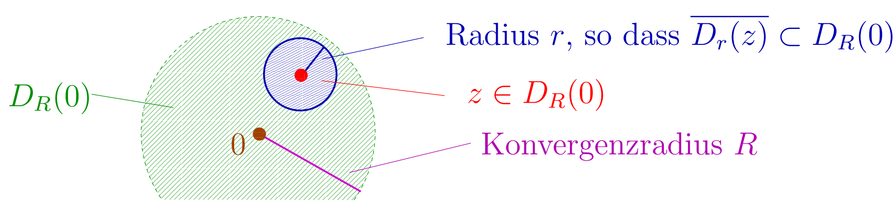
$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \;=\; c_n.$$

Beweis. Das Korollar erhält man durch mehrfaches Anwenden von Satz 3.6 und Einsetzen von $z = a$. ■

Beweis des Zweiten Hauptsatzes 3.6 über Potenzreihen. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir nur den Spezialfall $a = 0$. Es sei also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R.



Für den Rest des Beweises sei nun $z \in D_R(0)$ fest gewählt. Der Punkt z liegt also in der offenen Scheibe $D_R(0)$. Es gibt insbesondere ein $r > 0$, so dass $\overline{D_r(z)} \subset D_R(0)$.

---

[13] Es folgt aus Lemma 3.1, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (z-a)^{n-1}$ ebenfalls R beträgt.

Wir wollen zeigen, dass f im Punkt z holomorph ist mit $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (z-a)^{n-1}$, d.h. wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot c_n\cdot(z-a)^{n-1}\right) = 0.$$

In der Tat gilt für beliebiges $h \neq 0 \in D_r(0)$, dass

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot c_n\cdot z^{n-1}\right| && = \left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot c_n\cdot z^{n-1}\right| \\
= &\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot\left(\frac{1}{h}\big((z+h)^n - z^n\big) - n\cdot z^{n-1}\right)\right| && \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nachdem } (z+h)^n = z^n + nhz^{n-1} + h^2\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\cdot h^{n-k-2}\cdot z^k \\ \text{für } n=0,1 \text{ heben sich alle Terme weg}}}{=} \left|\sum_{n=2}^{\infty} h\cdot c_n\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\cdot h^{n-2-k}\cdot z^k\right| \\
\leq\ &|h|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}|c_n|\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\cdot|h|^{n-2-k}\cdot|z|^k} && \underset{\uparrow}{\leq} |h|\cdot\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}|c_n|\cdot n(n-1)\cdot(|h|+|z|)^{n-2}}_{=:\varphi(|h|)}
\end{aligned}$$

der Term über der geschweiften Klammer erinnert etwas an $(|h|+|z|)^{n-2}$,
in der Tat gilt für $n \geq 2$, dass
$(|h|+|z|)^{n-2} = \sum\limits_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\cdot|h|^{n-2-k}\cdot|z|^k \geq \sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n(n-1)}\binom{n}{k}\cdot|h|^{n-2-k}\cdot|z|^k$

Wir müssen also zeigen, dass dieser Ausdruck im Grenzwert $h \to 0$ verschwindet. Es genügt nun folgende Behauptung zu zeigen.

Behauptung. Die Funktion

$$\begin{aligned} [0,r] &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ s &\mapsto \varphi(s) := \sum_{n=2}^{\infty}|c_n|\cdot n(n-1)\cdot(s+|z|)^{n-2} \end{aligned}$$

ist beschränkt.

Wir betrachten nun die Potenzreihe $\varphi(s)$. Es ist

$$\text{Konvergenzradius}\big(\varphi(s)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 3.1}}}{=} \text{Konvergenzradius}\left(\sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot(s+|z|)^n\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot w^n \text{ auf } D_{R-|z|}(|z|)\subset D_R(0) \text{ konvergiert}}}{\geq} R-|z| > r.$$

Es folgt aus Satz 3.3, dass φ auf dem kompakten Intervall $[0,r]$ stetig ist. Die Behauptung folgt nun daraus, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist. ■

Beispiel. Es folgt aus Satz 3.6, dass die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

holomorph ist. Das gliedweise Ableiten zeigt zudem, dass die Ableitung wiederum die Exponentialfunktion ist.

Wir beschließen das Kapitel mit der Definition der komplexen Sinusfunktion und der komplexen Kosinusfunktion.

Definition. Wir führen die folgenden komplexen trigonometrischen Funktionen ein:

$$\begin{aligned}\sin(z) &:= \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot (\exp(z \cdot \mathrm{i}) - \exp(-z \cdot \mathrm{i})) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(z) &:= \frac{1}{2} \cdot (\exp(z \cdot \mathrm{i}) + \exp(-z \cdot \mathrm{i})) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt leicht, dass beide Potenzreihen auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren.

Beispiel. Es folgt aus Satz 3.6, dass die komplexen trigonometrischen Funktionen $\sin(z)$ und $\cos(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind. Gliedweises Ableiten ergibt zudem, wenig überraschend, dass gilt:

$$\frac{d}{dz}\sin(z) \;=\; \cos(z) \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dz}\cos(z) \;=\; -\sin(z).$$

4. Wegintegrale

4.1. **Komplexwertige Funktionen in einer reellen Variablen.** Wir erinnern an folgende Definition aus [**Fr2**, Kapitel 4.3].

Definition. Eine Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall heißt stetig differenzierbar, wenn gilt:

(1) Die Funktion ist im Inneren (a,b) stetig differenzierbar, d.h. die Funktion ist auf (a,b) differenzierbar und die Ableitungsfunktion ist stetig.
(2) Die Ableitungsfunktion $g'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ setzt sich stetig auf die Randpunkte des Intervalls $[a,b]$ fort. Diese Fortsetzung wird dann ebenfalls mit g' bezeichnet.

Definition. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(1) Wir sagen f ist stetig differenzierbar, wenn der Realteil und der Imaginärteil von f, also die Abbildungen $t \mapsto \mathrm{Re}(f(t))$ und $t \mapsto \mathrm{Im}(f(t))$, stetig differenzierbar sind. Wenn dies der Fall ist, dann schreiben wir
$$f'(t) \;:=\; \mathrm{Re}(f(t))' + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f(t))'.$$
(2) Wir sagen $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ist abschnittsweise stetig differenzierbar, wenn es eine Zerlegung $a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ gibt, so dass die Einschränkungen von f auf die Intervalle $[s_i, s_{i+1}]$ jeweils stetig differenzierbar sind.

Beispiel. Die Funktion $t \mapsto e^{t\,\mathrm{i}}$ ist stetig differenzierbar und es gilt
$$(e^{t\,\mathrm{i}})' \;=\; (\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))' = \cos(t)' + \mathrm{i}\sin(t)' \;=\; -\sin(t) + \mathrm{i}\cos(t) \;=\; \mathrm{i}\cdot e^{t\,\mathrm{i}}.$$

Definition. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir definieren das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ indem wir den Realteil und den Imaginärteil getrennt integrieren. Genauer gesagt wir definieren
$$\int_a^b f(t)\,dt \;:=\; \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt \;\in\; \mathbb{C}.$$

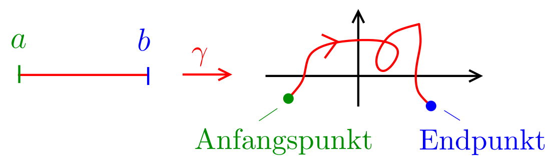
Lemma 4.1. *Für jede stetige Abbildung $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt*
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \;\le\; \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

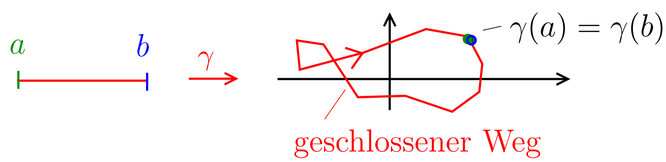
Beweis. Lemma 4.3 aus der Analysis II besagt, dass für eine beliebige stetige Abbildung $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die Ungleichung
$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \;\le\; \int_a^b \|f(t)\|\,dt$$
gilt. Das Lemma folgt nun aus dieser Aussage angewandt auf $n = 2$, denn unter dem üblichen Isomorphismus $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ entspricht die euklidische Norm von $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gerade dem Betrag von $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. ■

4.2. **Die Definition von Wegintegralen.**

Definition. Ein Weg[14] ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.. Wir verwenden hierbei folgende Notationen und Sprechweisen:

(1) Wir nennen $\gamma(a)$ den Anfangspunkt und $\gamma(b)$ den Endpunkt des Weges γ.
(2) Ein Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt geschlossen, wenn der Anfangspunkt und der Endpunkt übereinstimmen, d.h. wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.
(3) Ein Integrationsweg ist ein Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, welcher abschnittsweise stetig differenzierbar ist. [15]





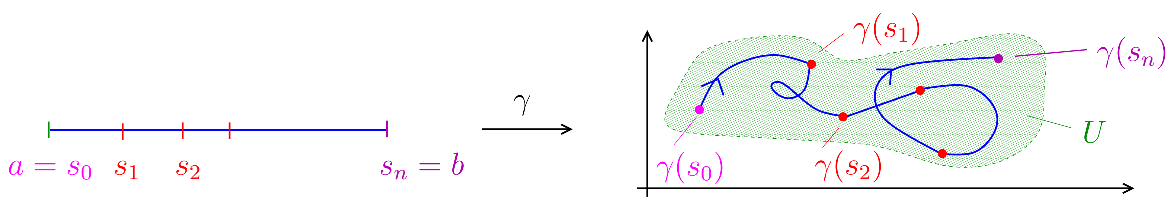
Definition. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg. Es sei $a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = b$ eine Zerlegung, so dass die Einschränkungen von f auf die Intervalle $[s_i, s_{i+1}]$ jeweils stetig differenzierbar sind. Wir definieren die Länge von γ[16]als[17]

$$\text{Länge}(\gamma) \;:=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t=s_i}^{t=s_{i+1}} |\gamma'(t)|\, dt.$$

Der Begriff der Länge eines Weges ist sehr anschaulich. Der folgende Begriff des Wegintegrals einer Funktion über einen Weg ist deutlich weniger anschaulich. Es wird vielleicht einige Zeit dauern, bis wir ein Gefühl für die folgende Definition entwickeln und verstehen, wozu diese gut ist.

Definition. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg. Es sei $a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = b$ eine Zerlegung, so dass die Einschränkungen von f auf die Intervalle $[s_i, s_{i+1}]$ jeweils stetig differenzierbar sind. Zudem sei nun $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und wir nehmen an, dass γ in U liegt. Wir definieren das Wegintegral von f über γ als

$$\int_\gamma f(z)\, dz \;:=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t=s_i}^{t=s_{i+1}} \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in\mathbb{C}} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\in\mathbb{C}}\, dt \qquad \in\; \mathbb{C}.$$



[14] In der Analysis II hatten wir Wege als„Kurven” bezeichnet.

[15] Der Name„Integrationsweg” erschließt sich aus dem folgenden Satz.

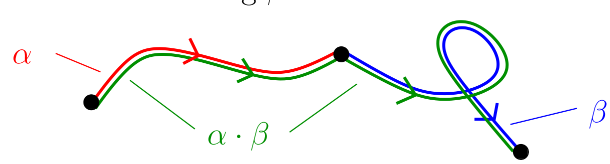
[17] In[**Fr2**, Kapitel 4] hatten wir allgemein die Länge eines Weges eingeführt. In [**Fr2**, Satz 4.1 und 4.2] hatten wir dann gezeigt, dass wir die Länge eines Integrationsweges mithilfe dieser Formel bestimmen können. Mit anderen Worten, für abschnittsweise stetig differenzierbare Wege stimmt der jetzige Längenbegriff mit dem aus Analysis II überein.

Beispiel. Für $r > 0$ sei
$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon [0,2\pi] & \to & \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ t & \mapsto & r\cdot e^{t\,\mathrm{i}} \end{array}$$
der geschlossene Integrationsweg, welcher sich auf dem Kreis von Radius r einmal gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung bewegt. Dies ist ein geschlossener Integrationsweg mit Länge
$$\text{Länge}(\gamma) \;=\; \int_0^{2\pi} \underbrace{|\gamma'(t)|}_{=|\mathrm{i}r\cdot e^{t\,\mathrm{i}}|=r}\,dt \;=\; 2\pi r.$$
Es sei nun $U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $r > 0$. Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{z}$. Das Wegintegral von f über γ beträgt
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \;=\; \int_0^{2\pi} \underbrace{f(\gamma(t))}_{=\frac{1}{r\cdot e^{t\,\mathrm{i}}}}\cdot\underbrace{\gamma'(t)}_{=\mathrm{i}re^{t\,\mathrm{i}}}\,dt \;=\; \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,dt \;=\; 2\pi\,\mathrm{i}.$$

Beispiel. Es sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine Funktion und es sei γ der Weg
$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t+0\cdot\mathrm{i}, \end{array}$$
welcher die Punkte a und b auf der reellen Achse von $\mathbb{C}$ verbindet. Dann ist
$$\underbrace{\int_\gamma f(z)\,dz}_{\text{Wegintegral}} \;=\; \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{=f(t)}\cdot\underbrace{\gamma'(t)}_{=1}\,dt \;=\; \underbrace{\int_a^b f(t)\,dt.}_{\text{Integral wie in Kapitel 4.1}}$$

Definition. Es seien $\alpha\colon [a,a+p]\to\mathbb{C}$ und $\beta\colon [b,b+q]\to\mathbb{C}$ zwei Wege mit $\alpha(a+p)=\beta(b)$. Wir bezeichnen dann
$$\begin{array}{rcl} \alpha\cdot\beta\colon [a,a+p+q] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \alpha(t), & \text{wenn } t\in[a,a+p] \\ \beta(t-a-p+b), & \text{wenn } t\in(a+p,a+p+q] \end{cases} \end{array}$$
als die Verknüpfung von α und β.

Mit anderen Worten, der Wege $\alpha\cdot\beta$ ist der Weg, welchen man dadurch erhält, dass man zuerst entlang α und danach entlang β läuft.



Bemerkung. Jeder Integrationsweg kann geschrieben werden als die Verknüpfung von stetig differenzierbaren Wegen.

Lemma 4.2. *Es seien $\alpha\colon [a,a+p]\to\mathbb{C}$ und $\beta\colon [b,b+q]\to\mathbb{C}$ zwei Integrationswege mit $\alpha(a+p)=\beta(b)$.*

(1) *Es gilt*
$$\text{Länge}(\alpha\cdot\beta) \;=\; \text{Länge}(\alpha)+\text{Länge}(\beta).$$

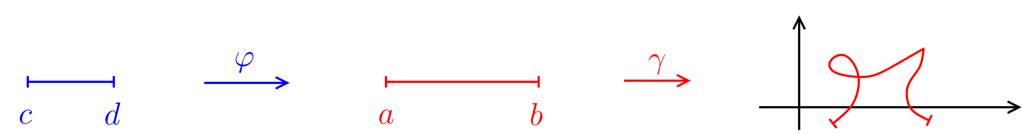
(2) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn α und β in U verlaufen, dann gilt*
$$\int_{\alpha\cdot\beta} f(z)\,dz \;=\; \int_{\alpha} f(z)\,dz \;+\; \int_{\beta} f(z)\,dz.$$

Beweis. Das Lemma folgt sofort aus den Definitionen und der Tatsache, dass wir Riemann-Integrale zerlegen können, siehe [**Fr1**, Satz 15.6]. ■

Lemma 4.3. (Standardabschätzung von Wegintegralen) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig, und es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Integrationsweg. Wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass $|f(\gamma(t))| \leq C$ für alle $t \in [a,b]$, dann gilt*
$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \;\leq\; \text{Länge}(\gamma)\cdot C.$$

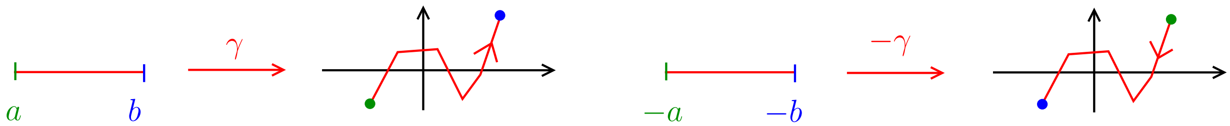
Beweis. Es folgt aus Lemm 4.2, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg ist. Dann gilt:
$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition des Wegintegrals}}}{=} \left|\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 4.1}}}{\leq} \int_a^b \overbrace{\left|f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right|}^{\leq C\cdot|\gamma'(t)|}\,dt \;\leq\; C\cdot\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \;=\; C\cdot\text{Länge}(\gamma).$$
■

Definition.
(1) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und es sei $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist
$$\begin{array}{rcl} \gamma\circ\varphi\colon [c,d] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \gamma(\varphi(t)) \end{array}$$
ebenfalls ein Integrationsweg, welcher genau die gleichen Punkte annimmt wie γ. Wir sagen, dieser Integrationsweg $\gamma\circ\varphi$ geht aus dem Integrationsweg γ durch Parametertransformation φ hervor.
(2) Wir sagen die Parametertransformation ist orientierungserhaltend, wenn $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Andernfalls sagen wir, dass φ orientierungsumkehrend ist.



Die folgende Definition gibt ein wichtiges Beispiel einer Umparametrisierung.

Definition. Für einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $-\gamma$ den Weg, welcher durch
$$\begin{array}{rcl} -\gamma\colon [-b,-a] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (-\gamma)(t) := \gamma(-t) \end{array}$$
gegeben ist.[18] Der Integrationsweg $-\gamma$ ist eine orientierungsumkehrende Parametrisierung von γ.



Folgendes Lemma besagt nun, dass Umparametrisierungen Wegintegrale höchstens um ein Vorzeichen abändern.

Lemma 4.4. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig, und es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Integrationsweg. Zudem sei $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare, bijektive Funktion. Es gilt*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \quad \text{wenn } \varphi \text{ orientierungserhaltend ist}$$

und

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz \quad \text{wenn } \varphi \text{ orientierungsumkehrend ist.}$$

Etwas vereinfacht gesagt besagt das Lemma, dass sich das Wegintegral nicht verändert, wenn man die Bildpunkte mit einer anderen Geschwindigkeit in der gleichen Richtung„durchfährt”. Das Wegintegral wechselt das Vorzeichen, wenn man den Weg in der umgekehrten Richtung„durchfährt”.

Beweis. [19] Es folgt aus Lemma 4.2, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass der Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Definition des Wegintegrals}}}{=} \int_{t=c}^{t=d} f((\gamma\circ\varphi)(t))\cdot(\gamma\circ\varphi)'(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} \int_{t=c}^{t=d} f(\gamma(\varphi(t)))\cdot\gamma'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach der Substitutionsregel mit } u=\varphi(t)}}{=} \int_{u=\varphi(c)}^{u=\varphi(d)} f(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)\,du =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{u=a}^{u=b} f(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)\,du = \int_\gamma f(z)\,dz, & \text{wenn } \varphi \text{ orientierungserhaltend,}\\ \displaystyle\int_{u=b}^{u=a} f(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)\,du \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vertauschen der Grenzen ändert das Vorzeichen}}}{=} -\int_\gamma f(z)\,dz, & \text{wenn } \varphi \text{ orientierungsumkehrend.}\end{cases}$$

■

4.3. **Stammfunktionen.**

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen, eine holomorphe Funktion $F\colon U \to \mathbb{C}$ ist eine Stammfunktion von f, wenn $F' = f$.

Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -1$ ist eine Stammfunktion von $f(z) = z^n$ gegeben durch die Funktion $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

---

[18] Der Weg $-\gamma$ durchläuft also die gleichen Bildpunkte, jedoch in„umgekehrter” Richtung.

[19] Der Beweis von Lemma 4.4 ist ähnlich zum Beweis von Lemma 4.5 in Analysis II.

In [**Fr1**, Lemma 16.1] hatten wir gesehen, dass sich zwei Stammfunktionen einer gegebenen reellen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ um höchstens eine additive Konstante unterscheiden. Das folgende Lemma besagt nun, dass die analoge Aussage auch für komplexe Funktionen auf offenen Scheiben gilt.

Lemma 4.5. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf einer offenen Scheibe D. Stammfunktionen von f unterscheiden sich um höchstens eine additive Konstante. Genauer gesagt, wenn F und G zwei Stammfunktionen sind, dann gibt es ein $C \in \mathbb{C}$, so dass $F(z) = G(z) + C$ für alle $z \in D$.*

Beweis. Es gilt $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Also folgt aus Lemma 2.8, dass $F - G$ konstant ist. ■

Der folgende Satz besagt, dass man Stammfunktionen von Potenzreihen„ganz naiv" bestimmen kann.

Satz 4.6. *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann besitzt

$$F(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} \qquad \text{"gliedweises aufleiten"}$$

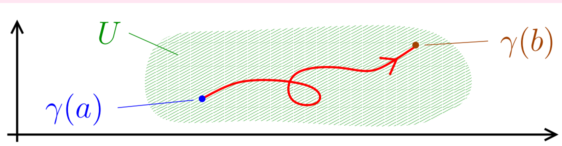
den gleichen Konvergenzradius R und definiert auf $D_R(a)$ eine Stammfunktion von f. Zudem ist dies die einzige Stammfunktion von f mit $F(a) = 0$.

Beweis. Es folgt aus Lemma 3.1, dass die Potenzreihe F wiederum den Konvergenzradius R besitzt. Es folgt dann aus Satz 3.6, dass F in der Tat eine Stammfunktion von f ist. Durch Einsetzen sehen wir, dass $F(a) = 0$. Die Eindeutigkeit von F folgt nun aus Lemma 4.5. ■

Folgender Satz erlaubt es nun Wegintegrale mithilfe von Stammfunktionen, falls diese existieren, zu bestimmen.

Lemma 4.7. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion.*

(1) *Wenn F eine Stammfunktion der Funktion f ist, dann gilt für jeden Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to U$, dass*
$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$
(2) *Wenn f eine Stammfunktion besitzt, dann gilt für jeden* geschlossenen *Integrationsweg γ, dass*
$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0.$$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{F}_{\uparrow}(\gamma(b)) - \underbrace{F}_{\uparrow}(\gamma(a))$$

Stammfunktion von $f\colon U \to \mathbb{C}$

Beispiel. Auf Seite 32 hatten wir den geschlossenen Integrationsweg

$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon [0,2\pi] & \to & \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ t & \mapsto & r\cdot e^{t\,\mathrm{i}} \end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{betrachtet, und wir}\\ \text{hatten gesehen, dass}\end{array} \qquad \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \;=\; 2\pi\,\mathrm{i},$$

also insbesondere nicht null ist. Es folgt also aus Lemma 4.7, dass die Funktion $f(z)=\frac{1}{z}$ auf $U=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *keine* Stammfunktion besitzt.

Beweis. Mithilfe von Lemma 4.2 sieht man leicht, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass f stetig differenzierbar ist. Dann gilt

dies folgt aus der Kettenregel [**Fr2**, Satz 6.13] und Satz 2.5

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \overset{\downarrow}{=} \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt \\ &\underset{\uparrow}{=} F(\gamma(b))-F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

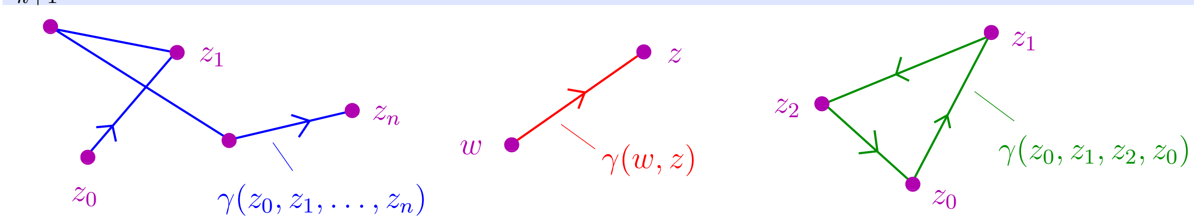
folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,
genauer gesagt [**Fr1**, Satz 16.4], angewandt auf den Realteil und den Imaginärteil

Die Aussage über die geschlossenen Integrationswege folgt sofort aus dem ersten Teil und den Definitionen. ■

Notation. Für $z_0,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit

$$\begin{array}{rcll} \gamma(z_0,\dots,z_n)\colon [0,n] & \to & \mathbb{C} & \\ t & \mapsto & (k+1-t)\cdot z_k+(t-k)\cdot z_{k+1} & \qquad \text{für } t\in[k,k+1] \end{array}$$

den Weg, welcher für jedes $k\in\{0,\dots,n-1\}$ auf dem Intervall $[k,k+1]$ die Punkte z_k und z_{k+1} direkt verbindet.[20][21]



Interessanterweise gilt auf offenen Scheiben auch eine Umkehrung von Lemma 4.7. Genauer gesagt, es gilt folgender Satz.

Satz 4.8. *Es sei $D_r(a)$ eine offene Scheibe in $\mathbb{C}$ und es sei $f\colon D_r(a)\to\mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) *f besitzt eine Stammfunktion,*
(2) *für jeden geschlossenen Dreiecksweg der Form $\gamma(u,v,w,u)$ in U gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0.$$

[20] In Analysis II hatten wir einen solchen Weg auch als Polygonzug bezeichnet.

[21] Wenn $z_n=z_0$, dann ist der Weg natürlich geschlossen.

Beweis. Es sei $f\colon D_r(a)\to\mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Die Implikation (1)$\Rightarrow$(2) hatten wir gerade in Lemma 4.7 bewiesen. Wir nehmen nun an, dass (2) gilt.

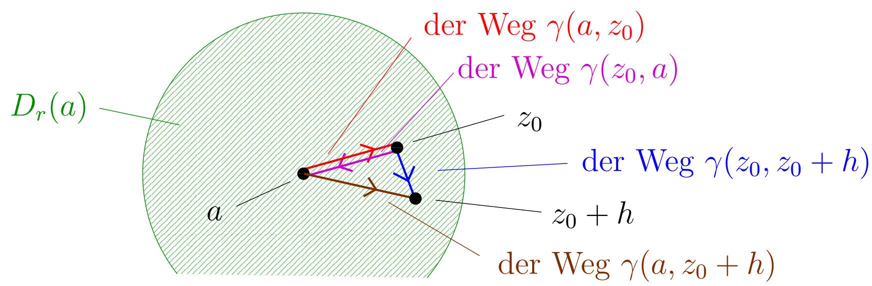
Der Gedanke ist nun, ganz analog zu Analysis I, eine Funktion F durch Wegintegrale einzuführen. Wir müssen danach„per Hand" zeigen, dass die Funktion F holomorph ist mit $F'=f$.

Wir betrachten die Funktion
$$\begin{aligned} F\colon D_r(a) &\to \mathbb{C}\\ z &\mapsto F(z):=\int\limits_{\gamma(a,z)} f(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass F holomorph ist mit $F'=f$. Es sei also $z_0\in D_r(a)$. Wir müssen beweisen, dass $F'(z_0)=f(z_0)$. Für $h\in\mathbb{C}$ betrachten wir dazu erst einmal
$$\begin{aligned} F(z_0+h)-F(z_0) &= \int\limits_{\gamma(a,z_0+h)} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_{\gamma(a,z_0)} f(\xi)\,d\xi\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 4.4}}}{=} \int\limits_{\gamma(a,z_0+h)} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\gamma(z_0,a)} f(\xi)\,d\xi \;=\; (*) \end{aligned}$$

Wir wollen nun verwenden, dass das Integral über den Dreiecksweg $\gamma(a,z_0+h,z_0,a)$ verschwindet. Wir führen dazu den Term für die dritte Kante ein.
$$\begin{aligned} (*) &= \underbrace{\int\limits_{\gamma(a,z_0+h)} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\gamma(z_0,a)} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\gamma(z_0+h,z_0)} f(\xi)\,d\xi}_{=\,0 \text{ nach Voraussetzung}} - \int\limits_{\gamma(z_0+h,z_0)} f(\xi)\,d\xi\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 4.4}}}{=} \int\limits_{\gamma(z_0,z_0+h)} f(\xi)\,d\xi \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } \gamma(z_0,z_0+h)=z_0(1-t)+(z_0+h)t=z_0+th,\\ \text{insbesondere ist } \gamma'(t)=h}}{=} \int\limits_{t=0}^{t=1} f(z_0+th)\cdot h\,dt. \end{aligned}$$

Es folgt nun, dass
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(F(z_0+h)-F(z_0)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_0^1 f(z_0+th)\cdot h\,dt = \lim_{h\to 0}\int\limits_0^1 f(z_0+th)\,dt \overset{\substack{\text{wir schreiben } u(z)=\mathrm{Re}(f(z)) \text{ und } v(z)=\mathrm{Im}(f(z))\\ \downarrow}}{=}\\ &= \lim_{h\to 0}\int\limits_0^1 u(z_0+th)\,dt + \mathrm{i}\cdot\lim_{h\to 0}\int\limits_0^1 v(z_0+th)\,dt\\ &\underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0} u(z_0+\mu_h\cdot h) + \mathrm{i}\cdot\lim_{h\to 0} v(z_0+\nu_h\cdot h) \end{aligned}$$
nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus Analysis I, angewandet auf die reellen Funktionen $t\mapsto u(z_0+th)$ und $t\mapsto v(z_0+th)$ existiert für jedes $h>0$ ein $\mu_h\in[0,1]$ und $\nu_h\in[0,1]$ so das diese Gleichheiten gelten
$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } u \text{ und } v \text{ stetig}}}{=} u\Big(\lim_{h\to 0}(z_0+\mu_h\cdot h)\Big)+\mathrm{i}\cdot v\Big(\lim_{h\to 0}(z_0+\nu_h\cdot h)\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da alle } \mu_h,\nu_h\in[0,1]}}{=} u(z_0)+\mathrm{i}v(z_0)=f(z_0).$$
■

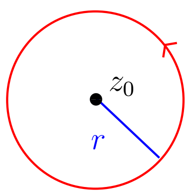


4.4. **Wegintegrale und die Koeffizienten von Potenzreihen.**

Notation. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ schreiben wir

$$\int_{|z-z_0|=r} f(x)\, dz \; := \; \int_\gamma f(x)\, dz,$$

wobei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch $\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{t\,\mathrm{i}}$.[22]



$\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz$ ist das Wegintegral über die Kreisbahn um z_0 mit Radius r entgegen dem Uhrzeigersinn

Lemma 4.9. *Für alle $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n\, dz \; = \; \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \neq -1, \\ 2\pi\,\mathrm{i}, & \text{wenn } n = -1. \end{cases}$$

Beweis. Wenn $n \neq -1$, dann besitzt die Funktion $f(z) = (z-z_0)^n$ die Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$. Lemma 4.7 besagt dann also, dass das Wegintegral verschwindet. Den Fall $n = -1$ hatten wir auf Seite 32 explizit berechnet. ■

Der folgende Satz besagt, dass man die Koeffizienten einer Potenzreihe durch Wegintegrale bestimmen kann.

Satz 4.10. *Es sei*

$$f(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Für jedes $r \in (0, R)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$c_n \; = \; \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

In dem Beweis von Satz 4.10 werden wir folgenden Satz verwenden, welcher besagt, dass wir bei gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen„Integral und Grenzwert vertauschen können".

---

[22]Mit anderen Worten, durchläuft den Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r einmal gegen den Uhrzeigersinn.

Satz 4.11. (Konvergenzsatz für Wegintegrale) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge, es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Integrationsweg und es sei $\{f_n\colon U \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen, welche gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Beweis des Konvergenzsatzes 4.11 für Wegintegrale. Es genügt den Fall zu betrachten, dass γ nicht konstant ist, d.h. dass Länge$(\gamma) > 0$. Es sei nun $\epsilon > 0$. Da die Folge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $\|f - f_n\| < \frac{\epsilon}{\text{Länge}(\gamma)}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann, dass

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f_n(z)\,dz\right| \;=\; \left|\int_\gamma f(z) - f_n(z)\,dz\right| \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Standardabschätzung 4.3 von Wegintegralen}}}{\leq}\; \text{Länge}(\gamma)\cdot\|f - f_n\| \;<\; \epsilon.$$

■

Beweis von Satz 4.10. Es sei $r \in (0,R)$ und $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \;&=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z-z_0)^k\,dz \\
&=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z-z_0)^{k-n-1}\,dz \;=\; (*)
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.3 konvergiert die Reihe auf $\overline{D_r(z_0)}$ gleichmäßig. Der Konvergenzsatz 4.11 für Wegintegrale besagt nun, dass wir die Reihe mit dem Integral vertauschen können. Wir erhalten also, dass

$$(*) \;=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{|z-z_0|=r} c_k \cdot (z-z_0)^{k-n-1}\,dz.$$

Die gewünschte Aussage folgt nun aus Lemma 4.9. ■

4.5. **Die komplexen Logarithmuszweige.** In Analysis I hatten wir gesehen, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv ist und wir konnten daher die reelle Logarithmusfunktion $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ als die zugehörige Umkehrfunktion einführen. Diese hat viele wichtige Eigenschaften, insbesondere hatten wir gesehen, dass die Logarithmusfunktion eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ für $x > 0$ ist.

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht injektiv, denn für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp(z)\cdot\exp(2\pi\mathrm{i}) = \exp(z)\cdot 1 = \exp(z)$. Wenn wir uns jedoch auf geeignete Teilmengen von $\mathbb{C}$ einschränken, dann ist die Exponentialfunktion allerdings doch injektiv und wir erhalten Umkehrfunktionen, welche uns auf„großen" Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ geben.

Definition.

(1) Für $\varphi \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\overline{S}_\varphi \;:=\; \left\{ r\cos\varphi + \mathrm{i} r \sin\varphi = r\cdot e^{\varphi\mathrm{i}} \,\middle|\, r \geq 0 \right\}.$$

Dies ist also der abgeschlossenen Strahl in φ-Richtung.

(2) Es folgt aus [**Fr1**, Satz 11.11], dass die Abbildung

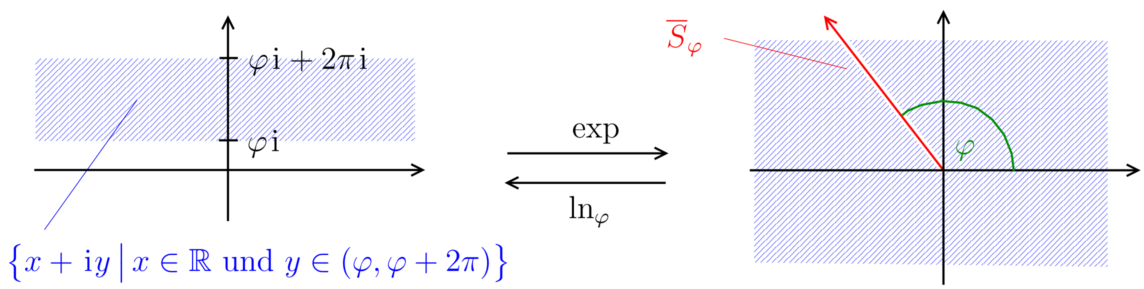
$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \left\{x+\mathrm{i}y \,\middle|\, x\in\mathbb{R} \;\&\; y\in(\varphi,\varphi+2\pi)\right\} & \to & \mathbb{C}\setminus \overline{S}_\varphi \\ z=x+\mathrm{i}y & \mapsto & \exp(z)=\exp(x)\cdot(\cos(y)+\mathrm{i}\sin(y)) \end{array}$$

bijektiv ist. Wir bezeichnen mit

$$\begin{array}{rcl} \ln_\varphi\colon \mathbb{C}\setminus\overline{S}_\varphi & \to & \left\{x+\mathrm{i}y \,\middle|\, x\in\mathbb{R} \text{ und } y\in(\varphi,\varphi+2\pi)\right\} \\ z & \mapsto & \ln_\varphi(z)=\exp^{-1}(z) \end{array}$$

die zugehörige Umkehrfunktion. Diese Funktion wird der durch φ bestimmte Logarithmuszweig benannt. Mit anderen Worten, wenn $z=r\cdot e^{t\mathrm{i}}$, wobei $r>0$ und $t\in(\varphi,\varphi+2\pi)$, so ist $\ln_\varphi(z)$ definiert und es gilt

$$\ln_\varphi(z) \;=\; \ln(r)+t\cdot\mathrm{i}.$$



Bemerkung. Aus der Umkehrregel 2.7 für holomorphe Funktionen folgt, dass $\ln_\varphi$ holomorph ist mit

$$\frac{d}{dz}\ln_\varphi(z) \;=\; \frac{1}{\exp'(\ln_\varphi(z))} \;=\; \frac{1}{\exp(\ln_\varphi(z))} \;=\; \frac{1}{z}.$$

Mit anderen Worten, auf $\mathbb{C}\setminus\overline{S}_\varphi$ ist $\ln_\varphi$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$. Auf Seite 36 hatten wir andererseits gesehen, dass $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion besitzt, welche auf ganz $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiert ist. Die Logarithmusfunktionen $\ln_\varphi$ haben also in gewisser Weise den„größtmöglichen Definitionsbereich" einer Stammfunktion von $\frac{1}{z}$.

Definition. Wir bezeichnen

$$\begin{array}{rcl} \ln\colon \mathbb{C}\setminus\overline{S_{-\pi}}=\{x+\mathrm{i}y \,|\, y\neq 0 \text{ oder } x>0\} & \to & \left\{x+\mathrm{i}y \,\middle|\, x\in\mathbb{R} \text{ und } y\in(-\pi,\pi)\right\} \\ z & \mapsto & \ln(z):=\ln_{-\pi}(z) \end{array}$$

als die Standardlogarithmusfunktion.[23]

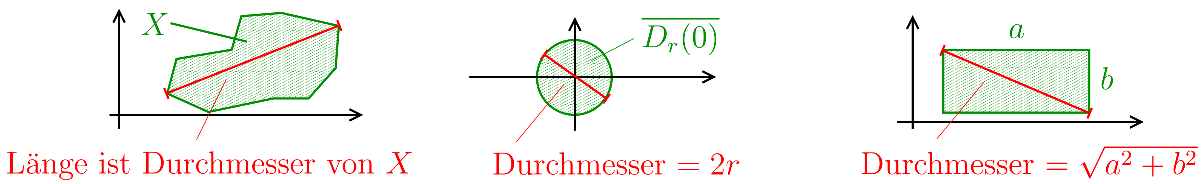
[23] Die Standardlogarithmusfunktion stimmt auf den reellen Zahlen mit der üblichen Logarithmusfunktion aus Analysis I überein.

5. Der Cauchysche Integralsatz

5.1. **Durchmesser und Konvexität.** In diesem Kapitel werden wir zuerst zwei elementare Begriffe für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einführen, welche wir im Folgenden immer wieder verwenden werden.

Definition. Für eine beschränkte, nichtleere Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

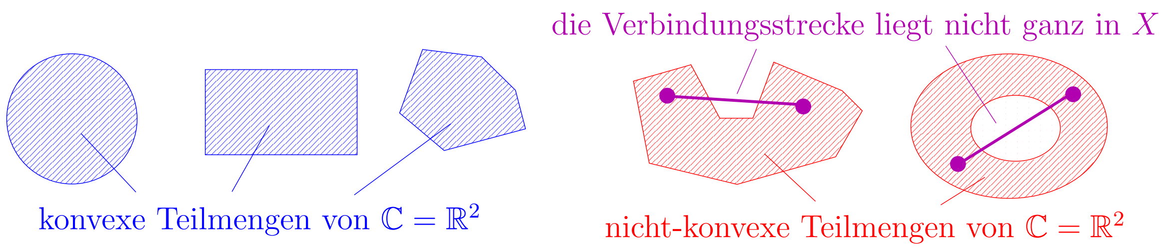
$$\text{Durchmesser von } X \;:=\; \sup\big\{\, \|z-w\| \,\big|\, z,w \in X \big\}$$



Beispiel.

$$\begin{aligned} \text{Durchmesser der geschlossenen Scheibe } \overline{D_r(z_0)} &= 2r, \\ \text{Durchmesser eines Rechtecks mit Seitenlängen } a \text{ und } b &= \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Definition. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $z, w \in X$ die Verbindungsstrecke $\{z \cdot (1-t) + w \cdot t \,|\, t \in [0,1]\}$ ebenfalls in X liegt.



Beispiel. Es ist ziemlich offensichtlich, dass jede Scheibe und jedes Rechteck in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ konvex ist. Wir werden den Fall der Scheibe jedoch noch in Übungsblatt 3 genauer beleuchten.

Um das einzige Lemma dieses Teilkapitels formulieren zu können erinnern wir an folgende Definition aus [**Fr2**, Kapitel 6.5].

Definition. Die Norm einer reellen $n \times n$-Matrix A ist definiert als

$$\|A\| \;:=\; \max\big\{\, \|Av\| \,\big|\, v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \big\}.$$

Lemma 5.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei zudem $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig reell differenzierbare Abbildung.*

(1) *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Differential von } \varphi \text{ am Punkt } x \in U}}{\mathrm{D}\varphi(x)} \,\| \end{array}$$

ist stetig.

(2) *Es sei $X \subset U$ eine kompakte, konvexe, nichtleere Teilmenge. Wir setzen*[24]

$$C := \max\left\{ \|\mathrm{D}\varphi(x)\| \,\middle|\, x \in X \right\}.$$

(a) *Für alle $z, w \in X$ gilt $\|\varphi(z) - \varphi(w)\| \le C \cdot \|z - w\|$.*

(b) *Es gilt*

$$\text{Durchmesser von } \varphi(X) \ \le\ C \cdot \text{Durchmesser von } X.$$

(c) *Für jeden Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to X$ gilt*

$$\text{Länge von } \varphi \circ \gamma \ \le\ C \cdot \text{Länge von } \gamma.$$

Beweis.

(1) Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \mathrm{D}\varphi(x) \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_{\ge 0} \\ A & \mapsto & \|A\|. \end{array}$$

Da φ stetig differenzierbar ist, ist die linke Abbildung stetig. Zudem folgt, mit etwas Nachdenken, aus [**Fr2**, Lemma 6.12], dass die rechte Abbildung stetig ist. Also ist die Abbildung $x \mapsto \|\mathrm{D}\varphi(x)\|$ die Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen, also selber stetig.

(2) Es sei also $X \subset U$ eine kompakte, konvexe, nichtleere Teilmenge.

(a) Es seien $z, w \in X$. Nachdem nach Voraussetzung die Verbindungsstrecke von z nach w in X liegt, folgt die Ungleichung aus [**Fr2**, Schrankensatz 12.2].

(b) Diese Aussage folgt sofort aus (2a) und der Definition des Durchmessers.

(c) Es folgt aus Lemma 4.2, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass $\gamma\colon [a,b] \to X$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\text{Länge}(\varphi\circ\gamma) \;=\; \int_a^b \|(\varphi\circ\gamma)'(t)\|\,dt \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel aus Analysis II}}}{=}\; \int_a^b \|\mathrm{D}\varphi_{\gamma(t)}\cdot\gamma'(t)\|\,dt \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \|A\cdot v\| \le \|A\|\cdot\|v\|}}{\le}\; \int_a^b C\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt \;=\; C\cdot\text{Länge}(\gamma).$$

■

5.2. **Der Cauchysche Integralsatz für Rechtecke.**

Definition. Es seien $z \in \mathbb{C}$ und es seien a, b positive reelle Zahlen. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir

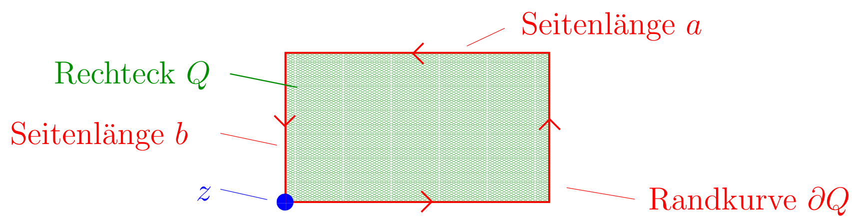
$$\left\{ z + (x + \mathrm{i}y) \,\middle|\, x \in [0,a] \text{ und } y \in [0,b] \right\}$$

als Rechteck in $\mathbb{C}$ mit Kantenlängen a und b. Für solch ein Rechteck Q bezeichnen wir

$$\begin{array}{rcl} \partial Q\colon [0, 2a+2b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \begin{cases} z + t, & \text{wenn } t \in [0,a), \\ z + a + (t-a)\,\mathrm{i}, & \text{wenn } t \in [a, a+b) \\ z + a + b\mathrm{i} - (t - (a+b)), & \text{wenn } t \in [a+b, 2a+b) \\ z + b\mathrm{i} - (t - (2a+b))\,\mathrm{i}, & \text{wenn } t \in [2a+b, 2a+2b] \end{cases} \end{array}$$

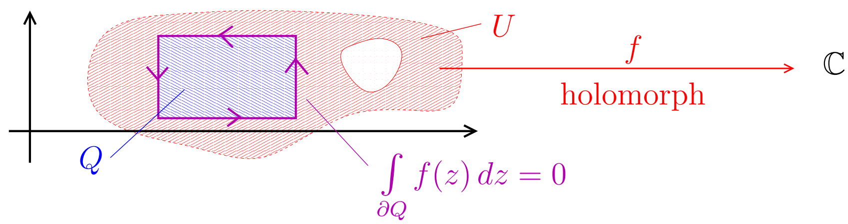
als die Randkurve ∂Q von Q. Wir bezeichnen die Länge $2a+2b$ der Randkurve des Rechtecks manchmal als Umfang des Rechtecks.

[24] Da X kompakt und nichtleer ist, und da die Abbildung $x \mapsto \|\mathrm{D}\varphi(x)\|$ nach (1) stetig ist folgt aus [**Fr2**, Korollar 3.10], dass das Maximum in der Tat existiert.



Satz 5.2. (Cauchysche Integralsatz für Rechtecke) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für jedes Rechteck $Q \subset U$ gilt*

$$\int_{\partial Q} f(z)\,dz \;=\; 0.$$



Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $Q \subset U$ ein Rechteck mit Umfang ℓ und Durchmesser d.

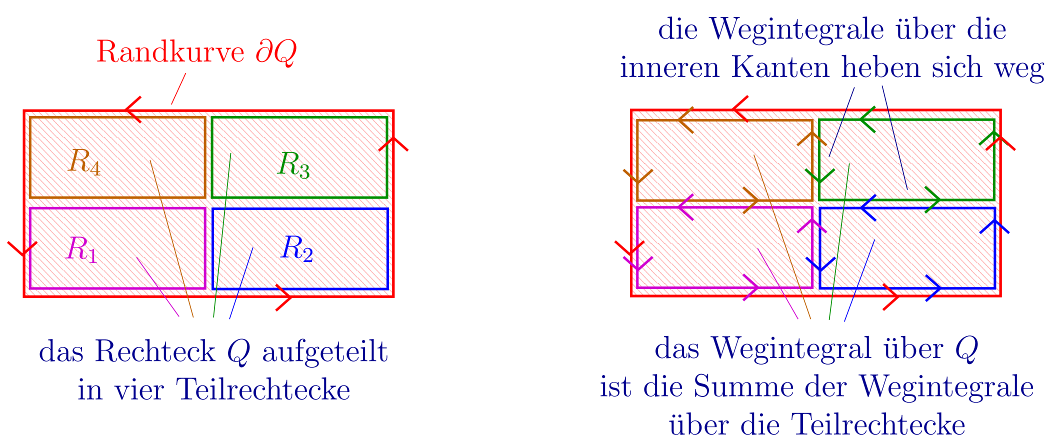
> Wenn f eine Stammfunktion besitzt, dann folgt die Aussage sofort aus Lemma 4.7. Selbst wenn f auf ganz U keine Stammfunktion besitzen sollte, so besitzt f doch um jeden Punkt eine gute Approximation einer Stammfunktion. Genauer gesagt, nachdem f holomorph ist können wir für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ schreiben
>
> $$f(z_0 + h) \;=\; f(z_0) + f'(z_0)\cdot h + \chi(h), \qquad \text{wobei } \chi(h) = o(h).$$
>
> Die ersten beiden Summanden haben natürlich eine Stammfunktion. Wir müssen also nur noch den Ausdruck $\chi(h)$ kontrollieren. In einer kleinen Menge, z.B. einem kleinen Rechteck, ist $\chi(h)$ dabei auch„sehr klein".
> Wir führen jetzt den allgemeinen Fall auf den Fall eines„kleinen" Rechtecks zurück, indem wir das große Rechteck in genügend kleine Rechtecke aufteilen.

Wir unterteilen das Rechteck $Q_0 := Q$ durch vertikales und horizontales Halbieren in vier kleine Rechtecke $R_1, \dots, R_4$. Es folgt aus Lemma 4.4, dass sich die inneren Wegintegrale wegheben, also gilt

$$\int_{\partial Q} f(z)\,dz \;=\; \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f(z)\,dz.$$

Es sei nun Q_1 das Rechteck aus $R_1, \dots, R_4$, dessen Wegintegral den größten Betrag besitzt. Dann ist

$$\left|\int_{\partial Q} f(z)\,dz\right| \;\le\; 4\cdot\left|\int_{\partial Q_1} f(z)\,dz\right|.$$

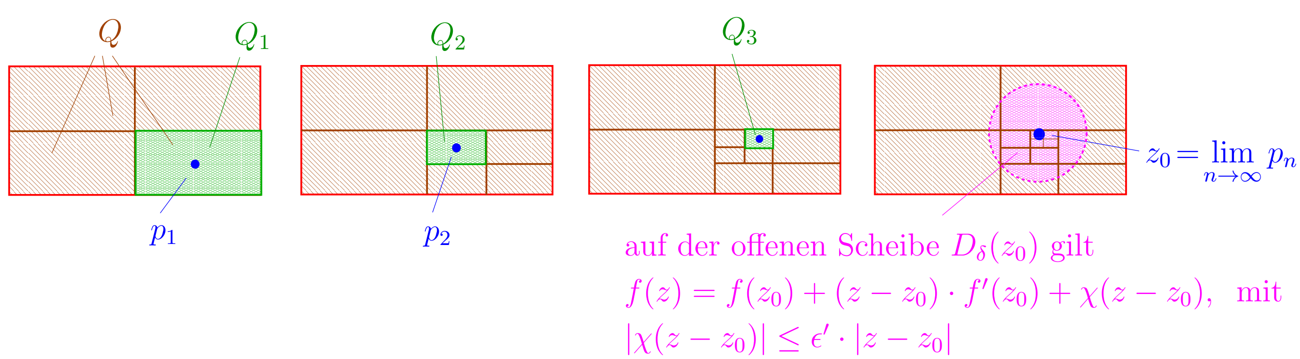


Wir unterteilen jetzt wiederum Q_1 in vier Rechtecke und führen das gleiche Verfahren durch. Wir erhalten eine Folge von Rechtecken $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \int_{\partial Q} f(z)\, dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} f(z)\, dz \right|. \tag{1}$$

In diesem Verfahren halbieren wir natürlich jedes Mal den Umfang und den Durchmesser des Rechtecks. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Umfang von } \partial Q_n = \tfrac{1}{2^n}\ell. \tag{2}$$
$$\text{Durchmesser von } Q_n = \tfrac{1}{2^n}d. \tag{3}$$



Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei nun p_n der Mittelpunkt von Q_n. In Übungsblatt 3 werden wir zeigen, dass die Folge von Mittelpunkten (p_n) eine Cauchy-Folge ist, und dass zudem der Grenzpunkt $z_0 := \lim_{n\to\infty} p_n$ in allen Rechtecken Q_n enthalten ist.

Um den Satz zu bewiesen genügt es zu zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\left| \int_{\partial Q} f(z)\, dz \right| \leq \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Nachdem f im Punkt z_0 holomorph ist gilt nach Lemma 2.3, dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + \chi(z - z_0), \qquad \text{wobei } \chi(z - z_0) = o(z - z_0).$$

Wir setzen nun $\epsilon' := \frac{\epsilon}{\ell \cdot d}$. Aus der Definition der„o"-Notation auf Seite 18 folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|\chi(z - z_0)| \;\leq\; \epsilon' \cdot |z - z_0| \qquad \text{für alle } z \in D_\delta(z_0).$$

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^n} d < \delta$. Nachdem $z_0 \in Q_n$ und nachdem der Durchmesser von Q_n gegeben ist durch $\frac{1}{2^n} d$ erhalten wir, dass $Q_n \subset D_\delta(z_0)$. Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial Q} f(z)\,dz \right| &\underset{\uparrow \text{ nach der obigen Abschätzung}}{\leq} 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} f(z)\,dz \right| = 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + \chi(z - z_0)\,dz \right| \\
&\leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} \underbrace{f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0)}_{\substack{\text{Integrand besitzt Stammfunktion} \\ F(z) = f(z_0) \cdot z + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 \cdot f'(z_0) \\ \text{also ist } \int_{\partial Q_n} = 0, \text{ nach Lemma 4.7}}} dz \right| + 4^n \cdot \left| \int_{\partial Q_n} \chi(z - z_0)\,dz \right| \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 4.3, da } \partial Q_n \text{ kompakt und} \\ \text{da } \chi \text{ stetig existiert das Maximum}}}{\leq} 4^n \cdot \text{Länge}(\partial Q_n) \cdot \max_{z \in \partial Q_n} |\chi(z - z_0)| \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } Q_n \subset D_\delta(z_0)}}{\leq} 4^n \cdot \text{Länge}(\partial Q_n) \cdot \epsilon' \cdot \max_{z \in \partial Q_n} |z - z_0| \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition des Durchmessers}}}{\leq} 4^n \cdot \text{Länge}(\partial Q_n) \cdot \epsilon' \cdot \text{Durchmesser}(Q_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gleichung (2) und Gleichung (3)}}}{=} 4^n \cdot \frac{1}{2^n}\ell \cdot \frac{\epsilon}{\ell d} \cdot \frac{1}{2^n} d = \epsilon.
\end{aligned}$$

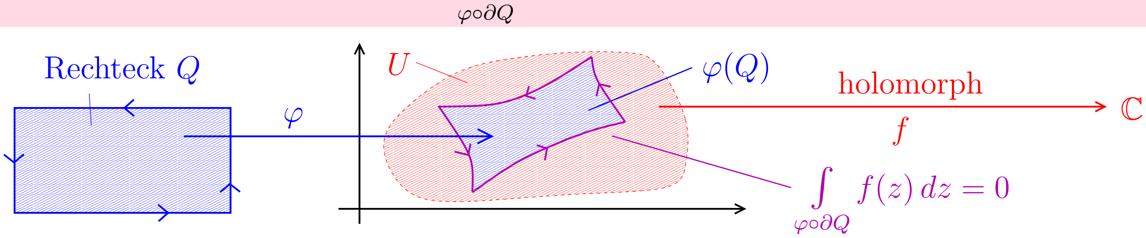
■

Der Name des vorherigen Satzes, Cauchysche Integralsatz für Rechtecke, legt schon nahe, dass es wohl Verallgemeinerungen dieses Satzes gibt. In der Tat, war die Tatsache, dass wir mit einem Rechteck arbeiten gar nicht so wichtig. Was wir hauptsächlich verwendet hatten war, dass wir ein Rechteck systematisch in kleinere Rechtecke zerlegen können.

Wir können diese Idee auch für Teilmengen von $\mathbb{C}$ durchführen, welche wir als Bilder von Rechtecken unter geeigneten Abbildungen beschreiben können. Genauer gesagt, wir haben folgenden Satz.

Satz 5.3. (Cauchysche Integralsatz für Bilder von Rechtecken) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $\varphi\colon Q \to U$ eine stetig reell differenzierbare Abbildung von einem Rechteck Q nach U. Dann gilt*[25]

$$\int_{\varphi \circ \partial Q} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

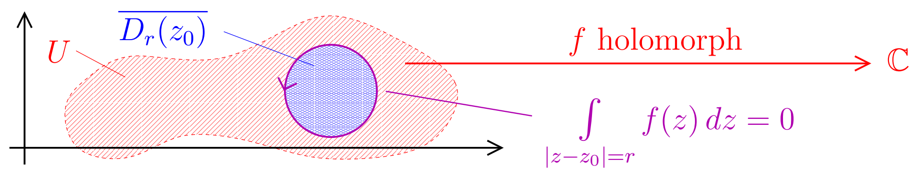


[25] Mit $\varphi \circ \partial Q$ bezeichen wir hierbei die Verknüpfung von dem Integrationsweg ∂Q von Seite 42 mit der Abbildung φ.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 5.3 zuwenden, wollen wir erst eine wichtige Anwendung betrachten.

Korollar 5.4. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für jede abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ gilt*

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \;=\; 0.$$



Beweis. Es sei also $\overline{D_r(z_0)}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe in der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph.

> Wir wollen hier natürlich den Cauchyschen Integralsatz für Bilder von Rechtecken verwenden. Wir müssen dazu eine Abbildung φ wählen, welche die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$ als Bild von einem Rechteck beschreibt.

Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon Q := [0,r]\times[0,2\pi] &\;\to\; \mathbb{C} \\ (s,t) &\;\mapsto\; z_0 + s\cdot e^{t\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

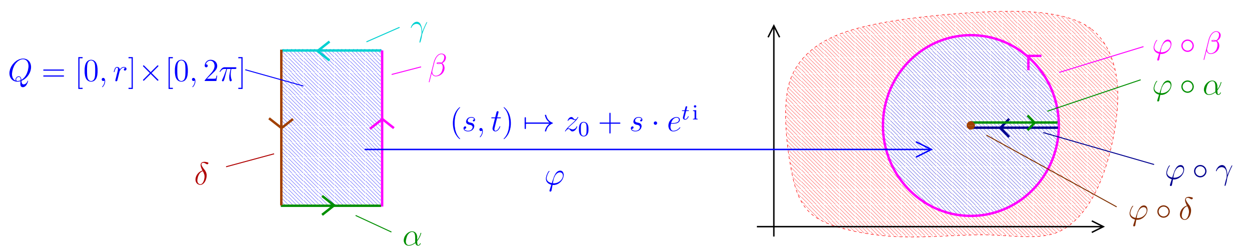
Das Bild $\varphi(Q)$ ist dann die Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$. Nach Voraussetzung ist $\varphi(Q) \subset U$. Aus Satz 5.3 folgt, dass

$$\int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Wir wollen nun dieses Wegintegral etwas genauer studieren. Wir bezeichnen dazu mit α, β, γ und δ die Wege, welche in der Abbildung unten skizziert sind. Dann gilt

$$0 \;=\; \int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 4.2}}}{=}\; \int\limits_{\varphi\circ\alpha} f(z)\,dz + \int\limits_{\varphi\circ\beta} f(z)\,dz + \int\limits_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,dz + \int\limits_{\varphi\circ\delta} f(z)\,dz \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 4.4 heben sich die beiden Integrale}\\ \text{über } \varphi\circ\alpha \text{ und } \varphi\circ\gamma \text{ weg, zudem verschwindet das}\\ \text{Wegintegral über den konstanten Weg } \varphi\circ\delta}}{=}\; \int\limits_{\varphi\circ\beta} f(z)\,dz \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 4.4}}}{=}\; \int\limits_{|z|=r} f(z)\,dz.$$

Wir haben also gezeigt, dass das Wegintegral über den Kreis in der Tat verschwindet. ■



Bevor wir uns weiteren Anwendungen von Satz 5.3 zuwenden, wollen wir den Satz nun doch erst einmal beweisen.

Beweis von Satz 5.3. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zudem sei Q ein Rechteck mit Umfang ℓ und Durchmesser d und es sei außerdem $\varphi\colon Q \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

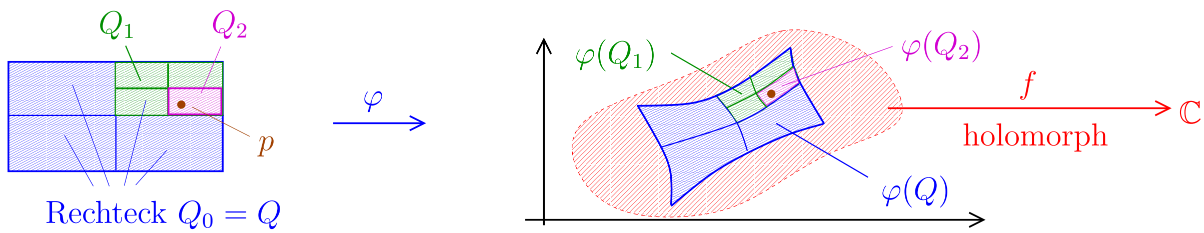
Es genügt zu zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\left| \int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \right| \;\le\; \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Wie im Beweis von Satz 5.2 konstruieren wir eine Folge von Rechtecken $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgende Aussagen gelten

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \left| \int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \right| & \le & 4^n \cdot \left| \int\limits_{\varphi\circ\partial Q_n} f(z)\,dz \right|, \\ (2) & \text{Umfang von } Q_n & = & \frac{1}{2^n}\ell \\ (3) & \text{Durchmesser von } Q_n & = & \frac{1}{2^n}d \end{array}.$$

Um mit der gleichen Idee wie im Beweis von Satz 5.2 fortzufahren müssen wir nun jedoch



den Durchmesser der Bilder $\varphi(Q_n)$ und die Länge der Wege $\varphi\circ\partial Q_n$ kontrollieren. Nachdem Q kompakt ist existiert nach Lemma 5.1

$$D \;:=\; \max\left\{ \|D\varphi(q)\| \,\middle|\, q \in Q \right\}.$$

Lemma 5.1 (2) besagt zudem, dass

$$\begin{array}{rcl} \text{Länge von } \varphi\circ\partial Q_n & \le & D\cdot\text{Länge von } \partial Q_n \;=\; \frac{1}{2^n}\ell\cdot D, \\ \text{Durchmesser von } \varphi(Q_n) & \le & D\cdot\text{Durchmesser von } Q_n \;=\; \frac{1}{2^n}d\cdot D. \end{array}$$

Wie im Beweis von Satz 5.2 sehen wir, dass es einen Punkt p gibt, welcher in allen Rechtecken Q_n enthalten ist. Wir setzen $z_0 = \varphi(p)$. Wir setzen nun $\epsilon' := \frac{\epsilon}{D^2\cdot d\cdot \ell}$. Nachdem f im Punkt z_0 holomorph folgt, wie im Beweis von Satz 5.2, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\cdot f'(z_0) + \chi(z-z_0), \qquad \text{wobei } |\chi(z-z_0)| \le \epsilon'\cdot|z-z_0| \text{ für alle } z \in D_\delta(z_0).$$

Da die Durchmesser der Q_n's gegen 0 konvergieren erhalten wir, wie im Beweis von Satz 5.2, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\varphi(Q_n) \subset D_\delta(z_0)$. Wie im Beweis von Satz 5.2 folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz\right| &\le 4^n\cdot\left|\int\limits_{\varphi\circ\partial Q_n} f(z_0)+(z-z_0)\cdot f'(z_0)+\chi(z-z_0)\,dz\right| \\
&\le 4^n\cdot\left|\int\limits_{\varphi\circ\partial Q_n} \underbrace{f(z_0)+(z-z_0)\cdot f'(z_0)}_{\substack{\text{Integrand besitzt Stammfunktion, also}\\ \text{verschwindet das Integral nach Lemma 4.7}}}\,dz\right| + 4^n\cdot\int\limits_{\varphi\circ\partial Q_n}\Big|\underbrace{\chi(z-z_0)}_{|\chi(z-z_0)|\le\epsilon'\cdot|z-z_0|}\Big|\,dz \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 4.3}}}{\le} 4^n\cdot \text{Länge}(\varphi\circ\partial Q_n)\cdot\epsilon'\cdot\text{Durchmesser}(\varphi(\partial Q_n)) \;\le\; 4^n\cdot\frac{1}{2^n}\ell D\cdot\frac{\epsilon}{D^2 d\ell}\cdot\frac{1}{2^n}dD \;=\; \epsilon.
\end{aligned}$$

■

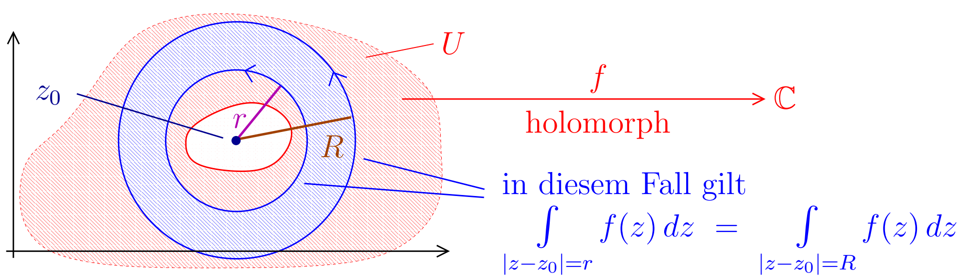
Wir beschließen das Kapitel mit zwei weiteren Korollaren zu Satz 5.3.

Korollar 5.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \le R$ zwei nicht-negative reelle Zahlen, so dass der Ring*

$$\left\{ s\cdot e^{t\mathrm{i}} \,\middle|\, s\in[r,R] \text{ und } t\in[0,2\pi]\right\}$$

in U enthalten ist. Dann gilt

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \;=\; \int\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz.$$



Beispiel. Auf Seite 32 hatten wir schon gesehen, dass für alle $r > 0$ gilt, dass

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{1}{z}\,dz \;=\; 2\pi\mathrm{i},$$

d.h. wir hatten insbesondere gesehen, dass das Wegintegral nicht vom Radius vom Kreis um 0 abhängt. Die Tatsache, dass das Wegintegral nicht vom Radius abhängt ist gerade die Aussage von Korollar 5.5.

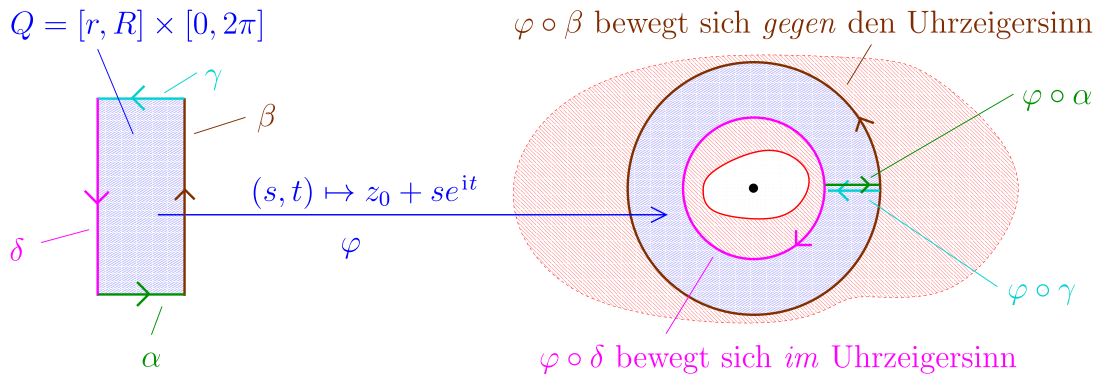
Indem wir Korollar 5.5 auf $r = 0$ anwenden, erhalten wir insbesondere Korollar 5.4 als Spezialfall. In der Tat ist der Beweis von Korollar 5.5 ganz ähnlich zum Beweis von Korollar 5.4.

Beweis. Wir wollen nun den Ring als Bild von einem Rechteck beschreiben. Wir betrachten dazu die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned}
\varphi\colon Q := [r,R]\times[0,2\pi] &\to \mathbb{C} \\
(s,t) &\mapsto z_0 + s\cdot e^{t\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

Das Bild von Q ist dann der durch die Radien r und R bestimmte Ring um z_0. Nach Voraussetzung ist $\varphi(Q) \subset U$. Aus Satz 5.3 folgt, dass

$$\int_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;=\; 0.$$



Wir bezeichnen nun mit α, β, γ und δ die Wege, welche in der Abbildung oben skizziert sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \int_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;&=\; \int_{\varphi\circ\alpha} f(z)\,dz + \int_{\varphi\circ\beta} f(z)\,dz + \int_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,dz + \int_{\varphi\circ\delta} f(z)\,dz \\ &\underset{\uparrow}{=}\; \int_{\varphi\circ\beta} f(z)\,dz + \int_{\varphi\circ\delta} f(z)\,dz \;\underset{\uparrow}{=}\; -\int_{|z|=r} f(z)\,dz + \int_{|z|=R} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

nach Lemma 4.4 heben sich die beiden Wegintegrale über $\varphi \circ \alpha$ und $\varphi \circ \gamma$ weg

nach Lemma 4.4

■

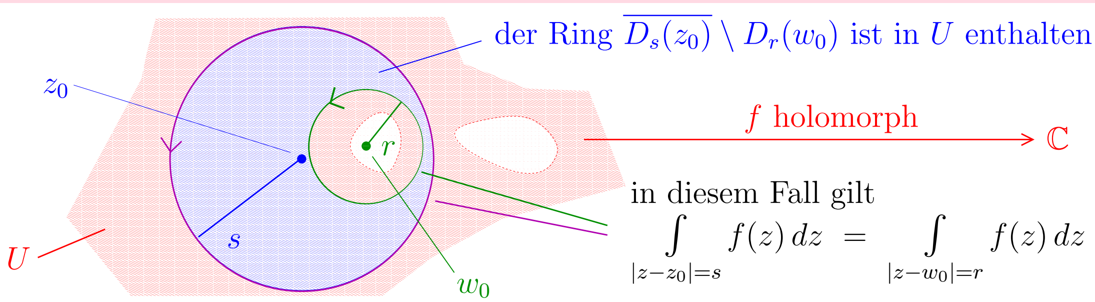
Mit etwas mehr Aufwand kann man zudem auch folgendes Korollar beweisen, welches die Aussage des vorherigen Korollars verallgemeinert.

Korollar 5.6. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es seien $w_0, z_0 \in \mathbb{C}$ und $r, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\overline{D_r(w_0)} \subset D_s(z_0)$ und so dass der Ring*

$$\overline{D_s(z_0)} \setminus D_r(w_0)$$

in U enthalten ist. Dann gilt

$$\int_{|z-z_0|=s} f(z)\,dz \;=\; \int_{|z-w_0|=r} f(z)\,dz.$$



6. Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

In diesem Kapitel werden wir eine lange Liste von Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz herleiten. Insbesondere werden wir den Fundamentalsatz der Algebra beweisen.

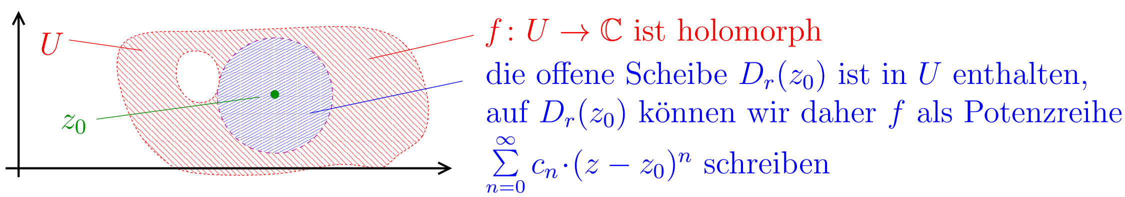
6.1. **Der Potenzreihenentwicklungssatz.** Der folgende Satz besagt, dass man lokal[26] jede holomorphe Funktion als Potenzreihe schreiben kann.

Satz 6.1. (Potenzreihenentwicklungssatz) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $z_0 \in U$. Es sei $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \subset U$. Dann gibt es eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen, so dass*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in D_r(z_0).$$

Hierbei können die Koeffizienten c_n auf zwei verschiedene Weisen bestimmt werden:

(1) *für alle n ist*
$$c_n \;=\; \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0),$$
(2) *für alle n und alle $s > 0$ mit $\overline{D_s(z_0)} \subset U$ ist*
$$c_n \;=\; \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$



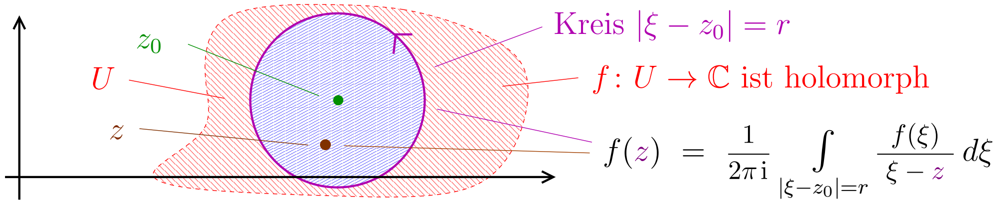
Beispiel. Es sei $a \neq 0$. Wir können dann $f(z) = \frac{1}{a-z}$ auf der offenen Scheibe $D_{|a|}(0)$ wie folgt als Potenzreihe schreiben:

$$f(z) \;=\; \frac{1}{a-z} \;=\; \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische Reihe, denn } |\frac{z}{a}| < 1}}{=}\; \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \cdot z^n.$$

Wir wenden uns nun dem Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 6.1 zu. Ein wichtiges Hilfsmittel ist hierbei folgender Satz.

Satz 6.2. (Cauchysche Integralformel) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $z_0 \in U$. Zudem sei $r > 0$, so dass $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt für jedes $z \in D_r(z_0)$, dass*
$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

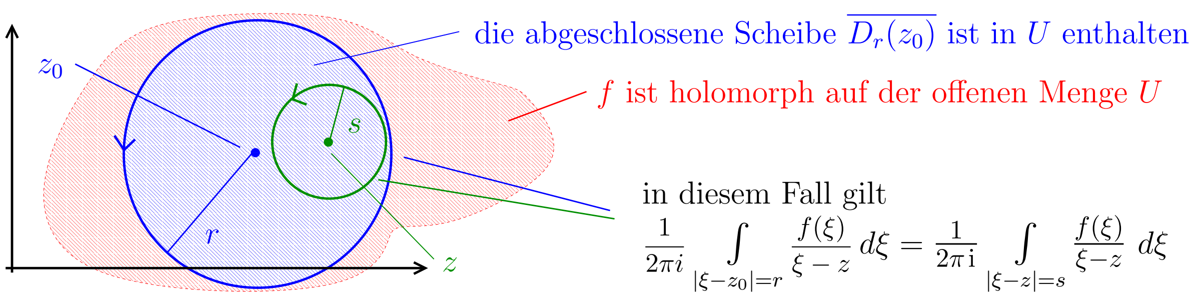
[26] Wenn E eine Eigenschaft von Funktionen ist (z.B. stetig, konstant, konvex, in eine Potenzreihe entwickelbar), dann sagt man eine Funktion f auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt *lokal die Eigenschaft* E, wenn es zu jedem $z \in U$ eine offene Umgebung V besitzt, so dass die Einschränkung von f auf V die Eigenschaft E besitzt.



Bemerkung. Die Cauchysche Integralformel besagt insbesondere, dass man die Funktionswerte einer holomorphen Funktion im Inneren einer Scheibe $D_r(z_0)$ durch die Funktionswerte auf dem Randkreis $\partial \overline{D_r(z_0)}$ bestimmen kann. Insbesondere ist die holomorphe Funktion f im Inneren durch die Funktion auf dem Randkreis eindeutig festgelegt.

Beweis von Satz 6.2. Es folgt aus Korollar 5.6, dass für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\overline{D_s(z)} \subset D_r(z_0)$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \;=\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\xi - z| = s} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$



Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \;&=\; \lim_{s \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\xi - z| = s} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nullergänzung } f(\xi) = f(\xi) - f(z) + f(z)}}{=} \lim_{s \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\xi - z| = s} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi \;+\; \underbrace{\lim_{s \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\xi - z| = s} \frac{f(z)}{\xi - z}\, d\xi}_{= f(z), \text{ nach Lemma 4.9}}.
\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist also $f(z)$, also verbleibt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

$$\lim_{s \to 0} \int\limits_{|\xi - z| = s} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi \;=\; 0.$$

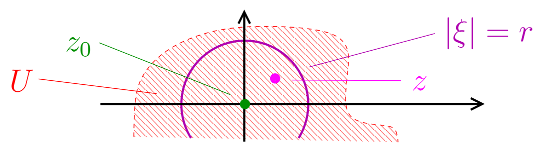
Für alle s mit $\overline{D_s(z)} \subset D_r(z_0)$ gilt die Ungleichung

$$\left| \int\limits_{|\xi - z| = s} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Standardabschätzung von Lemma 4.3}}}{\leq} \underbrace{\text{Umfang von Kreis mit Radius } s}_{= 2\pi s} \cdot \underbrace{\sup \left\{ \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| \;\middle|\; \xi \in \overline{D_r(z_0)} \setminus \{z\} \right\}}_{\substack{\text{endlich, dies sieht man wie folgt:} \\ \text{weil } f \text{ in } z \text{ holomorph kann man die Funktion} \\ \text{mit } z \mapsto f'(\xi) \text{ zu einer stetigen Funktion} \\ \text{auf der kompakten Scheibe } \overline{D_r(z_0)} \text{ fortsetzen}}}$$

Wir sehen, dass der Betrag des Integrals im Grenzwert $s \to 0$ gegen 0 konvergiert. ■

Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 6.1. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Fall $z_0 = 0$. Es sei also $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $r > 0$, so dass $D_r(0) \subset U$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_r(0)}$ auch noch in U enthalten ist.

> Auf Seite 50 hatten wir explizit $g(z) = \frac{1}{a-z}$ als Potenzreihe entwickelt. Nach Satz 6.2 können wir jetzt unsere ursprüngliche Funktion $f(z)$ als Integral von solchen Funktionen, welches sich als Potenzreihen entwickeln lassen, schreiben. Dies wollen wir nun verwenden.



Es sei nun $z \in D_r(0)$ festgewählt. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} f(z) &\overset{\substack{\text{nach Satz 6.2}\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{1-\frac{z}{\xi}}\, d\xi \overset{\substack{\text{denn aus } |\frac{z}{\xi}| = |\frac{z}{r}| < 1 \text{ folgt } \frac{1}{1-\frac{z}{\xi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\xi|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n\, d\xi. \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Integral mit der Reihe vertauschen. Nach dem Konvergenzsatz 4.11 für Wegintegrale ist dies möglich, wenn die Funktionenreihe gleichmäßig konvergiert. Wir beweisen daher als nächstes folgende Behauptung.

Behauptung. Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n$ konvergiert auf $K := \big\{\xi \in \mathbb{C} \,\big|\, |\xi| = r\big\}$ gleichmäßig.

Um die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen, wollen wir das Majoranten-Kriterium 3.4 für Funktionenreihen anwenden. Die Funktion $|f|$ ist auf der kompakten Menge K stetig, insbesondere durch ein $C \geq 0$ beschränkt. Also gilt für alle $\xi \in K$, dass

$$\left| \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n \right| = \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n \right| \leq \frac{C}{r} \cdot \Big(\underbrace{\frac{|z|}{r}}_{=:\theta} \Big)^n = \frac{C}{r} \cdot \theta^n.$$

Da $z \in D_r(0)$ gilt, dass $\theta = \frac{|z|}{r} \in [0,1)$. Insbesondere konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig nach dem Majoranten-Kriterium 3.4 für Funktionenreihen. ⊞

Zusammengefasst folgt nun für $z \in D_r(0)$, dass

$$f(z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{obige Rechnung}}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\xi|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n\, d\xi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konvergenzsatz 4.11}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot z^n\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi}_{=:c_n} \cdot z^n.$$

Wir haben also bewiesen, dass wir die Funktion $f(z)$ auf $D_r(0)$ als Potenzreihe schreiben können. Die beiden Formeln für c_n folgen direkt aus Korollar 3.7 und aus der obigen Rechnung, beziehungsweise aus Korollar 4.10.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Wir können also nicht mehr annehmen, dass die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_r(0)}$ auch noch in U enthalten ist. Es sei nun $s \in (0, r)$ beliebig. Dann ist die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_s(0)}$ noch ganz in U enthalten. Wir haben also gerade eben gezeigt, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n \qquad \text{für alle } z \in D_s(0).$$

Nachdem diese Gleichheit auf allen Scheiben $D_s(0)$ mit $s \in (0, r)$ gilt, gilt diese wie gewünscht auch auf ganz $D_r(0)$. ■

6.2. **Erste Folgerungen aus dem Potenzreihenentwicklungssatz 6.1.**

Satz 6.3. (Satz von Goursat) *Jede holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist beliebig oft komplex differenzierbar.*

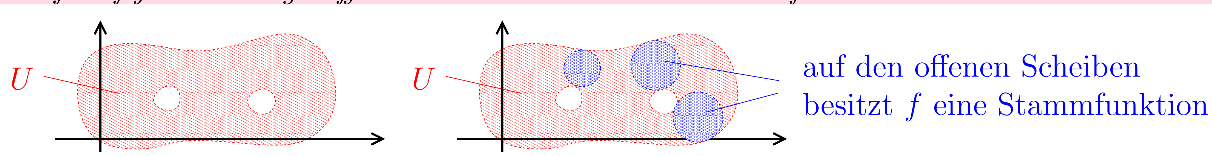
Bemerkung. Wir sehen nun, dass sich holomorphe Funktionen anders verhalten als differenzierbare Funktionen. Der Satz von Goursat besagt, dass jede holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. Die analoge Aussage für reelle Funktionen ist natürlich völlig falsch. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -x^2, & \text{wenn } x \leq 0, \\ x^2, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar, geschweige den beliebig oft differenzierbar.

Beweis des Satzes von Goursat. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $z_0 \in U$. Nachdem U offen ist gibt es ein $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \subset U$. Nachdem Potenzreihenentwicklungssatz 6.1 kann f auf $D_r(z_0)$ durch eine Potenzreihe beschrieben werden. Nach Satz 3.6 ist jede Potenzreihe beliebig oft komplex differenzierbar, also ist auch f im Punkt z_0 beliebig oft komplex differenzierbar. ■

Satz 6.4. (Existenz von Stammfunktionen auf Scheiben) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann besitzt die Einschränkung von f auf jede beliebige offene Scheibe $D \subset U$ eine Stammfunktion.*



Beweis. Es sei also $D_r(z_0)$ eine Scheibe in U. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 6.1 können wir dann $f(z)$ auf $D_r(z_0)$ als Potenzreihe in z_0 schreiben. In Satz 4.6 hatten wir gesehen, dass jede Potenzreihe $f(z)$ in z_0 eine Stammfunktion besitzt. ■

Definition. Eine ganze Funktion ist eine holomorphe Funktion, welche auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist.

Beispiel. Die trigonometrischen Funktionen $\sin(z)$ und $\cos(z)$, sowie die Exponentionalfunktion $\exp(z)$ sind ganze Funktion. Darüber hinaus sind auch Produkte und Summen von ganzen Funktionen wieder ganz.

Satz 6.5. *Jede ganze Funktion ist durch eine Potenzreihe gegeben.*

Beweis. Der Satz folgt aus dem Potenzreihenentwicklungssatz 6.1 angewandt auf $U = \mathbb{C}$ und $z_0 = 0$. ■

Bemerkung. Der Potenzreihenentwicklungssatz 6.1 impliziert also, dass jede holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ durch eine Potenzreihe gegeben ist. Die analoge Aussage für reelle Funktionen ist natürlich falsch, sie ist sogar falsch für reelle Funktionen, welche beliebig oft differenzierbar sind. Beispielsweise werden wir in Präsenzübungsblatt 4 sehen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \le 0 \end{cases} \end{aligned}$$

beliebig oft differenzierbar ist, und dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir f durch eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ beschreiben könnten, dann müsste hierbei gelten $c_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) = 0$. Aber dann definiert die Potenzreihe die Nullfunktion, jedoch ist f nicht null für $x > 0$.

6.3. **Der Satz von Liouville und der Fundamentalsatz der Algebra.**

Definition. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f(z)| \le M$ für alle $z \in U$.

Satz 6.6. (Satz von Liouville) *Eine ganze Funktion, welche beschränkt ist, ist konstant.*

Bemerkung. Die reelle Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

ist beliebig oft differenzierbar, beschränkt, aber natürlich nicht konstant. Wir sehen also wiederum, dass sich die holomorphen Funktionen ganz anders als die differenzierbaren Funktionen verhalten. Die analoge komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ist kein Gegenbeispiel zum Satz 6.6 von Liouville, denn $f(z)$ ist nicht auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Genauer gesagt, $f(z)$ ist bei den Nullstellen des Nenners, d.h. bei $z = \pm\mathrm{i}$ nicht definiert.

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche beschränkt ist. Wir wählen ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 6.5 gibt es komplexe Zahlen c_n, so dass auf ganz $\mathbb{C}$ gilt, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n.$$

Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $n \geq 1$ gilt $c_n = 0$.

Es sei $n \geq 1$. Zudem sei $r > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} |c_n| \;&\overset{\substack{\text{Satz 6.1 (2)}\\ \downarrow}}{=}\; \left| \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, dz \right| \;=\; \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right| \cdot \left| \int\limits_{|\xi|=r} \underbrace{\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}}_{\text{Betrag ist } \leq \frac{M}{r^{n+1}}} dz \right| \\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach der Standardabschätzung 4.3 für Wegintegrale}}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot \text{Umfang von Kreis mit Radius } r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \;=\; \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \;=\; \frac{M}{r^n}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir also gezeigt, dass für alle $r > 0$ gilt $|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$. Da $n \geq 1$ muss ist dies jedoch nur möglich, wenn $|c_n| = 0$. ■

Der folgende Satz ist eine der wichtigsten Sätze der Mathematik überhaupt.

Satz 6.7. (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes komplexe Polynom $f(z)$ von Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.*

Bemerkung. Wenn $f(z)$ ein Polynom von Grad $n = 2$ ist, dann kann man natürlich die Nullstellen explizit bestimmen und man sieht, dass jedes solche Polynom eine komplexe Nullstelle besitzt. Für Polynome von Grad 3 und 4 gibt es ebenfalls, deutlich komplizierte Lösungsformeln, welche in

`https://de.wikipedia.org/wiki/Kubische_Gleichung`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Quartische_Gleichung`

beschrieben sind. Man kann mithilfe dieser Formeln auch die Existenz von Nullstellen beweisen. In der Algebra-Vorlesung wird jedoch gezeigt, dass es für Polynome von Grad ≥ 5 keine allgemeine Lösungsformel gibt. Wir können also den Fundamentalsatz der Algebra nicht dadurch beweisen, dass wir die Nullstellen explizit mithilfe einer Formel„hinschreiben".

Beweis. Wenn $f(z) = 0$, dann gibt es nichts zu beweisen. Es sei also

$$f(z) \;=\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + z_0$$

ein komplexes Polynom, welches nicht null ist. Wir nehmen an, dass f keine komplexe Nullstelle besitzt. Wir wollen zeigen, dass $n = 0$, d.h. dass $f(z)$ konstant ist.

> Die gewünschte Aussage klingt so, als wollten wir den Satz 6.6 von Liouville anwenden. Allerdings können wir den Satz von Liouville nicht direkt auf $f(z)$ anwenden, denn ein Polynom ist ja im Allgemeinen unbeschränkt. Anstattdessen wollen wir, wie sich im Beispiel $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ schon angedeutet hat, den Satz von Liouville auf $\frac{1}{f(z)}$ anwenden.

Nachdem $f(z)$ keine komplexe Nullstelle besitzt, ist die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Zudem ist diese Funktion holomorph. Außerdem ist die Funktion $f(z)$ konstant, genau dann, wenn $\frac{1}{f(z)}$ konstant ist. Im Hinblick auf den Satz 6.6 von Liouville genügt es nun folgende Aussage zu beweisen.

Behauptung. Die auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ ist beschränkt.

Wenn $\mathrm{Grad}(f(z)) = 0$ gibt es nichts zu beweisen. Wir betrachten nun den Fall, dass $\mathrm{Grad}(f(z)) =\geq 1$. Nach Lemma 1.8 gilt

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

Dies bedeutet insbesondere, dass es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(z)| \quad \geq 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq M.$$

Mit anderen Worten, es ist

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \quad \leq 1 \quad \text{für alle } z \notin D_M(0).$$

Andererseits ist die stetige Funktion $z \mapsto |\frac{1}{f(z)}|$ auf der kompakten Menge $\overline{D_M(0)}$ beschränkt. Zusammengefasst sehen wir, dass $\frac{1}{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. ■

Das folgende Korollar gibt eine etwas genauere Aussage, nämlich es besagt, dass jedes komplexe Polynom als Produkt von linearen Polynomen (oft auch Linearfaktoren genannt) geschrieben werden kann.

Korollar 6.8. *Es sei $f(z)$ ein komplexes Polynom von Grad $n \geq 1$, dann existieren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass*

$$f(z) \;=\; b \cdot (z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n).$$

Bevor wir das Korollar beweisen erinnern wir noch an den Satz über die Polynomdivision, welcher beispielsweise in [**Na1**, Satz 15.7] bewiesen wird.

Satz 6.9. (Satz über die Polynomdivision) *Es seien $f(z)$ und $g(z)$ Polynome über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$, wobei $g(z) \neq 0$. Dann existieren Polynome $p(z)$ und $q(z)$ mit* $\mathrm{Grad}(q(z)) < \mathrm{Grad}(g(z))$, *so dass*[27]

$$f(z) \;=\; g(z) \cdot p(z) + q(z).$$

Insbesondere, wenn $\mathrm{Grad}(g(z)) = 1$, *d.h. wenn $g(z)$ ein lineares Polynom ist, dann gibt es ein Polynom $p(z)$ und eine Konstante $C \in \mathbb{K}$, so dass*

$$f(z) \;=\; g(z) \cdot p(z) + C.$$

Beispiel. Der Beweis von Satz 6.9 ist nicht Bestandteil dieser Vorlesung. Wir führen daher nur ein Beispiel aus, welches hoffentlich den Grundgedanken der Polynomdivision deutlich macht. Wir betrachten also

$$f(z) \;=\; 12z^3 - 6z + 1 \qquad \text{und} \qquad g(z) \;=\; 3z^2 - 6z + 1,$$

dann gilt

[27] Zur Erinnerung, dass Nullpolynom hat per Definition den Grad -1.

$$f(z) = 12z^3 - 6z + 1 \overset{\substack{\text{wir führen eine Nullergänzung mit dem } \frac{12z^3}{3z^2} = 4z\text{-fachen von } g(z) \text{ durch} \\ \downarrow}}{=} \underbrace{12z^3 - 6z + 1 - 4z \cdot (3z^2 - 6z + 1)}_{=24z^2-10z+1} + 4z \cdot (3z^2 - 6z + 1)$$

$$= \underbrace{24z^2 - 10z + 1 - 8 \cdot (3z^2 - 6z + 1)}_{=38z-7} + (4z + 8)(3z^2 - 6z + 1)$$

$$= \underbrace{(4z + 8)}_{=p(z)} \cdot g(z) + \underbrace{(38z - 7)}_{=q(z)}$$

Wir wenden uns nun dem Beweis von Korollar 6.8 zu.

Beweis von Korollar 6.8. Wir beweisen die Aussage mithilfe von Induktion nach dem Grad vom Polynom $f(z)$. Wenn $\text{Grad}(f(z)) = 1$, dann ist die Aussage trivialerweise wahr.

Nehmen wir nun an, dass die Aussage schon für alle Polynome von Grad $< n$ gilt. Es sei nun $f(z)$ eine Polynom mit $\text{Grad}(f(z)) = n \geq 2$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt $f(z)$ eine Nullstelle $a \in \mathbb{C}$. Wir wenden nun Satz 6.9 auf die Polynome $f(z)$ und $g(z) = z - a$ an. Es gibt also eine Polynom $p(z)$ und eine Konstante $C \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = g(z) \cdot (z - a) + C.$$

Durch Einsetzen von $z = a$ sehen wir, dass $C = 0$. Also folgt

$$f(z) = g(z) \cdot (z - a).$$

Nachdem $\text{Grad}(g(z)) = \text{Grad}(f(z)) = n - 1$ können wir die Induktionsvoraussetzung auf $g(z)$ anwenden, und erhalten die gewünschte Aussage für $f(z)$. ■

6.4. **Der Faktorisierungssatz.**

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{aber} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

dann nennen wir z_0 eine Nullstelle k-ter Ordnung von f. Eine Nullstelle erster Ordnung nennen wir auch eine einfache Nullstelle.

Beispielsweise ist $z_0 = 0$ eine Nullstelle k-ter Ordnung von $f(z) = z^k$. Etwas allgemeiner, es sei $g(z)$ eine holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$. In Präsenzbungsblatt 4 sehen wir, dass die Funktion $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ eine Nullstelle k-ter Ordnung in z_0 besitzt. Der folgende Satz besagt nun, dass zumindest auf einer offenen Scheibe alle Nullstellen k-ter Ordnung von der obigen Form sind.

Satz 6.10. (Faktorisierungssatz) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle k-ter Ordnung von f. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$, so dass*

(1) $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ *für alle $z \in U$,*
(2) $g(z_0) \neq 0$.

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von k-ter Ordnung von f. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 6.1 gibt es ein $r > 0$ und eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von komplexen Zahlen, so dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in D_r(z_0).$$

Es folgt aus der Voraussetzung und aus Satz 3.6, dass $c_0 = \cdots = c_{k-1} = 0$ und $c_k \neq 0$. Also gilt auf $D_r(z_0)$, dass

$$f(z) \;=\; (z - z_0)^k \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \cdot (z - z_0)^n}_{\substack{\text{aus Lemma 3.1 folgt, dass} \\ \text{der Konvergenzradius } \geq r}}.$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} g\colon U &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \cdot (z - z_0)^n, & \text{wenn } z \in D_r(z_0), \\ \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^k}, & \text{wenn } z \in U \setminus \{z_0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

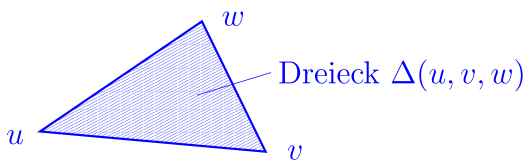
Es folgt aus der obigen Gleichheit, dass die Definition von g widerspruchsfrei ist. Da g holomorph ist, ist g auf ganz U holomorph. Offensichtlich ist (1) erfüllt, und zudem gilt $g(z_0) = c_k \neq 0$. ■

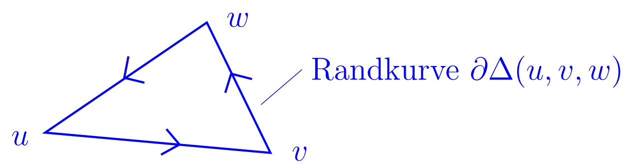
6.5. **Der Satz von Morera.**

Notation. Es seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ drei verschiedene Punkte. Wir schreiben

$$\Delta(u, v, w) \;=\; \big\{ u + s \cdot (v - u) + t \cdot (w - u) \,\big|\, s, t \in [0, 1] \text{ mit } s + t \leq 1 \big\}.$$

Dies ist das von u, v, w aufgespannte Dreieck. Zudem bezeichnen wir die Kurve $\gamma(u, v, w, u)$ als Randkurve $\partial\Delta(u, v, w)$.





Satz 6.11. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für alle Dreiecke $\Delta \subset U$ gilt, dass*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0.$$

Beweis. Wir weisen den Satz in Übungsblatt 3 mithilfe des Cauchyschen Integralsatzes 5.3 für Bilder von Rechtecken. ■

Viel interessanter ist nun die Aussage, dass Satz 6.11 folgende Umkehrung besitzt.

Satz 6.12. (Satz von Morera) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig. Wenn für alle Dreiecke $\Delta \subset U$ gilt, dass*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0,$$

dann ist f holomorph.

Beweis. Es sei $z_0 \in U$. Wir wollen zeigen, dass f im Punkt z_0 holomorph ist. Nachdem U offen ist gibt es ein $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \subset U$. Es folgt nun aus der Voraussetzung und aus Satz 4.8, dass f auf $D_r(z_0)$ eine Stammfunktion F besitzt.

Mit anderen Worten, es gibt auf $D_r(z_0)$ eine holomorphe Funktion F mit $F' = f$. Nach dem Satz 6.3 von Goursat ist dann aber F beliebig oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist $F' = f$ auf $D_r(z_0)$, insbesondere im Punkt z_0, komplex differenzierbar. ■

Satz 6.13. *Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, es sei $z_0 \in U$ und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, welche auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph ist, und welche in z_0 stetig ist. Dann ist f sogar auf ganz U holomorph.*

Bemerkung. Die Aussage von Satz 6.13 widerspricht der Intuition von Analysis I. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

stetig und zudem in allen Punkten von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, aber f ist natürlich nicht auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, dass f im Punkt z_0 komplex holomorph ist. Wir wählen ein $r > 0$, so dass die abgeschlossene Scheibe $\overline{D_r(z_0)}$ noch ganz in U enthalten ist.

Nach dem Satz 6.12 von Morera genügt es folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Für jedes Dreieck $\Delta \subset D_r(z_0)$ gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

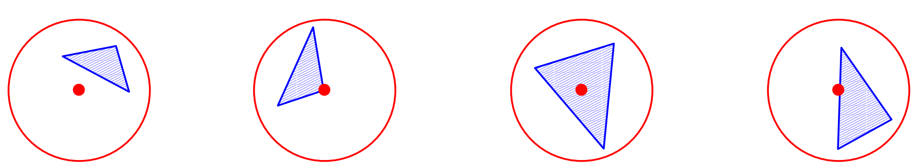
Wir wollen diese Behauptung mithilfe von folgenden zwei Tatsachen beweisen:

(a) Für jedes Dreieck Δ in $D_r(z_0)$, welches den Punkt z_0 nicht enthält, verschwindet nach Satz 6.11 das zugehörige Wegintegral.

(b) Nachdem $\overline{D_r(z_0)}$ kompakt ist, und nachdem f nach Voraussetzung stetig ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \overline{D_r(z_0)}$. Insbesondere folgt aus der Standardabschätzung von Wegintegralen aus Lemma 4.3, dass für jeden Integrationsweg γ in $\overline{D_r(z_0)}$ gilt, dass

$$\left| \int_{\gamma} f(z)\,dz \right| \;\le\; M \cdot \text{Länge}(\gamma).$$

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Beweis der obigen Behauptung zu. Es sei also $\Delta = \Delta(u, v, w) \subset D_r(z_0)$ ein beliebiges Dreieck.



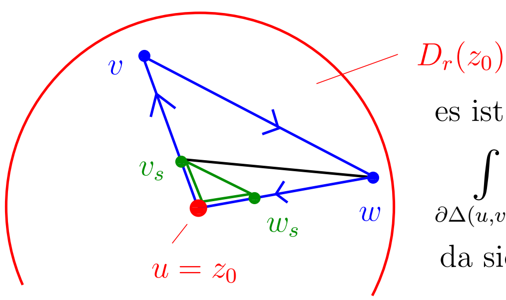
$z_0 \notin \Delta$ $\quad$ z_0 Eckpunkt $\quad$ z_0 im Inneren $\quad$ z_0 auf Kante

Wir unterscheiden vier Fälle:

1. Fall. Der Punkt z_0 liegt nicht in Δ. Dann folgt aus (a), dass das Wegintegral verschwindet.
2. Fall. Der Punkt z_0 ist ein Eckpunkt von Δ. Wir betrachten den Fall $u = z_0$, alle anderen Fälle werden ganz analog behandelt. Für $s > 0$ klein genug[28] bezeichnen wir mit v_s den Punkt auf der Strecke von $z_0 = u$ nach v, welcher den Abstand s zu u besitzt. Ganz analog definieren wir w_s. Dann gilt für alle solche s, dass

$$\int\limits_{\partial\Delta(z_0,v,w)} f(z)\,dz \overset{\substack{\text{siehe Abbildung}\\ \downarrow}}{=} \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta(v_s,v,w)} f(z)\,dz}_{=\,0,\ \text{nach (a)}} + \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta(v_s,w,w_s)} f(z)\,dz}_{=\,0,\ \text{nach (a)}} + \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta(u,v_s,w_s)} f(z)\,dz}_{\substack{\text{der Betrag ist}\\ \le 4s\cdot M \text{ nach (b)}}}$$

Wir sehen also, dass der Betrag von unserem Wegintegral kleiner als jede positive Zahl ist, also muss das Wegintegral schon null sein.

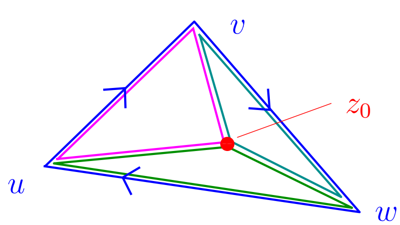


es ist

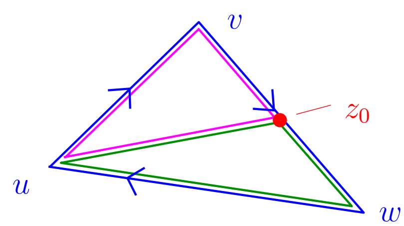
$$\int\limits_{\partial\Delta(u,v,w)} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial\Delta(u,v_s,w_s)} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta(v_s,v,w)} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta(v_s,w,w_s)} f(z)\,dz$$

da sich alle inneren Wegintegrale wegheben

3. Fall. Der Punkt z_0 liegt im Inneren von Δ. In diesem Fall können wir, wie in der Abbildung unten auf der linken Seite skizziert, das Dreieck $\Delta(u, v, w)$ in drei kleinere Dreiecke zerlegen, bei denen jeweils z_0 ein Eckpunkt ist. Wir haben gerade gezeigt, dass die Wegintegrale über diese kleineren Dreiecke verschwinden, also verschwindet auch das Wegintegral über das ursprüngliche Dreieck.
4. Fall. Der Punkt z_0 liegt auf einer Kante von Δ. In diesem Fall zerlegen wir, wie in der Abbildung unten auf der rechten Seite skizziert, das Dreieck in zwei kleinere Dreiecke, bei denen jeweils z_0 ein Eckpunkt ist und wir verfahren wie im 3. Fall. ■



Zerlegung von $\Delta(u, v, w)$,
wenn z_0 im Inneren liegt



Zerlegung von $\Delta(u, v, w)$,
wenn z_0 auf einer Kante liegt

[28] Beispielsweise gilt die Aussage für $s \in (0, \min\{|v-u|, |w-u|\})$.

6.6. Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip.

Notation. Für eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ schreiben wir in diesem Teilkapitel

$$\overline{U}^{\text{sp}} \;=\; \{\overline{z} \,|\, z \in U\},$$

d.h. $\overline{U}^{\text{sp}}$ ist Spiegelung von U an der reellen Achse.

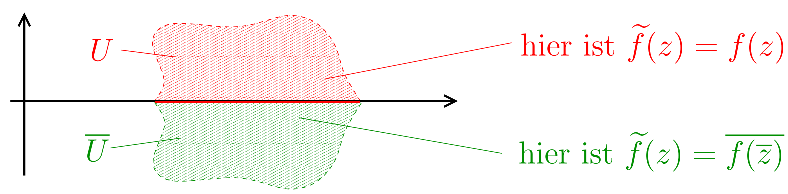
Satz 6.14. (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) *Es sei U eine Teilmenge der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, so dass $U \cup \overline{U}^{\text{sp}}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Zudem sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *f ist holomorph auf $U' := \{z \in U \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$,*
(2) *f nimmt nur reelle Werte auf $U \cap \mathbb{R}$ an.*

Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\colon U \cup \overline{U} \;&\to\; \mathbb{C} \\ z \;&\mapsto\; \begin{cases} f(z), & \text{wenn } z \in U, \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{wenn } z \in \overline{U}^{\text{sp}}, \end{cases} \end{aligned}$$

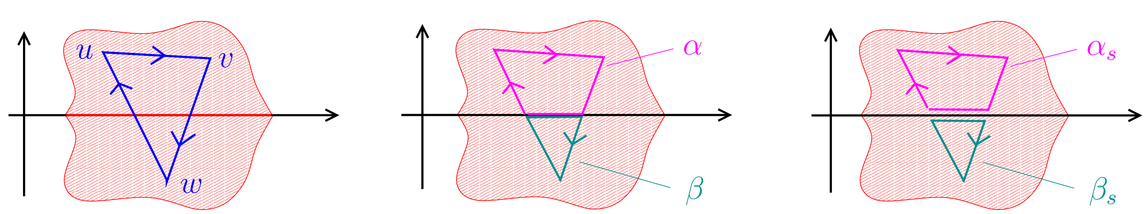
holomorph.



Wir werden das Schwarzsche Spiegelungsprinzip im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht mehr verwenden, wir skizzieren deswegen nur den Beweis.

Beweisskizze. In Übungsaufgabe 4 von Übungsblatt 2 hatten wir schon gesehen, dass die Funktion $z \mapsto \widetilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ auf der offenen Menge $\overline{U'}$ holomorph ist.

Wir wollen nun mithilfe des Satzes 6.12 von Morera zeigen, dass $\widetilde{f}$ sogar auf ganz $U \cup \overline{U}^{\text{sp}}$ holomorph ist. Es sei also $\Delta(u, v, w) \subset U \cup \overline{U}^{\text{sp}}$ ein Dreieck. Wenn $\Delta(u, v, w)$ ganz in U' oder $\overline{U'}$ liegt, dann folgt aus Satz 6.11, dass das Wegintegral verschwindet.



Es sei nun $\Delta = \Delta(u, v, w) \subset U \cup \overline{U}^{\text{sp}}$ ein Dreieck, welches sowohl U als auch $\overline{U}^{\text{sp}}$ schneidet. Wir bezeichnen mit α und β die Wege, welche man, wie in der Abbildung skizziert, durch„schneiden von Δ entlang der reellen Achse" erhält. Zudem bezeichnen wir für $s > 0$ mit α_s und β_s die Integrationswege, welche wir erhalten, in dem wir die Schnittpunkte des Dreiecks mit der reellen Achse um s in die positive bzw. negative imaginäre Richtung verschieben. Die Wege α_s liegen also in U' und die Wege β_s verlaufen in $\overline{U'}$ liegen. Dann gilt

$$\int_\Delta f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{die Wegintegrale entlang} \\ \text{der reellen Achse} \\ \text{heben sich weg}}}{=} \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus der Stetigkeit} \\ \text{von } f \text{ und der Stetigkeit} \\ \text{von } \alpha_s \text{ und } \beta_s \text{ im Parameter } s}}{=} \lim_{s\to 0}\int_{\alpha_s} f(z)\,dz + \lim_{s\to 0}\int_{\beta_s} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 6.11} \\ \text{verschwinden alle} \\ \text{diese Wegintegrale}}}{=} 0. \qquad \blacksquare$$

7. Zusammenhängende und diskrete metrische Räume

In diesem Kapitel entwickeln wir die Theorie der metrischen Räume weiter und führen verschiedene Konzepte ein, welcher wir in den darauffolgenden Kapiteln auf $\mathbb{C}$ und auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ anwenden werden.

7.1. **Teilräume von metrischen Räumen.** Wir erinnern an folgende Definitionen aus Analysis II.

Definition. Ein metrischer Raum ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X, d.h. einer Abbildung

$$\begin{array}{rcl} X \times X & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y), \end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (positive Definitheit)
(2) für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
(3) für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

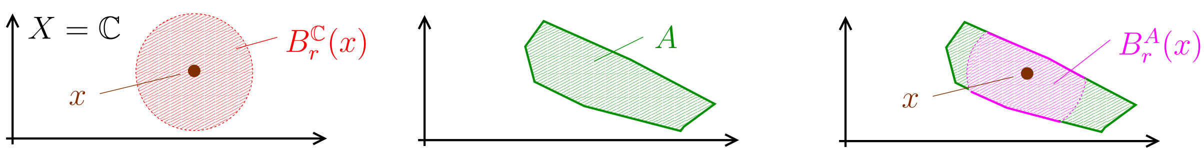
(1) Für $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ schreiben wir[29]

$$B_r(a) := B_r^X(a) := \{b \in X \mid d(a, b) < r\} \qquad \text{die offene Kugel von Radius } r \text{ um } a.$$

(2) Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset M$.

Die uns geläufigsten metrischen Räume sind $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ und $\mathbb{C}$ mit der Betragsmetrik $d(x, y) = |x - y|$. Die folgende Definition gibt uns noch viele weitere Beispiele von metrischen Räumen.

Konvention. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und es sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Die Einschränkung von $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf $d\colon A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Metrik auf A und wir fassen damit A als metrischen Raum auf.

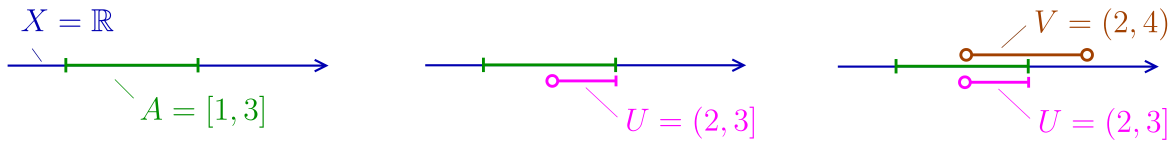


Lemma 7.1. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und es sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir fassen A als metrischen Raum auf. Es sei $U \subset A$ eine Teilmenge. Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *U ist offen im metrischen Raum A.*
(2) *Es gibt eine offene Teilmenge V des metrischen Raums X, so dass $U = A \cap V$.*

[29] Nachdem wir jetzt einen beliebigen metrischen Raum betrachten, verwenden wir jetzt wieder die Notation $B_\epsilon(x)$ anstatt $D_\epsilon(x)$. Wir schreiben manchmal $B_\epsilon^X(x)$ anstatt $B_\epsilon(x)$ um die Rolle von X zu betonen.

Beispiel. Wir betrachten den metrischen Raum $X = \mathbb{R}$ und die Teilmenge $A = [1,3]$. Dann ist $U = (2,3]$ eine offene Teilmenge des metrischen Raums A, denn $U = [1,3] \cap (2,4)$, und $V = (2,4)$ ist natürlich eine offene Teilmenge des metrischen Raums X.



Beweis (∗)**.** Es sei $U \subset A$ eine Teilmenge. Wir beweisen zuerst die„(1)⇒(2)"-Richtung. Es sei also U offen im metrischen Raum A. Wir müssen zeigen, dass es eine offene Teilmenge V des metrischen Raums X gibt, so dass $U = A \cap V$. Da U offen in A ist gibt es für jedes $x \in U$ also ein $\epsilon_x > 0$, so dass $B^A_{\epsilon_x}(x) \subset U$. Wir setzen $V := \bigcup\limits_{x \in U} B^X_{\epsilon_x}(x)$. Die Teilmenge V ist die Vereinigung von offenen Kugeln in X, also ist V nach [**Fr2**, Lemma 1.5 und Satz 1.9] eine offene Teilmenge von X. Zudem gilt

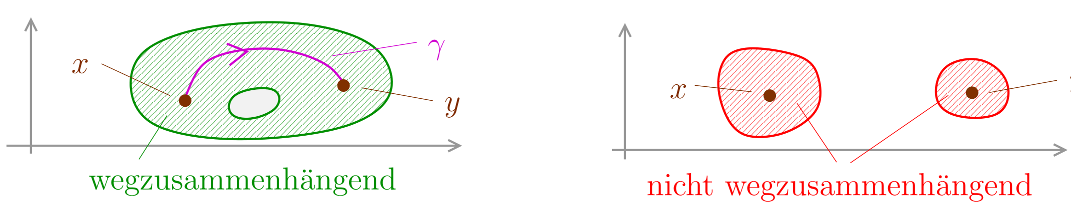
$$A \cap V \;=\; A \cap \bigcup_{x \in U} B^X_{\epsilon_x}(x) \;=\; \bigcup_{x \in U} (A \cap B^X_{\epsilon_x}(x)) \;=\; \bigcup_{x \in U} B^A_{\epsilon_x}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da immer } B^A_{\epsilon_x}(x) \subset U}}{=} U.$$

Wir beweisen nun die„(2)⇒(1)"-Richtung. Wir nehmen also an, dass es eine offene Teilmenge V des metrischen Raums X gibt, so dass $U = A \cap V$. Wir müssen zeigen, dass U offen im metrischen Raum A ist. Es sei also $x \in U$. Da $x \in V$ und da V offen im metrischen Raum X ist gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $D^X_\epsilon(x) \subset V$. Aber dann gilt auch $D^A_\epsilon(x) = A \cap D^X_\epsilon(x) \subset A \cap V = U$. ■

7.2. **Zusammenhängende und wegzusammenhängende metrische Räume.** Die folgende Definition ist sehr anschaulich.

Definition. Ein metrischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei beliebigen Punkten $P, Q \in X$ immer einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma(1) = Q$ gibt.

Beispiel. Alle konvexen Teilmengen eines metrischen Raums, insbesondere also alle Scheiben und Kugeln, sind offensichtlich wegzusammenhängend.



Die folgende Definition ist deutlich weniger anschaulich als die vorherige. Aber wir werden sehen, dass die folgende Definition noch eine wichtige Rolle spielen wird.

Definition. Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn folgende Aussage gilt: wann immer $X = U \cup V$ die Vereinigung von zwei disjunkten[30] offenen Mengen U und V ist, dann gilt $U = X$ oder $V = X$.[31]

Beispiel. Wir betrachten den metrischen Raum $X = [0,1] \cup [2,3]$. Es folgt aus Lemma 7.1, dass sowohl $U := [0,1]$ als auch $V := [2,3]$ offene Teilmengen von X sind. Also ist X die Vereinigung von zwei disjunkten nichtleeren offenen Teilmengen. Dies bedeutet, dass X *nicht* zusammenhängend ist.

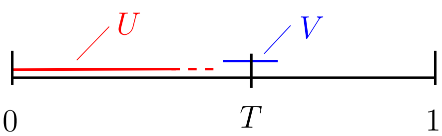
Lemma 7.2. *Das Intervall* $[0,1]$ *ist zusammenhängend.*

Beweis. Es seien U, V offene disjunkte Teilmengen von $[0,1]$ mit $U \cup V = [0,1]$. Wir können annehmen, dass $0 \in U$. Wir müssen nun zeigen, dass $U = [0,1]$. Wir betrachten dazu

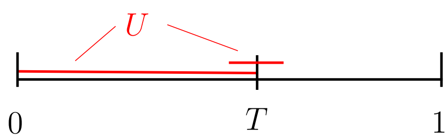
$$A \;:=\; \big\{ t \in [0,1] \,\big|\, [0,t] \subset U \big\}.$$ [32]

Die Menge A ist nicht leer da sie $t = 0$ enthält. Die Menge A ist zudem offensichtlich beschränkt. Es macht also Sinn, dass Supremum $T := \sup(A)$ zu betrachten. Wir müssen zeigen, dass $T = 1$ und $T \in U$.

Nehmen wir zuerst an, dass $T \notin U$. Dann ist $T \in V$, und es folgt aus der Offenheit von V, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass auch $(T-\epsilon, T+\epsilon) \cap [0,1]$ in V liegt. Dann gilt insbesondere, dass $(T-\epsilon, T+\epsilon) \cap A = \varnothing$, d.h. $\sup A \leq T - \epsilon$. Wir haben damit einen Widerspruch erhalten.



wenn $T \in V$, dann liegt auch $(T-\epsilon, T+\epsilon) \cap [0,1]$ in V



nachdem also $T \in U$ liegt auch $[0, T+\epsilon) \cap [0,1]$ in U

Wir wissen also jetzt, dass $T \in U$. Aus der Offenheit von U folgt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $(T-\epsilon, T+\epsilon) \cap [0,1] \subset U$. Also ist $[0, T+\epsilon] \cap [0,1] \subset U$. Im Hinblick auf die Definition von T ist dies nur möglich, wenn $T = 1$. ■

Lemma 7.3. *Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist auch zusammenhängend.*

Beweis. Es sei also X ein wegzusammenhängender metrischer Raum. Nehmen wir an, dass X nicht zusammenhängend ist. Dann existiert eine Zerlegung $X = U \cup V$ in zwei offene disjunkte nichtleere Teilmengen U und V. Es sei nun $x \in U$ und $y \in V$. Nachdem X nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist existiert ein Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Es folgt aus [**Fr2**, Satz 2.15], dass Urbilder von offenen Mengen unter stetigen Abbildungen wieder offen sind. Es ist

$$\begin{array}{rclclcl} \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) &=& \gamma^{-1}(U \cup V) &=& \gamma^{-1}(X) &=& [0,1], \\ \gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) &=& \gamma^{-1}(U \cap V) &=& \gamma^{-1}(\varnothing) &=& \varnothing. \end{array}$$

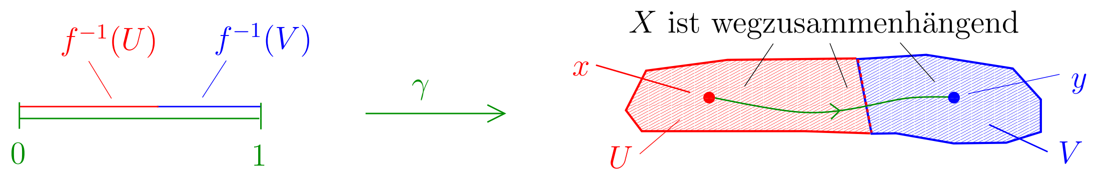
[30] Zwei Teilmengen U und V heißen *disjunkt*, wenn $U \cap V = \varnothing$.

[31] Mit anderen Worten, X ist *nicht* zusammenhängend, wenn es zwei *nichtleere* offene disjunkte Teilmengen U und V mit $U \cup V = X$ gibt.

[32] Mit anderen Worten, es ist

$$A \;=\; \text{alle } t \in [0,1], \text{ so dass das Intervall } [0,t] \text{ noch in } U \text{ enthalten ist.}$$

Also ist $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ in zwei offene, nicht-leere Teilmengen. Dies ist aber nach Lemma 7.2 nicht möglich. ■



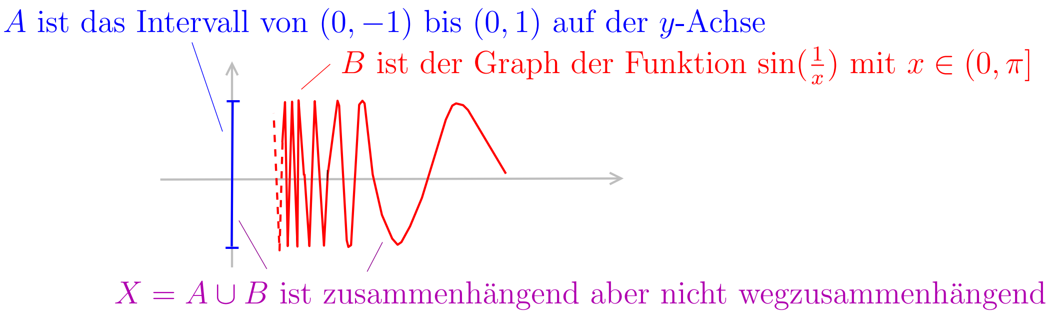
Korollar 7.4. *Jedes Intervall (offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt), jede Scheibe (offen oder abgeschlossen), jedes Rechteck und ganz $\mathbb{C}$ sind zusammenhängend.*

Beweis. Alle diese Mengen sind konvex, also wegzusammenhängend. Das Korollar folgt nun aus Lemma 7.3. ■

Bemerkung. Es stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung von Lemma 7.3 gilt. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall, d.h. es gibt metrische Räume, welche zusammenhängend sind, aber nicht wegzusammenhängend sind. Wir betrachten dazu folgendes Beispiel:

$$X \;:=\; \big\{(0,y)\,\big|\,y\in[-1,1]\big\} \;\cup\; \big\{(x,\sin(\tfrac{1}{x}))\,\big|\,x\in(0,\pi]\big\} \;\subset\; \mathbb{R}^2.$$

Mit anderen Worten, X besteht aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ für $x \in (0,\pi]$, zusammen mit einem Intervall auf der y-Achse. Die Menge X wird in der Abbildung skizziert. In Übungsblatt 5 werden wir sehen, dass X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.



Lemma 7.5. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Dann gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & X \text{ wegzusammenhängend} & \Longrightarrow & f(X) \text{ wegzusammenhängend} \\ (2) & X \text{ zusammenhängend} & \Longrightarrow & f(X) \text{ zusammenhängend} \end{array}.$$

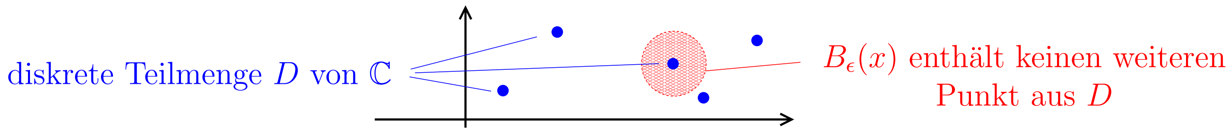
Beweis.

(1) Wir werden diese Aussage in Übungsblatt 5 beweisen.
(2) Es sei also $f(X) = U \cup V$ eine Zerlegung in zwei offene disjunkte Teilmengen. Wir wollen zeigen, dass $f(X) = U$ oder $f(X) = V$. Aus der Stetigkeit von f folgt nach [**Fr2**, Satz 2.15], dass $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offene Teilmengen von X sind. Wie im Beweis von Lemma 7.3 sehen wir, dass $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung

ist. Nach Voraussetzung gilt also, dass $X = f^{-1}(U)$ oder $X = f^{-1}(V)$. Dann gilt nun aber auch, dass $f(X) = f(f^{-1}(U)) = U$ oder $f(X) = f(f^{-1}(V)) = V$. ■

7.3. **Diskrete Teilmengen.** In diesem Teilkapitel führen wir die diskreten Teilmengen von einem metrischen Raum ein. Diesen werden wir in dieser, und auch in weiteren Vorlesungen immer wieder begegnen.

Definition. Wir sagen eine Teilmenge D eines metrischen Raums ist diskret, wenn es zu jedem Punkt $x \in D$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \cap D = \{x\}$.



Beispiel.

(1) Jede endliche Teilmenge $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ von einem metrischen Raum ist diskret, denn für jedes a_i mit $i \in \{1, \dots, k\}$ hat
$$\epsilon = \min\{d(a_i, a_j) \mid j \neq i\}$$
die gewünschte Eigenschaft.

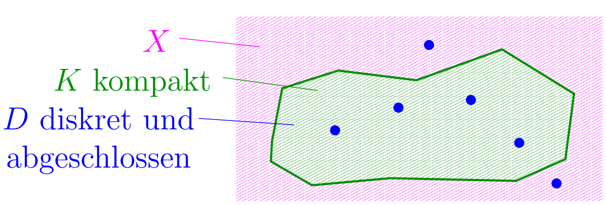
(2) Die Teilmenge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ist diskret, denn für jeden Punkt können wir $\epsilon = 1$ wählen.

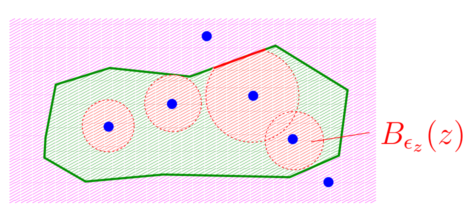
(3) Die leere Menge ist diskret, denn es gibt nichts zu überprüfen.

Folgende Eigenschaft von diskreten Mengen wird im weiteren Verlauf der Vorlesung eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 7.6. *Es sei X ein metrischer Raum, es sei $K \subset X$ kompakt und es sei $D \subset X$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge. Dann ist $D \cap K$ endlich.*

Beweis. Nachdem D diskret ist gibt es zu jedem Punkt $z \in D \cap K$ ein $\epsilon_z > 0$, so dass $B_{\epsilon_z}(z) \cap D = \{z\}$. Zudem ist nach Voraussetzung $X \setminus D$ offen. Also ist
$$\bigcup_{z \in D \cap K} B_{\epsilon_z}(z) \quad \cup \quad (X \setminus D)$$
eine offene Überdeckung von K. Nachdem K kompakt ist, ist K schon durch endlich viele dieser Mengen überdeckt. Aber nachdem jede dieser Mengen höchstens einen Punkt von D enthält, kann K nur höchstens endlich viele Punkte aus D enthalten. ■





Lemma 7.7. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Wenn X zusammenhängend ist und wenn $f(X)$ diskret ist, dann ist f eine konstante Abbildung.*

Beweis. Wir beweisen das Lemma in Übungsblatt 5. ■

Beispiel. Es folgt beispielsweise aus Lemma 7.7, dass jede stetige Funktion auf einem Intervall, deren Werte in $\mathbb{Z}$ liegen, konstant ist. Dies ist gerade die Aussage von [**Fr1**, Satz 8.5], dem Satz des moralischen Dilemmas.

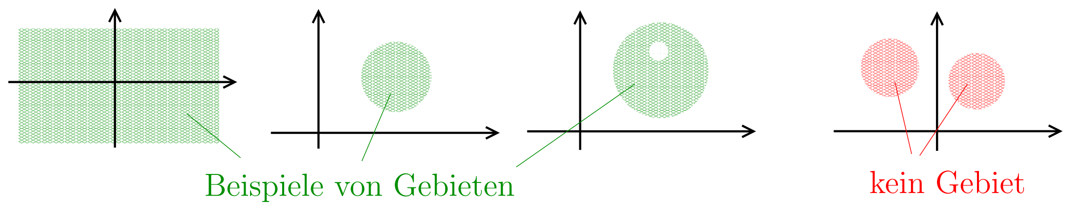
8. Der Identitätssatz und das Maximumprinzip

Wir kehren nach dem Ausflug in die Theorie der metrischen Räume zurück zur Funktionentheorie.

8.1. **Der Identitätssatz.**

Definition. Eine zusammenhängende, nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ bezeichnen wir als Gebiet.

Beispiel. Es folgt aus Korollar 7.4, dass $\mathbb{C}$, sowie alle offenen Scheiben Gebiete sind. Man kann zudem leicht zeigen, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ auch $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ ein Gebiet ist.



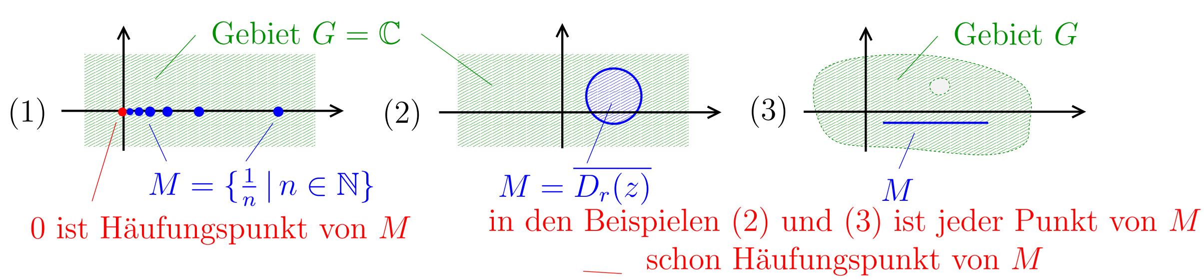
Satz 8.1. (Identitätssatz) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es seien $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *es ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$,*
(2) *es gibt eine Teilmenge M von G mit folgenden beiden Eigenschaften:*
   (a) *M besitzt einen Häufungspunkt in G,*
   (b) *f und g auf M stimmen auf M überein.*
(3) *es gibt ein $z_0 \in G$, so dass*

$$f^{(m)}(z_0) \;=\; g^{(m)}(z_0) \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel. Es seien f und g zwei holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$.

(1) Es sei $M = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Wir nehmen an, dass f und g auf M übereinstimmen. Die Menge M besitzt einen Häufungspunkt, nämlich 0, und dieser liegt im Definitionsbereich $\mathbb{C}$. Also folgt aus dem Identitätssatz 8.1 (2)⇒(1), dass $f = g$.
(2) Es sei $M = \overline{D_r(z)}$ mit $r > 0$. Wir nehmen an, dass f und g auf M übereinstimmen. Der Punkt z ist ein Häufungspunkt von M und liegt natürlich in $\mathbb{C}$. Also folgt aus dem Identitätssatz 8.1 (2)⇒(1), dass $f = g$.



Beweis.

(1) ⇒ (2) Diese Implikation ist trivial, nachdem jeder Punkt in G auch ein Häufungspunkt von G ist.

(2) ⇒ (3) Wir setzen $h = f - g$. Es gibt also nach Voraussetzung eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ auf der h verschwindet und welche einen Häufungspunkt z_0 besitzt, welcher in G liegt. Wir müssen zeigen, dass $h^{(m)}(z_0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

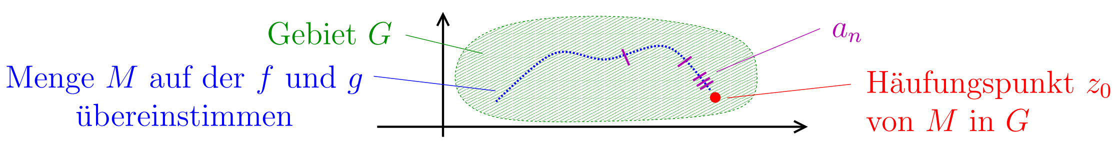
Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. Es sei dann $m \in \mathbb{N}_0$ die kleinste natürliche Zahl mit $h^{(m)}(z_0) \neq 0$. Nach dem Faktorisierungssatz 6.10 gibt es eine holomorphe Funktion $k\colon G \to \mathbb{C}$ mit $k(z_0) \neq 0$, so dass

$$(*) \qquad h(z) \;=\; (z - z_0)^m \cdot k(z) \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Nachdem z_0 ein Häufungspunkt von M ist, gibt es eine Folge von Punkten $a_n \neq z_0$ in M, welche gegen z_0 konvergiert.[33] Wir sehen nun, dass

$$k(z_0) \;=\; k\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } k \text{ stetig}}}{=}\; \lim_{n\to\infty} k(a_n) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } a_n \neq z_0 \text{ können wir} \\ (*) \text{ nach } k(a_n) \text{ auflösen}}}{=}\; \lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n)}{(a_n - z_0)^m} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } a_n \in M \text{ gilt } h(a_n) = 0}}{=}\; \lim_{n\to\infty} \frac{0}{(a_n - z_0)^m} \;=\; 0,$$

im Widerspruch zur obigen Aussage über $k(z_0)$.



(3) ⇒ (1) Wir setzen wiederum $h = f - g$. Nach Voraussetzung gibt es ein $z_0 \in G$, so dass $h^{(m)}(z_0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Wir müssen zeigen, dass $h(z) = 0$ für alle $z \in G$. Wir betrachten dazu

$$U \;=\; \{z \in G \,|\, h^{(m)}(z) = 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0\}$$

und das Komplement

$$V \;=\; \{z \in G \,|\, \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass } h^{(m)}(z) \neq 0\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $U = G$. Wir wissen schon, dass $z_0 \in U$, d.h. U ist nichtleer. Nachdem G zusammenhängend ist, genügt es nun zu zeigen, dass sowohl U als auch V offen sind.

- Wir zeigen zuerst, dass V offen ist. Es sei also $z \in V$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $h^{(m)}(z) \neq 0$. Aus dem Satz 6.3 von Goursat folgt, dass $h^{(m)}$ holomorph, insbesondere stetig ist. Also gibt es nach Lemma 1.7 ein $\epsilon > 0$, so dass $h^{(m)}$ auf $D_\epsilon(z)$ nicht verschwindet. Also ist $D_\epsilon(z) \subset V$.
- Wir müssen nun noch beweisen, dass U ebenfalls offen ist. Es sei also $z \in U$. Nach dem Potenzreihentwicklungssatz 6.1 gibt es dann ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $w \in D_\epsilon(z)$ gilt, dass

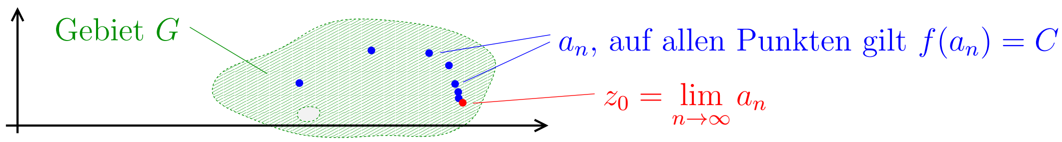
$$h(w) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!} \cdot h^{(n)}(z)}_{=0} \cdot (w - z)^n \;=\; 0.$$

[33] In der Tat, denn für jedes n gibt es einen Punkt $a_n \neq z_0 \in M$ mit $|a_n - z_0| < \frac{1}{n}$, also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = z_0$.

Also liegt auch $D_\epsilon(z)$ in U. ■

Das folgende Korollar ist ein typisches Beispiel für Anwendungen des Identitätssatzes 8.1.

Korollar 8.2. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es sei $C \in \mathbb{C}$. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von von Punkten in G, so dass $f(a_n) = C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn die Folge unendlich viele verschiedene Punkte enthält und gegen ein $z_0 \in G$ konvergiert, dann ist f schon die konstante Funktion, welche überall den Wert C annimmt.*



Beweis. Es sei $g(z) = C$ die konstante Funktion auf G. Wir setzen $M = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{C}$. Da die a_n's alle verschieden sind ist z_0 ein Häufungspunkt von M. Da f und g auf M übereinstimmen folgt aus dem Identitätssatz 8.1, dass $f = g$ auf ganz G. ■

8.2. **Das Maximumprinzip.** Folgender Satz ist das komplexe Analogon zu [**Fr1**, Tachosatz 13.5].

Satz 8.3. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$, dann ist f konstant.*

Beweis. Wir werden diesen Satz mithilfe von Lemma 2.8 in Übungsblatt 5 beweisen. ■

Satz 8.4. *Es sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet G.*

(1) *Wenn f nur reelle oder nur imaginäre Werte annimmt, dann ist f konstant.*
(2) *Wenn die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ konstant ist, dann ist auch schon die Funktion f konstant.*

Beweis. Es sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

(1) Wir schreiben $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ und $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen aus Satz 2.6 besagen, dass
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Wir nehmen nun also an, dass f nur reelle Werte annimmt. Mit anderen Worten, wir nehmen an, dass $v \equiv 0$. Insbesondere verschwinden die partiellen Ableitungen von v. Es folgt aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen, dass die partiellen Ableitungen von u ebenfalls verschwinden. Also ist das Differential von f, aufgefasst als reell differenzierbare Funktion $G \to \mathbb{R}^2$ an jedem Punkt in G die Nullmatrix. Es folgt aus Satz 2.5, dass $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$. Es folgt nun aus Satz 8.3, dass f konstant ist.
(2) Wir nehmen also an, dass die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ konstant $C \in \mathbb{C}$ ist.
   - Wenn $C = 0$, dann ist $|f(z)| = 0$ für alle $z \in G$, also ist $f(z) = 0$ für alle $z \in G$.
   - Wir nehmen nun an dass $C \neq 0$. Dann gilt $f(z) \neq 0$ für alle z und dann ist auch

$$z \mapsto \frac{|C|^2}{f(z)} = \frac{|f(z)|^2}{f(z)} = \frac{f(z)\cdot\overline{f(z)}}{f(z)} = \overline{f}(z)$$

eine holomorphe Funktion. Also sind auch die *reellwertigen* Funktionen

$$z \mapsto \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) \qquad \text{und} \qquad z \mapsto \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(f(z) - \overline{f(z)})$$

holomorph. Nach (1) sind beide konstant. Also ist auch $z \mapsto f(z)$ konstant. ■

Satz 8.5. (Maximumprinzip) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn der Betrag $|f|$ in G ein lokales Maximum besitzt, dann ist f konstant.*

Bemerkung. Auch dieser Satz stimmt mal wieder nicht mit unserer Erfahrung mit reellen Funktionen überein. Betrachten wir beispielsweise die Funktion $f(x) = 4 - x^2$ auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$, dann nimmt $|f(x)| = 4 - x^2$ ein lokales Maximum in $x = 0$ an, aber f ist natürlich nicht konstant. [34]

Beweis. Nehmen wir an, dass $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum annimmt. Dann gibt es also ein $s > 0$, so dass

$$|f(z)| \;\le\; |f(z_0)| \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z - z_0| \le s.$$

Wir wollen zuerst folgende, etwas schwächere Behauptung beweisen.

Behauptung. Die Funktion f ist auf der Scheibe $D_s(z_0)$ konstant.

Nach Satz 8.4 genügt es zu zeigen, dass die Funktion $|f|$ auf der Scheibe $D_s(z_0)$ konstant ist. Für beliebiges $r \in (0, s)$ führen wir folgende Berechnung durch:[35]

$$f(z_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchysche} \\ \text{Integralformel 6.2}}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parametrisierung} \\ \gamma(t) = z_0 + r\cdot e^{t\mathrm{i}}}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+r\cdot e^{t\mathrm{i}})}{r\cdot e^{t\mathrm{i}}} \cdot \mathrm{i} \cdot r \cdot e^{t\mathrm{i}}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r\cdot e^{t\mathrm{i}}\big)\,dt.$$

Es folgt:

$$|f(z_0)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe oben}}}{=} \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r\cdot e^{t\mathrm{i}}\big)\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 4.1}}}{\le} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\big|f\big(z_0 + r\cdot e^{t\mathrm{i}}\big)\big|}_{\substack{\le |f(z_0)|,\text{ da } z_0 \\ \text{lokales Maximum}}}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gleichheit gilt nur, wenn} \\ |f(z_0+r\cdot e^{t\mathrm{i}})| = |f(z_0)| \text{ für alle } t^{36}}}{\le} |f(z_0)|.$$

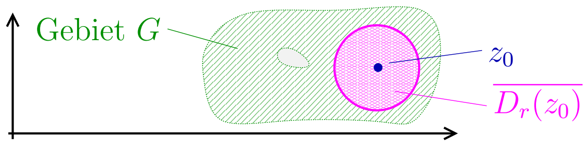
Nachdem links und rechts der gleiche Term steht müssen alle Ungleichungen schon Gleichungen sein. Dies ist nur möglich, wenn $|f(z)| = |f(z_0)|$ auf dem Kreis $|z - z_0| = r$. Nachdem r frei in $(0, s)$ gewählt war, folgt, dass $|f|$ auf der Scheibe $D_s(z_0)$ konstant ist. ⊞

[34] Warum ist die Funktion $f(z) = 4 - z^2$ auf der offenen Scheibe $D_1(0)$ kein Gegenbeispiel zum Maximumprinzip?

[35] Diese Gleichheit wird manchmal als die *Mittelwerteigenschaft* von holomorphen Funktionen bezeichnet.

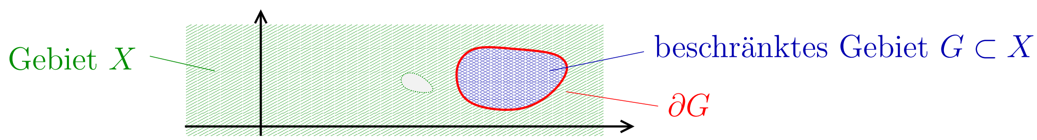
[36] Hierbei verwenden wir folgende Aussage aus der Analysis I: es sei $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion und $C \in \mathbb{R}$, so dass $h(t) \le C$ für alle $t \in [a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b h(t)\,dt \;\le\; C\cdot(b-a) \quad \text{und Gleichheit gilt genau dann, wenn} \quad h(t) = C \text{ für alle } t \in [a, b].$$



Die holomorphe Funktion f stimmt also mit der konstanten Funktion $z \mapsto f(z_0)$ auf der Scheibe $D_s(z_0)$ überein. Es folgt nun aus dem Identitätssatz 8.1 (2)$\Rightarrow$(1), angewandt auf $M = D_s(z_0)$, dass die Funktion f auf ganz G mit der konstanten Funktion übereinstimmt. ■

Korollar 8.6. *Es sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet X und es sei $G \subset X$ ein beschränktes*[37] *Gebiet,*[38] *so dass $\overline{G} \subset X$. Dann nimmt die Einschränkung von $|f|$ auf $\overline{G}$ ein Maximum auf dem Rand ∂G an. Mit anderen Worten, es existiert ein $\widetilde{z} \in \partial G$, so dass $|f(\widetilde{z})| \geq |f(z)|$ für alle $z \in \overline{G}$.*



Beweis. Die Menge $\overline{G} \subset \mathbb{C}$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt nach dem Satz von Heine-Borel [**Fr2**, Satz 3.7]. Die stetige Funktion $|f|$ nimmt also nach [**Fr2**, Korollary 3.10] auf $\overline{G}$ ein Maximum an einem Punkt $\widetilde{z}$ an. Es folgt nun aus dem Maximumprinzip 8.5, dass einer der folgenden Fälle eintritt:

(1) Die Funktion $|f|\colon X \to \mathbb{C}$ ist konstant. Dann nimmt f sein Maximum überall, insbesondere auf ∂G an.
(2) Die Funktion f nimmt in G kein lokales Maximum an. Also liegt $\widetilde{z} \in \overline{G} \setminus G = \partial G$. ■

Satz 8.7. (Minimumprinzip) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn der Betrag $|f|$ in G ein lokales Minimum besitzt, dann ist f konstant oder f besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. In Übungsblatt 5 werden wir, ohne größere Probleme, aus dem Maximumprinzip 8.5 auch das Minimumprinzip herleiten. ■

Ganz analog zu Korollar 8.6 kann man aus dem Minimumprinzip auch leicht folgendes Korollar herleiten.

Korollar 8.8. *Es sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet X und es sei $G \subset X$ ein beschränktes Gebiet, so dass $\overline{G} \subset X$. Dann gilt eine der folgenden beiden Aussagen:*

(1) *Die Funktion $|f|\colon \overline{G} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ nimmt ein globales Minimum in einem Punkt auf ∂G an.*

[37]Eine Teilmenge M von $\mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn es ein $R > 0$ gibt, so dass $M \subset D_R(0)$.
[38]In den meisten Anwendungen ist $X = \mathbb{C}$ und G ist eine offene Scheibe.

(2) *Die Funktion* $f\colon X \to \mathbb{C}$ *besitzt eine Nullstelle in* G.

Bemerkung. Aus Korollar 8.8 erhalten wir auch einen weiteren Beweis vom Fundamentalsatz 6.7 der Algebra. Es sei also $f(z) = a_0 + a_1 + \dots + a_n z^n$ ein Polynom von Grad $n \geq 1$. Nach Lemma 1.8 folgt, dass $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$. Dies bedeutet insbesondere, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass $|f(z)| \geq 2 \cdot |a_0| + 1$ für alle z mit $|z| = r$. Wir wenden nun Korollar 8.8 an auf die nicht-konstante Funktion $f\colon X = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und auf $G = D_r(0)$. Nachdem für alle $z \in \partial D_r(0)$ gilt, dass $|f(z)| > |f(0)|$ kann $|f|\colon \overline{D_r(0)} \to \mathbb{R}$ auf $\partial D_r(0)$ kein globales Minimum annenehmen. Also folgt aus Korollar 8.8, dass das Polynom f im Inneren der Scheibe eine Nullstelle besitzt.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 8.9. (Satz von der Gebietstreue) *Es sei* $G \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *eine nicht konstante holomorphe Funktion, dann ist auch das Bild* $f(G)$ *ein Gebiet.*

Bemerkung. Auch in diesem Fall ist die analoge Aussage für differenzierbare Funktionen falsch. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon (-1,1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

differenzierbar und $(-1,1)$ ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, aber das Bild $f((-1,1)) = [0,1)$ ist nicht offen.

Beispiel. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, dann ist nach Satz 8.9 auch $f(G)$ ein Gebiet, insbesondere eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Insbesondere können die Werte von G nicht nur auf der reellen Achse $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ oder der imaginären Achse $\mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$ liegen. Wir sehen also, dass der Satz 8.9 von der Gebietstreue den vorherigen Satz 8.4 verallgemeinert.

Beweis. Es sei also $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, d.h. eine nichtleere, zusammenhängende, offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zudem sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Es folgt aus Lemma 7.5, dass $f(G)$ ebenfalls zusammenhängend ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass $f(G)$ offen ist. Es sei nun $w_0 \in f(G)$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $D_\epsilon(w_0) \subset f(G)$. Wir wählen ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = w_0$.

Behauptung. Es gibt ein $r > 0$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subset G$, so dass f auf dem Kreis $\{z \,|\, |z - z_0| = r\}$ den Wert w_0 nicht annimmt.

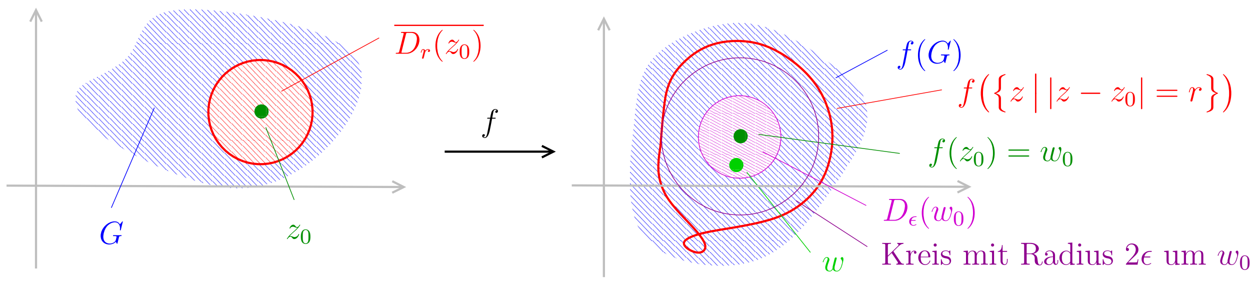
Wir beweisen die Behauptung mit einem Widerspruchsbeweis. Wenn die Aussage nicht gilt, dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \neq z_0$ mit $|z_n - z_0| \leq \frac{1}{n}$ und $f(z_n) = w_0 = f(z_0)$. Es folgt aus Korollor 8.2, dass f konstant ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. ⊞

Wir setzen

$$\epsilon \;:=\; \frac{1}{2} \cdot \min\Big\{|f(z) - w_0| \,\Big|\, \text{alle } z \in G \text{ mit } |z - z_0| = r\Big\}.$$

Aus der Behauptung und der Kompaktheit von Kreisen folgt, dass $\epsilon > 0$. Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die offene Scheibe $D_\epsilon(w_0)$ liegt in $f(G)$.



Es sei also $w \in D_\epsilon(w_0)$. Wir wollen zeigen, dass es ein $z \in D_r(z_0)$ mit $f(z) = w$ gibt. Mit anderen Worten, wir wollen zeigen, dass $h(z) = f(z) - w$ eine Nullstelle in $D_r(z_0)$ besitzt.

> Wir wollen die Existenz der Nullstelle mithilfe von Korollar 8.8, angewandt auf die nicht-konstante Funktion[39] $h(z)$ auf $G = D_r(z_0)$, beweisen.

Wir betrachten dazu erst einmal die Werte von $|h|$ auf dem Rand der Scheibe $\overline{D_r(z)}$. Es sei also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = r$. Dann gilt

$$|h(z)| = |f(z)-w| = |(f(z)-w_0)+(w_0-w)| \geq \underbrace{|f(z)-w_0|}_{\substack{\geq 2\epsilon \text{ per Definition} \\ \text{von } \epsilon}} - \underbrace{|w-w_0|}_{< \epsilon, \text{ da } w \in D_\epsilon(w_0)} > \epsilon.$$

Andererseits gilt
$$|h(z_0)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } w \in D_\epsilon(w_0)}}{<} \epsilon.$$

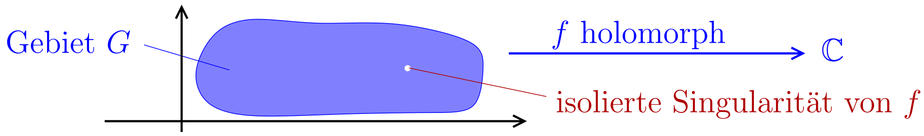
Die Werte von $|h(z)|$ auf dem Randkreis $|z - z_0| = r$ sind also größer als am Mittelpunkt z_0. Wir sehen also, dass $|h(z)|\colon \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf dem Rand der Scheibe kein globales Minimum annehmen kann. Also besitzt die Funktion $h(z)$ nach Korollar 8.8 in $D_r(z_0)$ eine Nullstelle. ■

[39] Nachdem f auf dem Gebiet G nicht konstant ist, kann f nach dem Identitätssatz 8.1 auch auf keiner Scheibe in G konstant sein.

9. Isolierte Singularitäten

9.1. Die drei Typen von isolierten Singularitäten.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir sagen $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine isolierte Singularität von f, wenn $z_0 \notin U$, aber wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$.



Lemma 9.1. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche nicht die Nullfunktion ist. Wir betrachten die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \{z \in G \,|\, f(z) \neq 0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{f(z)}. \end{array}$$

Jedes $z \in G$ mit $f(z) = 0$ ist eine isolierte Singularität.

Beweis. Wir werden das Lemma in Übungsblatt 6 beweisen. ■

Wir wenden uns noch noch expliziten isolierten Singularitäten zu.

Beispiel. Folgende Funktionen sind auf der offenen Menge $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert sind und besitzen eine isolierte Singularität bei $z_0 = 0$:

$$\begin{array}{llcll} (1) & f_1(z) & = & \dfrac{\sin(z)}{z}, & \\ (2) & f_2(z) & = & \dfrac{1}{z^m}, & \text{wobei } m \geq 1, \\ (3) & f_3(z) & = & \sin\left(\frac{1}{z}\right). & \end{array}$$

Im Folgenden unterscheiden wir drei verschiedene Typen von Singularitäten.

Definition. Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f: U \to \mathbb{C}$.

(1) Wir sagen z_0 ist eine hebbare Singularität, wenn es ein $w \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$\begin{array}{rcl} U \cup \{z_0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \begin{cases} f(z), & \text{wenn } z \in U, \\ w, & \text{wenn } z = z_0 \end{cases} \end{array}$$

eine holomorphe Funktion ist. Mit anderen Worten, z_0 ist hebbar, wenn es eine holomorphe Funktion g auf $U \cup \{z_0\}$ gibt, welche auf U mit f übereinstimmt. Wir nennen dann g eine holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup \{z_0\}$.

(2) Wir sagen z_0 ist eine Polstelle von f, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber wenn es ein $m \geq 1$ gibt, so dass $(z - z_0)^m \cdot f(z)$ eine hebbare Singularität in z_0 besitzt. Das kleinste derartige m nennen wir die Ordnung der Polstelle z_0. Eine Polstelle erster Ordnung nennen wir auch eine einfache Polstelle.

(3) Wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist, dann nennen wir z_0 eine wesentliche Singularität von f.

Bevor wir uns den obigen Beispielen zuwenden, geben wir zuerst eine Charakterisierung von Polstellen.

Lemma 9.2. *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ und es sei $m \geq 1$. Dann gilt*[40]

z_0 ist eine Polstelle m-ter Ordnung	$\Longleftrightarrow$	*es gibt eine holomorphe Funktion $g\colon U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$, so dass $(z-z_0)^m \cdot f(z) = g(z)$ auf U und mit $g(z_0) \neq 0$.*

Beweis. Wir setzen $\widetilde{U} := U \cup \{z_0\}$. Wir machen folgende Vorbemerkungen:

(1) Für eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:
$$(z-z_0)^{m-1} \cdot f(z) = g(z) \text{ auf } U \quad \Longleftrightarrow \quad (z-z_0)^m \cdot f(z) = (z-z_0) \cdot g(z) \text{ auf } U.$$
(2) Wenn zwei holomorphe Funktionen $\varphi, \psi\colon \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ auf $U = \widetilde{U} \setminus \{z_0\}$ übereinstimmen, dann stimmen sie auch auf $\widetilde{U}$ überein.
(3) Wenn eine holomorphe Funktion $g\colon \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ eine Nullstelle bei z_0 besitzt, dann besagt der Faktorisierungssatz 6.10, dass es es eine holomorphe Funktion $\varphi\colon U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = (z-z_0) \cdot \varphi(z)$ gibt.

Wir können jetzt die beiden Richtungen des Lemmas beweisen:

"$\Rightarrow$" Diese Richtung folgt aus ($1 \Leftarrow$) und (3). Genauer, wenn z_0 eine Polstelle m-ter Ordnung ist, dann gibt es per Definition eine holomorphe Funktion $g\colon \widetilde{U} \to \mathbb{C}$, so dass gilt $(z-z_0)^m \cdot f(z) = g(z)$ für alle $z \in U$. Wir müssen noch zeigen, dass $g(z_0) \neq 0$. Wenn $g(z_0) = 0$, dann folgt aus (3), dass es eine holomorphe Funktion $\varphi\colon \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $g(z) = (z-z_0) \cdot \varphi(z)$ auf U. Dann gilt $(z-z_0)^m \cdot f(z) = (z-z_0) \cdot \varphi(z)$. Also folgt aus (1), dass $(z-z_0)^{m-1} \cdot f(z) = \varphi(z)$, d.h. die Singularität von $(z-z_0)^{m-1}$ ist schon hebbar, im Widerspruch zur Definition der Ordnung einer Polstelle.

"$\Leftarrow$" Diese Richtung folgt aus ($1 \Rightarrow$) und (2). Genauer, wenn $(z-z_0)^m \cdot f(z) = g(z)$ auf U und wenn $g(z_0) \neq 0$, dann besitzt $(z-z_0)^m \cdot f(z)$ eine hebbare Singularität. Wenn $(z-z_0)^{m-1} \cdot f(z)$ auch eine hebbare Singularität besäße, dann würde es eine holomorphe Funktion $\varphi\colon \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ mit $(z-z_0)^{m-1} \cdot f(z) = \varphi(z)$ auf U geben. Aus (1) folgt dann auch, dass $(z-z_0)^m \cdot f(z) = (z-z_0) \cdot \varphi(z)$. Es folgt nun aus (2), dass $g(z_0) = (z_0 - z_0) \cdot \varphi(z_0) = 0$. ■

Wir wenden uns nun wieder den obigen drei Beispielen von isolierten Singularitäten zu.

Beispiel.

(1) Wir betrachten wie oben die Funktion $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ auf $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es ist $\sin(0) = 0$. Nach dem Faktorisierungssatz 6.10 gibt es eine holomorphe Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\sin(z) = z \cdot g(z)$. Also ist g eine holomorphe Fortsetzung von $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z} = g(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$. Der Punkt $z_0 = 0$ ist daher eine hebbare Singularität von $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z}$.
(2) Es sei nun $m \geq 1$. Wir betrachten die Funktion $f_2(z) = \frac{1}{z^m}$ auf $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es folgt aus Lemma 9.2, mit $g(z) = 1$, dass $z_0 = 0$ eine Polstelle m-ter Ordnung von $f_2(z)$ ist.

---

[40] Wenn U offen und z_0 eine isolierte Singularität ist, dann ist $U \cup \{z_0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(3) Wir wollen nun noch, psychologisch wenig überraschend, zeigen, dass der Punkt $z_0 = 0$ eine wesentliche isolierte Singularität von $f_3(z) = \sin(\frac{1}{z})$ ist. Nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist. Dann gibt es ein $m \geq 0$, so dass $z^m \cdot f_3(z) = z^m \cdot \sin(\frac{1}{z})$ eine holomorphe Fortsetzung g auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt. Wir betrachten die Folge $z_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$g(z_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } g(z) = z^m \cdot \sin(z) \text{ für } z \neq 0}}{=} z_n^m \cdot \sin(\overbrace{\tfrac{1}{z_n}}^{=2\pi n}) = z_n^m \cdot 0 = 0.$$

Es folgt aus Korollar 8.2, dass g auf ganz $\mathbb{C}$ mit der Nullfunktion übereinstimmt. Aber auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $g(z) = z^m \cdot \sin(\frac{1}{z})$, und dies ist natürlich nicht die Nullfunktion.

Das nächste Lemma gibt uns nun einen Zusammenhang zwischen Nullstellen und Polstellen.

Lemma 9.3. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, es sei $z_0 \in U$ und es sei $m \geq 1$. Dann gilt*[41]

$$\begin{array}{c} z_0 \textit{ ist eine Nullstelle} \\ m\textit{-ter Ordnung von } f(z) \end{array} \iff \begin{array}{c} z_0 \textit{ ist eine Polstelle} \\ m\textit{-ter Ordnung von } \frac{1}{f(z)}. \end{array}$$

Beweis. Die Aussage des Lemmas folgt sofort aus dem Faktorisierungssatz 6.10 und aus Lemma 9.2. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument auch noch sorgfältig aus.

"$\Rightarrow$" Es sei also z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung von f. Nach Faktorisierungssatz 6.10 gibt es eine holomorphe Funktion $h\colon U \to \mathbb{C}$ mit $h(z_0) \neq 0$, so dass

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot h(z) \quad \text{für alle } z \in U,$$

Es folgt, dass

$$(z - z_0)^m \cdot \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{h(z)} \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Da $h(z_0) \neq 0$ folgt aus Lemma 9.2, dass bei z_0 eine Polstelle m-ter Ordnung von $\frac{1}{f(z)}$ vorliegt.

"$\Leftarrow$" Es sei also z_0 eine Polstelle m-ter Ordnung von $\frac{1}{f(z)}$. Dann gibt es nach Lemma 9.2 auf $V = \{z \in U \,|\, f(z) \neq 0\}$ eine holomorphe Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$, so dass

$$(z - z_0)^m \cdot \frac{1}{f(z)} = h(z), \quad \text{für alle } z \in V.$$

Aber daraus folgt

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \frac{1}{h(z)}, \quad \text{für alle } z \in V.$$

Da $h(z_0) \neq 0$ folgt nun, dass z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung von $f(z)$ ist. ■

9.2. **Der Riemannsche Hebbarkeitssatz und der Satz von Casorati-Weierstraß.** Im Folgenden charakterisieren wir jetzt die drei Typen von isolierten Singularitäten durch das Werteverhalten der Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung der jeweiligen isolierten Singularität.

[41] Aus Lemma 9.1 wissen wir, dass $\frac{1}{f(z)}$ bei z_0 eine isolierte Singularität besitzt.

Satz 9.4. (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\begin{array}{c}z_0 \text{ ist eine hebbare}\\ \text{Singularität}\end{array} \iff \begin{array}{c}\text{es gibt ein } r>0, \text{ so dass } f\\ \text{auf } D_r(z_0)\setminus\{z_0\} \text{ beschränkt ist.}\end{array}$$

Beispiel. Auch in diesem Fall ist das reelle Analogon komplett falsch. Es sei beispielsweise $U = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Diese Funktion ist differenzierbar auf U und beschränkt, aber es gibt natürlich keine stetige Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$.

Beweis.

"$\Rightarrow$" Diese Aussage folgt aus der Beobachtung, dass stetige Funktionen auf kompakten Scheiben beschränkt sind. Etwas genauer, wenn f hebbar ist, dann gibt es ein $r>0$, so dass $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ und eine holomorphe (insbesondere stetige) Funktion g, welche auf $\overline{D_r(z_0)}\setminus\{z_0\}$ mit f übereinstimmt. Nachdem stetige Funktionen auf kompakten Teilmengen beschränkt sind, ist g auf auf $\overline{D_r(z_0)}$ beschränkt. Also ist auch f auf $\overline{D_r(z_0)}\setminus\{z_0\}$ beschränkt.

"$\Leftarrow$" Die Funktion f ist also in einer Umgebung von z_0 beschränkt. Dies bedeutet allerdings noch nicht, dass der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ notwendigerweise existiert. Wir multiplizieren deswegen $f(z)$ mit $z-z_0$ um sicher zu stellen, dass der Grenzwert mit $z\to z_0$ auch wirklich existiert.

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} F\colon U\cup\{z_0\} &\to \mathbb{C}\\ z &\mapsto F(z) := \begin{cases} f(z)\cdot(z-z_0), & \text{für } z\neq z_0,\\ 0, & \text{für } z=z_0.\end{cases}\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\lim_{z\to z_0} F(z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{bei Grenzwerten zählen nur}\\ \text{Funktionswerte bei } z\neq z_0}}{=} \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } f(z) \text{ beschränkt}\\ \text{und da } z-z_0\to 0}}{=} 0 = F(z_0).$$

Es folgt aus der Grenzwert-Charakterisierung von Stetigkeit, siehe [**Fr1**, Satz 7.9], dass F in z_0 stetig ist. Nachdem F zudem offensichtlich homomorph auf U ist folgt aus Satz 6.13, dass F sogar auf ganz $U\cup\{z_0\}$ holomorph ist.

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} g\colon U\cup\{z_0\} &\to \mathbb{C}\\ z &\mapsto \begin{cases} f(z) = \dfrac{F(z)-\overbrace{F(z_0)}^{=0}}{z-z_0}, & \text{wenn } z\neq z_0,\\ F'(z_0), & \text{wenn } z=z_0.\end{cases}\end{aligned}$$

Die Funktion g ist außerhalb von z_0 holomorph und es folgt aus der Grenzwert-Charakterisierung von Stetigkeit, dass g in z_0 stetig ist. Also ist nach Satz 6.13 die Funktion g sogar auf ganz $U\cup\{z_0\}$ holomorph. Insbesondere ist g die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf $U\cup\{z_0\}$. ∎

Satz 9.5. *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann gilt*
$$z_0 \text{ ist eine Polstelle} \iff \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

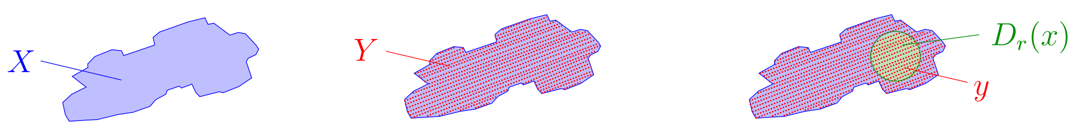
Beweis.

"$\Rightarrow$" Wir nehmen zuerst an, dass z_0 eine k-fache Polstelle ist. Dann können wir nach Lemma 9.2 schreiben $f(z)\cdot(z-z_0)^k = g(z)$, wobei g eine holomorphe Funktion auf $U \cup \{z_0\}$ ist mit $g(z_0) \neq 0$. Dann gilt
$$\lim_{z\to z_0} f(z) \;=\; \lim_{z\to z_0} \underbrace{\frac{1}{(z-z_0)^k}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{g(z)}_{\to g(z_0)\neq 0} \;=\; \infty.$$

"$\Leftarrow$" Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Dann ist $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 9.4 ist die Funktion
$$\begin{aligned} g\colon U \cup \{z_0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{wenn } z \neq z_0, \\ 0, & \text{wenn } z = z_0 \end{cases} \end{aligned}$$
holomorph. Per Definition ist z_0 eine Nullstelle von g. Nachdem die Funktion auf einer offenen Scheibe um z_0 nicht die Nullfunktion ist, folgt aus dem Identitätssatz 8.1 (3)$\Rightarrow$(1), dass die Nullstelle endlicher Ordnung ist. Dann folgt aus Lemma 9.2, dass die Funktion $\frac{1}{g(z)} = f(z)$ bei z_0 eine Polstelle besitzt. ■

Für die Charakterisierung von wesentlichen Singularitäten benötigen wir folgende Definition, welche wir in der allgemeinen Sprache von metrischen Räumen formulieren, selbst wenn wir diese später nur auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ anwenden werden.

Definition. Wir sagen eine Teilmenge Y von einem metrischen Raum X heißt dicht, wenn es zu jedem $x \in X$ und $\epsilon > 0$ ein $y \in Y$ mit $d(x,y) < \epsilon$ gibt. In Quantoren ausgedrückt gilt
$$Y \text{ ist dicht in } X \iff \underset{x\in X}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{y\in Y}{\exists}\ d(x,y) < \epsilon.$$



Beispiel.

(1) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ und $\{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist dicht in $\mathbb{C}$.
(2) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1\}$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$.

Der letzte Satz von diesem Kapitel gibt nun noch ein Kriterium dafür, dass eine wesentliche Singularität vorliegt.

Satz 9.6. (Satz von Casorati–Weierstraß) *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann gilt*
$$z_0 \text{ ist eine wesentliche Singularität} \iff \text{für jedes } r > 0 \text{ mit } D_r(z_0)\setminus\{z_0\} \subset U \text{ ist } f(D_r(z_0)\setminus\{z_0\}) \text{ dicht in } \mathbb{C}.$$

Beweis. Wir beweisen die äquivalente Aussage

z_0 ist keine wesentliche Singularität	$\Longleftrightarrow$	es gibt ein $r > 0$ mit $D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$, so dass $f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Der Beweis der„$\Rightarrow$”–Richtung folgt leicht aus den Definitionen. Die genaue Ausführung des Arguments ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 6.

Wir wenden uns nun der„$\Leftarrow$”–Richtung zu. Wir nehmen also an, dass

$$\underset{r>0}{\exists}\ \underset{w\in\mathbb{C}}{\exists}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ \underset{z\neq z_0\in D_r(z_0)}{\forall}\ |f(z)-w| \geq \epsilon.$$

Wir wollen zeigen, dass z_0 keine wesentliche Singularität ist, d.h. wir wollen zeigen, dass z_0 entweder hebbar ist oder eine Polstelle ist.

Wir betrachten nun

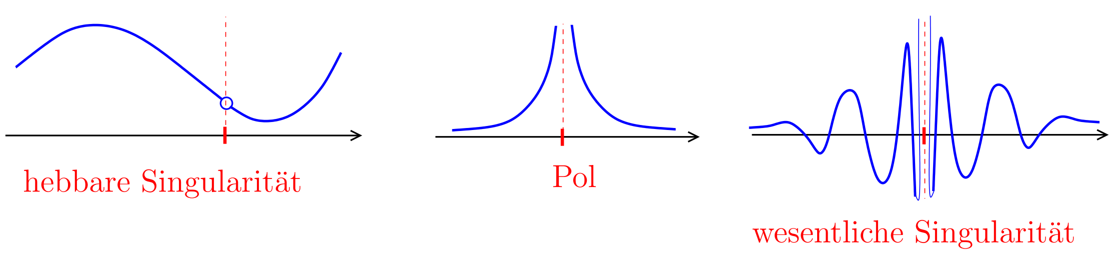
$$g(z) \ := \ \frac{1}{f(z)-w} \qquad \text{auf } D_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Die Funktion g ist holomorph und es folgt aus unserer Annahme, dass der Betrag von g auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ durch $\frac{1}{\epsilon}$ beschränkt ist. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 9.4 gibt es also eine holomorphe Fortsetzung h von g auf $D_r(z_0)$. Dann gilt

$$f(z) \ = \ w + \frac{1}{g(z)} = w + \frac{1}{h(z)} \qquad \text{auf } D_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall $h(z_0) \neq 0$. In diesem Fall besitzt $f(z) = w + \frac{1}{h(z)}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $D_r(z_0)$. Insbesondere ist z_0 keine wesentliche Singularität.
2. Fall $h(z_0) = 0$. In diesem Fall besitzt $f(z) = w + \frac{1}{h(z)}$ in z_0 eine Polstelle[42], insbesondere ist z_0 keine wesentliche Singularität. ■



[42] In der Tat, dies folgt aus $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \left(w + \frac{1}{h(z)}\right) = \infty$ und aus Satz 9.5.

10. Der Laurent-Reihenentwicklungssatz

10.1. **Laurent-Reihen.** Es sei $f\colon D_r(0)\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität bei $z_0=0$. Wenn die Singularität hebbar ist, dann besagt der Potenzreihenentwicklungssatz 6.1, dass wir f als Potenzreihe schreiben können, d.h. es gibt $c_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$, so dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot z^n \;=\; c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\dots$$

Wenn $z_0=0$ hingegen eine Polstelle k-ter Ordnung ist, dann können wir $z^k\cdot f(z)$ als Potenzreihe beschreiben, d.h. es gibt $c_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$, so dass $z^k\cdot f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\cdot z^n$, also folgt

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot z^n \;=\; c_0z^{-k}+c_1z^{-k+1}+\dots+c_k+c_{k+1}z+c_{k+2}z^2+\dots$$

Betrachten wir zuletzt noch die Funktion $f(z)=\exp(\frac{1}{z})$. In Präsenzübungsblatt 6 werden wir sehen, dass $z_0=0$ eine wesentlichen Singularität ist. Aus $\exp(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot z^n$ folgt hierbei

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^n \;=\; 1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{1}{6}z^{-3}+\dots$$

Wir sehen also, dass wir holomorphe Funktionen $D_r(z_0)\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ im Allgemeinen nicht mehr durch Potenzreihen beschreiben können, aber wir können diese durch Reihen beschreiben, in denen auch negative Exponenten von z auftauchen.

Definition.

- Eine Laurent-Reihe um den Punkt $z_0\in\mathbb{C}$ ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n \;=\; \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\cdot(z-z_0)^n}_{\text{Hauptteil der Laurent-Reihe}} \;+\; \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n}_{\text{Nebenteil der Laurent-Reihe}}.$$

- Wenn der Nebenteil verschwindet, dann nennen wir $f(z)$ eine reine Laurent-Reihe.
- Wir sagen die Laurentreihe konvergiert (bzw. konvergiert gleichmäßig), wenn dies sowohl für den Hauptteil[43] als auch den Nebenteil zutrifft.

Definition. Es sei

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\cdot(z-z_0)^n$$

eine reine Laurent-Reihe. Wir bezeichnen[44]

$$r \;:=\; \left(\text{Konvergenzradius der Potenzreihe } \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\cdot(z-z_0)^n\right)^{-1}$$

als den Konvergenzradius der reinen Laurent-Reihe.

[43] Für eine Folge $a_{-1},a_{-2},a_{-3},\dots$ von komplexen Zahlen schreiben wir $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}a_n \;:=\; \lim_{k\to\infty}\sum\limits_{n=-k}^{-1}a_k$

[44] Hierbei verwenden wir die Konvention, dass $\frac{1}{\infty}=0$ und $\frac{1}{0}=\infty$.

Beispiel.

$$\text{Konvergenzradius von } \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n \cdot z^n \;=\; \Big(\text{Konvergenzradius von } \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{3^{-n} \cdot z^n}_{=(\frac{z}{3})^n}\Big)^{-1} \;=\; 3^{-1}.$$

Satz 10.1. *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z-z_0)^n$$

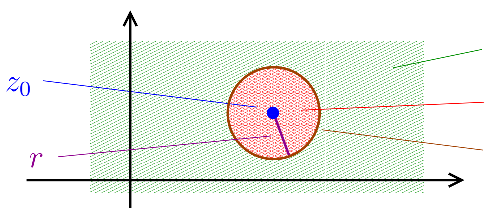
eine reine Laurent-Reihe mit Konvergenzradius r. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt*
$$\begin{aligned} |z-z_0| > r &\implies \text{die Laurent-Reihe } f(z) \text{ konvergiert,} \\ |z-z_0| < r &\implies \text{die Laurent-Reihe } f(z) \text{ divergiert.} \end{aligned}$$

(2) *Für alle $s > r$ konvergiert die reine Laurent-Reihe auf $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq s\}$ gleichmäßig.*

(3) *Die Laurent-Reihe ist auf $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-z_0| > r\}$ holomorph, wobei*
$$f'(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} n \cdot c_n \cdot (z-z_0)^{n-1} \qquad \text{“gliedweises Ableiten”.}$$

(4) *Wenn $c_{-1} = 0$, dann besitzt die Laurent-Reihe auf $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-z_0| > r\}$ die Stammfunktion*
$$F(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} \cdot (z-z_0)^{n+1} \qquad \text{“gliedweises Aufleiten”.}$$



Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Spezialfall $z_0 = 0$. Es sei also

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot z^n$$

eine reine Laurent-Reihe um $z_0 = 0$ mit Konvergenzradius r. Wie in der Definition des Konvergenzradius der reinen Laurent-Reihe $f(z)$ betrachten wir auch die Potenzreihe

$$k(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot z^n.$$

Per Definition von r hat $k(z)$ nun den Konvergenzradius $r^{-1} = \frac{1}{r}$ und per Definition gilt zudem $f(z) = k(z^{-1}) = k(\frac{1}{z})$. Es folgt, dass

$$|z| > r \;\implies\; \frac{1}{|z|} < \frac{1}{r} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 3.3.}}}{\implies}\; k\big(\tfrac{1}{z}\big) = f(z) \text{ konvergiert .}$$

Die anderen Aussagen von (1) und (2) folgen ganz ähnlich aus den analogen Aussagen über Potenzreihen, welche wir in Satz 3.3 bewiesen hatten. Wir wenden uns nun dem Beweis der dritten Aussage zu. Aus $f(z) = k(\frac{1}{z})$ folgt, dass

$$f'(z) = \frac{d}{dz}k\big(\tfrac{1}{z}\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} k'\big(\tfrac{1}{z}\big) \cdot \big(-\tfrac{1}{z^2}\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 3.6}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_{-n} \cdot \big(\tfrac{1}{z}\big)^{n-1} \cdot \big(-\tfrac{1}{z^2}\big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-n) \cdot c_{-n} \cdot z^{-n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution } m=-n}}{=} \sum_{m=-\infty}^{-1} m \cdot c_m \cdot z^{m-1}.$$

Wir wenden uns dem der Beweis der vierten Aussage zu. Wir nehmen also an, dass $c_{-1} = 0$. Wir betrachten $F(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} \cdot z^{n+1}$. Es folgt aus der dritten Aussage, dass wir die Ableitung von F durch gliedweises Ableiten erhalten. Wir sehen dadurch, dass $F' = f$. Also ist F eine Stammfunktion von f. ■

Notation. Für $0 \leq r < R \leq \infty$ bezeichnen wir mit

$$K_{r,R}(z_0) = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, r < |z - z_0| < R\big\}$$

den offenen Kreisring um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R.

Satz 10.2. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z - z_0)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

eine Laurent-Reihe. Wir setzen

$$\begin{aligned} r &= \textit{Konvergenzradius des Hauptteils} \\ R &= \textit{Konvergenzradius des Nebenteils.} \end{aligned}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\begin{aligned} |z| < r &\implies f(z) \textit{ divergiert} \\ r < |z| < R &\implies f(z) \textit{ konvergiert} \\ R < |z| &\implies f(z) \textit{ divergiert.} \end{aligned}$$

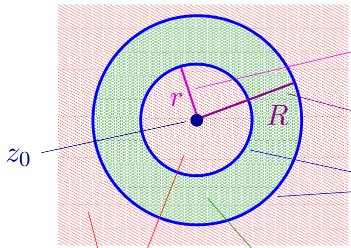
(2) *Für alle $r < s < S < R$ konvergiert die Laurent-Reihe f auf dem abgeschlossenen Kreisring* [45]

$$\overline{K_{s,S}(z_0)} = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, s \leq |z - z_0| \leq S\big\}$$

gleichmäßig.

Bemerkung. Der Satz besagt also, dass der Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ der maximale offene Kreisring ist, auf dem $f(z)$ konvergiert. Wie im Fall von Potenzreihen kann man keine allgemeine Aussagen über die Konvergenz von $f(z)$ auf den Kreisen $|z - z_0| = r$ und $|z - z_0| = R$ machen.

[45] Der abgeschlossene Kreisring ist in der Tat der Abschluss, des offenen Kreisrings $K_{r,R}(z_0)$, im Sinne von Kapitel 1.2.



r ist der Konvergenzradius des Hauptteils $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z - z_0)^n$

R ist der Konvergenzradius des Nebenteils $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$

es gibt keine allgemeine Konvergenzaussage auf den Kreisen $|z - z_0| = r$ und $|z - z_0| = R$

die Laurent-Reihe konvergiert auf dem offenen Kreisring $K_{r,R}(z_0)$

die Laurent-Reihe divergiert für $|z - z_0| < r$ und $|z - z_0| > R$

Beispiel. Wir setzen $c_n := (\frac{1}{2})^n$ für $n \geq 0$ und $c_n := 3^n$ für $n \leq -1$. Wir betrachten die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n \cdot z^n}_{\text{Hauptteil der Laurent-Reihe}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot z^n}_{\text{Nebenteil der Laurent-Reihe}}.$$

Dann ist, wie wir oben schon gesehen hatten $r = \frac{1}{3}$, zudem ist $R = 2$. Wir erhalten also aus Satz 10.2, dass die Laurent-Reihe auf dem offenen Kreisring $K_{\frac{1}{3},2}(0)$ konvergiert. Mit anderen Zahlenwerten für c_n kann man auch Laurent-Reihen erhalten mit $R < r$, in diesem Fall konvergiert dann die Laurent-Reihe nirgendwo.

Beweis von Satz 10.2. Es sei also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$$

eine Laurent-Reihe. Wir setzen

$$\begin{aligned} R &= \text{Konvergenzradius des Nebenteils} \\ r &= \text{Konvergenzradius des Hauptteils.} \end{aligned}$$

Es gilt, dass

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z - z_0)^n}_{\substack{\text{nach Satz 10.1 gilt:} \\ \text{konvergiert für } |z-z_0| > r \\ \text{divergiert für } |z-z_0| < r}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n}_{\substack{\text{nach Satz 3.3 gilt:} \\ \text{konvergiert für } |z-z_0| < R \\ \text{divergiert für } |z-z_0| > R}}.$$

Die Aussage über die Konvergenz der Laurent-Reihe folgt nun aus der Tatsache, dass per Definition die Laurent-Reihe genau dann konvergiert, wenn sowohl der Hauptteil als auch der Nebenteil konvergieren.

Die Aussage über die gleichmäßige Konvergenz folgt aus den Aussagen über die gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen in Satz 3.3 und von reinen Laurent-Reihen in Satz 10.1 (2). ■

Viele Ergebnisse, welche wir für Potenzreihen formuliert und bewiesen hatten, übertragen sich ohne größere Probleme auf Laurent-Reihen. Beispielsweise haben wir folgenden Satz.

Satz 10.3. *Es sei*
$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$$
eine Laurent-Reihe, welche auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ konvergiert. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Die Funktion $f(z)$ ist auf dem Kreisring holomorph mit*
$$f'(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (z-z_0)^{n-1}.$$
(2) *Wenn $c_{-1}=0$, dann besitzt $f(z)$ auf dem Kreisring die Stammfunktion*
$$F(z) \;=\; \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot (z-z_0)^{n+1}.$$
(3) *Für alle $s \in (r,R)$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt*
$$c_n \;=\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$
Insbesondere sind also die Koeffizienten c_n der Laurent-Reihe eindeutig bestimmt.

Beweis. Die erste Aussage folgt indem wir Satz 3.6 auf den Nebenteil und Satz 10.1 auf den Hauptteil anwenden. Ganz analog folgt die zweite Aussage indem wir Satz 3.6 auf den Nebenteil und Satz 10.1 auf den Hauptteil anwenden. Die dritte Aussage wird genauso wie Satz 4.10 bewiesen, allerdings benötigt man dieses mal die gleichmäßige Konvergenz, welche wir in Satz 10.2 (3) bewiesen hatten. ■

10.2. **Der Laurent-Reihenentwicklungssatz.** Der Potenzreihenentwicklungssatz 6.1 besagt, dass man jede holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe als Potenzreihe beschreiben kann.

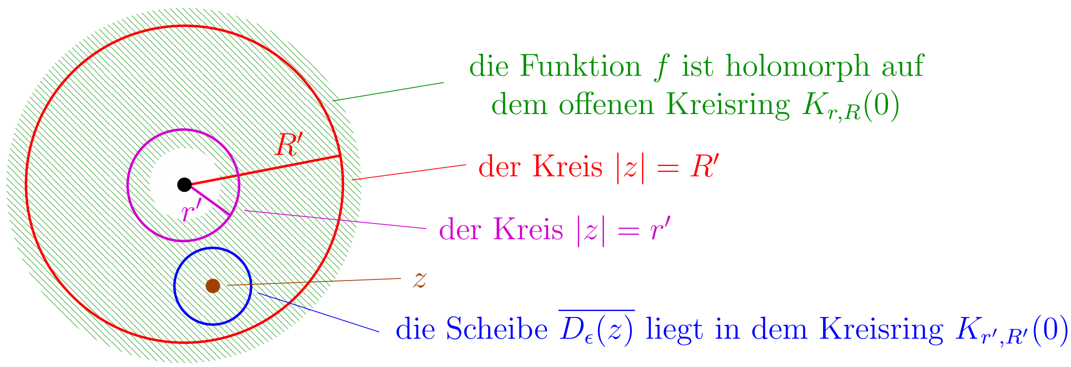
Der folgende Satz besagt nun, dass man jede holomorphe Funktion, welche auf einem offenen Kreisring definiert ist, als Laurent-Reihe schreiben kann.

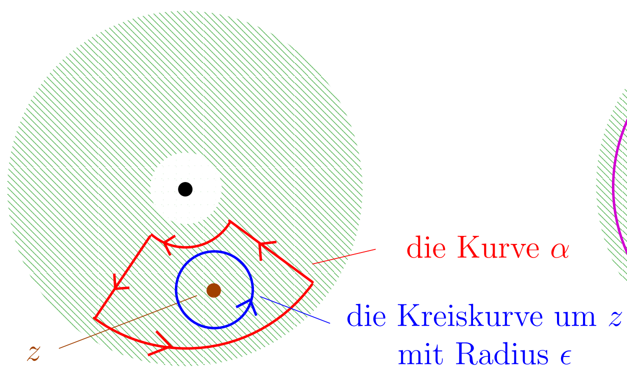
Satz 10.4. (Laurent-Reihenentwicklungssatz) *Es $z_0 \in \mathbb{C}$, es seien $0<r<R\leq\infty$ und es sei f eine holomorphe Funktion auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, so dass auf dem Kreisring gilt, dass*
$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n.$$

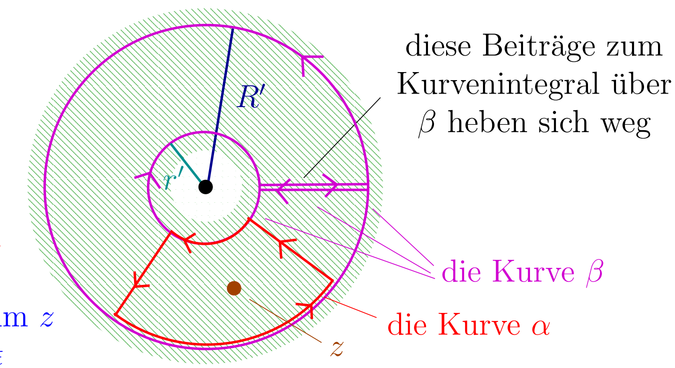
Wie wir gleich sehen werden besitzt der Beweis des Laurent-Reihenentwicklungssatzes natürlich eine gewisse Ähnlichkeit zum Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 6.1.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall $z_0=0$. Es sei nun f eine holomorphe Funktion auf $K_{r,R}(0)$ und es sei $z \in K_{r,R}(0)$. Wir wählen r', R' und $\epsilon>0$ mit $r<r'<R'<R$ und mit $\overline{D_\epsilon(z)} \subset K_{r',R'}(0)$.

Wir bezeichnen mit α und β die Wege, welche in der zweiten Abbildung skizziert sind. Dann gilt







$$f(z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cauchysche Integralformel 6.2}}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\xi - z| = \epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ähnliches Argument wie in Korollar 5.6}}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\beta} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\xi| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\xi| = r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

die beiden horizontalen Beiträge zum Integral über γ heben sich weg,
der äußere Kreisbogen wird gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen
und der innere Kreisbogen wird im Uhrzeigersinn durchlaufen

Wie im Beweis von Satz 6.1 gilt:

$$\int_{|\xi| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int_{|\xi| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}}\, d\xi \overset{\substack{\text{geometrische Reihe, da } \left|\frac{z}{\xi}\right| < 1\\ \downarrow}}{=} \int_{|\xi| = R'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \left(\frac{z}{\xi}\right)^n d\xi \overset{\substack{\text{aus dem Konvergenzsatz 4.11 und der Behauptung}\\ \text{auf Seite 52 folgt, dass wir die Reihenbildung}\\ \text{und das Integral vertauschen können}\\ \downarrow}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{|\xi| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi}_{=: c_n \cdot 2\pi \mathrm{i}} \cdot z^n.$$

Ein ganz ähnliches Argument zeigt nun, dass

$$-\int\limits_{|\xi|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \;=\; \int\limits_{|\xi|=r'} \frac{f(\xi)}{z}\frac{1}{1-\frac{\xi}{z}}\,d\xi \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{geometrische Reihe, da } |\frac{\xi}{z}|<1}}{=}\; \int\limits_{|\xi|=r'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{z}\cdot\left(\frac{\xi}{z}\right)^n d\xi \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{|\xi|=r'} f(\xi)\cdot\xi^n\,d\xi}_{=:c_{-n-1}\cdot 2\pi i}\cdot z^{-n-1}.$$

Wir haben also $f(z)$ auf dem Kreisring $K_{r',R'}(0)$ als Laurent-Reihe geschrieben. Die Koeffizienten der Laurent-Reihe sind hierbei nach Satz 10.3 (3) eindeutig bestimmt. Nachdem die Funktion mit der Laurent-Reihe auf allen Kreisringen $K_{r',R'}(0)$ mit $r < r' < R' < R$ übereinstimmt, muss diese Übereinstimmung auch auf dem ganzen Kreisring $K_{r,R}(0)$ gelten. ■

Wir können nun anhand der Laurent-Reihe den Typ einer isolierten Singularität ablesen. Genauer gesagt, es gilt folgender Satz:

Satz 10.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn z_0 eine isolierte Singularität ist, dann gibt es ein $r > 0$ und eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, so dass*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in K_{0,r}(z_0) = D_r(z_0)\setminus\{z_0\}.$$

Zudem gilt

(1) z_0 *ist hebbar* $\Longleftrightarrow$ *die Laurent-Reihe ist eine Potenzreihe d.h. es ist* $c_n = 0$ *für alle* $n < 0$

(2) z_0 *ist Polstelle k-ter Ordnung* $\Longleftrightarrow$ *es ist* $c_{-k} \neq 0$ *aber* $c_n = 0$ *für* $n < -k$

(3) z_0 *ist wesentlich* $\Longleftrightarrow$ *es ist* $c_n \neq 0$ *für unendlich viele* $n < 0$.

Beispiel. Für $z \neq 0$ gilt

$$\sin\left(\tfrac{1}{z}\right) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{siehe Definition von sin auf Seite 29}}}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(\frac{1}{z})^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot z^{-2n-1} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitution } m=-n}}{=}\; \sum_{m=-\infty}^{0}(-1)^m\cdot\frac{1}{(-2m+1)!}\cdot z^{2m-1}.$$

Es folgt also aus Satz 10.5 (3), dass $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität von $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ ist. Wir hatten diese Aussage natürlich auch schon auf Seite 76 mit anderen Methoden bewiesen.

Beweis. Nachdem $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist, gibt es per Definition ein $r > 0$, so dass $D_r(z_0)\setminus\{z_0\} \subset U$. Die Existenz und die Eindeutigkeit der Laurent-Reihe folgt nun aus dem Laurent-Reihenentwicklungssatz 10.4.

Wir wenden uns dem Beweis der drei Aussagen (1)-(3) zu. Wir beweisen zunächst die erste Äquivalenz. In der Tat gilt

$$
\begin{aligned}
& z_0 \text{ ist hebbar} \\
\iff\ & \text{es gibt eine holomorphe Funktion } D_r(z_0) \to \mathbb{C}, \text{ welche auf } D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \text{ mit } f \text{ übereinstimmt} \\
\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Potenzreihenentwicklungssatz 6.1}}}{\iff}\ & \text{es gibt eine Potenzreihe um } z_0, \text{ welche auf } D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \text{ mit } f \text{ übereinstimmt} \\
\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eindeutigkeit der Laurent-Reihe}}}{\iff}\ & \text{die Laurent-Reihe ist eine Potenzreihe.}
\end{aligned}
$$

Die zweite Äquivalenz folgt ganz ähnlich wie die erste Äquivalenz:

$$
\begin{aligned}
z_0 \text{ ist Polstelle } k\text{-ter Ordnung} \ & \overset{\substack{\text{Lemma 9.2 und Potenzreihenentwicklungssatz 6.1} \\ \downarrow}}{\iff} \text{es gibt } (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ mit } c_0 \neq 0 \text{ und } (z-z_0)^k \cdot f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \\
& \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution } m=n-k \text{ und } d_m = c_{n+k}}}{\iff} \text{es gibt } (d_n)_{n\geq -k} \text{ mit } d_{-k} \neq 0 \text{ und } f(z) = \sum_{m=-k}^{\infty} d_m \cdot (z-z_0)^m.
\end{aligned}
$$

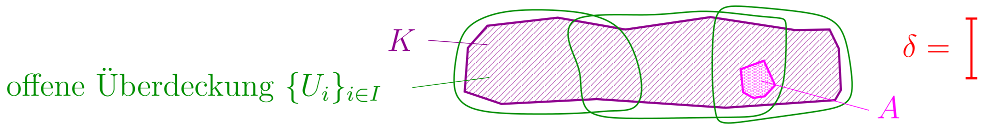
Die gewünschte Aussage folgt nun aus der Eindeutigkeit der Laurent-Reihendarstellung.

Die letzte Äquivalenz folgt aus den ersten beiden, nachdem sowohl die linke als auch die rechte Seite das Komplement der vorherigen beiden Aussagen links bzw. rechts sind. ■

11. Wegintegrale über beliebige stetige Wege

11.1. **Das Lemma von Lebesgue.** Wir werden mehrmals folgende Aussage verwenden, welche einen harmlosen Namen trägt, es aber in sich hat.

Lemma 11.1. (Lemma von Lebesgue) *Es sei K ein kompakter metrischer Raum und es sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass es für jede nichtleere Teilmenge A mit Durchmesser $< \delta$ ein $i \in I$ gibt, so dass $A \subset U_i$.*



Beweis. Nachdem K kompakt ist können wir K schon durch endlich viele der U_i's überdecken. Wir können also annehmen, dass $I = \{1, \dots, n\}$. Wenn $K = U_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, dann hat jedes $\delta > 0$ die gewünschte Eigenschaft. Wir nehmen nun an, dass für alle i gilt, dass $U_i \subsetneq K$. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung.

(1) Es sei $C \subset K$ eine nichtleere Teilmenge. Die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} K & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x & \mapsto & d(x, C) := \inf\{d(x,y) \mid y \in C\} \end{array}$$
ist stetig.

(2) Die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} f\colon K & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} d(x, K \setminus U_i) \end{array}$$
nimmt nur positive Werte an.

Es folgt leicht aus den Definitionen und der Dreiecksungleichung, dass die Abbildung in (1) stetig ist. Wir wenden uns dem Beweis von Aussage (2) zu. Es sei also $x \in K$. Wir wollen zeigen, dass $f(x) > 0$. Nachdem $K = U_1 \cup \dots \cup U_n$ gibt es ein i mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset U_i$. Dann gilt aber $d(x, K \setminus U_i) \geq r$. Insbesondere ist dann $f(x) \geq \frac{r}{n}$. ⊞

Aus (1) folgt, dass f stetig ist. Nachdem K kompakt ist gibt es also ein $x_0 \in K$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in K$. Aus der Behauptung folgt zudem, dass $\delta := f(x_0) > 0$. Wir wollen nun zeigen, dass dieses δ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Genauer gesagt wollen wir folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Es sei A eine nichtleere Teilmenge von K deren Durchmesser $< \delta$ ist. Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $A \subset U_i$.

Es sei $x \in A$ beliebig. Wir wählen $m \in \{1, \dots, n\}$, so dass $d(x, K \setminus U_m)$ maximal ist. Dann gilt
$$d(x, K \setminus U_m) \;\geq\; \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underbrace{d(x, K \setminus U_i)}_{\leq d(x, K \setminus U_m)} \;=\; f(x) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Wahl von } \delta}}{\geq}\; \delta.$$

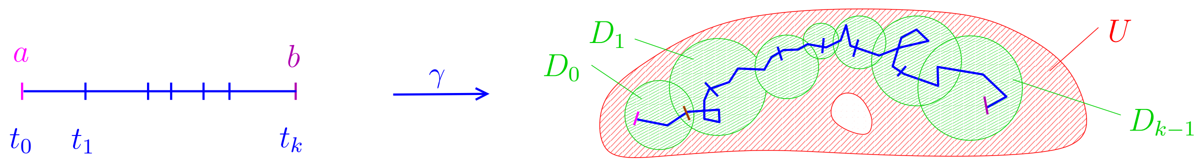
Also gilt $B_\delta(x) \subset U_m$. Nachdem der Durchmesser von A kleiner als δ ist, gilt zudem auch $A \subset B_\delta(x)$, insgesamt gilt also $A \subset U_m$. ■

11.2. **Wegintegrale über beliebige stetige Wege.** Wir erinnern zuerst an folgende zwei Definitionen:

(1) ein *Weg* ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,
(2) ein *Integrationsweg* ist ein Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, welcher abschnittsweise stetig differenzierbar ist.

Auf Seite 31 hatten wir das Wegintegral einer stetigen Funktion f entlang eines Integrationswegs eingeführt. Wir wollen jetzt den Begriff des Wegintegrals einer holomorphen Funktion entlang eines beliebigen Wegs einführen. Wir benötigen dazu folgende Definition.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Weg. Wir sagen, eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ ist fein, wenn es offene Scheiben $D_0, \dots, D_{k-1}$ in U gibt, so dass für alle $i = 0, \dots, k-1$ gilt $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset D_i$.

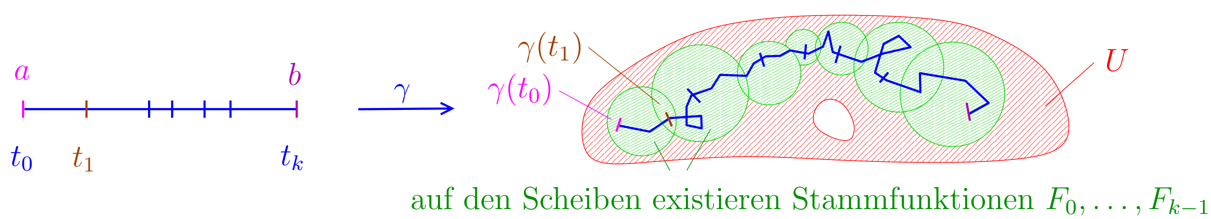


Lemma 11.2. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Jeder Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ besitzt eine feine Zerlegung.*

Beweis. Nachdem U offen ist gibt es zu jedem $t \in [a,b]$ eine offene Scheibe D_t in U, so dass $\gamma(t) \in D_t$. Inbesondere ist dann $\gamma^{-1}(D_t)$, $t \in [a,b]$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a,b]$. Es folgt also aus dem Lemma 11.1 von Lebesgue, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass jedes Teilintervall in $[a,b]$ mit Länge $< \delta$ schon ganz in einem $\gamma^{-1}(D_t)$ liegt. Wir wählen nun $k \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{b-a}{k} \le \delta$. Dann ist $t_i = a + \frac{b-a}{k} \cdot i$ mit $i = 0, \dots, k$ eine feine Zerlegung. ■

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine *holomorphe* Funktion und es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Nach dem gerade bewiesenen Lemma 11.2 gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ und offene Scheiben $D_0, \dots, D_{k-1}$ in U, so dass für alle $i = 0, \dots, k-1$ gilt $\gamma([t_i, t_i + 1]) \subset D_i$. Nach Satz 6.4 gibt es für $i = 1, \dots, k$ jeweils eine Stammfunktion F_i für die Einschränkung von f auf D_i. Wir definieren nun

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;:=\; \sum_{i=0}^{k-1} \big(F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))\big).$$



Lemma 11.3.

(1) *Die Definition von* $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$ *hängt nicht von den verschiedenen Wahlen ab.*

(2) *Wenn* $f\colon U\to\mathbb{C}$ *holomorph und* $\gamma\colon [a,b]\to U$ *ein Integrationsweg, dann stimmt die obige Definition des Wegintegrals mit der Definition auf Seite 31 überein.*

Beweis (∗)**.** Es sei $U\subset\mathbb{C}$ eine offene Menge, es sei $f\colon U\to\mathbb{C}$ eine *holomorphe* Funktion und es sei $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ ein Weg.

(1) Es sei eine feine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ der Form $a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$ gegeben. Dann gibt es per Definition offene Scheiben $D_0,\dots,D_{k-1}$ in U, so dass für alle $i=0,\dots,k-1$ gilt $\gamma([t_i,t_i+1])\subset D_i$. Nach Satz 6.4 gibt es für $i=1,\dots,k$ jeweils eine Stammfunktion F_i für die Einschränkung von f auf D_i. Wir schreiben

$$I(Z) \;:=\; \sum_{i=0}^{k-1}\big(F_i(\gamma(t_{i+1}))-F_i(\gamma(t_i))\big).$$

Stammfunktionen auf Scheiben unterscheiden sich nach Lemma 4.5 nur um eine additive Konstante. Nachdem solch eine Konstante in der Summe zweimal, mit entgegengesetztem Vorzeichen auftritt, hängt $I(Z)$ nicht von der Wahl der Stammfunktionen F_i und auch nicht von der Wahl der Größe der Scheiben D_i ab.

Wir müssen nun noch zeigen, dass wenn Z und Z' zwei feine Zerlegungen von $[a,b]$ sind, dann gilt $I(Z)=I(Z')$.

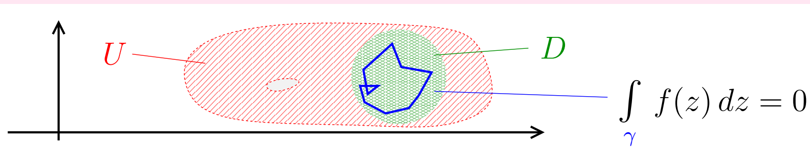
Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass wir eine feine Zerlegung Z von der Form $a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$ durch Hinzufügen von einem Punkt t' zwischen t_i und t_{i+1} zu einer Zerlegung Z' verfeinern. In diesem Fall gilt $I(Z')=I(Z)$, denn die Summanden von $I(Z')$ sind die gleichen wie von $I(Z)$, außer das noch der Summand $F_i(\gamma(t'))$ einmal mit positiven und einmal mit negativen Vorzeichen auftaucht. Aber diese beiden Extra-Summanden heben sich weg.

Es seien nun Z und Z' zwei feine Zerlegungen. Wir betrachten die Zerlegung $Z''=Z\cup Z'$. Diese Zerlegung entsteht aus Z durch eine mehrfache Verfeinerung, also ist $I(Z'')=I(Z)$. Genauso gilt $I(Z'')=I(Z')$. Es folgt, wie gewünscht, dass $I(Z)=I(Z'')=I(Z')$.

(2) Diese Aussage folgt leicht aus Lemma 4.2 und Lemma 4.7. ■

Folgendes einfache Lemma werden wir mehrmals verwenden.

Lemma 11.4. *Es sei* $f\colon U\to\mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge* U *und es sei* $\gamma\colon [a,b]\to U$ *ein geschlossener Weg, so dass* γ *in einer offenen Scheibe* D *in* U *enthalten ist. Dann ist* $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.



Beweis. In diesem Fall ist $a = t_0 < t_1 = b$ schon eine feine Zerlegung. Wir wählen eine Stammfunktion F für die Einschränkung von f auf die offene Scheibe D. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per Definition}}}{=} F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } \gamma \text{ geschlossen}}}{=} 0. \qquad \blacksquare$$

Viele Aussagen von Wegintegralen über Integrationswege übertragen sich zu Wegintegralen über Wegen. Beispielsweise gilt folgende Variante von Lemma 4.4.

Lemma 11.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, und es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Weg. Zudem sei $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine stetige, bijektive Funktion. Dann gilt*[46]

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \quad \text{wenn } \varphi \text{ orientierungserhaltend ist}$$

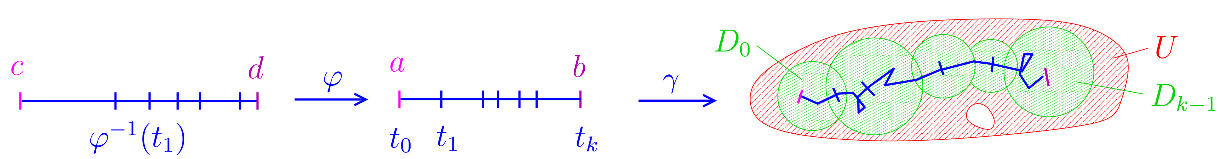
und

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz \quad \text{wenn } \varphi \text{ orientierungsumkehrend ist.}$$

Beweis $(*)$**.** Wir betrachten zuerst den Fall, dass φ orientierungserhaltend ist. Es sei nun $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ eine feine Zerlegung von $[a,b]$ für den Weg γ. Wir wählen auf den zugehörigen Scheiben $D_0, \dots, D_{k-1}$ jeweils Stammfunktionen $F_0, \dots, F_{k-1}$. Dann ist $c = \varphi^{-1}(t_0) < \varphi^{-1}(t_1) < \varphi^{-1}(t_2) < \dots < \varphi^{-1}(t_k) = d$ eine feine Zerlegung von $[c,d]$ für $\gamma \circ \varphi$. Per Definition gilt dann, dass

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz &= \sum_{i=0}^{k-1} \Big(F_i\big((\gamma\circ\varphi)(\varphi^{-1}(t_{i+1}))\big) - F_i\big((\gamma\circ\varphi)(\varphi^{-1}(t_i))\big)\Big)\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } \varphi \text{ und } \varphi^{-1} \text{ heben sich weg}}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \big(F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))\big) = \int_\gamma f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Der Fall, dass φ orientierungsumkehrend ist wird ganz ähnlich bewiesen und verbleibt eine freiwillige Übungsaufgabe. ■

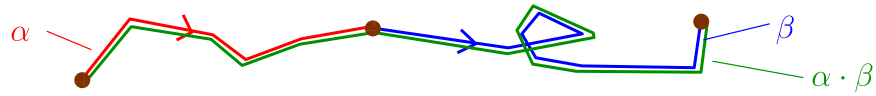


Zudem gilt folgende Variante von Lemma 4.2.

Lemma 11.6. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zudem seien $\alpha\colon [a, a+p] \to \mathbb{C}$ und $\beta\colon [b, b+q] \to \mathbb{C}$ zwei Wege mit $\alpha(a+p) = \beta(b)$. Wir bezeichnen mit $\alpha \cdot \beta$ die Verknüpfung von α und β, welche wir auf Seite 32 eingeführt hatten. Dann gilt*

$$\int_{\alpha\cdot\beta} f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz.$$

[46]Wir sagen φ is *orientierungserhaltend*, wenn $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Ansonsten nennen wir φ *orientierungsumkehrend*.



Beweis. Die Aussage folgt leicht aus den Definitionen. In der Tat, eine feine Zerlegung von $[a, a+p]$ für α und eine feine Zerlegung von $[b, b+q]$ für β ergeben eine feine Zerlegung von $[a, a+p+q]$ für $\alpha \cdot \beta$. Die gewünschte Gleichheit folgt dann sofort aus der Definition des Wegintegrals. ■

11.3. **Der Cauchysche Integralsatz für stetige Bilder von Rechtecken.** Es gilt auch folgende Verallgemeinerung von Satz 5.3.

Satz 11.7. (Cauchysche Integralsatz für stetige Bilder von Rechtecken) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $\varphi \colon Q \to U$ eine stetige Abbildung von einem Rechteck Q nach U. Dann gilt*

$$\int_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Wenn φ stetig differenzierbar ist, dann hatten wir die Aussage schon in Satz 5.3 formuliert und bewiesen. Der Beweis von Satz 5.3 überträgt sich aber nicht zum Fall, dass φ nur stetig ist. Wir wählen deswegen einen anderen Ansatz.

Beweis.

Wenn $\varphi(Q)$ ganz in einer Kreisscheibe innerhalb von U liegt, dann folgt aus Lemma 11.4, dass das Wegintegral verschwindet. Den allgemeinen Fall führen wir nun auf den Spezialfall zurück, in dem wir wiederum das Rechteck Q geschickt unterteilen.

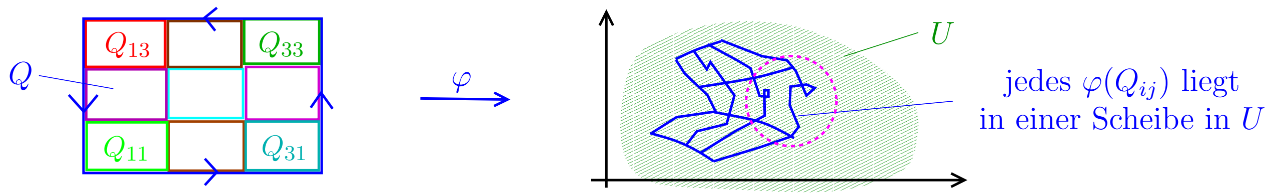
Nachdem U offen ist, gibt es für jedes $z \in \varphi(Q)$ eine offene Scheibe $D_z \subset U$, welche z enthält. Es folgt aus dem Lemma 11.1 von Lebesgue, angewandt auf $K = Q$ und die offene Überdeckung $\varphi^{-1}(D_z)$, $z \in \varphi(Q)$, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass jede Teilmenge A von Q mit Durchmesser $\leq \delta$ ganz in einem $\varphi^{-1}(D_z)$ liegt.

Es sei nun d der Durchmesser von Q. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{d}{n} < \delta$. Indem wir die beiden Seiten von Q in n gleich lange Intervalle zerteilen, zerlegen wir Q in n^2 Rechtecke Q_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, deren Durchmesser jeweils $\frac{d}{n} < \delta$ ist. Mit anderen Worten, für jedes Q_{ij} ist $\varphi(Q_{ij})$ ganz in einer Scheibe in U enthalten. Dann gilt

$$\int_{\varphi\circ\partial Q} f(z)\,dz \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{alle inneren}\\ \text{Wegintegrale}\\ \text{heben sich weg}}}{=}\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{\varphi\circ\partial Q_{ij}} f(z)\,dz}_{\substack{=0 \text{ nach Lemma 11.4,}\\ \text{denn } \varphi(Q_{ij}) \text{ liegt}\\ \text{in einer Scheibe in } U}} \;=\; 0.$$

■

[46]In Satz 5.3 musste die Abbildung φ stetig differenzierbar sein, im folgenden Satz genügt es vorauszusetzen, dass φ stetig ist. Da die allermeisten Abbildungen stetig, aber nicht stetig differenzierbar sind, ist das ein echter Fortschritt.



Q
Q13
Q33
Q11
Q31
φ
U
jedes φ(Qij) liegt
in einer Scheibe in U

12. Umlaufzahlen

Wir hatten im bisherigen Verlauf der Vorlesung mehrmals gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen, Wegintegrale verschwinden, und dass verschiedene Wegintegrale das gleiche Ergebnis ergeben. Beispielsweise hatten wir in Korollar 5.5 gezeigt, dass wenn $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, so dass der abgeschlossene Kreisring $\overline{K_{r,R}(z_0)}$ in U enthalten ist, dann gilt

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \;=\; \int\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz.$$

Im nächsten Kapitel werden wir den„Residuensatz" formulieren und beweisen, welcher eine starke Verallgemeinerung der bisherigen Aussagen ist. Um diesen Satz zu formulieren brauchen wir allerdings den Begriff der Umlaufzahl, welchen wir in diesem Kapitel einführen.

12.1. **Homotope Wege.** Die folgende Definition wird uns auch in den höheren Vorlesungen immer wieder über den Weg laufen.

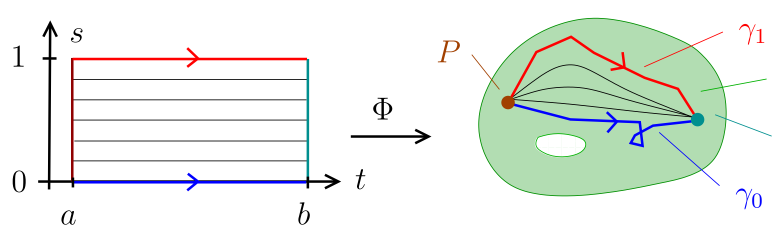
Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ und es seien $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to U$ zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt $P := \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und gleichem Endpunkt $Q := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Wir sagen γ_0 und γ_1 sind homotop in U, wenn es eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 gibt, d.h. eine stetige Abbildung

$$\Phi\colon [a,b] \times [0,1] \;\to\; U$$

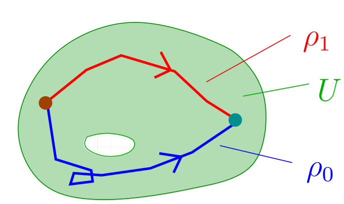
so dass gilt

(1) für alle $t \in [a,b]$ ist $\Phi(t,0) = \gamma_0(t)$ und $\Phi(t,1) = \gamma_1(t)$,
(2) für alle $s \in [0,1]$ ist $\Phi(a,s) = P$ und $\Phi(b,s) = Q$.

Etwas vereinfacht gesagt gilt: zwei Wege sind homotop, wenn man bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt, den einen Weg stetig in den anderen überführen kann.



Φ ist eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1

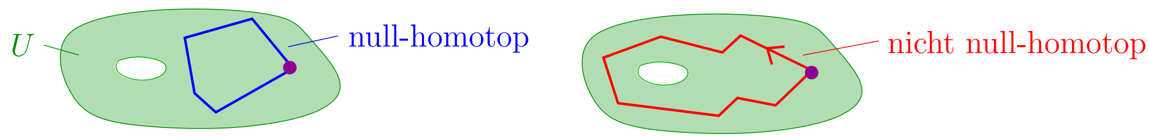


es gibt keine Homotopie in U zwischen ρ_0 und ρ_1

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge.

(1) Ein geschlossener Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$[47] heißt nullhomotop, wenn dieser in U homotop zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma(a) = \gamma(b)$ ist.
(2) Wir sagen U ist einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in U nullhomotop ist.

[47] Zur Erinnerung, der Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ heißt *geschlossen*, wenn der Anfangspunkt $\gamma(a)$ mit dem Endpunkt $\gamma(b)$ übereinstimmt.



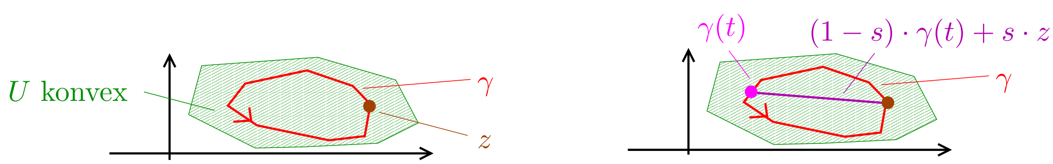
Lemma 12.1. *Jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.*

Beispiel. Es folgt also aus Lemma 12.1, dass $\mathbb{C}$, aber auch jede Scheibe und jedes Rechteck einfach zusammenhängend sind.

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine konvexe Teilmenge. Zur Erinnerung, konvex bedeutet, dass für alle $z, w \in U$ die Verbindungsstrecke $(1-s) \cdot z + s \cdot w$, $s \in [0,1]$ ebenfalls in U liegt. Es sei nun $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein geschlossener Weg. Wir bezeichnen mit z den Anfangs- und den Endpunkt von γ. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon [a,b] \times [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ (t,s) & \mapsto & \underbrace{(1-s) \cdot \gamma(t) + s \cdot z}_{\in U, \text{ da } U \text{ konvex}} \end{array}$$

eine Homotopie zwischen γ und dem konstanten Weg $\delta(t) = z$. ∎



Satz 12.2. (Homotopie-Invarianz des Wegintegrals) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es seien $\mu_0, \mu_1\colon [a,b] \to U$ zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Wenn μ_0 und μ_1 in U homotop sind, dann gilt*

$$\int_{\mu_0} f(z)\, dz = \int_{\mu_1} f(z)\, dz.$$

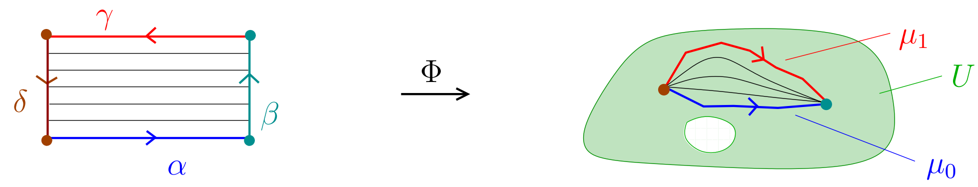
Beweis. Es sei $\Phi\colon Q := [a,b] \times [0,1] \to U$ eine Homotopie zwischen μ_0 und μ_1. Wir bezeichnen mit α, β, γ und δ die orientierten Randkurven des Rechtecks Q, welche in der Abbildung skizziert sind. Dann gilt:

$$0 \overset{\substack{\text{Cauchyscher} \\ \text{Integralsatz 11.7} \\ \downarrow}}{=} \int_{\Phi\circ\partial Q} f(z)\, dz \overset{\substack{\text{Lemma 11.6} \\ \downarrow}}{=} \underbrace{\int_{\Phi\circ\alpha} f(z)\, dz}_{= \int_{\mu_0} f(z)\, dz} + \underbrace{\int_{\Phi\circ\beta} f(z)\, dz}_{\substack{= 0, \text{ denn der} \\ \text{Weg } \Phi\circ\beta \\ \text{ist konstant}}} + \underbrace{\int_{\Phi\circ\gamma} f(z)\, dz}_{\substack{= -\int_{\mu_1} f(z)\, dz \\ \text{denn } \mu_1 \text{ und } \Phi\circ\gamma \\ \text{haben entgegengesetzte} \\ \text{Orientierung}}} + \underbrace{\int_{\Phi\circ\delta} f(z)\, dz}_{\substack{= 0, \text{ denn der} \\ \text{Weg } \Phi\circ\delta \\ \text{ist konstant}}}$$

Zusammengefasst erhalten wir also die gewünschte Aussage, dass

$$\int_{\mu_0} f(z)\,dz \;=\; \int_{\mu_1} f(z)\,dz.$$

■



Wir erhalten insbesondere folgendes Korollar, welches eine Verallgemeinerung von Korollar 5.4 ist.

Korollar 12.3. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei γ ein geschlossener Weg, welcher in U nullhomotop ist. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Insbesondere verschwinden alle Wegintegrale entlang geschlossenen Wegen auf einfach zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Beweis. Es sei γ ein geschlossener Weg, welcher in U nullhomotop ist, dann gilt

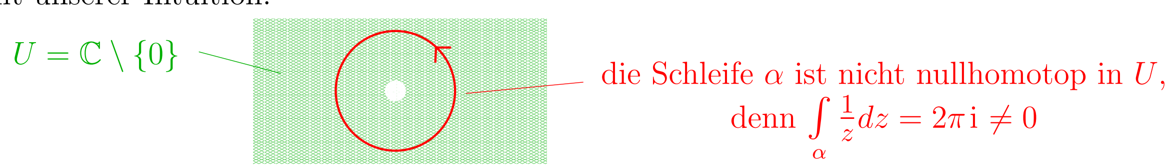
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 12.2, da } \gamma \text{ nullhomotop}}}{=} \int_{\text{konstanter Weg}} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus der Definition}}}{=} 0.$$

■

Beispiel. Für $r > 0$ betrachten wir die Kreiskurve α in $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, welche sich gegen den Uhrzeigersinn mit Radius r um den Ursprung dreht. Wir hatten auf Seite 32 gesehen, dass

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z}\,dz \;=\; \int_{|z|=r} \frac{1}{z}\,dz \;=\; 2\pi\mathrm{i} \;\neq\; 0.$$

Es folgt also aus Korollar 12.3, dass die Schleife α in U nicht null-homotop ist. Wir können diese Schleife also in U nicht zum Anfangspunkt zusammenziehen. Dies deckt sich natürlich mit unserer Intuition.



12.2. **Die Definition der Umlaufzahl.**

Definition. Es sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und z_0 ein Punkt, welcher nicht auf dem Weg liegt. Dann heißt

$$n(\gamma, z_0) \;:=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{1}{\xi - z_0}\,d\xi$$

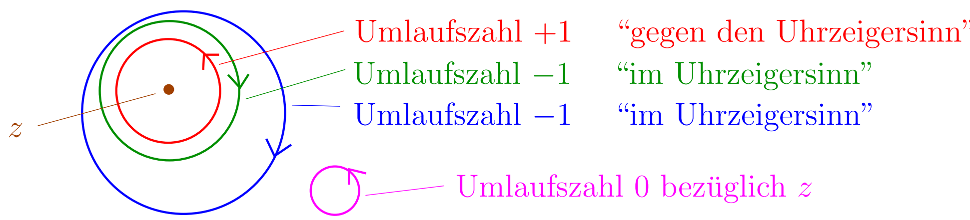
die Umlaufzahl von γ bezüglich z_0.

Beispiel.

(1) Wenn γ ein geschlossener Weg ist, dann folgt aus Lemma 4.4, dass
$$n(-\gamma, z_0) \;=\; -n(\gamma, z_0).$$
Mit anderen Worten, wenn wir die Orientierung wechseln, wechselt das Vorzeichen der Umlaufzahl.

(2) Es folgt aus der Homotopie-Invarianz des Wegintegrals, d.h. aus Satz 12.2, dass geschlossene Wege, welche in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ homotop sind, auch die gleichen Umlaufzahlen bezüglich z_0 besitzen.

(3) Mithilfe der Berechnung auf Seite 32 und Korollar 5.6 erhalten wir viele Beispiele von Umlaufzahlen, welche in der Abbildung skizziert sind.



Der Name„Umlaufzahl" legt nahe, dass es sich dabei um eine ganze Zahl handelt. Dies ist ausgehend von der Definition nicht unbedingt offensichtlich, und wird im folgenden Lemma bewiesen.

Satz 12.4. *Umlaufzahlen von geschlossenen Integrationswegen sind ganzzahlig.*

Beweis. Es sei also $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und es sei z_0 ein Punkt, welcher nicht auf dem Weg liegt. In dem wir γ und z_0 jeweils um $-z_0$ verschieben können wir annehmen, dass $z_0 = 0$. Wir wollen also zeigen, dass
$$n(\gamma, 0) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \tfrac{1}{\xi}\, d\xi$$
ganzzahlig ist.

Wir müssen also das Wegintegral von $f(z) = \frac{1}{z}$ über den Weg γ bestimmen. Wir möchten gerne verwenden, dass der Logarithmus eine Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$ ist. Das einzige Problem ist nun, dass der Logarithmus nicht auf ganz $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiert ist.

Wir müssen uns also einschränken auf Wertebereiche von γ, auf denen jeweils ein Logarithmuszweig definiert ist. Wir schaffen dies, indem wir das Intervall $[a, b]$ in kleinere Intervalle zerlegen.

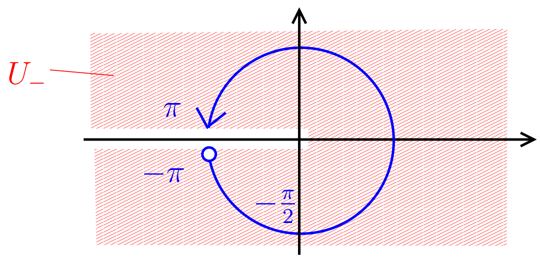
Wir erinnern an die beiden Logarithmuszweige [48]
$$\begin{aligned} \ln_- := \ln_{-\pi}\colon U_- := \mathbb{C} \setminus \overline{S}_{-\pi} \;&\to\; \{x + \mathrm{i}y \,|\, x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in (-\pi, \pi)\} \\ z \;&\mapsto\; \ln_{-\pi}(z) \end{aligned}$$

[48] Zur Erinnerung, für $\varphi \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit
$$\overline{S}_\varphi \;=\; \{r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi)\,\mathrm{i} = r \cdot e^{\varphi\,\mathrm{i}} \,|\, r \geq 0\}$$
den abgeschlossenen Strahl in φ-Richtung.

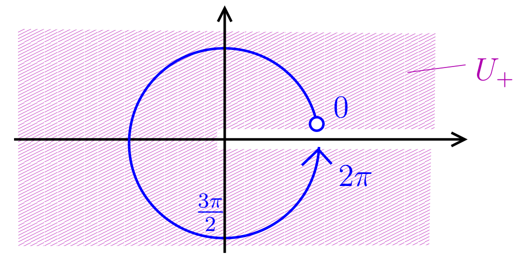
und
$$\begin{array}{rcl} \ln_+ := \ln_\pi \colon U_+ := \mathbb{C} \setminus \overline{S}_\pi & \to & \{x + \mathrm{i}y \,|\, x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in (0, 2\pi)\} \\ z & \mapsto & \ln_0(z). \end{array}$$

Dann ist $U_- \cup U_+ = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir machen folgende Beobachtung:

($*$) Für alle $z \in U_- \cap U_+$ gilt: $\ln_-(z) = \ln_+(z)$ oder $\ln_-(z) = \ln_+(z) - 2\pi\,\mathrm{i}$.[49]



Definitionsbereich von $\ln_- = \ln_{-\pi}$
die Funktionswerte von $\ln_- = \ln_{-\pi}$
liegen in $\{x + y\,\mathrm{i} \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\}$



Definitionsbereich von $\ln_+ = \ln_0$
die Funktionswerte von $\ln_+ = \ln_0$
liegen in $\{x + y\,\mathrm{i} \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in (0, 2\pi)\}$

Behauptung. Es gibt eine Zerlegung $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ des Intervalls $[a, b]$, so dass für alle $j = 0, \ldots, n-1$ gilt, dass $\gamma([s_j, s_{j+1}]) \subset U_-$ oder $\gamma([s_j, s_{j+1}]) \subset U_+$.

Wir wenden das Lemma 11.1 von Lebesgue auf die kompakte Menge $K = [a, b]$ und die offene Überdeckung durch $\gamma^{-1}(U_-)$ und $\gamma^{-1}(U_+)$ an. Es gibt dann ein $n \geq 1$, so dass jedes Teilintervall von $[a, b]$ der Länge $\leq \frac{a-b}{n}$ in $\gamma^{-1}(U_-)$ oder $\gamma^{-1}(U_+)$ liegt. Wenn wir $[a, b]$ in n Intervalle gleicher Länge zerlegen, erhalten wir nun die gewünschte Zerlegung. ⊞

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis zu. Für $j = 0, \ldots, n-1$ wählen wir nun jeweils $\epsilon_j \in \{-, +\}$, so dass $\gamma([s_j, s_{j+1}]) \subset U_{\epsilon_j}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\xi}\, d\xi \overset{\substack{\text{Zerlegen des Integrals, siehe Lemma 11.6} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[s_j, s_{j+1}]}} \frac{1}{\xi}\, d\xi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 4.7, denn auf Seite 40 hatten wir gezeigt, dass} \\ \ln_{\epsilon_j}(\xi) \text{ eine Stammfunktion von } \frac{1}{\xi} \text{ auf } \gamma([s_j, s_{j+1}]) \subset U_{\epsilon_j} \text{ ist}}}{=} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \sum_{j=0}^{n-1} \ln_{\epsilon_j}(\gamma(s_{j+1})) - \ln_{\epsilon_j}(\gamma(s_j))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Umsortieren} \\ \text{der Terme}^{50}}}{=} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{\ln_{\epsilon_{j-1}}(\gamma(s_j)) - \ln_{\epsilon_j}(\gamma(s_j))}_{\substack{= 0 \text{ oder } = \pm 2\pi\,\mathrm{i} \\ \text{da sich } \ln_- \text{ und } \ln_+ \text{ nach } (*) \\ \text{um } 0, \pm 2\pi\,\mathrm{i} \text{ unterscheiden}}} + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \Big(\underbrace{\ln_{\epsilon_{n-1}}(\gamma(s_n)) - \ln_{\epsilon_0}(\gamma(s_0))}_{= 0 \text{ oder } = \pm 2\pi\,\mathrm{i}, \text{ da } \gamma(s_n) = \gamma(s_0)} \Big).$$

Wir sehen also, dass das Integral, wie gehofft, ganzzahlig ist. ■

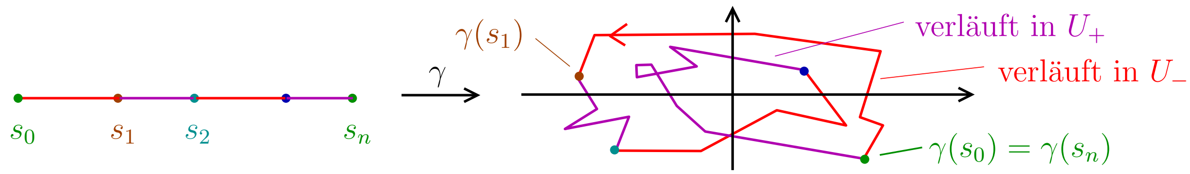
---

[49] In der Tat, wenn $z \in U_- \cap U_+$, dann ist $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ und es gilt

$$\ln_-(z) = \begin{cases} \ln_+(z) & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) > 0, \\ \ln_+(z) - 2\pi\,\mathrm{i} & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

[50] Wir verwenden hier die Umklammerung

$$(b_1 - a_0) + (b_2 - a_1) + \cdots + (b_n - a_{n-1}) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1}) \; + \; (b_n - a_0).$$



Einschub: Äquivalenzrelationen. Bevor wir mit der Funktionentheorie fortfahren erinnern wir an den Begriff der Äquivalenzrelation ein, welcher aus [**Na2**, Kapitel 4] bekannt ist.

Definition. Es sei X eine Menge. Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation $\sim$ auf X, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{array}{rcll} & & x \sim x & \\ x \sim y & \Longrightarrow & y \sim x & \text{(Symmetrie)} \\ x \sim y \text{ und } y \sim z & \Longrightarrow & x \sim z & \text{(Transitivität).} \end{array}$$

Beispiel.

(1) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x - y) \in 3\mathbb{Z}.$$

Man kann nun leicht nachprüfen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

(2) Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann ist

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x^{-1}y \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G.

(3) Es sei X die Menge aller Funktionen auf $\mathbb{R}$. Wir schreiben

$$f \sim g \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt ein } \epsilon > 0, \text{ so dass } f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Man kann nun leicht zeigen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Definition. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Eine Äquivalenzklasse ist eine nichtleere Teilmenge $Y \subset X$, so dass gilt[51]

(1) für alle $y, y' \in Y$ gilt: $y \sim y'$,
(2) wenn $z \sim y$ für ein $y \in Y$, dann gilt auch $z \in Y$.

Beispiel.

(1) Im ersten Beispiel gibt es genau drei Äquivalenzklassen, diese sind gegeben durch die drei Mengen

$$\begin{array}{rcl} 3\mathbb{Z} & = & \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \\ 3\mathbb{Z} + 1 & = & \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \\ 3\mathbb{Z} + 2 & = & \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}. \end{array}$$

(2) Im zweiten Beispiel sind die Äquivalenzklassen gerade die Rechtsnebenklassen G/H.

[51] In Worten heißt dies, alle Elemente einer Äquivalenzklasse S sind zu einander äquivalent und jedes Element, welches äquivalent zu einem Element in S ist, liegt auch schon in der Äquivalenzklasse.

Lemma 12.5. *Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Dann ist X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen, d.h.*

(1) *jedes $x \in X$ liegt in einer Äquivalenzklasse,*
(2) *wenn A und B Äquivalenzklassen sind, dann gilt entweder $A = B$ oder $A \cap B = \varnothing$.*

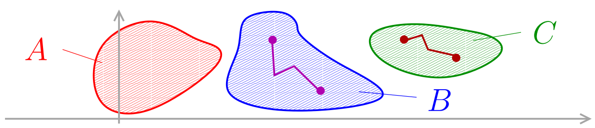
Beweis. Das Lemma wurde implizit in [**Na2**, Kapitel 4] bewiesen. Es folgt aber auch leicht aus den Definition. ■

Wir betrachten zuletzt noch ein Beispiel, welches wieder näher an unserem Interessensgebiet liegt.

Definition. Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Für $x, y \in X$ definieren wir

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt einen Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen[52] von X als die Komponenten von X.



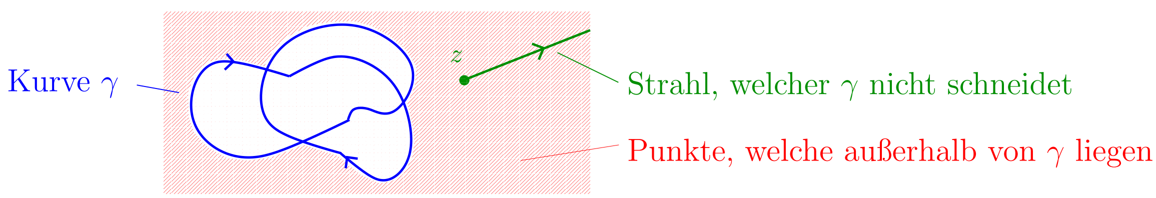
A, B und C sind die Komponenten von $X = A \cup B \cup C$

Wir werden diese Definition im nächsten Teilkapitel mehrfach verwenden.

12.3. **Die Berechnung der Umlaufzahl.** In diesem Kapitel wollen wir für einen gegebenen Integrationsweg γ die Umlaufzahlen für alle Punkte im Komplement von γ bestimmen. Wir werden dazu im Folgenden verschiedene Methoden kennenlernen um Umlaufzahlen zu berechnen. Wir werden diese für Berechnungen verwenden, aber nicht in Beweisen. Wir werden daher die Beweise streckenweise nur skizzieren.

Definition. Es sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg.

(1) Wir schreiben $|\gamma| := \gamma([a, b])$.
(2) Wir sagen ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ liegt außerhalb der Kurve γ, wenn es einen Strahl $S = \{z + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ mit $v \neq 0$ gibt, welcher γ nicht schneidet.



Lemma 12.6. *Es sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg. Für jeden Punkt z außerhalb von γ gilt*

$$n(\gamma, z) \;=\; 0.$$

Beweis. Es sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und es sei z ein Punkt, welcher außerhalb von γ liegt. Nach einer Verschiebung können wir annehmen, dass $z = 0$.

Nach Voraussetzung gibt es ein $v = e^{\varphi i}$, so dass sich das Bild des Integrationswegs γ in der Menge

$$U \;:=\; \mathbb{C} \setminus \{t \cdot e^{\varphi i} \,|\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \;=\; \mathbb{C} \setminus \overline{S}_{\varphi}$$

[52] In Präsenzübungsblatt 7 werden wir sehen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

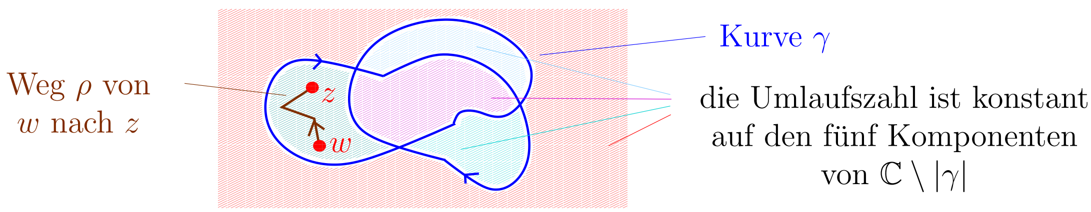
befindet. Es folgt:

$$n(\gamma,z) \;=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{\xi-z}\,d\xi \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 4.7, denn nach der Diskussion}\\ \text{auf Seite 40 besitzt } \frac{1}{\xi} \text{ auf } \mathbb{C}\setminus\overline{S}_\varphi \text{ eine Stammfunktion,}\\ \text{nämlich den entsprechenden Logarithmuszweig}}}{=}\; 0.$$

■

Lemma 12.7. *Es sei $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und es seien w,z zwei Punkte, welche in der gleichen Komponente von $\mathbb{C}\setminus|\gamma|$ liegen. Dann gilt*

$$n(\gamma,w) \;=\; n(\gamma,z).$$



Beweis. Es sei also $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg. In Übungsblatt 7 beweisen wir, dass die Funktion[53]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}\setminus|\gamma| &\to \mathbb{Z}\\ z &\mapsto n(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{\xi-z}\,d\xi \end{aligned}$$

stetig ist. Es seien nun w,z zwei Punkte, welche in der gleichen Komponente von $\mathbb{C}\setminus|\gamma|$ liegen. Dies bedeutet, dass es einen Weg $\rho\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ mit $\rho(a)=w$ und $\rho(b)=z$ gibt, welcher γ nicht schneidet. Die Funktion

$$\begin{aligned} \Theta\colon [a,b] &\to \mathbb{Z}\\ t &\mapsto n(\gamma,\rho(t)) = f(\rho(t)) \end{aligned}$$

ist die Verknüpfung der stetigen Abbildungen ρ und f, also wiederum stetig. Nachdem $[a,b]$ zusammenhängend ist, und nachdem die Funktion Θ nur Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, muss die Funktion Θ nach Lemma 7.7 konstant sein. Insbesondere gilt

$$n(\gamma,w) \;=\; n(\gamma,\rho(a)) \;=\; \Theta(a) \;=\; \Theta(b) \;=\; n(\gamma,\rho(b)) \;=\; n(\gamma,z).$$

■

Definition. Es seien nun v und w zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$, welche linear unabhängig sind. Wir sagen v und w sind positiv orientiert, wenn es ein $\varphi\in(0,\pi)$ gibt, so dass

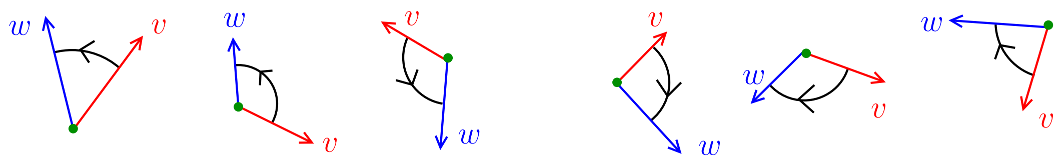
$$\frac{w}{\|w\|} \;=\; e^{\varphi\mathrm{i}}\cdot\frac{v}{\|v\|}.$$

Andernfalls sagen wir, dass v und w negativ orientiert sind.[54]

Das folgende Lemma gibt nun an, wie sich die Umlaufzahl ändert, wenn wir von einer Komponente von $\mathbb{C}\setminus|\gamma|$ zur nächsten wechseln.

[53] Nach Satz 12.4 nimmt diese Funktion in der Tat Werte in $\mathbb{Z}$ an.

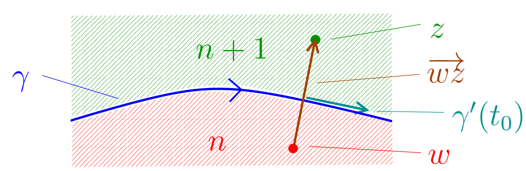
[54] Etwas salopp gesprochen sind v und w positiv orientiert, wenn man die w-Richtung aus der v-Richtung durch Drehen gegen den Uhrzeigersinn erhält.



v und w sind positiv orientiert $\qquad$ v und w sind negativ orientiert

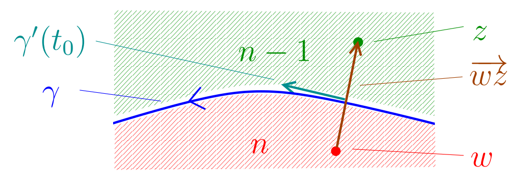
Lemma 12.8. *Es sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *ein geschlossener Integrationsweg und* $w, z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. *Wenn es genau ein* $t_0 \in [a,b]$ *gibt, so dass* $\gamma(t_0)$ *auf der Strecke* $\overline{wz}$ *von* w *nach* z *liegt, und wenn* $\gamma'(t_0)$ *und* $\overrightarrow{wz} = z - w$ *linear unabhängig sind, dann gilt:*

$$n(\gamma, z) \;=\; \begin{cases} n(\gamma, w) + 1, & \textit{wenn } \gamma'(t_0) \textit{ und } \overrightarrow{wz} \textit{ positiv orientiert sind,} \\ n(\gamma, w) - 1, & \textit{wenn } \gamma'(t_0) \textit{ und } \overrightarrow{wz} \textit{ negativ orientiert sind.} \end{cases}$$



$n(\gamma, z) = n(\gamma, w) + 1$

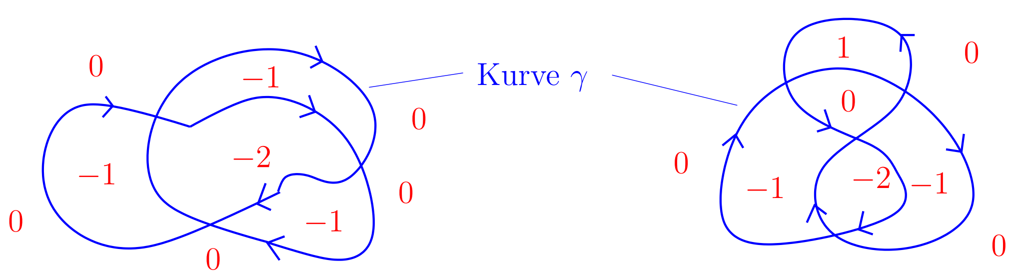
die Umlaufszahl erhöht sich um $+1$, wenn der Weg von einer Komponente zur anderen Vorfahrt ("rechts vor links") hat vor dem Weg γ



$n(\gamma, z) = n(\gamma, w) - 1$

die Umlaufszahl erniedrigt sich um 1, wenn der Weg von einer Komponente zur anderen nicht Vorfahrt hat vor dem Weg γ

Beispiel. Mithilfe von Lemmas 12.6, 12.7 und 12.8 können wir in der Praxis Umlaufzahlen problemlos bestimmen. Beispiele von Umlaufzahlen für zwei verschiedene Wege sind in der Abbildung skizziert.



Beweisskizze für Lemma 12.8 $(*)$**.** Um die Notation und das Argument etwas zu vereinfachen, machen wir folgende Annahmen:

(1) w liegt unterhalb der x-Achse,
(2) z liegt oberhalb der x-Achse,
(3) γ verläuft in der Nähe von $\gamma(t_0)$ auf der x-Achse, nämlich von„links nach rechts".

Im Folgenden seien γ', β, δ, β' und α die Wege, welche in der Abbildung am Ende des Beweises skizziert sind. Den Weg γ' erhalten wir dabei dadurch, dass wir aus γ den Weg

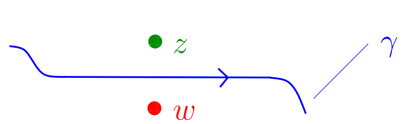
α„herausschneiden". Dann ist

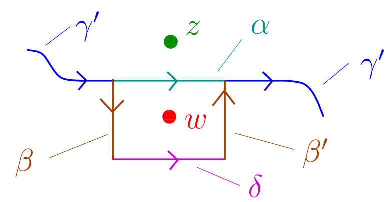
$$2\pi\mathrm{i}\cdot n(\gamma,z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } \gamma \text{ und } \beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma' \text{ sind homotop in } \mathbb{C}\setminus\{z\}}}{=} 2\pi\mathrm{i}\cdot n(\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma',z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 12.7, denn } w \text{ und } z \text{ liegen in}\\ \text{der gleichen Komponente von } \mathbb{C}\setminus|\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma'|}}{=} 2\pi\mathrm{i}\cdot n(\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma',w)$$

$$= \int\limits_{\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot\gamma'} \frac{1}{\xi-w}\,d\xi = \int\limits_{\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot(-\alpha)\cdot\alpha\cdot\gamma'} \frac{1}{\xi-w}\,d\xi$$

$$= \underbrace{\int\limits_{\beta\cdot\delta\cdot\beta'\cdot(-\alpha)} \frac{1}{\xi-w}\,d\xi}_{\substack{=2\pi\mathrm{i}, \text{ denn wie in Korollar 5.6}\\ \text{ist dies gerade das Integral}\\ \text{über den Kreis um } w}} + \underbrace{\int\limits_{\alpha\cdot\gamma'} \frac{1}{\xi-w}\,d\xi}_{=2\pi\mathrm{i}\cdot n(\gamma,w)} = 2\pi\mathrm{i}\cdot(1+n(\gamma,w)).$$

Durch Kürzen von $2\pi\mathrm{i}$ erhalten, wie erhofft, dass $n(\gamma,z) = n(\gamma,w)+1$. ■





13. Der Residuensatz

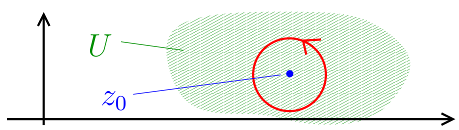
Das Ziel von diesem Kapitel ist den sogenannten Residuensatz zu formulieren und zu beweisen. Dieser erlaubt es uns viele Wegintegrale nur mithilfe von Umlaufzahlen und„Residuen" zu bestimmen. Wir kennen schon die Umlaufzahlen. Wir führen daher als nächstes die Residuen ein, und wir wollen dann verschiedene Methoden kennenlernen, um diese zu berechnen.

13.1. **Das Residuum.** Wir führen also nun erst einmal das Residuum einer Funktion an einer isolierten Singularität ein.

Definition. Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Wir wählen ein $r > 0$, so dass $\overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset U$. Wir bezeichnen dann

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \;:=\; \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$$

als das Residuum von f im Punkt z_0.[55]



Residuum $\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$

Bemerkung. Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität z_0. Nach dem Laurent-Reihenentwicklungssatz 10.4 gibt es ein $r > 0$ und eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, so dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in \overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}.$$

In diesem Fall gilt:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n\,dz \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 10.3 (3)}}}{=}\; c_{-1} = \text{ der Koeffizient von } (z-z_0)^{-1}.$$

Insbesondere, wenn z_0 eine hebbare Singularität ist, dann gilt $\operatorname{res}_{z_0}(f) = c_{-1} = 0$.

Beispiel.

$$\operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \operatorname{res}_0\left(\frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \operatorname{res}_0\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n!}\right) = \text{der } z^{-1}\text{-Koeffizient von } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n!} = \frac{1}{3!}.$$

Selbst wenn wir noch nicht recht wissen, wofür Residuen gut sind, wollen wir nun im Folgenden die Residuen einer Funktion an einer Polstelle mit möglichst geringem Aufwand bestimmen.

[55] Es folgt aus Korollar 5.5, dass diese Definition nicht von der Wahl von r abhängt.

Lemma 13.1. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche in z_0 eine Polstelle der Ordnung $\le k$ besitzt. Dann gilt:*

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \;=\; \frac{1}{(k-1)!}\cdot \begin{array}{c}\textit{die } (k-1)\textit{-ste Ableitung am Punkt } z_0 \textit{ von der}\\ \textit{holomorphen Fortsetzung von } (z-z_0)^k\cdot f(z) \textit{ auf } U\cup\{z_0\}.\end{array}$$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2}$. Da $\cos(0) = 1$ folgt aus Lemma 9.2, dass f bei $z_0 = 0$ eine Polstelle zweiter Ordnung besitzt. Also gilt:

$$\operatorname{res}_0(f) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 13.1 mit } k=2}}{=} \frac{d}{dz}\Big(\text{holomorphe Fortsetzung von } z^2\cdot f(z) \text{ auf } \mathbb{C}\Big)\Big|_{z=0} = \frac{d}{dz}\cos(z)\Big|_{z=0} = -\sin(z)\Big|_{z=0} = 0.$$

Beweis. Es sei also f eine holomorphe Funktion, welche am Punkt z_0 eine Polstelle der Ordnung $\le k$ besitzt. Dann gibt es nach Satz 10.5 ein $r > 0$ und eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, so dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-k}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n \qquad \text{für alle } z\in D_r(z_0)\setminus\{z_0\}$$

Also ist

$$(z-z_0)^k\cdot f(z) \;=\; \sum_{n=-k}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^{n+k} \;=\; \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{m-k}\cdot(z-z_0)^m}_{\text{holomorphe Funktion auf } D_r(z_0)}$$

eine holomorphe Funktion. Also gilt:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{siehe oben}}}{=} c_{-1} = z^{m-1}\text{-Koeffizient von } \sum_{m=0}^{\infty} c_{m-k}\cdot(z-z_0)^m \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Korollar 3.7}}}{=} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{m-k}\cdot(z-z_0)^m}_{\substack{\text{holomorphe Fortsetzung}\\ \text{von } (z-z_0)^k\cdot f(z)}}\Bigg|_{z=z_0}$$

Wir haben damit die gewünschte Gleichheit bewiesen. ■

Folgendes Lemma ist oft auch sehr hilfreich um Residuen zu bestimmen.

Lemma 13.2. *Es seien g, h zwei holomorphe Funktionen auf einer offenen Umgebung von z_0. Es sei $g(z_0) \ne 0$ und es sei z_0 eine Nullstelle erster Ordnung von $h(z)$. Dann ist*

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) \;=\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Beweis. Die Funktion h besitzt nach Voraussetzung bei z_0 eine Nullstelle erster Ordnung. Nach dem Faktorisierungssatz 6.10 gibt es eine holomorphe Funktion φ mit $\varphi(z_0) \ne 0$, so dass

$$h(z) \;=\; (z-z_0)\cdot\varphi(z).$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) = \operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g(z)}{(z-z_0)\cdot\varphi(z)}\right) &\overset{\substack{\text{folgt aus Lemma 13.1 mit } k=1\\ \downarrow}}{=} \text{holomorphe Fortsetzung von } (z-z_0)\cdot\frac{g(z)}{(z-z_0)\cdot\varphi(z)}\Bigg|_{z=z_0}\\ &= \frac{g(z)}{\varphi(z)}\Bigg|_{z=z_0} = \frac{g(z_0)}{\varphi(z_0)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{aus } h(z)=(z-z_0)\cdot\varphi(z) \text{ folgt } h'(z)=(z-z_0)\cdot\varphi'(z)+\varphi(z)\\ \text{die Gleichheit folgt nun durch Einsetzen von } z=z_0}}{=} \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.\end{aligned}$$

■

Beispiel. Die Funktion

$$f(z) \;=\; \tfrac{z^2}{1+z^4}$$

hat Polstellen erster Ordnung wenn $z^4 = -1$, d.h. bei

$$z_k \;=\; \exp\left(\tfrac{\pi}{4}(1+2\cdot k)\,\mathrm{i}\right), \qquad\qquad \text{mit } k = 0,1,2,3.$$

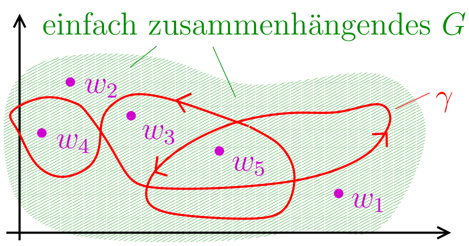
Wir setzen $g(z) = z^2$ und $h(z) = 1 + z^4$. Für die Polstelle z_k erhalten wir:

$$\operatorname{res}_{z_k}(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 13.2}}}{=} \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } (e^{t\,\mathrm{i}})^{-1} = e^{-t\,\mathrm{i}}}}{=} \frac{1}{4}\exp\left(-\tfrac{\pi}{4}(1+2\cdot k)\,\mathrm{i}\right).$$

13.2. **Der Residuensatz.** Der folgende Satz ist einer der Höhepunkte der Funktionentheorie. Er besagt, dass man viele Kurvenintegrale ganz einfach durch das Bestimmen von Residuen und Umlaufzahlen bestimmen kann, ohne dass man sich jemals Gedanken um Stammfunktionen machen muss.

Satz 13.3. (Residuensatz) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $D \subset G$ eine abgeschlossene diskrete Teilmenge[56] und es sei γ ein geschlossener Integrationsweg in G, welcher D nicht trifft. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$, dass*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \sum_{w\in D} n(\gamma, w)\cdot \operatorname{res}_w(f).$$



für jede holomorphe Funktion $f\colon G \setminus \{w_1,\dots,w_5\} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz \;&=\; \sum_{k=1}^{5} n(\gamma, w_k)\cdot \operatorname{res}_{w_k}(f) \\ &=\; \operatorname{res}_{w_3}(f) - \operatorname{res}_{w_4}(f) + 2\cdot\operatorname{res}_{w_5}(f).\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Summe im Residuensatz ist endlich. Genauer gesagt, es gibt nur endlich viele Punkte in $w \in D$, mit $n(\gamma, w) \neq 0$. Dies sieht man wie folgt. Das Bild $|\gamma|$ der Kurve ist kompakt, insbesondere ist $|\gamma|$ enthalten in einer abgeschlossenen Scheibe $\overline{D_r(0)}$. Da D abgeschlossen und diskret ist und da $\overline{D_r(0)}$ kompakt ist, folgt aus Lemma 7.6, dass $D \cap \overline{D_r(0)}$ nur endlich viele Punkte enthält. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass alle Punkte außerhalb von $\overline{D_r(0)}$ auch außerhalb von γ liegen. Insbesondere können nach Lemma 12.6 nur die Punkte in $D \cap \overline{D_r(0)}$ eine nicht verschwindende Umlaufzahl besitzen.

Beweis vom Residuensatz wenn D endlich ist. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $D = \{w_1,\dots,w_k\} \subset G$ eine endliche Teilmenge und es sei γ ein geschlossener Integrationsweg in G, welcher D nicht trifft.

Wir wollen nun zeigen, dass für jede holomorphe Funktion $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$ gilt:

$$(*) \qquad\qquad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \sum_{j=1}^{k} n(\gamma, w_j)\cdot \operatorname{res}_{w_j}(f).$$

[56] In den meisten Anwendungen ist $G = \mathbb{C}$ und D ist eine endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$.

In den nächsten drei Behauptungen wollen wir erst einmal die Aussage für verschiedene Typen von Funktionen beweisen.

Behauptung 1. Wenn sich $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$ zu einer holomorphen Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ fortsetzen läßt, dann gilt die Aussage $(*)$ für f.

Nach Voraussetzung ist G einfach zusammenhängend und damit ist γ nullhomotop in G. Da sich f zu einer holomorphen Funktion of G fortsetzen läßt, folgt aus Korollar 12.3, dass die linke Seite von $(*)$ Null ist. Die rechte Seite von $(*)$ ist ebenfalls Null, nachdem wir auf Seite 106 gesehen hatten, dass das Residuum an einem Punkt verschwindet, wenn sich die Funktion holomorph auf den Punkt fortsetzen läßt. ⊞

Behauptung 2. Es sei $j \in \{1, \dots, k\}$. Die Aussage $(*)$ gilt für jede Laurent-Reihe der Form

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - w_j)^n,$$

welche auf $\mathbb{C} \setminus \{w_j\}$ konvergiert.

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz \;&=\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-w_j)^n \, dz \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 10.2 (3) können wir den} \\ \text{Konvergenzsatz 4.11 für Wegintegrale anwenden}}}{=}\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} c_n \cdot (z-w_j)^n \, dz \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn für } n \neq -1 \\ \text{besitzt } (z-w_j)^n \\ \text{eine Stammfunktion}}}{=}\; c_{-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z-w_j}\, dz}_{=:n(\gamma, w_j)} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Seite 106}}}{=}\; \operatorname{res}_{w_j}(f) \cdot n(\gamma, w_j) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{an allen anderen Punkten sind} \\ \text{die Residuen } = 0 \text{, da die Funktion } f \\ \text{dort holomorph ist}}}{=}\; \sum_{l=1}^{k} n(\gamma, w_l) \cdot \operatorname{res}_{w_l}(f).
\end{aligned}$$

⊞

Behauptung 3. Wenn die Aussage $(*)$ für zwei Funktionen f und g gilt, dann gilt die Aussage $(*)$ auch für $f+g$.

Diese Behauptung folgt sofort aus der Beobachtung, dass beide Seiten der Aussage $(*)$ additiv sind. ⊞

Wir wenden uns nun dem Beweis vom allgemeinen Fall zu. Es sei also $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$ eine beliebige holomorphe Funktion. Für $j = 1, \dots, k$ sei $h_j(z)$ der Hauptteil der Laurent-Reihenentwicklung von f um w_j. Nachdem jedes w_j eine isolierte Singularität von f ist, existiert jeweils ein $\epsilon > 0$, so dass $h_j(z)$ für alle $z \in D_\epsilon(w_j) \setminus \{w_j\}$ konvergiert. Nachdem $h_j(z)$ eine reine Laurent-Reihe ist, konvergiert nach Satz 10.1 die Laurent-Reihe $h_j(z)$ sogar auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{w_j\}$.

Bei den Singularitäten $w_1, \ldots, w_k$ verschwindet jeweils der Hauptteil der Funktion [57] $f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j(z)$, es folgt also aus Satz 10.5, dass wir diese Funktion holomorph auf ganz G fortsetzen können. Wir drehen den Spieß um und schreiben

$$f(z) \;=\; \underbrace{f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j(z)}_{\substack{\text{Aussage } (*) \text{ gilt nach} \\ \text{Behauptung 1}}} \;+\; \sum_{j=1}^{k} \underbrace{h_j(z)}_{\substack{\text{Aussage } (*) \text{ gilt} \\ \text{nach Behauptung 2}}}$$

also gilt nach Behauptung 3 die gewünschte Aussage $(*)$ auch für die Funktion f. ■

Beweis vom Residuensatz wenn D unendlich ist $(*)$. Es sei nun also $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $D \subset G$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge und es sei $\gamma\colon [a, b] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg, welcher D nicht trifft.

> Die Menge D ist nun also eventuell unendlich. Aber es folgt aus Lemma 7.6, dass für jedes $r > 0$ die Menge $D \cap D_r(0)$ endlich ist. Wir wollen uns daher auf einen endlichen Bereich $D_r(0)$ einschränken. Wir müssen dabei r so wählen, dass γ in $D_r(0)$ enthalten ist, und dass γ in $G \cap D_r(0)$ zudem auch nullhomotop ist.

Nachdem G einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie von $\Phi\colon [a, b] \times [0, 1] \to G$ von γ zu einem konstanten Weg. Aus der Kompaktheit von $\Phi([a, b] \times [0, 1])$ folgt, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$\Phi([a, b] \times [0, 1]) \;\subset\; D_r(0).$$

Nachdem D abgeschlossen und diskret ist und da $\overline{D_r(0)}$ kompakt ist, folgt aus Lemma 7.6, dass $D' := D \cap D_r(0)$ nur endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_n$ enthält.

Wir führen nun genau das gleiche Argument wie im vorherigen Beweis durch, nur dass wir anstatt mit G und D nun mit $G' = G \cap D_r(0)$ und $D' = D \cap D_r(0)$ arbeiten. Die Menge G' ist offen, aber nicht notwendigerweise einfach zusammenhängend. Aber die Kurve γ ist nullhomotop in G', und das ist das einzige, was wir im vorherigen Argument verwendet hatten. Der Rest vom vorherigen Beweis kann ohne Abänderung übernommen werden. ■

Definition. Es sei $X \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Wir sagen X besitzt eine positive Randkurve, wenn es einen geschlossenen Integrationsweg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $|\gamma| = \partial X$ gibt, so dass

$$n(\gamma, z) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{für alle } z \text{ im Inneren von } X, \\ 0 & \text{für alle } z \notin \overline{X}. \end{cases}$$

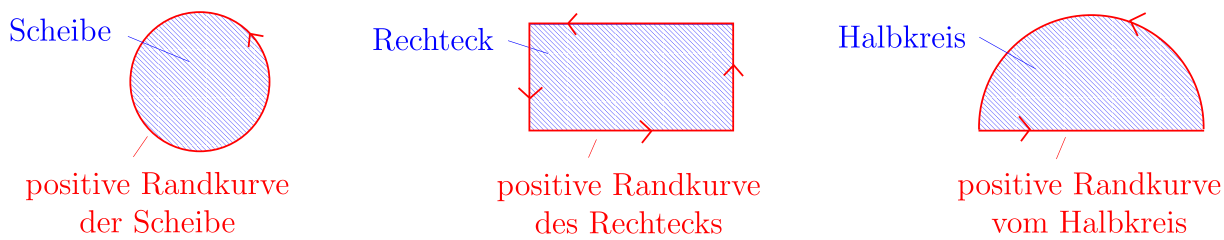
Wir bezeichnen einen solchen Integrationsweg ebenfalls mit ∂X.[58]

---

[57] In der Tat, denn für $l \in \{1, \ldots, k\}$ gilt an dem Punkt w_l, dass

$$\text{Hauptteil}\Big(f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j(z)\Big) \;=\; \underbrace{\text{Hauptteil}(f(z)) - \text{Hauptteil}(h_l(z))}_{=\,0,\ \text{nach Wahl von } h_l} - \sum_{j=1, j\neq l}^{k} \underbrace{\text{Hauptteil}(h_j(z))}_{\substack{=\,0,\ \text{da } h_j(z) \text{ holomorph} \\ \text{in } w_l \text{ für } j \neq l}} \;=\; 0.$$

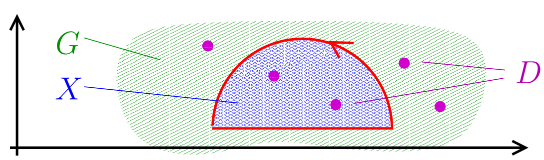
[58] Für ein Rechteck Q ist dies im Prinzip gerade die Konvention, welche wir auf Seite 42 eingeführt hatten.



Die meisten„alltäglichen” Anwendungen vom Residuensatz kann man schon mit der folgenden, etwas einfacheren Residuenformel bewerktätigen.

Satz 13.4. (Residuenformel) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und es sei $X \subset G$ eine Teilmenge mit $\overline{X} \subset G$, welche eine positive Randkurve besitzt. Es sei $D \subset G$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge mit $D \cap \partial X = \varnothing$, und es sei $f\colon G \setminus D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\int\limits_{\partial X} f(z)\,dz \;=\; 2\pi\mathrm{i} \sum_{w \in D\cap X} \mathrm{res}_w(f).$$



$$\int\limits_{\partial X} f(z)\,dz \;=\; 2\pi\mathrm{i} \sum_{w \in D\cap X} \mathrm{res}_w(f)$$

Beweis. Die Residuenformel folgt sofort aus dem Residuensatz 13.3, angewandt auf G und auf $\gamma = \partial X$, denn für alle w im Inneren von X gilt nach Voraussetzung $n(\gamma, w) = 1$ und für alle w, welche nicht in $\overline{X}$ liegen, gilt nach Voraussetzung $n(\gamma, w) = 0$. ■

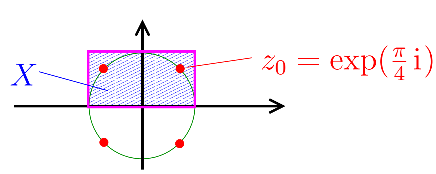
Beispiel. Wir betrachten den Fall $G = \mathbb{C}$, die holomorphe Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, mit isolierten Singularitäten bei

$$z_k \;=\; \exp\left(\tfrac{\pi}{4}(1 + 2\cdot k)\,\mathrm{i}\right), \qquad\qquad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3.$$

Auf Seite 108 hatten wir gesehen, dass $\mathrm{res}_{z_k}(f) = \frac{1}{4}\exp(-\frac{\pi}{4}(1 + 2\cdot k)\,\mathrm{i})$. Zudem sei X das Rechteck mit den Ecken $-1, -1 + \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}, 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial X} f(z)\,dz \;&\overset{\substack{\text{Residuenformel 13.4}\\ \downarrow}}{=}\; 2\pi\mathrm{i} \sum_{w \in D\cap X} \mathrm{res}_w(f) \;\overset{\substack{\text{nur } z_0 \text{ und } z_1 \text{ liegen in } X\\ \downarrow}}{=}\; 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\mathrm{res}_{z_0}(f) + \mathrm{res}_{z_1}(f)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\pi\mathrm{i}\cdot\Big(\underbrace{\exp\left(-\tfrac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})} + \underbrace{\exp\left(-\tfrac{3\pi}{4}\mathrm{i}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i})}\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\pi.
\end{aligned}$$

die vier Nullstellen von $1 + z^4$ sind
$z_k = \exp(\frac{\pi}{4}(1 + 2k)\,\mathrm{i})$, mit $k = 0, 1, 2, 3$



14. Uneigentliche Integrale von rationalen Funktionen

In diesem Kapitel wollen wir den Residuensatz anwenden, um höchst elegant uneigentliche Integrale von rationalen Funktionen zu bestimmen Wir erinnern dazu an folgende zwei Definitionen.

Definition. Eine rationale Funktion ist eine Funktion, welche geschrieben werden kann als Bruch von zwei Polynomen, möglicherweise mit komplexen Koeffizienten.[59]

Definition. Für eine reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ hatten wir in [**Fr1**, Kapitel 17] das uneigentliche Integral über $(-\infty, \infty)$ definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;:=\; \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \;:=\; \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_{0}^{r} f(x)\,dx,$$

sofern die beiden Grenzwerte rechts existieren, also gegen eine komplexe Zahl konvergieren.

In diesem Kapitel wollen wir uneigentliche Integrale von rationalen Funktionen studieren, also uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, und wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Beispielsweise möchten wir gerne das folgende uneigentliche Integral bestimmen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx.$$

Satz 14.1. *Es seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei reelle Polynome, wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \text{ konvergiert} \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{Grad}(q(x)) \geq \operatorname{Grad}(p(x)) + 2.$$

In dem Beweis von Satz 14.1 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 14.2. *Es sei $p(z)$ ein komplexes Polynom von Grad n. Dann gibt es $c, C > 0$ und ein $R > 0$, so dass*

$$c \cdot |z|^n \;\leq\; |p(z)| \;\leq\; C \cdot |z|^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

Beweis. Es sei also

$$p(z) \;=\; a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_1 \cdot z + a_0,$$

ein Polynom von Grad n, d.h. mit $a_n \neq 0$. Wir schreiben dieses wie folgt um:

$$p(z) \;=\; a_n \cdot z^n \cdot \Big(1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}}_{=:r(z)}\Big).$$

[59] In der Schule unterscheidet man zwischen ganzrationalen Funktionen, welche durch Polynome beschrieben werden können und gebrochenrationalen Funktionen, welche eben nicht durch Polynome beschrieben werden können. Diese Sprechweise ist in der Fachmathematik eher unüblich.

Nachdem $\lim\limits_{z\to\infty} r(z) = 0$ gibt es ein $R > 0$, so dass

$$|r(z)| \le \frac{1}{4} \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \ge R.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt nun, dass

$$\underbrace{\frac{3}{4}\cdot|a_n|}_{=:c}\cdot|z|^n \le |p(z)| \le \underbrace{\frac{5}{4}\cdot|a_n|}_{=:C}\cdot|z|^n \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \ge R.$$

■

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis von Satz 14.1 zu.

Beweis von Satz 14.1. Es seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei reelle Polynome, wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Wir bezeichnen mit k den Grad von $p(x)$ und wir bezeichnen mit l den Grad von $q(x)$. Aus Lemma 14.2, angewandt auf $p(x)$ und $q(x)$ folgt, dass es $c, C > 0$ und ein $R > 0$ gibt, so dass

$$c\cdot|x|^{k-l} \le \left|\frac{p(x)}{q(x)}\right| \le C\cdot|x|^{k-l} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \text{ mit } |x| \ge R.$$

Es sei $s \in \mathbb{Z}$. Aus [**Fr1**, Lemma 17.1] folgt:

$$\text{die uneigentlichen Integrale } \int\limits_{-\infty}^{-R} x^s\,dx \quad \text{und} \quad \int\limits_{R}^{\infty} x^s\,dx \text{ konvergieren} \iff s \le -2.$$

Der Satz folgt nun aus [**Fr1**, Satz 18.3], d.h. dem Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale.[60][61] ■

Satz 14.3. *Es seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei reelle Polynome, wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Wir nehmen an, dass* $\mathrm{Grad}(q(x)) \ge \mathrm{Grad}(p(x)) + 2$. *Dann gilt*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\cdot \sum_{\substack{w \text{ Nullstelle} \\ \text{des Nenners } q(z) \text{ mit} \\ \mathrm{Im}(w)>0}} \mathrm{res}_w\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 14.2}}}{=} \lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{0} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx + \lim_{r\to\infty}\int\limits_{0}^{r} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{r} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{der Weg } \alpha_r \text{ verbindet die Punkte } -r \text{ und } r \text{ auf der } x\text{-Achse}}}{=} \lim_{r\to\infty}\int\limits_{\alpha_r} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = (*)$$

Wir wollen jetzt α_r zu einem geschlossenen Weg verlängern, damit wir die Residuenformel 13.4 verwenden können.

---

[60]Zur Erinnerung, dieses lautet wie folgt: Es seien $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen gegeben, wobei $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Nehmen wir an, es gibt ein $C \in (a,b)$, so dass $g(x) \ge |f(x)|$ für alle $x \in [C,b)$. Dann gilt

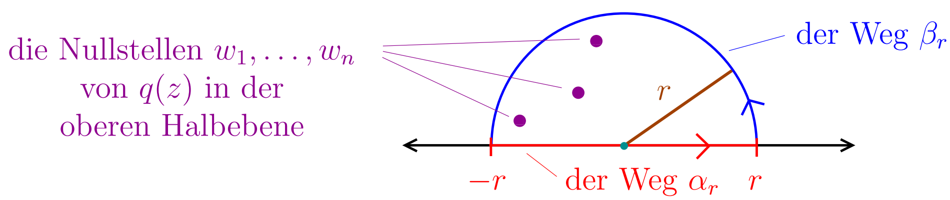
$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \text{ konvergiert} \implies \int\limits_a^b f(x)\,dx \text{ konvergiert.}$$

Eine analoge Aussage gilt auch für Funktionen, welche auf $(a,b]$ definiert sind.

[61]Warum folgen eigentlich beide Aussagen„$\Rightarrow$" und„$\Leftarrow$" von Satz 14.1 aus den gerade angegebenen Argumenten?

Für $r > 0$ bezeichnen wir mit β_r den Halbkreis in der oberen Halbebene um den Ursprung, welcher den Punkt r mit dem Punkt $-r$ verbindet. Dann gilt

$$(*) \quad \overset{\substack{\text{Lemma 4.2}\\ \downarrow}}{=} \lim_{r\to\infty} \underbrace{\int_{\alpha_r\cdot\beta_r} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz}_{\substack{\text{für } r \text{ groß genug ist dies nach der}\\ \text{Residuenformel 13.4 bestimmt durch die}\\ \text{Residuen von } \frac{p(z)}{q(z)} \text{ bei allen}\\ \text{Nullstellen } w \text{ von } q(z) \text{ mit } \operatorname{Im}(w)>0}} - \lim_{r\to\infty}\int_{\beta_r}\frac{p(z)}{q(z)}\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{hierbei sind } w_1,\dots,w_n \text{ die Nullstellen von } q(z)\\ \text{in der oberen Halbebene}}}{=} 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{j=1}^{n}\operatorname{res}_{w_j}\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right) - \lim_{r\to\infty}\int_{\beta_r}\frac{p(z)}{q(z)}\,dz.$$



Wir müssen nun noch zeigen, dass der zweite Grenzwert verschwindet, d.h. wir wollen folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Es ist
$$\lim_{r\to\infty}\int_{\beta_r}\frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 0.$$

Es folgt aus Lemma 14.2, angewandt auf $p(z)$ und $q(z)$, dass es ein $R > 0$ und ein $C > 0$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt, dass

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq C\cdot|z|^{\operatorname{Grad}(p)-\operatorname{Grad}(q)} \leq C\cdot|z|^{-2}.$$

Für alle $r \geq R$ gilt dann

$$\left|\int_{\beta_r}\frac{p(z)}{q(z)}\,dz\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 4.3}}}{\leq} \text{Länge}(\beta_r)\cdot\text{Maximum von } \underbrace{\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right|}_{\leq\frac{C}{|z|^2}} \text{ auf dem Halbkreis } \beta_r \leq \pi r\cdot\frac{C}{r^2} = \frac{C\pi}{r}.$$

Wir sehen also, dass im Grenzwert $r \to \infty$ das Integral verschwindet. ■

Beispiel. Wir kehren zu dem Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$
zurück. Auf Seite 108 hatten wir schon gesehen, dass die Nullstellen des Nenners gegeben sind durch

$$z_k = \exp\left(\tfrac{\pi}{4}(1+2\cdot k)\mathrm{i}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}(1+2\cdot k)\right) + \mathrm{i}\cdot\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{4}(1+2\cdot k)\right)}_{>0 \text{ wenn } k=0,1}, \quad \text{mit } k = 0,1,2,3.$$

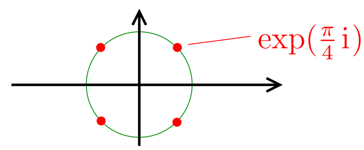
Für $k = 0, 1$ liegt z_k in der oberen Halbebene, für $k = 2, 3$ liegt z_k in der unteren Halbebene. Auf Seite 108 hatten wir schon berechnet, dass

$$\operatorname{res}_{z_k}(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 13.2}}}{=} \frac{\text{Zähler bei } z_k}{\text{Ableitung des Nenners bei } z_k} = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k} = \frac{1}{4}\exp\big(-\tfrac{\pi}{4}(1+2\cdot k)\,\mathrm{i}\big).$$

Wir erhalten also, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 14.3}}}{=} 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{k=0,1} \frac{1}{4}\exp\big(-\tfrac{\pi}{4}(1+2\cdot k)\,\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{i}\cdot\Big(\underbrace{\exp\big(-\tfrac{\pi}{4}\,\mathrm{i}\big)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})} + \underbrace{\exp\big(-\tfrac{3\pi}{4}\,\mathrm{i}\big)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i})}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi.$$

die vier Nullstellen von $1 + z^4$ sind
$z_k = \exp(\frac{\pi}{4}(1+2k)\,\mathrm{i})$, mit $k = 0, 1, 2, 3$



15. Meromorphe Funktionen und der Satz von Rouché (*)

Dieses Kapitel ist nicht mehr Teil der Analysis III Vorlesung und ist insbesondere in keinster Weise klausurrelevant. Jedoch ist der Stoff dieses Kapitels Staatsexamensstoff.

15.1. Meromorphe Funktionen.

Definition. Eine meromorphe Funktion ist eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus D \to \mathbb{C}$, wobei $D \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge ist, so dass jeder Punkt in D entweder eine hebbare Singularität oder eine Polstelle ist.

Beispiele.

(1) Jede ganze Funktion ist meromorph.
(2) Jede rationale Funktion ist meromorph, denn der Nenner besitzt nur endlich viele, insbesondere diskrete, Nullstellen. Zudem ist jede Singularität einer rationalen Funktion eine Polstelle.
(3) Summen und Produkte von meromorphen Funktionen sind meromorph. Genauer gesagt, wenn $f\colon \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ und $g\colon \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen sind, dann sind auch $f+g\colon \mathbb{C}\setminus(D\cup E) \to \mathbb{C}$ und $f\cdot g\colon \mathbb{C}\setminus(D\cup E) \to \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen.
(4) Die Ableitung einer meromorphen Funktion ist wiederum meromorph. [62]
(5) Andererseits ist die Funktion $\sin(\frac{1}{z})$ nicht meromorph, denn wie wir auf Seite 78 und auf Seite 88 gesehen hatten, ist die Singularität $z_0 = 0$ weder hebbar noch eine Polstelle.

Lemma 15.1. *Es sei $f\colon \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, welche nicht die Nullfunktion ist. Wir setzen $N := \{z \in \mathbb{C} \setminus D \,|\, f(z) = 0\}$. Dann ist die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ auf $\mathbb{C} \setminus (D \cup N)$ ebenfalls meromorph.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $N := f^{-1}(\{0\})$ die Nullstellenmenge von f. Da f stetig ist, und da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen ist, folgt aus [**Fr2**, Satz 2.15], dass das Urbild $N := f^{-1}(\{0\})$ auch abgeschlossen ist. In Lemma 9.1 hatten wir schon gesehen, dass N diskret ist. Nach Voraussetzung ist auch D diskret und abgeschlossen. Dann ist auch $D \cup N$ diskret und abgeschlossen. Es folgt aus dieser Diskussion und Lemma 9.3, dass $\frac{1}{f(z)}$ auf $\mathbb{C} \setminus (D \cup N)$ eine meromorphe Funktion ist. ■

Bemerkung. Wir sagen zwei meromorphe Funktionen f und g sind *äquivalent*, wenn f und g nach Hebbung aller hebbaren Singularitäten übereinstimmen.[63] [64] Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{M}$ die Menge der Äquivalenzklassen von meromorphen Funktionen. Wir können

---

[62] Wenn z eine Polstelle von f ist, dann folgt aus Satz 10.5 und Satz 3.6, dass bei z eine Polstelle von f' vorliegt.

[63] Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

[64] Von der Definition her sind beispielsweise

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$$

zwei verschiedene meromorphe Funktionen, denn die Definitionsbereiche sind verschieden. Wenn wir aber alle hebbaren Singularitäten von g beheben, erhalten wir gerade f. Die beiden meromorphen Funktionen sind also äquivalent.

nun wie üblich das Produkt und die Summe auf $\mathcal{M}$ bilden.[65] Mit diesen Operationen bildet $\mathcal{M}$ einen Ring. Es folgt dann aus Lemma 15.1, dass $\mathcal{M}$ sogar ein Körper ist. Dieser Körper wird, wenig überraschend, als der *Körper der meromorphen Funktionen* bezeichnet.

Definition. Es sei f eine meromorphe Funktion, welche nicht die Nullfunktion ist.

(1) Wir bezeichnen mit $\widetilde{f}$ die meromorphe Funktion, welche wir durch Hebung aller hebbaren Singularitäten von f erhalten.
(2) Wir bezeichnen mit $N(f)$ die Menge der Nullstellen von $\widetilde{f}$ und wir bezeichnen mit $P(f)$ die Menge der Polstellen von $\widetilde{f}$.
(3) Für $a \in N(f)$ bezeichnen wir mit $o(f,a) \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle von $\widetilde{f}$. Ganz analog definieren wir $o(f,a) \in \mathbb{N}$ für $a \in P(f)$ als die Ordnung der Polstelle. Manchmal nennen wir $o(f,z_0)$ die Vielfachheit der Nullstelle bzw. der Polstelle.
(4) Für $X \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir

$$N(f,X) \;:=\; \sum_{a\in N(f)\cap X} o(f,a) \qquad bzw. \qquad P(f,X) \;:=\; \sum_{a\in P(f)\cap X} o(f,a)$$

als die Anzahl der Nullstellen (bzw. Polstellen) von f in X, mit Vielfachheit gezählt.

Beispiel.

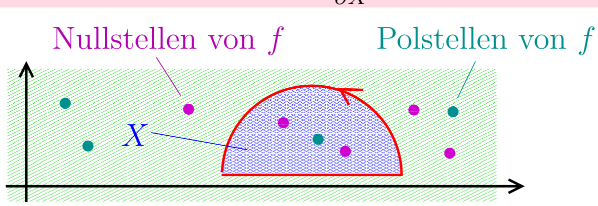
(1) Es ist

$$N(z^4,\mathbb{C}) \;=\; 4 \quad \text{und} \quad P\Big(\frac{z-1}{(z-2)(z+3)^2},\mathbb{C}\Big) \;=\; 1+2 \;=\; 3.$$

(2) Aus dem Fundamentalsatz der Algebra, in der Formulierung von Korollar 6.8, folgt, dass für ein Polynom $p(z)$ von Grad n gilt $N(p(z),\mathbb{C}) = n$. Mit anderen Worten, die Anzahl der Nullstellen von einem Polynom von Grad n in $\mathbb{C}$, mit Vielfachheit gezählt, beträgt gerade n.

Satz 15.2. (Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral) *Es sei f eine meromorphe Funktion und es sei $X \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, welche eine positive Randkurve ∂X besitzt. Wenn keine Nullstelle oder Polstelle von $\widetilde{f}$ auf ∂X liegt, dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial X}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \;=\; N(f,X) \;-\; P(f,X).$$



$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \;=\; N(X,f) - P(X,f)$$

Der Satz besagt also, dass das Wegintegral von $\frac{f'}{f}$ über den Rand ∂X die Differenz zwischen der Zahl der Nullstellen und Zahl der Polstellen (jeweils mit Vielfachheit gezählt) von f in X bestimmt.

[65] Hierbei verwenden wir, dass für $f \sim f'$ und $g \sim g'$ auch gilt $(f+f') \sim (g+g')$ und $(f\cdot f') \sim (g\cdot g')$.

Beweis. Wir können annehmen, dass $f = \widetilde{f}$, d.h. wir können annehmen, dass f keine hebbaren Singularitäten besitzt.[66] Es sei γ eine positive Randkurve. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus der Residuenformel 13.4,}\\ \text{wir verwenden hierbei, dass die Singularitätenmenge}\\ \text{von } \frac{f'}{f} \text{ gegeben ist durch } N(f)\cup P(f).}}{=} \sum_{w\in N(f)\cap X}\operatorname{res}_w(f) + \sum_{w\in P(f)\cap X}\operatorname{res}_w(f).$$

Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

(1) Für $a \in N(f)$ gilt $\operatorname{res}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = o(f,a)$.

(2) Für $a \in P(f)$ gilt $\operatorname{res}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = -o(f,a)$.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass $a \in N(f)$. Wir setzen $k = o(f,a)$. Dann besagt der Faktorisierungssatz 6.10, dass es eine holomorphe Funktion g gibt mit $g(a) \neq 0$, so dass

$$f(z) = (z-a)^k \cdot g(z).$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{res}_a\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Produktregel}}}{=} \operatorname{res}_a\left(\frac{k\cdot(z-a)^{k-1}\cdot g(z) + (z-a)^k\cdot g'(z)}{(z-a)^k\cdot g(z)}\right) \overset{\substack{\text{Kürzen von } (z-a)^{k-1}\\ \downarrow}}{=} \operatorname{res}_a\left(\frac{k\cdot g(z) + (z-a)\cdot g'(z)}{(z-a)\cdot g(z)}\right) \underset{\uparrow}{=} k = o(f,a).$$

da $g(a) \neq 0$ ist dies eine Polstelle der Ordnung ≤ 1, nach Lemma 13.1 erhalten wir das Residuum durch Multiplizieren mit $(z-a)$ und Einsetzen von $z = a$ in die holomorphe Fortsetzung

Es sei nun $a \in P(f)$. Wir setzen $k = o(f,a)$. Dann besagt Lemma 9.2, dass wir in der Nähe von a schreiben können

$$f(z) = (z-a)^{-k} \cdot g(z),$$

wobei g eine holomorphe Funktion ist mit $g(a) \neq 0$. Genau die gleiche Rechnung wie oben zeigt, dass das Residuum nun $-k = -o(f,a)$ beträgt. ∎

15.2. **Der Satz von Rouché** $(*)$.

Satz 15.3. (Satz von Rouché) *Es seien f und φ meromorphe Funktionen. Zudem sei X eine Teilmenge, welche eine positive Randkurve besitzt. Wenn f und φ in X keine Polstelle besitzen, und wenn*

$$|\varphi(z)| < |f(z)| \qquad \text{für alle } z \in \partial X,$$

dann gilt

$$N(f,X) = N(f+\varphi, X),$$

d.h. f und $f+\varphi$ besitzen die gleiche Anzahl von Nullstellen in X, mit Vielfachheit gezählt.

Wir werden nun mithilfe des Satzes von Rouché einen neuen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra geben.

[66] In der Tat, denn die beiden Seiten der gewünschten Gleichung stimmen für f und $\widetilde{f}$ überein.

Satz 6.7. (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom $f(z)$ von Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Es sei

$$p(z) \;=\; a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0$$

ein Polynom von Grad n, d.h. es ist $a_n \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass $p(z)$ eine Nullstelle besitzt.

> Der Satz 15.3 von Rouché besagt insbesondere, dass wenn wir zeigen wollen, dass $N(p, X) > 0$, dann müssen wir schreiben $p = f + \varphi$ und ein $X = B_r(0)$ wählen, so dass wir die Nullstellen von f auf X bestimmen können, und so dass $|\varphi| < |f|$ auf dem Rand $\partial X = \partial B_r(0)$. In unserem Fall wählen wir nun $f(z) = a_n \cdot z^n$ und $\varphi(z) = a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0$, denn wir kennen die Nullstellen von f, und für $X = D_r(0)$ groß genug, ist $|\varphi| < |f|$ auf $\partial X = \partial B_r(0)$.

Wir setzen also $f(z) = a_n \cdot z^n$ und $\varphi(z) = a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Aus dem Beweis von Lemma 14.2 folgt, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass $|\varphi(z)| < |f(z)| = |a_n \cdot z^n|$ für alle z mit $|z| \geq r$. Dann gilt

$$N(p, B_r(0)) \;=\; N\varphi\big(\underbrace{a_n \cdot z^n}_{=f} + \underbrace{a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}_{=\varphi}, B_r(0)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von Rouché}}}{=} N(\underbrace{a_n \cdot z^n}_{=f(z)}, B_r(0)) \;=\; n \;>\; 0.$$

■

Bemerkung. Die Aussage des Satzes von Rouché gilt nicht, wenn wir anstatt Nullstellen mit Vielfachheiten nur die Nullstellen zählen würden. Wir betrachten beispielsweise die Funktionen $f(z) = z^3$ und $\varphi(z) = 1$ auf $D_2(0)$. Dann gilt $|\varphi(z)| < |f(z)|$ für alle z mit $|z| = 2$. Die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in $D_2(0)$ beträgt 1, während $f(z)+\varphi(z) = z^3+1$ drei Nullstellen in $D_2(0)$ besitzt.

Beweis des Satzes von Rouché. Es genügt zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\colon [0,1] &\to \mathbb{N}_0 \\ \lambda &\mapsto N(f + \lambda \cdot \varphi, X) \end{aligned}$$

konstant ist. Wir beginnen mit einer Beobachtung: für $\lambda \in [0,1]$ ist

$$\Phi(\lambda) \;=\; N(f + \lambda \cdot \varphi, X) \;=\; N(f + \lambda \cdot \varphi, X) \;-\; \underbrace{P(f + \lambda \cdot \varphi, X)}_{\substack{= 0, \text{ denn } f \text{ und } \varphi \text{ besitzen} \\ \text{auf } X \text{ keine Polstelle}}} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wir können Satz 15.2 anwenden,} \\ \text{denn aus } |g| < |f| \text{ auf } \partial X \text{ und } \lambda \in [0,1], \\ \text{folgt, dass auch } f + \lambda \cdot \varphi \text{ keine Nullstellen} \\ \text{auf } \partial X \text{ besitzt}}}{=}\; \int_{\partial X} \frac{(f+\lambda\cdot\varphi)'}{f+\lambda\cdot\varphi}\, dz.$$

Die rechte Seite hängt stetig von λ ab.[67] Die Funktion Φ ist also stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an. Es folgt also aus Lemma 7.7, dass die Abbildung Φ, wie gewünscht, konstant ist. ■

[67]Wir skizzieren im Folgenden den Beweis, dass Φ stetig ist. Da die stetige Funktion

$$\begin{array}{rcl} \partial X \times [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ (x,\lambda) & \mapsto & f(x)+\lambda\varphi(x) \end{array}$$

keine Nullstelle besitzt und da $\partial X \times [0,1]$ kompakt ist, gibt es ein $C>0$, so dass $|f(x)+\lambda\varphi(x)| \geq C$ für alle $x \in \partial X$ und $\lambda \in [0,1]$. Zudem gibt es ein $D \geq 0$, so dass $|f'\varphi - \varphi' f|$ auf ∂X durch D nach oben beschränkt ist. Für $\lambda, \mu \in [0,1]$ gilt, dass

$$\frac{(f+\lambda\cdot\varphi)'}{f+\lambda\cdot\varphi} - \frac{(f+\mu\varphi)'}{f+\mu\varphi} = \frac{(f'+\lambda\cdot\varphi')(f+\mu\varphi)-(f'+\mu\varphi')(f+\lambda\cdot\varphi)}{(f+\lambda\cdot\varphi)(f+\mu\varphi)} = \frac{(f'\varphi-\varphi' f)(\mu-\lambda)}{(f+\lambda\cdot\varphi)(f+\mu\varphi)}.$$

Für alle $\mu, \lambda \in [0,1]$ folgt:

$$|\Phi(\lambda)-\Phi(\mu)| = \left| \int\limits_{\partial X} \frac{(f+\lambda\cdot\varphi)'}{f+\lambda\cdot\varphi} - \frac{(f+\mu\varphi)'}{f+\mu\varphi}\, dz \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Standardabschätzung für Wegintegrale 4.3}}}{\leq} \text{Länge}(\gamma)\cdot\frac{D}{C^2}\cdot|\mu-\lambda|.$$

Wir sehen also, dass Φ stetig ist.

16. Biholomorphe Abbildungen und der Riemannsche Abbildungssatz (∗)

Auch dieses Kapitel ist komplett irrelevant für Analysis III und super relevant für das Staatsexamen.

Wir erinnern zuerst an eine Definition aus der Analysis II.

Definition. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus, wenn f eine C^∞-Abbildung[68]ist, wenn f bijektiv ist, und wenn die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls eine C^∞-Abbildung ist. Wenn es für zwei offene Mengen U und V einen solchen Diffeomorphismus gibt, dann nennen wir U und V diffeomorph.

Beispiele.

(1) Die Mengen $U = (-1, 1)$ und $V = \mathbb{R}$ sind diffeomorph, denn

$$\begin{aligned} f\colon U = (-1,1) &\to V = \mathbb{R} \\ t &\mapsto \tan\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) \end{aligned}$$

ist ein Diffeomorphismus.

(2) Es folgt relativ leicht aus den Definitionen, dass wenn U und V diffeomorphe Teilmengen von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ sind, dann ist U einfach zusammenhängend, genau dann, wenn V einfach zusammenhängend ist. Insbesondere sind also beispielsweise die Mengen $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ nicht diffeomorph.

(3) Die offene Scheibe $U = D_1(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ und die ganze Ebene $V = \mathbb{R}^2$ sind diffeomorph. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} f\colon U = D_1(0,0) &\to V = \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \begin{cases} \frac{p}{\|p\|} \cdot \tan(\frac{\pi}{2} \cdot \|p\|), & \text{wenn } p \neq (0,0), \\ (0,0), & \text{wenn } p = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus.[69]

Wir führen nun die offensichtlichen Analoga für den komplex differenzierbaren Fall ein. Genauer gesagt, wir haben folgende Definition.

Definition. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen von $\mathbb{C}$ heißt biholomorph, wenn f eine holomorphe Abbildung ist, wenn f bijektiv ist, und wenn die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls eine holomorphe Abbildung ist. Wenn es für zwei offene Mengen U und V von $\mathbb{C}$ eine solche biholomorphe Abbildung gibt, dann nennen wir U und V biholomorph.

Beispiele.

(1) Es ist offensichtlich, dass für alle $a \neq 0$ and $b \in \mathbb{C}$ die Abbildung $f(z) = az + b$ auf $\mathbb{C}$ biholomorph ist. Es folgt unter anderem, dass alle offenen Scheiben zueinander biholomorph sind.

(2) Nachdem eine biholomorphe Abbildung insbesondere ein Diffeomorphismus ist, folgt aus dem obigen Beispiel (2), dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C}$ nicht biholomorph sind.

---

[68]D.h. wenn f beliebig oft differenzierbar ist.

[69]Der Nachweis dieser Aussage ist etwas lästig. Wir überlassen das gerne als freiwillige Übungsaufgabe.

(3) Die Mengen $U = \mathbb{C}$ und $V = D_1(0)$ sind nicht biholomorph. In der Tat, denn jede holomorphe Funktion $U = \mathbb{C} \to V = D_1(0)$ ist beschränkt, also nach dem Satz 6.6 von Liouville konstant. Insbesondere kann eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to D_1(0)$ nicht bijektiv, geschweige denn biholomorph sind.

Notation.

(1) Wir bezeichnen mit
$$H \;:=\; \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$
die offene obere Halbebene.

(2) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$. Eine elementare, aber etwas längere Rechnung, zeigt, dass die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} H & \to & H \\ z & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$
biholomorph ist. Diese Abbildungen auf H werden die Möbiustransformationen der oberen Halbebene genannt.

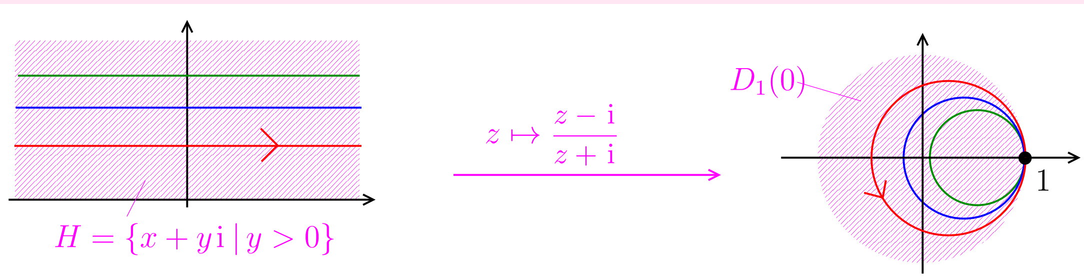
Wir hatten gerade angemerkt, dass für $a \neq 0$ and $b \in \mathbb{C}$ die Abbildung $f(z) = az + b$ auf $\mathbb{C}$ biholomorph ist. Das folgende Lemma zeigt nun, dass jede biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von dieser Form ist.

Lemma 16.1. *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung. Dann gibt es $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Die Grundidee des Beweises ist, dass man die isolierte Singularität $z_0 = 0$ der Funktion $g(z) = f(\frac{1}{z})$ betrachtet. Man unterscheidet dann die drei Fälle, dass $z_0 = 0$ hebbar ist, dass $z_0 = 0$ eine Polstelle ist, und dass $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität ist. Mithilfe des Satzes von Casorati–Weierstraß kann man hierbei den letzten Fall ausschließen. Die Details des Beweises von Lemma 16.1 werden in Übungsblatt 8 ausgeführt. ■

Das nächste Lemma besagt insbesondere, dass die offene Scheibe $D_1(0)$ und die obere Halbebene H biholomorph sind.

Lemma 16.2. *Die Abbildung*
$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon H & \to & D_1(0) \\ z & \mapsto & \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \end{array}$$
ist biholomorph. Zudem gilt für alle $y > 0$, dass
$$\Phi\big(\{x + \mathrm{i}y \,|\, x \in \mathbb{R}\}\big) \;=\; \Big\{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, \big|z - \tfrac{y}{y+1}\big| = \tfrac{1}{y+1}\Big\} \setminus \{1\}.$$



Das Lemma besagt also insbesondere, dass der Abschluss vom Bild einer horizontalen Gerade unter der Abbildung Φ ein Kreis in $\overline{D_1(0)}$ ist, welcher den Punkt 1 enthält.[70]

Beweis. Wir zeigen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Es sei $y > 0$. Dann liegt für alle $x \in \mathbb{R}$ der Punkt $\Phi(x + \mathrm{i}y)$ auf dem Kreis um $\frac{y}{y+1}$ von Radius $\frac{1}{y+1}$.

Der Beweis der Behauptung ist gegeben durch eine elementare, allerdings etwas langwierige, Rechnung. Es sei also $y > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left|\Phi(x+\mathrm{i}y) - \frac{y}{y+1}\right|^2 &= \left|\frac{x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}} - \frac{y}{y+1}\right|^2 = \left|\frac{(x+\mathrm{i}(y-1))(x-\mathrm{i}(y+1))}{x^2+(y+1)^2} - \frac{y}{y+1}\right|^2 \\
&= \left|\frac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2} - \frac{y}{y+1}\right|^2 \\
&= \left|\frac{(x^2+y^2-1-2xi)(y+1)-(x^2+(y+1)^2)y}{(x^2+(y+1)^2)(y+1)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{(x^2+y^2-1)(y+1)-(x^2+y^2+1+2y)y-2xi(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)(y+1)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{-y+x^2+y^2-1-(1+2y)y-2xi(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)(y+1)}\right|^2 \\
&= \frac{(x^2-(y+1)^2)^2 + (2x(y+1))^2}{(x^2+(y+1)^2)^2(y+1)^2} = \frac{(x^2+(y+1)^2)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2(y+1)^2} = \frac{1}{(y+1)^2}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt also, dass $\Phi(x + \mathrm{i}y)$ auf den Kreis um $\frac{y}{y+1}$ von Radius $\frac{1}{y+1}$ liegt. ⊞

Es folgt insbesondere aus der gerade bewiesenen Behauptung, dass $\Phi(H) \subset D_1(0)$. Wir betrachten nun noch die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Psi\colon D_1(0) &\to \mathbb{C} \\
w &\mapsto \frac{w+1}{1-w}i.
\end{aligned}$$

Eine leicht heroische Rechnung zeigt, dass $\Psi(D_1(0)) \subset H$ und, dass $\Phi(\Psi(z)) = z$ für alle $z \in D_1(0)$ und $\Psi(\Phi(z)) = z$ für alle $z \in H$. Es folgt nun, dass $\Phi\colon H \to D_1(0)$ biholomorph ist.[71] Zudem folgt auch leicht aus dem bisher bewiesenen, dass [72]

$$\Phi\big(\{x+\mathrm{i}y \,|\, x \in \mathbb{R}\}\big) = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \big|z - \tfrac{y}{y+1}\big| = \tfrac{1}{y+1}\big\} \setminus \{1\}.$$ ■

[70] Diese Aussage kann man sich wie folgt merken, das Bild der Gerade $\{x + \mathrm{i}y | x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Kreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse, welcher die beiden Punkte $\Phi(y\mathrm{i}) = \frac{y\,\mathrm{i}-\mathrm{i}}{y\,\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \frac{y-1}{y+1}$ und„$\Phi(\infty) = \frac{\infty-\mathrm{i}}{\infty+\mathrm{i}} = 1$" enthält.

[71] In der Tat. Aus der ersten Behauptung folgt, dass $\Phi(H) \subset D_1(0)$. Die Abbildung ist surjektiv, denn für $z \in D_1(0)$ gilt $\Phi(\Psi(z)) = z$. Die Abbildung ist auch injektiv, denn aus $\Phi(w) = \Phi(w')$ folgt, dass $w = \Psi(\Phi(w)) = \Psi(\Phi(w')) = w'$. Wir sehen also, dass $\Phi\colon H \to D_1(0)$ bijektiv ist. Nachdem die Umkehrabbildung Ψ ebenfalls holomorph ist, folgt, dass Φ sogar biholomorph ist.

[72] In der Tat, denn wir hatten gerade gesehen, dass $\Phi\colon H \to D_1(0)$ surjektiv ist, also muss auch die Abbildung

$$\Phi\colon \big(\{x+\mathrm{i}y \,|\, x \in \mathbb{R}\}\big) \to \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \big|z - \tfrac{y}{y+1}\big| = \tfrac{1}{y+1}\big\} \setminus \{1\}$$

surjektiv sein.

Das folgende Lemma gibt ein weiteres Beispiel für eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, welche biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$ ist. Der Beweis des Lemmas ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 8.

Lemma 16.3. *Die geschlitzte Ebene*

$$\mathbb{C} \setminus \overline{S}_{-\pi} \;=\; \{x + \mathrm{i}y \,|\, x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0 \text{ oder } y \neq 0\}$$

ist biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$.

Wir wollen nun noch der Frage nachgehen, welche offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ nun eigentlich biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$ sind. Wir hatten schon gesehen, dass wenn G biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$ ist, dann muss gelten $G \neq \mathbb{C}$ und G muss einfach zusammenhängend sein. Erstaunlicherweise sind dies auch schon die einzigen Einschränkungen. Genauer gesagt, es gilt folgender Satz.

Satz 16.4. (Riemannscher Abbildungssatz) *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, welches von $\mathbb{C}$ verschieden ist, ist biholomorph zur offenen Scheibe $D_1(0)$.*

Leider haben wir in dieser Vorlesung keine Zeit um den Riemannschen Abbildungssatz zu beweisen. Der Beweis dazu wird beispielsweise in [**Ft**, Kapitel 5] oder [**Ja**, Kapitel 10] ausgeführt.

II. Maß- und Integrationstheorie

1. Einleitung

1.1. **Der Integralbegriff und Volumen.** In der Analysis I hatten wir den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit und das Riemann-Integral für Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf kompakten Intervallen eingeführt. Diese Theorie hat mehrere Einschränkungen, beispielsweise hatten wir gesehen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

nicht Riemann-integrierbar ist. In der Integrationstheorie wollen wir den Integralbegriff auf mehr Funktionen erweitern, und wir wollen zudem auch den Integralbegriff für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ einführen.

In der Maßtheorie wollen wir zudem Teilmengen A von $\mathbb{R}^n$ ein Volumen $\mathrm{Vol}(A)$ zuordnen. Die Maßtheorie und die Integrationstheorie hängen eng miteinander zusammen. Es sei beispielsweise $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Wir nennen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

die *charakteristische Funktion* von A. Wenn wir das Integral und den Volumenbegriff vernünftigt eingeführt haben, dann soll am Ende natürlich

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \;=\; \mathrm{Vol}(A)$$

gelten.

1.2. **Volumenfunktionen.** Wir führen nun erst einmal folgende zwei Definitionen ein.

Definition. Für eine Menge Ω bezeichnen wir

$$\mathcal{P}(\Omega) \;:=\; \text{alle Teilmengen von } \Omega$$

als die Potenzmenge von Ω.

Definition. Eine Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} v\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{\text{alle Teilmengen von } \mathbb{R}^n\} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \\ A & \mapsto & v(A), \end{array}$$

welche folgende Eigenschaften erfüllt:

(A) Es gilt
$$v\big(\text{Würfel } [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n\big) \;=\; 1 \qquad \text{Normierung.}$$

(B) Das Volumen ist monoton in dem Sinne, dass
$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad v(A) \leq v(B) \qquad \text{Monotonie.}$$

(C) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $x + A := \{x + a \,|\, a \in A\}$ die Translation von A um x. Dann gilt

$$v(x+A) \;=\; v(A) \qquad \text{Translationsinvarianz.}$$

(D) Für disjunkte Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$, d.h. für Teilmengen mit $A \cap B = \varnothing$, gilt

$$v(A \cup B) \;=\; v(A) + v(B) \qquad \text{Additivität.}$$

Etwas verallgemeinert soll gelten, wenn $A_k \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ eine Folge von paarweise disjunkten[1] Teilmengen sind, dann gilt

$$v\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} v(A_k) \qquad \sigma\text{-Additivität.}$$

Lemma 1.1. *Wenn v eine Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist, dann gilt*

(1) *Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist $v(\{x\}) = 0$.*
(2) *Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist $v([m, m+1)) = 1$.*
(3) *Für jede Wahl von $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n$ ist $v([m, n]) = m - n$.*

Beweis.

(1) Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$k \cdot v(\{x\}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (C)}}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} v\big(\{\tfrac{i}{k}\}\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(D)}}}{=} v\Big(\bigcup_{i=0}^{k-1}\{\tfrac{i}{k}\}\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(B)}}}{\leq} v([0,1]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(A)}}}{=} 1.$$

Nachdem dies für alle k gilt, muss also $v(\{x\}) = 0$ gelten.

(2) Es sei also $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (A) und (C)}}}{=} v([m, m+1]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(D)}}}{=} v([m, m+1)) + \underbrace{v(\{m+1\})}_{=0, \text{ nach (1)}} = v([m, m+1)).$$

(3) Die letzte Aussage folgt nun leicht aus (1), (2) und (D), indem wir das Intervall $[m, n]$ in halboffene Intervalle $[i, i+1)$, $i = m, \dots, n-1$ und den Punkt $\{n\}$ zerlegen. ■

Bevor wir Volumenfunktionen weiter diskutieren, wollen wir noch einmal kurz zu den Äquivalenzrelationen zurückkehren, welche wir schon auf Seite 101 eingeführt hatten.

Definition. Wir sagen eine Relation $\sim$ auf einer Menge A ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt

$$\begin{aligned} & & x \sim x & \\ x \sim y & \implies & y \sim x & \qquad \text{(Symmetrie)} \\ x \sim y \text{ und } y \sim z & \implies & x \sim z & \qquad \text{(Transitivität).} \end{aligned}$$

[1] D.h. es ist $A_i \cap A_j = \varnothing$ für alle $i \neq j$.

Beispiel.

(1) Die Relation $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in 3\mathbb{Z}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$
(2) Die Relation $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$
(3) Die Relation $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}$ ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$

Definition. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Eine Äquivalenzklasse ist eine nichtleere Teilmenge $Y \subset X$, so dass gilt
(1) für alle $y, y' \in Y$ gilt: $y \sim y'$,
(2) wenn $z \sim y$ für ein $y \in Y$, dann gilt $z \in Y$.

Beispiel. Wir betrachten wieder $X = \mathbb{Z}$ mit der Äquivalenzrelation $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in 3\mathbb{Z}$. Die Äquivalenzklassen sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\} \\ 1 + \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\} \\ 2 + \mathbb{Z} &= \{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\} \end{aligned}$$

In Lemma 12.5 hatten wir gesehen, dass X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen, d.h.
(i) jedes $x \in X$ liegt in einer Äquivalenzklasse,
(ii) wenn A und B Äquivalenzklassen sind, dann gilt entweder $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$.

Definition. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Wir sagen eine Teilmenge $A \subset X$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem, wenn A aus jeder Äquivalenzklasse Y genau ein Element enthält.

Mit anderen Worten, $A \subset X$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem, wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $a \in A$ gibt, welches zu y äquivalent ist. Ein vollständiges Repräsentantensystem erhält man dadurch, dass man aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element wählt.[2]

Beispiel. Wir betrachten auf $\mathbb{Z}$ wieder die Äquivalenzrelation $x \sim y :\Longleftrightarrow \quad (x - y) \in 3\mathbb{Z}$. Dann sind

$$\{0, 1, 2\}, \quad \{3, -2, 8\}, \quad \{0, 7, -1\}, \quad \dots$$

vollständige Repräsentantensysteme.

Wir hatten gerade den Begriff einer Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ eingeführt. Zusammengefasst ordnet eine Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ jeder Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ein Volumen zu, und das Volumen besitzt vernünftige Eigenschaften, beispielsweise ist es translationsinvariant und additiv unter disjunkten Vereinigungen.

Dabei gibt es nun allerdings ein Problem, der folgende Satz besagt, dass es Volumenfunktionen auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ nicht geben kann.

Satz 1.2. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt keine Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

---

[2] Für die spitzfindigen Studenten/Studentinnen verweise ich auf:
`http://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom`

Beweis. Wir werden den Satz nur für den Fall $n = 1$ beweisen. Den allgemeinen Fall beweist man ganz ähnlich. Wir beweisen den Satz mit einem Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, es gibt eine Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, d.h. eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} v\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{\text{alle Teilmengen von } \mathbb{R}\} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0}\{\infty\} \\ A & \mapsto & v(A), \end{array}$$

so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(A) Das Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ hat Volumen 1.
(B) Wenn $A \subset B$, dann gilt $v(A) \leq v(B)$.
(C) Für $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$v(x + A) \;=\; v(A).$$
(D) Für paarweise disjunkte abzählbar viele Teilmengen $A_k \subset \mathbb{R}$ gilt
$$v\Big(\bigcup_k A_k\Big) \;=\; \sum_k v(A_k).$$

Wir betrachten folgende Äquivalenzrelation auf $[0,1]$:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es existiert ein } q \in \mathbb{Q} \text{ mit } x = y + q.$$

Es sei nun $A \subset [0,1]$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzrelation $\sim$. Aus der obigen Diskussion von Äquivalenzklassen folgt, dass die Menge A folgende Eigenschaft besitzt:

($*$) Für jedes $x \in [0,1]$ existiert genau ein $a \in A$, so dass $x = a + q$ für eine rationale Zahl q.

Wir machen hierbei die folgenden Beobachtungen.

(i) Nachdem $A \subset [0,1]$ folgt, dass man jedes $x \in [0,1]$ schreiben kann als $x = a + q$, wobei $a \in A$ und wobei q eine rationale Zahl im Intervall $[-1,1]$ ist.
(ii) Es seien $a, b \in A$. Wenn $a \neq b$, dann liegen a und b in verschiedenen Äquivalenzklassen, also ist $a - b \notin \mathbb{Q}$.
(iii) Aus (ii) folgt, dass für alle rationalen Zahlen $q_1 \neq q_2$ gilt, dass [3]
$$(q_1 + A) \cap (q_2 + A) \;=\; \varnothing.$$

Behauptung. Es ist $v(A) = 0$.

Der Beweis der Behauptung ist ganz ähnlich zum Beweis von Lemma 1.1 (1). Wir wählen nun eine Abzählung $q_1, q_2, \ldots$ von den rationalen Zahlen im Intervall $[-1,1]$ mit $q_i \neq q_j$ für $i \neq j$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ folgt nun, dass

$$k \cdot v(A) \;=\; \sum_{i=1}^{k} v(A) \;\underset{\text{folgt aus (C)}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}}\; \sum_{i=1}^{k} v(q_i + A) \;\underset{\text{(D) und (iii)}}{\underset{\uparrow}{=}}\; v\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} (q_i + A)}_{\subset[-1,2]}\Big) \;\underset{\text{(B)}}{\underset{\uparrow}{\leq}}\; v([-1,2]) \;\underset{\text{nach Lemma 1.1}}{\underset{\uparrow}{=}}\; 3.$$

Es folgt also, dass $v(A) \leq \frac{1}{k} \cdot v([-1,2]) = \frac{3}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist nur möglich, wenn $v(A) = 0$. ⊞

[3]In der Tat, denn nehmen wir an es gibt ein $y \in (q_1 + A) \cap (q_2 + A)$, dann gibt es $a_1, a_2 \in A$, so dass $q_1 + a_1 = y = q_2 + a_2$. Es folgt, dass $a_1 - a_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, im Widerspruch zu (ii).

Andererseits gilt

$$1 = v([0,1]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wir können (B) anwenden, denn} \\ \text{aus (i) folgt } [0,1] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(q_i + A)}}{\leq} v\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(q_i + A)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(D) und (iii)}}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} v(q_i + A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(C)}}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{v(A)}_{=0} = 0.$$

Wir haben damit einen Widerspruch herbeigeführt. ■

Wir haben jetzt also ein Problem. Eine Volumenfunktion aus dem Schlaraffenland gibt es leider nicht, wir können nicht allen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ein„vernünftiges" Volumen zuordnen. Andererseits ist es klar, dass es für die meisten Mengen, mit denen wir normalerweise arbeiten, doch einen Volumenbegriff gibt. Wir werden in den folgenden Kapiteln das Lebesgue-Maß einführen, welches den Volumenbegriff zwar nicht auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, aber dennoch für möglichst viele Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einführt, und so dass die Axiome der Volumenfunktion erfüllt sind.

Nachdem nicht alle Teilmengen messbar sein werden, müssen wir im Folgenden sehr vorsichtig mit„Mengen von Teilmengen" arbeiten. Dies zwingt uns unweigerlich, dazu ein gehöriges Maß an Mengentheorie zu bewältigen.

2. Mengenringe, Mengenalgebren und σ-Algebren

2.1. Elementare Mengentheorie.

Notation. Für eine Menge Ω schreiben wir

$$\mathcal{P}(\Omega) \;:=\; \text{alle Teilmengen von } \Omega \qquad \text{Potenzmenge von } \Omega.$$

Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir

$$A^{\mathsf{c}} \;:=\; \{x \in \Omega \,|\, x \notin A\} \qquad \text{Komplement von } A.$$

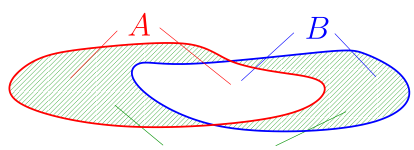
Für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir zudem

$$\begin{array}{rcll} A \cup B & := & \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\} & \text{Vereinigung von } A \text{ und } B \\ A \cap B & := & \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\} & \text{Durchschnitt von } A \text{ und } B \\ A \setminus B & := & \{x \in A \,|\, x \text{ liegt nicht in } B\} & \text{mengentheoretische Differenz} \end{array}$$

sowie

$$A \triangle B \;:=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{symmetrische Differenz}.$$

Die Teilmenge $A \Delta B$ besteht also aus den Punkten in Ω, welche in *genau eine* der beiden Mengen A und B enthalten ist.



symmetrische Differenz $A \triangle B$

Wir können den Begriff von Vereinigung und Durchschnitt auch auf Familien von Teilmengen verallgemeinern.

Definition. Es sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge Ω[4], dann definieren wir

$$\bigcup_{i \in I} A_i \;:=\; \{x \in \Omega \,|\, \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\}$$

sowie

$$\bigcap_{i \in I} A_i \;:=\; \{x \in \Omega \,|\, \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in A_i\}.$$

In den folgenden beiden Lemmata fassen wir einige elementare Aussagen über symmetrische Differenzen zusammen.

Lemma 2.1. *Es seien A, B und C Teilmengen einer Menge Ω. Dann gilt*

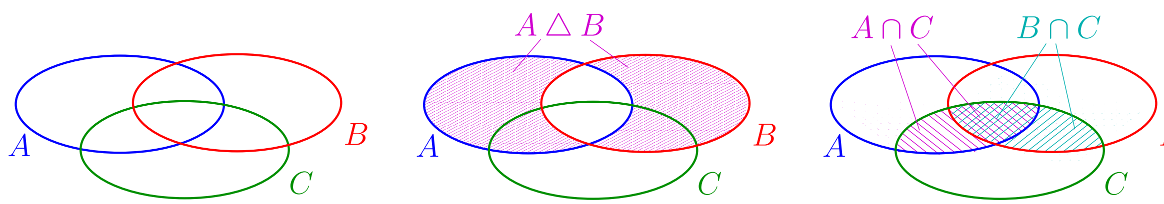
(1) $$A \triangle \varnothing = A$$
(2) $$A \triangle A = \varnothing$$
(3) $$A \triangle B = B \triangle A, \qquad \textit{Symmetrie von } \triangle$$
(4) $$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C), \qquad \textit{Assoziativität von } \triangle$$
(5) $$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C) \qquad \textit{Distributivität von } \triangle \textit{ und } \cap.$$

---

[4] Auf gut Deutsch heißt das Folgendes: I ist eine Menge (z.B. $\{1, \dots, k\}$ oder $\mathbb{N}$, aber I kann auch z.B. überabzählbar sein), und jedem Element $i \in I$ ist eine Teilmenge A_i von Ω zugeordnet. Siehe auch:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Familie_(Mathematik)`

Beweis. Der Beweis ist in allen Fällen elementar. Man kann sich von allen Aussagen entweder durch elementare Logik oder durch hinreichend allgemeine Bilder überzeugen. Die Aussage (5) wird beispielsweise in der Abbildung unten skizziert. ■



Bemerkung.

(1) Es folgt aus den Eigenschaften (1) bis (4) von Lemma 2.1, dass $\mathcal{P}(\Omega)$ mit„Addition" $\triangle$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\varnothing$ ist.[5]

(2) Es folgt aus den Eigenschaften (1) bis (5) und den offensichtlichen Aussagen, dass

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ und } A \cap \Omega = A,$$

dass $\mathcal{P}(\Omega)$ mit„Addition" $\triangle$ und„Multiplikation" $\cap$ sogar ein kommutativer Ring ist. Das„additiv neutrale" Element ist hierbei die leere Menge, und das„multiplikativ neutrale" Element ist hierbei Ω.

Lemma 2.2. (De Morgansche Regeln) *Es seien A und B Teilmengen einer Menge Ω. Dann gilt*

$$(A \cap B)^{\mathbf{c}} = A^{\mathbf{c}} \cup B^{\mathbf{c}} \qquad \textit{und} \qquad (A \cup B)^{\mathbf{c}} = A^{\mathbf{c}} \cap B^{\mathbf{c}}.$$

Etwas allgemeiner gilt für eine beliebige Familie $\{A_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen von Ω, dass

$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^{\mathbf{c}} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\mathbf{c}} \qquad \textit{und} \qquad \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^{\mathbf{c}} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\mathbf{c}}.$$

Beweis. Die de Morganschen Regeln folgen aus elementarer Logik. ■

2.2. **Definition von Mengenringen und Mengenalgebren.**

Definition. Es sei Ω eine Menge. Wir sagen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine Mengenalgebra auf Ω, falls folgende Aussagen gelten:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & & & \varnothing \in \mathcal{A}, \\ (2) & A \in \mathcal{A} & \Longrightarrow & A^{\mathbf{c}} \in \mathcal{A}, \\ (3) & A, B \in \mathcal{A} & \Longrightarrow & A \cup B \in \mathcal{A}. \end{array}$$

Beispiel.

(1) Wir betrachten die Menge $\Omega = \mathbb{N}$ und

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}(\mathbb{N}) & := & \{\text{alle endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\} \\ & & \cup \{\text{alle Komplemente von endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\}. \end{array}$$

Beispielsweise liegen

[5] Es sei Ω eine endliche Menge. Da $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle)$ eine endliche abelsche Gruppe ist können wir den Fundamentalsatz der endlich erzeugten abelschen Gruppen anwenden. Was besagt dieser in diesem Fall?

$$\{2,7,123\}$$

und
$$\mathbb{N}\setminus\{3,4,7\} \;=\; \{1,2,5,6,8,9,10,\dots\}$$

in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$. Man kann leicht überprüfen, dass $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ eine Mengenalgebra auf $\mathbb{N}$ ist.

(2) Für eine beliebige Menge Ω sind $\mathcal{A}=\{\varnothing,\Omega\}$ und auch $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$ Mengenalgebren auf Ω.

Lemma 2.3. *Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra auf Ω. Dann gilt:*

(4) $$\Omega \in \mathcal{A},$$

(5) $$A,B\in\mathcal{A} \;\Longrightarrow\; A\cap B\in\mathcal{A}.$$

Beweis. Es folgt aus den Eigenschaften (1) und (2), das $\Omega=\varnothing^{\mathbf{c}}$ ebenfalls in $\mathcal{A}$ liegt. Es seien nun $A,B\in\mathcal{A}$. Dann gilt

$$A\cap B \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } (X^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}}=X}}{=} ((A\cap B)^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{de Morgansche Regel}}}{=} (A^{\mathbf{c}}\cup B^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}}.$$

Es folgt aus den Eigenschaften (2) und (3), dass $A^{\mathbf{c}}$ und $B^{\mathbf{c}}$ in $\mathcal{A}$ liegen, dass dann auch $A^{\mathbf{c}}\cup B^{\mathbf{c}}$ in $\mathcal{A}$ liegt, und dann auch $(A^{\mathbf{c}}\cup B^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}}$ in $\mathcal{A}$ liegt. ■

Definition. Es sei Ω eine Menge. Wir sagen $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ ist ein Mengenring auf Ω, falls folgende Aussagen gelten:

(1) $$\varnothing\in\mathcal{R},$$

(2) $$A,B\in\mathcal{R} \;\Longrightarrow\; A\setminus B\in\mathcal{R},$$

(3) $$A,B\in\mathcal{R} \;\Longrightarrow\; A\cup B\in\mathcal{R}.$$

Bemerkungen.

(1) Nicht jeder Mengenring ist auch eine Mengenalgebra. Beispielsweise ist $\Omega=\mathbb{N}$ mit
$$\mathcal{R} \;=\; \{\text{alle endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\}$$
ein Mengenring, aber keine Mengenalgebra.

(2) Eine Mengenalgebra ist auch ein Mengenring, denn für $A,B\in\mathcal{A}$ ist
$$A\setminus B \;=\; \text{“alle Elemente in } A\text{, welche außerhalb von } B \text{ liegen”} \;=\; A\cap B^{\mathbf{c}}.$$

(3) Es sei Ω eine Menge. Es folgt aus $A^{\mathbf{c}}=\Omega\setminus A$, dass ein Mengenring $\mathcal{R}$ genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn $\Omega\in\mathcal{R}$.

Lemma 2.4. *Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{R}$ ein Mengenring auf Ω. Dann gilt*

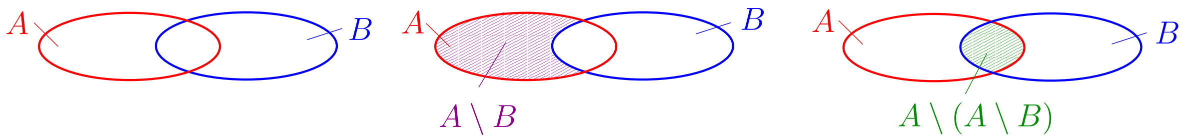
(4) $$A,B\in\mathcal{R} \;\Longrightarrow\; A\cap B\in\mathcal{R}.$$

(5) $$A,B\in\mathcal{R} \;\Longrightarrow\; A\triangle B\in\mathcal{R}.$$

Beweis. Die Eigenschaft (4) folgt sofort aus der Eigenschaften (2) eines Mengenrings und der Beobachtung, dass für beliebige A und B gilt

$$A\cap B \;=\; \text{“}A\text{, ohne die Elemente von } A\text{, welche außerhalb von } B \text{ liegen”} \;=\; A\setminus(A\setminus B).$$

Die Eigenschaft (5) folgt sofort aus den Eigenschaften (2) und (3) eines Mengenrings und der Definition der symmetrischen Differenz. ■



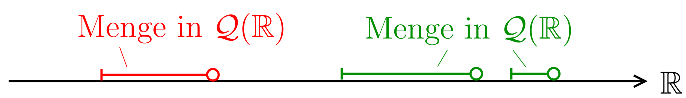
Bemerkung. In der Bemerkung nach Lemma 2.1 hatten wir gesehen, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ mit Addition $\triangle$ und Multiplikation $\cap$ ein kommutativer Ring ist. Es folgt aus Lemma 2.4, dass ein Mengenring unter diesen beiden Operationen abgeschlossen ist, also ist ein Mengenring mit diesen beiden Operationen auch ein Ring. Wir werden diese Tatsache im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht mehr verwenden, aber diese Beobachtung erklärt zumindest, wo der Name„Mengenring" herrührt.

Definition.

(1) Im Folgenden meinen wir mit einem halboffenen Intervall immer ein Intervall der Form $[a, b)$, wobei $a < b$ zwei reelle Zahlen sind.
(2) Wir bezeichnen mit $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ die Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen sind. Mit anderen Worten

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}) \;=\; \text{alle Teilmengen der Form } \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i), \text{ für reelle Zahlen } a_i < b_i,\ i = 1, \dots, n.$$ [6]

Für $n = 0$ ist dies gerade die leere Menge.[7]



Das folgende Lemma gibt nun ein weiteres, und für uns sehr wichtiges Beispiel eines Mengenrings.

Lemma 2.5. *$\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ ist ein Mengenring.*[8]

Beweis. Wir überprüfen die Axiome eines Mengenrings. Wir hatten gerade gesehen, dass die leere Menge in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ enthalten ist. Es ist offensichtlich, dass die Vereinigung von zwei Teilmengen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ wiederum in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ liegt. Wir müssen also noch folgende Behauptung beweisen.

Behauptung.
$$A, B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}).$$

Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte.

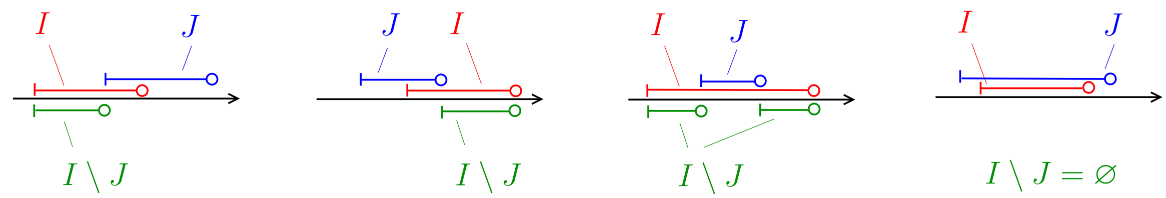
(1) Wenn I und J zwei halboffene Intervalle sind, dann kann man mit einer Fallunterscheidung leicht zeigen, dass $I \setminus J$ entweder ein halboffenes Intervall, oder die Vereinigung von zwei halboffenen Intervallen, oder die leere Menge ist. (Diese Aussage wird auch in der Abbildung unten illustriert). Insbesondere ist also $I \setminus J \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$.

---

[6] Die halboffenen Intervalle müssen dabei nicht disjunkt sein.

[7] Das dies für $n = 0$ die leere Menge ist folgt sofort aus der Definition der Vereinigungsmenge auf Seite 130

[8] Der Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ ist allerdings keine Mengenalgebra, nachdem $\mathbb{R}$ nicht in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ enthalten ist.



(2) Wir betrachten den Fall, dass $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$, in diesem Fall gilt

$$A \setminus J \;=\; \Big(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\Big) \setminus J \;=\; \underbrace{\bigcup_{k=1}^{m} \underbrace{I_k \setminus J.}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \text{ nach } (1)}}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})}$$

(3) Wir betrachten jetzt noch den allgemeinen Fall. Es sei $B = \bigcup\limits_{l=1}^{n} J_l$, wobei $J_1, \dots, J_n$ halboffene Intervalle sind. Dann ist

$$A \setminus B \;=\; A \setminus \Big(\bigcup_{l=1}^{n} J_l\Big) \;=\; \underbrace{\underbrace{(\underbrace{A \setminus J_1}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \text{ nach } (2)}) \setminus J_2}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \text{ nach } (2)} \cdots \setminus J_n.}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \text{ nach } (2)}$$

■

2.3. **Produkte von Mengenringen.**

Definition. Für zwei Mengen X und Y bezeichnen wir

$$X \times Y \;:=\; \{(x,y) \,|\, x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

als das Produkt von X und Y.

Beispiel. Das Produkt

$$[1,3] \times [-2,1] \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [1,3] \text{ und } y \in [-2,1]\}$$

ist ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$.

Satz 2.6. *Es seien Ω und Φ Mengen und es seien $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Phi)$ Mengenringe. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega \times \Phi)$ alle Teilmengen von $\Omega \times \Phi$ der Form*

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times B_i, \qquad \text{wobei } A_i \in \mathcal{A} \text{ und } B_i \in \mathcal{B}.$$

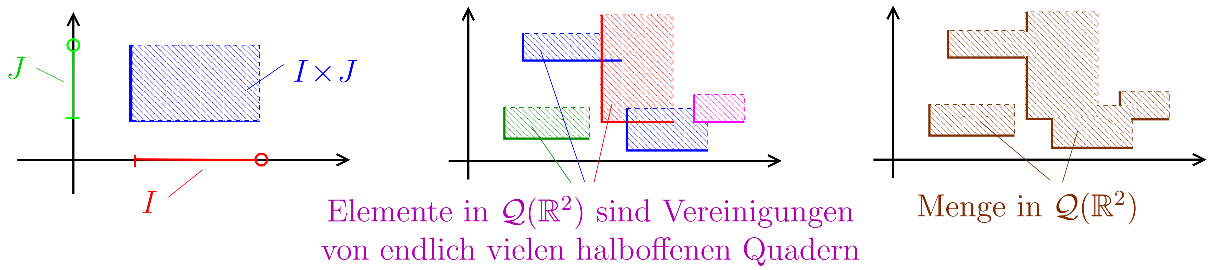
Dann ist $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ ein Mengenring auf $\Omega \times \Phi$.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 2.6 zuwenden wollen wir ein Beispiel betrachten.

Definition. Wir bezeichnen eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ der Form

$$[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \;=\; \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \in [a_i, b_i) \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

als halboffenen Quader in $\mathbb{R}^n$.[9] Für $n \geq 1$ bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, welche Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern in $\mathbb{R}^n$ sind.



Bemerkung. Das Produkt von n halboffenen Intervallen in $\mathbb{R}$ ist per Definition ein halboffener Quader in $\mathbb{R}^n$. Es folgt damit leicht aus den Definitionen, dass

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \;=\; \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{Q}(\mathbb{R}).$$

Es folgt nun aus Lemma 2.5 und Satz 2.6, dass $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ein Mengenring ist.

Beweis von Satz 2.6. Es seien Ω und Φ Mengen und es seien zudem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Phi)$ Mengenringe. Es ist offensichtlich, dass $\emptyset \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$. Es folgt zudem aus den Definitionen, dass $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist.

Es verbleibt also folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. $$X, X' \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad X \setminus X' \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}.$$

Wie im Beweis von Lemma 2.5 unterteilen wir den Beweis in drei Schritte.

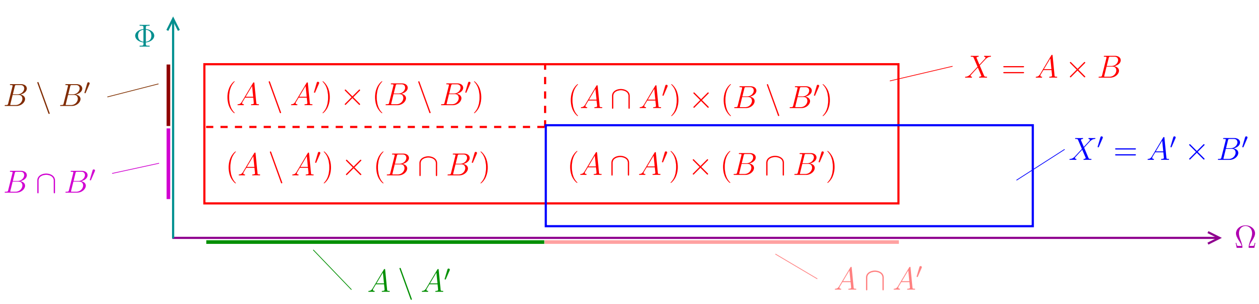
(1) Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass

$$X \;=\; A \times B \quad \text{und} \quad X' \;=\; A' \times B' \quad \text{wobei } A, A' \in \mathcal{A} \text{ und } B, B' \in \mathcal{B}.$$

Dann folgt aus elementarer Mengentheorie, wie in der Abbildung unten skizziert, dass $(A \times B) \setminus (A' \times B')$ die Vereinigung der drei Mengen

$$(A \setminus A') \times (B \cap B'), \quad (A \setminus A') \times (B \setminus B') \quad \text{und} \quad (A \cap A') \times (B \setminus B')$$

ist. Nachdem $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Mengenringe sind, folgt aus Lemma 2.4, dass in allen drei Fällen die Faktoren in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ liegen. Es folgt nun aus der Definition von $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, dass die Vereinigung dieser drei Mengen, d.h. $(A \times B) \setminus (A' \times B')$, wiederum in $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ liegt.



[9] Wenn die Seitenlängen $b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n$ übereinstimmen, dann bezeichnen wir die Menge manchmal auch als *halboffenen Würfel*.

Der Rest des Beweises ist nun ganz analog zu den letzten beiden Schritten im Beweis von Lemma 2.5.

(2) Wir betrachten nun den Fall, dass

$$X \;=\; \bigcup_{i=1}^{m}(A_i\times B_i) \qquad \text{und} \qquad X' \;=\; A'\times B' \qquad \text{mit } A_i, A'\in\mathcal{A} \;\text{ und }\; B_i, B'\in\mathcal{B}.$$

Dann ist

$$X\setminus(A'\times B') \;=\; \Big(\bigcup_{i=1}^{m}(A_i\times B_i)\Big)\setminus(A'\times B') \;=\; \bigcup_{i=1}^{m}\underbrace{\big((A_i\times B_i)\setminus(A'\times B')\big)}_{\in\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}},$$

also wiederum eine Teilmenge in $\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$.

(3) Zuletzt sei nun

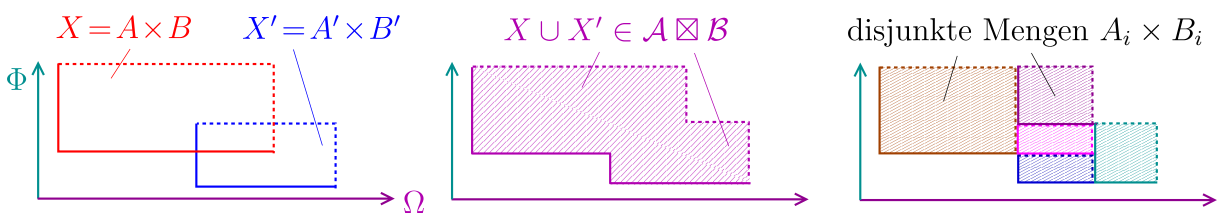
$$X \;\in\; \mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B} \quad\text{und}\quad X' \;=\; \bigcup_{j=1}^{n}(A_j{}'\times B_j)' \qquad \text{mit } A_j{}'\in\mathcal{A} \;\text{ und }\; B_j{}'\in\mathcal{B}.$$

Dann ist

$$X\setminus X' \;=\; X\setminus\bigcup_{j=1}^{n}(A_j{}'\times B_j{}') \;=\; \underbrace{\underbrace{X\setminus(A_1{}'\times B_1{}')}_{\in\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}}\cdots\setminus(A_n{}'\times B_n{}')}_{\in\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}}.$$

■

Lemma 2.7. *Es seien Ω und Φ Mengen und es seien $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(\Phi)$ Mengenringe. Jede Menge in $\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(\Omega\times\Phi)$ kann geschrieben werden als disjunkte endliche Vereinigung von Mengen der Form $A_i\times B_i$, wobei $A_i\in\mathcal{A}$ und $B_i\in\mathcal{B}$.*



Beweis. Das Lemma wird in Übungsblatt 9 bewiesen. ■

Wir beschließen das Kapitel mit einer letzten Definition und einem einfachen Lemma.

Definition. Für $s>0$ schreiben wir

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n,s) \;=\; \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \;\cap\; \mathcal{P}([-s,s)^n),$$

oder in anderen Worten

$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n,s)$ = alle Teilmengen von $[-s,s)^n$, welche Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern in $[-s,s)^n$ sind.

Auf Seite 132 hatten wir angemerkt, dass ein Mengenring $\mathcal{R}$ auf Ω genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn $\Omega\in\mathcal{R}$. Es folgt, dass der Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ keine Mengenalgebra ist. Andererseits liegt $[-s,s)^n$ in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n,s)$, also erhalten wir aus der gleichen Bemerkung folgendes Lemma.

Lemma 2.8. *Für jedes $s > 0$ ist $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$ eine Mengenalgebra auf der Menge $[-s, s)^n$.*

2.4. σ-Algebren.

Definition. Es sei Ω eine Menge. Wir sagen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra auf Ω, falls folgende Aussagen gelten:

(1) $$\varnothing \in \mathcal{A},$$
(2) $$A \in \mathcal{A} \implies A^{\mathbf{c}} \in \mathcal{A},$$
(3) die Vereinigung von *abzählbar* vielen Mengen in $\mathcal{A}$ liegt ebenfalls in $\mathcal{A}$.

Beispiel. Für jede Menge Ω ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

Bemerkungen.

(1) Eine σ-Algebra ist insbesondere eine Mengenalgebra, aber dieses Mal verlangen wir, dass auch die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen $A_j, j \in \mathbb{N}$ in einer σ-Algebra wieder in der σ-Algebra liegt.

(2) Es sei $\Omega = \mathbb{N}$. Auf Seite 131 hatten wir gesehen, dass
$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{N}) \ := \ & \{\text{alle endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\} \\ & \cup \{\text{alle Komplemente von endlichen Teilmengen von } \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$
eine Mengenalgebra ist. Dies ist jedoch *keine* σ-Algebra, denn $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist nicht unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen. Beispielsweise liegt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $A_k = \{2k\}$ in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$, aber $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{2k\} = 2 \cdot \mathbb{N}$ liegt nicht in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$.

(3) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, dann liegt auch $\Omega = \varnothing^{\mathbf{c}}$ in $\mathcal{A}$. Ganz analog zum Fall von Mengenalgebren, welchen wir in Lemma 2.3 diskutiert hatten, folgt aus den de Morganschen Gesetzen 2.2, dass der Durchschnitt von abzählbar vielen Mengen in einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ wiederum in $\mathcal{A}$ liegt.

Definition. Es sei $\{X_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von Teilmengen von einer Menge Ω.

(1) Wir sagen die Folge $\{X_k\}_{k\geq 1}$ ist aufsteigend, wenn $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$. Wir definieren
$$\text{Limes der aufsteigenden Folge} \ := \ \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$
Wir schreiben
$$X_k \uparrow X \ :\Longleftrightarrow \ \{X_k\}_{k\geq 1} \text{ ist eine aufsteigende Folge mit Limes } X.$$

(2) Wir sagen die Folge $\{X_k\}_{k\geq 1}$ ist absteigend, wenn $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$. Wir definieren
$$\text{Limes der absteigenden Folge} \ := \ \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$$
Wir schreiben
$$X_k \downarrow X \quad :\Longleftrightarrow \quad \{X_k\}_{k\geq 1} \text{ ist eine absteigende Folge mit Limes } X = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Beispiel. Es gilt
$$[-k, k) \ \uparrow \ \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \left[-\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right] \ \downarrow \ \{0\}.$$

Folgenden Satz werden wir viel später im Beweis von Satz von Fubini verwenden.

Satz 2.9. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra auf einer Menge Ω. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra} \iff \begin{array}{c}\text{für alle aufsteigenden Folgen } \{A_k\}_{k\geq 1} \text{ in } \mathcal{A} \\ \text{liegt der Limes } \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \text{ ebenfalls in } \mathcal{A}.\end{array}$$

Beispiel. Wir betrachten wiederum $\Omega = \mathbb{N}$ mit der Mengenalgebra $\mathcal{E}(\mathbb{N})$. Dann bilden die Mengen

$$A_k \;:=\; \{2, 4, 6, \ldots, 2k\} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

eine aufsteigende Folge mit Limes $2 \cdot \mathbb{N}$, aber der Limes liegt nicht in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$. Wir sehen also wiederum, dass $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ keine σ-Algebra ist.

Beweis. Es ist offensichtlich, dass die„$\Rightarrow$"–Richtung gilt. Wir beweisen nun noch die„$\Leftarrow$"–Richtung. Es sei also $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, dass die Vereinigungsmenge $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ auch in $\mathcal{A}$ liegt. Dies ist in der Tat der Fall, denn

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_k)}_{=:B_k} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn die } B_k \text{ bilden eine} \\ \text{aufsteigende Folge in } \mathcal{A}}}{\in} \mathcal{A}.$$

■

Lemma 2.10. *Es sei $\{\mathcal{A}\}_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf einer Menge Ω. Dann ist auch*

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \;=\; \text{alle } X \subset \Omega\text{, welche in allen } \mathcal{A}_i\text{'s liegen,}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. Das Lemma folgt leicht aus den Definitionen, und verbleibt als freiwillige Übungsaufgabe. ■

Definition. Es sei Ω eine Menge und $S \subset \Omega$ eine Teilmenge. Wir bezeichnen[10]

$$\langle \mathcal{S} \rangle^{\sigma} \;:=\; \text{Durchschnitt aller } \sigma\text{-Algebren von } \Omega\text{, welche } \mathcal{S} \text{ enthalten,}$$

als die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra.

Bemerkung. Diese Definition ist vielleicht auf den ersten Blick etwas gewöhnungsbedürftig. Wir können diesen Typ von Definition mit einem Beispiel aus der linearen Algebra illustrieren. Es sei V ein Vektorraum. Für eine Teilmenge $A \subset V$ wird in [**Na1**, Satz 4.12]

$$\langle A \rangle \;:=\; \text{Durchschnitt aller Untervektorräume von } V\text{, welche } A \text{ enthalten,}$$

als der von A erzeugte Untervektorraum bezeichnet. Dies ist in der Tat ein Untervektorraum, denn der Durchschnitt von Untervektorräumen ist wiederum ein Untervektorraum.

[10] Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist trivialerweise eine σ-Algebra. Also gibt es zumindest eine σ-Algebra, welche S enthält. Es folgt aus Lemma 2.10, dass der Durchschnitt aller dieser σ-Algebren in der Tat eine σ-Algebra ist.

Beispiel. Für den weiteren Verlauf der Vorlesung ist das wichtigste Beispiel die σ-Algebra $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ auf $\mathbb{R}^n$, welche von $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt wird. Wir geben im Folgenden ein paar Beispiele von Mengen, welche in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ enthalten sind. Es ist

$$(-1,1) \;=\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\big[-1+\tfrac{1}{k},1\big)}_{\in\mathcal{Q}(\mathbb{R})} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}}}{\in}\; \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}.$$

In Übungsblatt 9 werden wir sehen, dass sogar alle Intervalle in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ liegen. Zudem werden wir sehen, dass auch $\mathbb{Q}$ in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ liegt. Wir werden später der Frage nachgehen, ob die Menge A von Seite 128 auch in $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R})\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ liegt.

3. Inhalte, Prämasse und Masse

Im letzten Kapitel hatten wir uns mit der vielleicht etwas trockenen Materie der Mengentheorie beschäftigt. Wir wollen uns nun dem eigentlichen Ziel nähern, nämlich wir wollen einen vernünftigen Begriff von einem„Volumen”, oder auch„Maß” oder auch„Inhalt” von Mengen einführen.

3.1. **Die erweiterte Zahlengerade.**

Notation. Wir schreiben im Folgenden

$$\overline{\mathbb{R}} \quad := \quad [-\infty,\infty] \quad := \quad \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

und

$$\overline{\mathbb{R}}_+ \quad := \quad [0,\infty] \quad := \quad \mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\}.$$

Wir setzen die Ordnung $<$ von den reellen Zahlen ganz naiv auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort indem wir für alle $a\in\mathbb{R}$ definieren, dass

$$-\infty \;<\; a \;<\; +\infty.$$

Im Folgenden werden wir immer wieder Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ betrachten. Es folgt aus [**Fr1**, Satz 4.3], dass jede monoton steigende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen ein Element in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert.[11] Wir führen dazu noch folgende Notation ein.

Notation. Es sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Wir schreiben

$$a_k\uparrow a \quad :\Longleftrightarrow \quad \{a_k\}_{k\geq 1} \text{ ist eine monoton steigende Folge mit Grenzwert } a,$$

und ganz analog

$$a_k\downarrow a \quad :\Longleftrightarrow \quad \{a_k\}_{k\geq 1} \text{ ist eine monoton fallende Folge mit Grenzwert } a.$$

Beispiel. Es gilt $\quad (2-\frac{1}{k})\uparrow 2 \quad$ und $\quad e^{-k}\downarrow 0 \quad$ sowie $\quad k^2\uparrow\infty$.

Definition. Wie in [**Fr1**] führen wir auf der Menge $\overline{\mathbb{R}}$ folgende Addition ein:

$+$	$a\in\mathbb{R}_{\geq 0}$	$+\infty$	$-\infty$
$b\in\mathbb{R}_{\geq 0}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$*$
$-\infty$	$-\infty$	$*$	$-\infty$.

3.2. **Die Definition von Inhalt, Prämaß und Maß.**

Wir führen zuerst noch folgende Notation ein.

Definition. Wenn $X\subset\Omega$ die disjunkte Vereinigung von Teilmengen A,B ist, d.h. wenn $X=A\cup B$ und $A\cap B=\varnothing$, dann schreiben wir manchmal[12]

$$X \;=\; A\sqcup B \quad \text{oder auch} \quad X \;=\; A\,\dot\cup\, B.$$

Allgemeiner schreiben wir $X=A_1\sqcup\ldots\sqcup A_n$ oder $X=\bigsqcup\limits_{i\in I}A_i$, wenn X die Vereinigung der A_i ist, und wenn die A_i paarweise disjunkt sind, d.h. wenn für $i\neq j$ gilt $A_i\cap A_j=\varnothing$.

[11] Wir verwenden jetzt die Sprechweise, welche wir in Analysis I explizit vermieden hatten, dass eine Folge gegen $\pm\infty$ konvergiert, wenn die Folge bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Beispiel. Für eine Menge A und eine Teilmenge B gilt immer $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$.

Definition. Es sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω. Ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung

$$\mu\colon \mathcal{R} \;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+$$

mit folgenden Eigenschaften

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) für disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu(A \sqcup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B) \qquad\qquad \text{Additivität.}$$

Beispiel.

(1) Wir betrachten den Mengenring $\mathcal{E}(\mathbb{N})$, welchen wir auf Seite 131 eingeführt hatten. Auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist

$$\begin{array}{rcl} \mu\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \#A := \text{Anzahl der Elemente in } A \end{array}$$

ein Inhalt.

(2) Auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist auch

$$\begin{array}{rcl} \tau\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{wenn } A = \varnothing, \\ \infty, & \text{wenn } A \neq \varnothing. \end{cases} \end{array}$$

ein Inhalt.

(3) Es sei Ω eine beliebige Menge und es sei $x \in \Omega$ festgewählt. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \mu_x\colon \mathcal{P}(\Omega) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

ein Inhalt.

(4) Wir betrachten

$$W \;=\; \big\{(a,b) \,\big|\, a, b \in \{1, \ldots, 6\}\big\}.$$

Dies ist die Menge aller Zahlenpaare, welche mit zwei Würfeln gewürfelt werden können. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \rho\colon \mathcal{P}(W) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \frac{1}{36} \cdot \text{Anzahl der Elemente in } A \end{array}$$

ein Inhalt auf dem Mengenring $\mathcal{P}(W)$. Für $A \subset \mathcal{P}(W)$, ist $\rho(A)$ gerade die Wahrscheinlichkeit (aufgefasst als Zahl zwischen 0 und 1), dass beim einmaligen Würfeln mit 2 Würfeln ein Zahlenpaar aus A gewürfelt wird. Beispielsweise ist

$$\text{Wahrscheinlichkeit ein Pasch zu würfeln} \;=\; \rho\big(\{(1,1), \ldots, (6,6)\}\big) \;=\; \tfrac{1}{6}.$$

[12]In der Vorlesung verwenden wir hierbei hauptsächlich die Notation $\uplus$ während wir im Skript hauptsächlich die Notation $\sqcup$ verwenden, nachdem dieses Symbol leichter von $\cup$ zu unterscheiden ist.

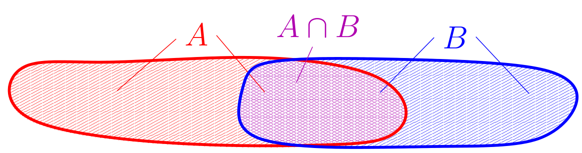
Lemma 3.1. *Es sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring und $\mu\colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt. Es gelten folgende Aussagen:*

(1) *Der Inhalt μ ist monoton in dem Sinne, dass für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt*
$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B) \qquad \textit{Monotonie.}$$
(2) *Es seien $A, B \in \mathcal{R}$. Wenn $\mu(A \cap B)$ endlich ist, dann gilt*
$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$
(3) *Für endlich viele disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ gilt*
$$\mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \qquad \textit{Additivität.}$$
(4) *Für beliebige Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ gilt*
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) \;\leq\; \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \qquad \textit{Subadditivität.}$$

Beweis.

(1) Es seien also $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subset B$. Dann gilt
$$\mu(B) \;=\; \mu(A \sqcup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{R}}) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Additivität}}}{=}\; \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \;\geq\; \mu(A).$$

(2) Es seien $A, B \in \mathcal{R}$. Es folgt aus der Additivität von μ, angewandt auf die disjunkten Zerlegungen, welche in der Abbildung unten skizziert sind, dass[13]
$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B), \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B), \end{aligned}$$
und
$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$
Da $\mu(A \cap B)$ endlich ist können wir in den ersten beiden Gleichungen $\mu(A \cap B)$ subtrahieren. Zusammengefasst erhalten wir dann, dass
$$\mu(A \cup B) \;=\; \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{=\mu(A)-\mu(A\cap B)} \;+\; \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{=\mu(B)-\mu(A\cap B)} \;+ \mu(A \cap B) \;=\; \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$



(3) Diese Aussage folgt durch mehrfaches Anwenden der Eigenschaft (2) von Inhalten.

(4) Die letzte Aussage wird in Übungsblatt 10 bewiesen. ■

[13]Hierbei verwenden wir, dass in einem Mengenring $\mathcal{R}$ mit $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$ und $A \cup B$ in $\mathcal{R}$ liegen.

Definition.

(1) Ein Inhalt μ auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-additiv, wenn für jede Folge von paarweise disjunkten Mengen $\{A_k\}_{\geq 1}$ in $\mathcal{R}$, deren Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls in $\mathcal{R}$ liegt, gilt:
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$
(2) Ein σ-additiver Inhalt wird auch Prämaß genannt

(3) Ein Maß ist ein Prämaß, welches auf einer σ-Algebra definiert ist.

Beispiele.

(1) Die obigen Inhalte μ μ_x und τ auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ sind σ-additiv.

(2) Wenn $\mathcal{R}$ nur aus endlich vielen Mengen besteht, dann ist jeder Inhalt auf $\mathcal{R}$ sogar σ-additiv. Insbesondere ist der Inhalt ρ auf $\mathcal{P}(W)$ auch σ-additiv.

(3) Wir betrachten nun auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ den Inhalt[14]
$$\begin{aligned} \nu\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{wenn } A \text{ unendlich.} \end{cases} \end{aligned}$$
In diesem Fall ist
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\} \;=\; \mathbb{N} \quad \text{aber} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\nu(\{k\})}_{=0} \;\neq\; \underbrace{\nu(\mathbb{N})}_{=1}.$$
Wir haben also gezeigt, dass ν nicht σ-additiv ist.

Satz 3.2. *Es sei $\mu\colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Der Inhalt μ ist σ-additiv,*

(b) *Der Inhalt μ ist σ-subadditiv, d.h. für jede Folge von Mengen*[15] *$\{A_k\}_{k\geq 1}$ in $\mathcal{R}$, deren Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls in $\mathcal{R}$ liegt, gilt*
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$
(c) *Der Inhalt μ ist stetig von unten, d.h. für jede aufsteigende Folge $\{A_k\}_{k\geq 1}$ in $\mathcal{R}$, deren Limes $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls in $\mathcal{R}$ liegt, gilt*
$$\mu(A_k) \uparrow \mu(A).$$
Mit anderen Worten, wenn $A_k \uparrow A \in \mathcal{R}$, dann gilt $\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$.

Beweis. Wir beweisen die Äquivalenz der drei Aussagen indem wir folgende Implikationen beweisen:
$$(b) \implies (a) \implies (c) \implies (b).$$

[14]Es klingt so, als müsse die zweite Eigenschaft eines Inhalts verletzt sein. Aber dies ist nicht der Fall, denn es gibt in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ keine disjunkten unendlichen Mengen.

[15]Wir nehmen nun nicht an, dass die Mengen paarweise disjunkt sind.

Wir beweisen zuerst (b) $\Rightarrow$ (a). Es sei also $\{A_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{R}$, so dass $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ in $\mathcal{R}$ liegt. Dann gilt

$$\mu(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft (b)}}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{endliche Additivität von } \mu}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big)}_{\leq \mu(A) \text{ wegen Monotonie}} \leq \mu(A).$$

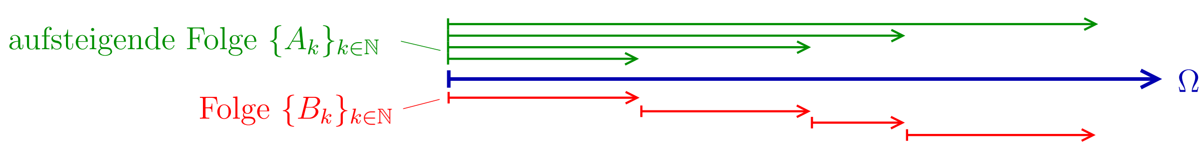
Nachdem links und rechts der gleiche Term stehen, müssen alle Ungleichheiten schon Gleichheiten sein. Insbesondere erhalten wir die gewünschte Gleichheit der ersten beiden Ausdrücke.

Wir beweisen nun (a) $\Rightarrow$ (c). Es sei also $\{A_k\}_{k\geq 1}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{R}$, so dass der Limes $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls in $\mathcal{R}$ liegt. Wir setzen

$$B_1 := A_1 \text{ und für } k \geq 2 \text{ setzen wir } B_k := A_k \setminus A_{k-1}, \text{ also ist } A_k = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k.$$

Nachdem $\{A_k\}$ eine aufsteigende Folge ist, folgt, dass die B_k's paarweise disjunkt sind. Wir erhalten, dass

$$\lim_{k\to\infty}\mu(A_k) = \lim_{k\to\infty}\mu(B_1\sqcup\dots\sqcup B_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 3.1 (3)}}}{=} \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft (a)}}}{=} \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \mu(A).$$



Wir beweisen zum Schluß noch, dass (c) $\Rightarrow$ (b). Es sei also $\{A_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{R}$, so dass $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ auch in $\mathcal{R}$ liegt. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $B_m = A_1\cup\dots\cup A_m$. Die B_m bilden nun eine aufsteigende Folge von Mengen mit $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = A$. Wir erhalten, dass

$$\mu(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft (c)}}}{=} \lim_{k\to\infty}\mu(B_k) = \lim_{k\to\infty}\mu(A_1\cup\dots\cup A_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.1 (4)}}}{\leq} \lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{k}\mu(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m).$$

■

3.3. **Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.** Wir wenden uns nun dem Studium von Maßen auf dem n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ zu. Wir erinnern in diesem kurzen Teilkapitel an einige Begriffe aus der Analysis II.

Notation.

(1) Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Wir fassen $\mathbb{R}^n$ als metrischen Raum bezüglich der euklidischen Metrik auf, welche durch $\|x-y\|$ gegeben ist.

(2) Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ bezeichnen wir

$$B_r(x) \;=\; \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|y-x\| < r \right\}$$

als die offene r-Kugel um x.

(3) Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir [16]

$$\text{Abschluss von } X \;:=\; \overline{X} \;:=\; \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{für alle } \epsilon > 0 \text{ gilt } B_\epsilon(y) \cap X \neq \varnothing \right\}$$

und

$$\text{Innere von } X \;:=\; \mathring{X} \;:=\; \left\{ x \in X \,\middle|\, \text{es gibt ein } \epsilon > 0 \text{ mit } B_\epsilon(x) \subset X \right\}.$$

Beispiel. Für den halboffenen Quader

$$Q \;=\; [a_1,b_1) \times \cdots \times [a_n,b_n) \;=\; \left\{ (x_1,\dots,x_n) \,\middle|\, x_i \in [a_i,b_i) \right\},$$

gilt, dass

$$\overline{Q} \;=\; [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n] \;=\; \left\{ (x_1,\dots,x_n) \,\middle|\, x_i \in [a_i,b_i] \right\},$$

und

$$\mathring{Q} \;=\; (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n) \;=\; \left\{ (x_1,\dots,x_n) \,\middle|\, x_i \in (a_i,b_i) \right\}.$$

3.4. **Das Lebesgue-Prämaß.** Unser eigentliches Ziel ist es einen vernünftigen Begriff von„Volumen" für„vernünftige" Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einzuführen. In diesem Kapitel kommen wir diesem Ziel deutlich näher. Genauer gesagt, wir werden ein Prämaß Vol_n auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ einführen.

Definition. Für einen halboffenen Quader

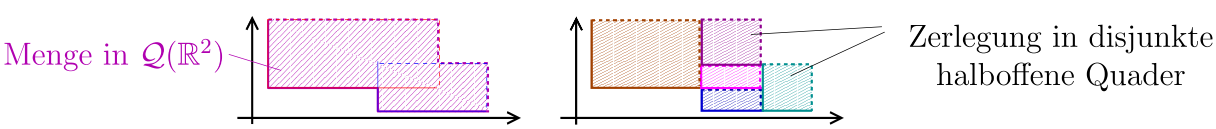
$$Q \;=\; [a_1,b_1) \times \cdots \times [a_n,b_n)$$

setzen wir

$$\mathrm{Vol}_n(Q) \;:=\; \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Wir wollen nun diesen Volumenbegriff auf alle Teilmengen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Dazu benötigen wir folgenden Satz.

Satz 3.3. *Jede Teilmenge in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ist die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern.*



Beweis $(*)$**.** Wir beweisen diesen Satz mit Induktion nach n. Wir beweisen zuerst den Fall $n = 1$.

Behauptung. Jede Menge in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ ist die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen.

[16] Dies sind natürlich wort-wörtlich die gleichen Definitionen wie für den Abschluss und das Innere einer Teilmenge in $\mathbb{C}$, siehe Seite 11.

Für $W \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ sei $m(W)$ die kleinste natürliche Zahl, so dass man W als Vereinigung von halboffenen Intervallen schreiben kann.[17] Wir beweisen nun die Aussage per Induktion nach $m(W)$.

Es sei also $W \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$. Wenn $m(W) = 1$, dann ist W ein halboffenes Intervall und es gibt nichts zu beweisen. Nehmen wir nun an, dass die Aussage für alle $W \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ mit $m(W) \leq k$ gilt. Es sei nun $W \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ mit $m(W) = k+1$. Wir können W also schreiben als $W = U \cup R$, wobei $U \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ mit $m(U) = k$, und wobei R ein halboffenes Intervall ist. Per Induktionsvoraussetzung gibt es disjunkte halboffene Intervalle $S_1, \dots, S_l$, so dass $U = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_l$. Dann gilt

$$W \;=\; U \cup R \;=\; (U \setminus R) \sqcup R \;=\; \Big(\Big(\bigsqcup_{i=1}^{l} S_i\Big) \setminus R\Big) \sqcup R \;=\; \Big(\bigsqcup_{i=1}^{l} \underbrace{(S_i \setminus R)}_{\substack{\text{disjunkte Vereinigung} \\ \text{von } \leq 2 \text{ halboffenen} \\ \text{Intervallen}}}\Big) \sqcup R.$$

Im Beweis von Lemma 2.5 hatten wir gesehen, dass wir für halboffene Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$ die Differenz $I \setminus J$ als die disjunkte Vereinigung von ≤ 2 disjunkten halboffenen Intervallen schreiben können. Es folgt also, dass jedes $S_i \setminus R$ als disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen geschrieben werden kann. Also folgt aus der oben angegebenen disjunkten Zerlegung von W, dass W die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen ist. ⊞

Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $n-1$ gilt. Es sei nun $X \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Nachdem

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \;=\; \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \boxtimes \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{n-1})$$

folgt aus Lemma 2.7, dass wir X schreiben können als *disjunkte* Vereinigung von Mengen der Form $A \times B$, wobei $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{n-1})$. Es genügt nun die Behauptung für solch ein Produkt $A \times B$ zu beweisen. Hierbei ist

$$A \times B \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Fall } n=1 \text{ ist } A=I_1\sqcup\dots\sqcup I_k,\text{ wobei } I_1,\dots,I_k \text{ halboffene Intervalle,} \\ \text{nach Induktion ist } B=Q_1\sqcup\dots\sqcup Q_l,\text{ wobei } Q_1,\dots,Q_l \text{ halboffene Quader}}}{=} \quad (I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k) \times (Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_l) \quad = \quad \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{j=1}^{l} \underbrace{I_i \times Q_j}_{\substack{\text{halboffener} \\ \text{Quader}}}.$$

■

Es sei nun also $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 3.3 ist

$$A \;=\; \bigsqcup_{i=1}^{m} Q_i$$

die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern. Es liegt nun nahe

$$\mathrm{Vol}_n(A) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i)$$

zu setzen. Allerdings gibt es dabei ein sehr lästiges Problem: wir können A auf viele Weisen als disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern schreiben, warum hängt dann die Definition nicht von der Wahl der Zerlegung ab?

Dies ist gerade die Aussage des folgenden – nicht-trivialen – Satzes.

[17] Per Definition von $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ kann man jede Menge in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ als Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen schreiben, mit anderen Worten, $m(W)$ ist immer definiert.

Satz 3.4. *Wir betrachten die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vol}_n\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \mathrm{Vol}_n(A) \underset{\uparrow}{:=} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i), \end{array}$$

wobei A die disjunkte Vereinigung der halboffenen Quadern $Q_1, \ldots, Q_m$ ist

(1) *Die Abbildung ist wohldefiniert, d.h. hängt nicht von der Zerlegung von A ab.*
(2) *Die Abbildung definiert einen Inhalt auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$.*

Die Hauptarbeit für den Beweis von Satz 3.4 erfolgt in folgendem Lemma.

Lemma 3.5. *Es sei*

$$Q \;=\; Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_m$$

eine disjunkte Zerlegung von einem halboffenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ in halboffene Quader $Q_1, \ldots, Q_m$. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Bevor wir uns dem Beweis von Lemma 3.5 zuwenden, wollen wir erst zeigen, dass wir mithilfe von diesem Lemma 3.5 den Satz 3.4, der uns eigentlich interessiert, leicht beweisen können.

Beweis von Satz 3.4 unter Verwendung von Lemma 3.5. Wir zeigen zuerst, dass Vol_n wohldefiniert ist. Es sei also $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ und es seien

$$A \;=\; \bigsqcup_{i=1}^{r} P_i \;=\; \bigsqcup_{j=1}^{s} Q_j,$$

zwei Zerlegungen von A in disjunkte halboffene Quader. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Vol}_n(P_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wir zerlegen den Quader } P_i \\ \text{in die disjunkten Quader } P_i \cap Q_j}}{=} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Vol}_n\Big(\underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{s} P_i \cap Q_j}_{=P_i}\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.5} \\ \text{denn } P_i = \bigsqcup_{j=1}^{s} (P_i \cap Q_j)}}{=} \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{das gleiche Argument} \\ \text{rückwärts}}}{=} \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(Q_j).$$

Wir haben also gezeigt, dass die Definition von $\mathrm{Vol}_n(A)$ nicht von der Zerlegung abhängt.

Per Definition ist $\mathrm{Vol}_n(\varnothing) = 0$ und die Abbildung Vol_n ist offensichtlich additiv. Also ist Vol_n in der Tat ein Inhalt. ∎

Beweis von Lemma 3.5 (∗). Wir beweisen das Lemma mithilfe von Induktion nach n. Wir betrachten zuerst den Induktionsanfang $n = 1$. In diesem Fall sind

$$Q \;=\; [a, b) \qquad \text{und} \qquad Q_i \;=\; [a_i, b_i), \qquad \text{mit } i = 1, \ldots, m$$

halboffene Intervalle. Indem wir eventuell die Intervalle umnummerieren können wir annehmen, dass $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. Da $Q = [a, b)$ die disjunkte Vereinigung der Intervalle

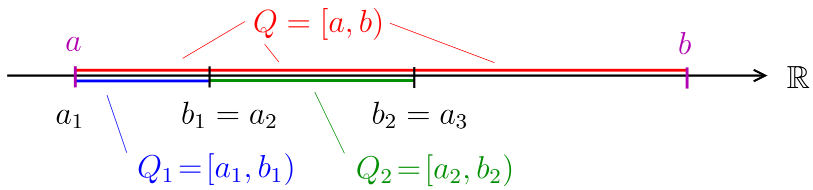
$[a_i, b_i)$ ist muss gelten, dass

$$a \;=\; a_1 \;<\; b_1 \;=\; a_2 \;<\; b_2 \;=\; a_3 \;<\ldots\; b_{m-1} \;=\; a_m \;<\; b_m \;= b.$$

Also ist

$$\mathrm{Vol}_1(Q) \;=\; b-a \;=\; \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Vol}_1(Q_i).$$

Wir haben also den Induktionsanfang bewiesen.



Wir wenden uns nun dem Induktionsschritt $n-1 \rightsquigarrow n$ zu. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass

$$Q \;=\; I \times P \qquad \text{und} \qquad Q_i \;=\; I_i \times P,$$

wobei I und die I_i's halboffene Intervalle und P ein halboffener Quader in $\mathbb{R}^{n-1}$ sind. Dann folgt aus $Q = Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_m$, dass $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m$. Wir erhalten dann wie gewünscht, dass

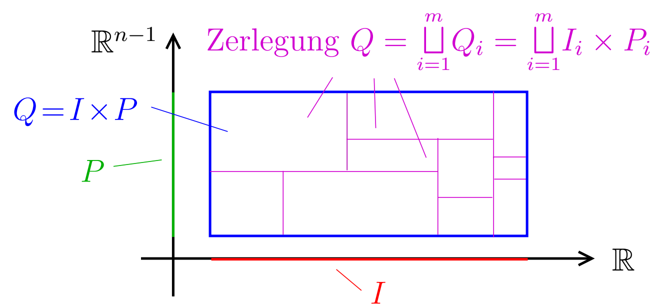
$$\mathrm{Vol}_n(Q) \;=\; \mathrm{Vol}_n(I \times P) \;=\; \mathrm{Vol}_1(I) \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P) \;\underset{\uparrow}{=}\; \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_1(I_i) \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

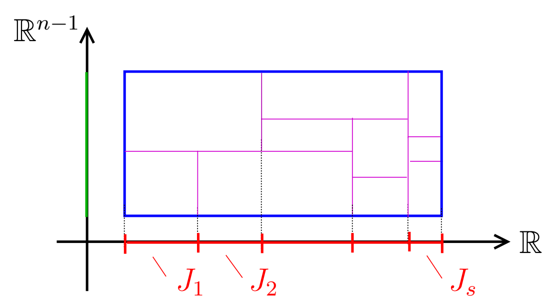
folgt aus dem Fall $n = 1$, angewandt auf $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m$

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Die Quader Q und Q_i lassen sich zerlegen als

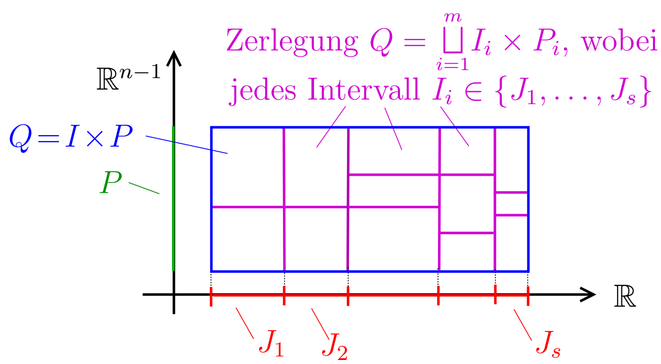
$$Q \;=\; I \times P \qquad \text{und} \qquad Q_i \;=\; I_i \times P_i,$$

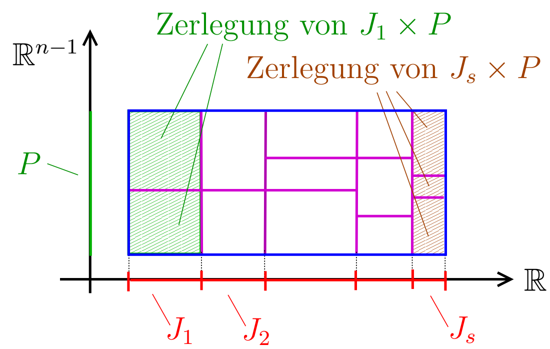
wobei I und die I_i's halboffene Intervalle und P und die P_i's halboffene Quader in $\mathbb{R}^{n-1}$ sind. Wir bezeichnen nun mit $J_1, \ldots, J_m$ die halboffenen Intervalle, welche wir dadurch erhalten, dass wir das Intervall I entlang aller Anfangs- und Endpunkte der Intervalle I_i schneiden.





Jedes der Intervalle I_i ist nun eine Vereinigung von den Intervallen $J_1, \ldots, J_s$. Indem wir die Intervalle I_i in Intervalle der Form J_j aufteilen, und indem wir den oben betrachteten Spezialfall anwenden, können wir annehmen, dass alle Intervalle der Form I_i schon ein Intervall aus $\{J_1, \ldots, J_s\}$ sind.





Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \;&=\; \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(I_i \times P_i) \;=\; \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{\text{alle } i \text{ mit} \\ I_i = J_j}} \underbrace{\mathrm{Vol}_n(J_j \times P_i)}_{=\mathrm{Vol}_1(J_j)\cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P_i)} \;=\; \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_1(J_j) \cdot \sum_{\substack{\text{alle } i \text{ mit} \\ I_i = J_j}} \mathrm{Vol}_{n-1}(P_i) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktionsvoraussetzung,} \\ \text{angewandt auf } \bigsqcup_{\substack{\text{alle } i \text{ mit} \\ I_i = J_j}} P_i = P}}{=} \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_1(J_j) \cdot \mathrm{Vol}(P) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktionsanfang, angewandt auf } \bigsqcup_{j=1}^{s} J_j = I}}{=}\; \mathrm{Vol}_1(I) \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(P) \;=\; \mathrm{Vol}_n(Q).
\end{aligned}$$

■

Satz 3.6. *Der Inhalt*

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_n \colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ A &\mapsto \mathrm{Vol}_n(A) \end{aligned}$$

ist σ-additiv, d.h. Vol_n *ist ein Prämaß.*

Definition. Wir bezeichnen $\mathrm{Vol}_n \colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ als das Lebesguesche Prämaß.[18] Wenn vom Kontext her klar ist, in welcher Dimension wir arbeiten, lassen wir den Index n weg und schreiben einfach Vol anstatt Vol_n.

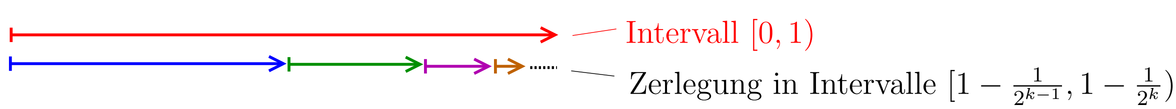
Beispiel. In $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ haben wir die disjunkte Zerlegung

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \left[1 - \tfrac{1}{2^{k-1}}, 1 - \tfrac{1}{2^k}\right) \;=\; [0,1)$$

vom halboffenen Intervall $[0,1)$ in unendlich viele halboffene Intervalle. Hierbei ist in der Tat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathrm{Vol}\left(\left[1 - \tfrac{1}{2^{k-1}}, 1 - \tfrac{1}{2^k}\right)\right)}_{=\frac{1}{2^k}} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \;=\; 1 \;=\; \mathrm{Vol}([0,1)).$$

In diesem ganz speziellem Fall können wir also die Aussage von Satz 3.6 explizit verifizieren.



[18] In der Literatur wird das Lebesguesche Prämaß oft auch mit $\lambda(A)$ anstatt $\mathrm{Vol}_n(A)$ geschrieben.

3.5. **Beweis von Satz 3.6** $(*)$**.** In diesem Teilkapiten beschäftigen wir uns nur mit dem Beweis von Satz 3.6. Wir werden dabei folgendes Lemma benötigen.

Lemma 3.7. *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein halboffener Quader. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ halboffene Quader P und R, so dass*

$$\overline{P} \subset Q \subset \mathring{R} \quad \textit{mit} \quad \mathrm{Vol}_n(P) \geq (1-\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(Q) \textit{ und } \mathrm{Vol}_n(R) \leq (1+\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(Q).$$

Beweis. Es sei also

$$Q = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n).$$

ein halboffener Quader und $\epsilon > 0$. Für $\delta > 0$ setzen wir

$$\mathcal{P}(\delta) = [a_1+\delta, b_1-\delta) \times \cdots \times [a_n+\delta, b_n-\delta),$$

und

$$\mathcal{R}(\delta) = [a_1-\delta, b_1+\delta) \times \cdots \times [a_n-\delta, b_n+\delta).$$

Aus dem Beispiel auf Seite 145 folgt nun, dass für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$\overline{\mathcal{P}(\delta)} \subset Q \subset \mathring{\mathcal{R}}(\delta).$$

Zudem gilt $\lim\limits_{\delta\to 0} \mathrm{Vol}_n(\mathcal{P}(\delta)) = \mathrm{Vol}(Q)$ und $\lim\limits_{\delta\to 0} \mathrm{Vol}_n(\mathcal{R}(\delta)) = \mathrm{Vol}(Q)$. Aus der Stetigkeit von Volumina von Quadern folgt nun, dass für ein geeignet gewähltes $\delta > 0$ die Volumenbedingungen erfüllt sind. ■

Das nächste Korollar besagt nun, dass die Aussage von Lemma 3.7 auch analog für beliebige Teilmengen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ zutrifft.

Korollar 3.8. *Es sei $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es A und C in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, so dass*

$$\overline{A} \subset B \subset \mathring{C} \quad \textit{mit} \quad \mathrm{Vol}_n(A) \geq (1-\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(B) \textit{ und } \mathrm{Vol}_n(C) \leq (1+\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(B).$$

Beweis. Jedes $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ist per Definition die Vereinigung von halboffenen disjunkten Quadern $Q_1, \dots, Q_m$. Wir wenden nun Lemma 3.7 auf diese Quader an und erhalten halboffene Quader P_i and R_i mit

$$\overline{P_i} \subset Q_i \subset \mathring{R}_i \;\text{ und }\; \mathrm{Vol}(P_i) \geq (1-\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(Q_i) \;\text{ sowie }\; \mathrm{Vol}_n(R_i) \leq (1+\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(P_i).$$

Wir setzen $A = \bigcup\limits_{i=1}^m P_i$ und $C = \bigcup\limits_{i=1}^m R_i$. Dann ist

$$\overline{A} = \bigcup_{i=1}^m \overline{P_i} \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^m Q_i}_{=B} \subset \bigcup_{i=1}^m \mathring{R}_i = \mathring{C}.$$

Zudem ist

$$\mathrm{Vol}_n(A) = \mathrm{Vol}_n(P_1 \cup \cdots \cup P_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Additivität}}}{=} \sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}_n(P_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Monotonie}}}{\geq} (1-\epsilon)\cdot \sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}_n(Q_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Additivität}}}{=} (1-\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(B)$$

und

$$\mathrm{Vol}_n(C) = \mathrm{Vol}_n(R_1 \cup \cdots \cup R_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Subadditivität}}}{\leq} \sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}_n(R_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Monotonie}}}{\leq} (1+\epsilon)\cdot \sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}_n(Q_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Additivität}}}{=} (1+\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(B).$$

■

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 3.6 zu.

Beweis von Satz 3.6. Wir wollen also beweisen, dass Vol_n ein σ-additiver Inhalt ist. Nach Satz 3.2 genügt es zu zeigen, dass Vol_n zumindest σ-subadditiv ist. Es sei also $\{B_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, deren Vereinigung $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ ebenfalls in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ liegt. Wir müssen zeigen, das

$$\mathrm{Vol}_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(B_k).$$

Es genügt folgende Aussage zu beweisen:

Behauptung. Für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$(1-\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \;\leq\; (1+\epsilon)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(B_k).$$

Wenn wir nur endlich viele B_k's hätten, dann würde die Aussage natürlich aus Lemma 3.1 (4) folgen. Wir führen den allgemeinen Fall auf den endlichen Fall durch ein Kompaktheitsargument zurück. Dazu müssen wir eine kompakte Menge finden, welche durch offene Mengen überdeckt wird.

Da $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ weder offen noch kompakt ist, wollen wir innerhalb von $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ eine„etwas" kleinere kompakte Teilmenge finden, welche durch offene Mengen überdeckt werden, welche„etwas" größer als die B_k's sind.

Es sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Wir wenden Korollar 3.8 auf B und die B_k's an und erhalten insbesondere

$$A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad \overline{A} \subset B \qquad \text{und mit} \qquad \mathrm{Vol}_n(A) \;\geq\; (1-\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(B),$$

und für jedes $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$C_k \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad B_k \subset \mathring{C}_k \qquad \text{und mit} \qquad \mathrm{Vol}_n(C_k) \;\leq\; (1+\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(B_k).$$

Es folgt also, dass

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kompakt nach Heine-Borel}}}{\overline{A}} \;\subset\; B \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \;\subset\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{offen}}}{\mathring{C}_k}.$$

Es folgt nun aus der Definition von Kompaktheit, dass $\overline{A}$, und damit insbesondere auch A, schon durch endlich viele $C_1, \ldots, C_m$ überdeckt ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}(1-\epsilon)\cdot \mathrm{Vol}_n(B) \;&\leq\; \mathrm{Vol}_n(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie}}}{\leq} \mathrm{Vol}_n\Big(\bigcup_{k=1}^{m} C_k\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 3.1 (4)}}}{\leq} \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(C_k) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(C_k) \\ &\leq\; (1+\epsilon)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(B_k).\end{aligned}$$

Wir haben also die gewünschte Ungleichung bewiesen. ■

3.6. **Endliche und σ-endliche Inhalte.** Wir beschließen das Kapitel mit zwei einfachen Definitionen.

Definition.

(1) Ein Inhalt μ auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt endlich, wenn $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

(2) Ein Inhalt μ auf einem Mengenring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-endlich, wenn es eine Folge von Mengen $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; \Omega \quad \text{und} \quad \mu(A_k) \;<\; \infty \text{ für alle } k \geq 1.$$

Beispiel. Der Inhalt Vol_n auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ist endlich.

Beispiel. Auf $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ betrachten wir wiederum die drei Inhalte

$$\begin{aligned} \nu\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{wenn } A \text{ unendlich.} \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \#A \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tau\colon \mathcal{E}(\mathbb{N}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } A = \varnothing, \\ \infty, & \text{wenn } A \neq \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

Der Inhalt ν ist natürlich endlich. Der Inhalt μ ist zwar nicht endlich, aber immerhin σ-endlich, denn $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{1, \ldots, k\}$. Der Inhalt τ hingegen ist noch nicht einmal σ-endlich.

4. Fortsetzung von einem Prämass zu einem Mass

Im vorherigen Kapitel hatten wir unter anderem das Volumen Vol_n auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ eingeführt. Viele Mengen, für welche wir uns interessieren, liegen aber nicht in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Beispielsweise ist für $n \geq 2$ keine Kugel in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ enthalten. Wir wollen in diesem Kapitel den Volumenbegriff auf mehr Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erweitern. Nachdem es von der Theorie her fast keinen Unterschied macht, arbeiten wir in diesem Kapitel jedoch nicht nur mit dem σ-endlichen Prämaß auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, sondern wir betrachten den allgemeinen Fall.

Die Problemstellung ist nun wie folgt. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei

$$\mu\colon \mathcal{A} \ \to \ \overline{\mathbb{R}}_+$$

ein σ-endliches Prämaß. In diesem Kapitel wollen wir $\mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zu einem Maß

$$\widetilde{\mu}\colon \langle \mathcal{A} \rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \ \to \ \overline{\mathbb{R}}_+$$

auf der von $\mathcal{A}$ erzeugten σ-Algebra[19] fortsetzen. Unser Hauptinteresse liegt dabei, wie schon erwähnt, auf dem Prämaß Vol_n auf dem Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$.

4.1. Die Menge $\mathcal{A}^{\uparrow}$.

Notation. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}^{\uparrow}$ die Menge aller $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, welche sich als Limes

$$A_k \ \uparrow \ A$$

einer *aufsteigenden* Folge von Mengen $A_k \in \mathcal{A}$ darstellen lassen. Mit anderen Worten $\mathcal{A}^{\uparrow}$ sind alle Teilmengen $A \subset \Omega$, für die es eine aufsteigende Folge $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Mengen in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = A$ gibt.

Beispiel. Für $a < b$ gilt

$$\underbrace{[a + \tfrac{1}{k}, b)}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})} \ \uparrow \ \text{das offene Intervall } (a,b).$$

Also liegt das offene Intervall (a,b) in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}$.

Wir werden immer wieder folgendes elementare Lemma verwenden.

Lemma 4.1. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω. Dann gilt*

$$\mathcal{A}^{\uparrow} \ = \ \begin{array}{c}\textit{alle Teilmengen von } \Omega \textit{, welche als Vereinigung von abzählbar} \\ \textit{vielen Mengen in } \mathcal{A} \textit{ geschrieben werden können.}\end{array}$$

Beweis. Die Inklusion„$\subset$" ist offensichtlich. Es verbleibt die Inklusion„$\supset$" zu beweisen. Die Vereinigung von endlich vielen Mengen im Mengenring $\mathcal{A}$ liegt schon wieder in $\mathcal{A}$. Es sei nun $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige, nicht notwendigerweise aufsteigende Folge, von Teilmengen

[19] Wir hatten die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra $\langle \mathcal{A} \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ auf Seite 138 eingeführt.

in $\mathcal{A}$ ist. Dann ist[20]

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_k.}_{\text{aufsteigende Folge in } \mathcal{A}}$$

Es folgt nun aus der Definition von $\mathcal{A}^{\uparrow}$, dass diese Vereinigungsmenge in $\mathcal{A}^{\uparrow}$ liegt. ■

Der folgende Satz gibt uns viele Beispiele von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, welche in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow}$ liegen.

Satz 4.2. *Alle offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ liegen in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow}$.*

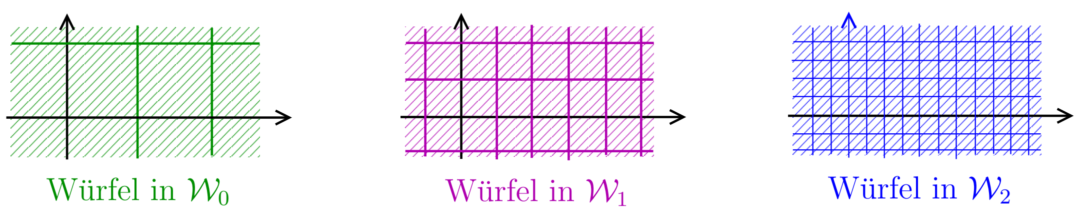
Satz 4.2 folgt sofort aus den jeweiligen Definitionen, Lemma 4.1 und folgendem Satz.

Satz 4.3. *Jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist die disjunkte[21] Vereinigung von abzählbar vielen halboffenen Würfeln.*

Beweis von Satz 4.3. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$\mathcal{W}_k \;:=\; \text{alle Würfel der Form } \Big[\tfrac{m_1}{2^k}, \tfrac{m_1+1}{2^k}\Big) \times \cdots \times \Big[\tfrac{m_n}{2^k}, \tfrac{m_n+1}{2^k}\Big), \text{ wobei } m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}.$$

Anschaulich gesprochen ergeben die halboffenen Würfel in $\mathcal{W}_k$ gerade das„Karomuster" auf $\mathbb{R}^n$ mit Seitenlänge $\frac{1}{2^k}$. Jedes $\mathcal{W}_k$ besteht also aus abzählbar vielen disjunkten halboffenen Würfel, welche ganz $\mathbb{R}^n$ überdecken.



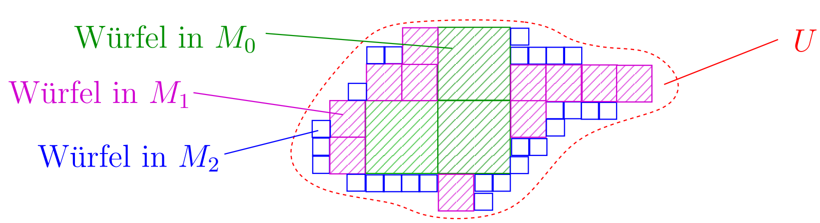
Es sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge. Wir setzen zuerst

$M_0 \;:=\;$ Vereinigung aller halboffenen Würfel in $\mathcal{W}_0$, welche ganz in U enthalten sind,

und iterativ setzen wir dann

$M_k \;:=\;$ Vereinigung aller halboffenen Würfel in $\mathcal{W}_k$, welche ganz in U enthalten sind, aber nicht in $M_0 \cup \cdots \cup M_{k-1}$ liegen.

Es folgt aus dem Nachsatz„„welche nicht in $M_0 \cup \cdots \cup M_{k-1}$" liegen, dass die Würfel in $M_0, M_1, \dots$ disjunkt sind.



[20] Dies ist also der gleiche Trick wie im Beweis von Satz 2.9.

[21] Die Aussage, dass wir die Würfel disjunkt wählen können ist für den Beweis von Satz 4.2 irrelevant. Dies wird jedoch später bei ein anderen Gelegenheit wichtig sein.

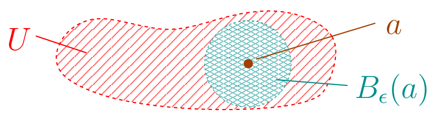
Es verbleibt nun noch folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es ist
$$U \;=\; \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k.$$

Es sei also $a \in U$ beliebig. Nachdem U offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(a) \subset U$. Wir wählen nun ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\text{Durchmesser der Würfel in } \mathcal{W}_k \;=\; \sqrt{n} \cdot \text{Kantenlänge der Würfel in } \mathcal{W}_k \;=\; \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2^k} \;<\; \epsilon.$$

Es sei W der Würfel in $\mathcal{W}_k$, welcher a enthält. Aus der Bedingung an die Durchmesser folgt, dass $W \subset U$.[22] Also ist entweder $W \in M_k$ oder der Punkt a ist schon in einem M_i mit $i < k$ enthalten. In beiden Fällen ist, wie gewünscht, der Punkt a in $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ enthalten. ■



Bemerkung. Wir haben also gerade gesehen, dass viele interessante Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ schon in $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^\uparrow$ liegen. Nichtsdestotrotz gehen uns noch viele Mengen ab. Es sei beispielsweise $x \in \mathbb{R}$, dann liegt die Menge $\{x\}$ nicht in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^\uparrow$. In der Tat, denn jede Menge A in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^\uparrow$ hat die Eigenschaft, dass für jedes $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $[x, x+\epsilon)$ noch ganz in A liegt.

Wir beschließen die Einführung von $\mathcal{A}^\uparrow$ mit folgendem Satz.

Satz 4.4. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω.*
(1) *Der Durchschnitt endlich vieler Mengen in $\mathcal{A}^\uparrow$ liegt wieder in $\mathcal{A}^\uparrow$.*
(2) *Die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen in $\mathcal{A}^\uparrow$ liegt wieder in $\mathcal{A}^\uparrow$.*
(3) *Aus $A \in \mathcal{A}^\uparrow$ und $B \in \mathcal{A}$ folgt auch, dass $A \setminus B \in \mathcal{A}^\uparrow$.*

Bemerkung. Im Allgemeinen ist $\mathcal{A}^\uparrow$ jedoch kein Mengenring, denn aus $A, B \in \mathcal{A}^\uparrow$ folgt nicht notwendigerweise, dass auch $A \setminus B$ in $\mathcal{A}^\uparrow$ liegt. Beispielweise gilt
$$\underbrace{[0,1)}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})} \setminus \underbrace{(0,1)}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})^\uparrow} \;=\; \{0\},$$
aber wir hatten gerade gesehen, dass $\{0\}$ nicht in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^\uparrow$ liegt.

Beweis.

(1) Wir zeigen, dass der Durchschnitt von zwei Mengen in $\mathcal{A}^\uparrow$ wieder in $\mathcal{A}^\uparrow$ liegt. Der allgemeine Fall wird dann iterativ bewiesen. Es seien also $A, B \in \mathcal{A}^\uparrow$. Dann ist
$$A \cap B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wir wählen aufsteigende Folgen} \\ A_k \uparrow A \text{ und } B_k \uparrow B \text{ in } \mathcal{A}}}{=} \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \cap \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gilt nur da } A_k,\, B_k \\ \text{aufsteigende Folgen}}}{=} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{A_k \cap B_k}_{\substack{\in \mathcal{A} \text{ nach} \\ \text{Lemma 2.4}}} \in \mathcal{A}^\uparrow.$$

[22] In der Tat, denn sei d der Durchmesser von W. Dann gilt für alle $x \in W$, dass $\|x - a\| \le d < \epsilon$, d.h. es ist $x \in B_\epsilon(a) \subset U$.

(2) Es seien $\{A_i\}_{i\in I}$ eine abzählbare Familie von Mengen in $\mathcal{A}^\uparrow$, d.h. die Indexmenge I ist abzählbar. Per Definition von $\mathcal{A}^\uparrow$ ist jedes A_i von der Form $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{ij}$, wobei die A_{ij} in $\mathcal{A}$ liegen. Dann ist

$$\bigcup_{i\in I} A_i \;=\; \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{ij} \;=\; \bigcup_{(i,j)\in I\times\mathbb{N}} A_{ij}.$$

Da I und $\mathbb{N}$ abzählbar sind, ist auch $I\times\mathbb{N}$ abzählbar. Also liegt die oben studierte Menge nach Lemma 4.1 in der Tat in $\mathcal{A}^\uparrow$.

(3) Es sei also $A \in \mathcal{A}^\uparrow$ und $B \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$A\setminus B \underset{\substack{\uparrow\\ \text{wir wählen eine aufsteigende Folge } A_k\uparrow A \text{ in } \mathcal{A}}}{=} \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big)\setminus B \;=\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{A_k\setminus B}_{\in\mathcal{A}} \;\in\; \mathcal{A}^\uparrow.$$

■

4.2. **Die Fortsetzung von μ auf $\mathcal{A}^\uparrow$.** Es sei weiterhin $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei $\mu\colon\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß. Es gilt

$$\mathcal{A} \;\subset\; \mathcal{A}^\uparrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{die folgt aus der Tatsache, siehe Lemma 2.10, dass}\\ \langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} \text{ eine } \sigma\text{-Algebra ist, welche } \mathcal{A} \text{ enthält}}}{\subset} \langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma}.$$

Wie erwähnt ist es unser Ziel in diesem das σ-endliche Prämaß μ zu einem Maß μ auf $\langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma}$ fortzusetzen. Wenn dies möglich sein soll, dann muss nach Satz 3.2 (c) für $A_k\uparrow A$ gelten, dass

$$\mu(A) \;=\; \lim_{k\to\infty} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{monoton steigende Folge, d.h. Grenzwert existiert}}}{\mu(A_k)} \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Diese Gleichung bietet sich nun natürlich als Definition von $\mu(A)$ für ein $A\in\mathcal{A}^\uparrow$ an. Allerdings müssen wir noch zeigen, dass dann $\mu(A)$ wohldefiniert ist. Dies ist genau die Aussage von folgendem Lemma.

Lemma 4.5. *Es sei $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei $\mu\colon\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ ein Prämaß, also ein σ-additiver Inhalt. Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\mu\colon \mathcal{A}^\uparrow &\to \overline{\mathbb{R}}_+\\ A &\mapsto \lim_{k\to\infty}\mu(A_k), \quad \textit{wobei } A_k\in\mathcal{A} \textit{ mit } A_k\uparrow A\end{aligned}$$

ist wohldefiniert, d.h. sie hängt nicht von der Wahl der aufsteigenden Folge $A_k\in\mathcal{A}$ ab.

Beweis. Es seien also $A_k\uparrow A$ und $B_k\uparrow A$ zwei aufsteigende Folgen in $\mathcal{A}$ mit Limes $A\in\mathcal{A}^\uparrow$. Wir zeigen zuerst folgende Behauptung.

Behauptung. Es ist
$$\lim_{m\to\infty}\mu(B_m) \;\le\; \lim_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

In der Tat gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass

$$\mu(B_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } B_m \subset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}}{=} \mu\Big(B_m \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (B_m \cap A_k)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-Additivität des Prämaß } \mu \\ \text{zusammen mit Satz 3.2 (a)}\Rightarrow\text{(b),} \\ \text{angewandt auf } (B_m \cap A_k) \uparrow B_m}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mu(B_m \cap A_k)}_{\le \mu(A_k)} \le \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Monotonie des Grenzwertes. ⊞

Der gleiche Beweis liefert natürlich auch die umgedrehte Ungleichung. Also müssen die Grenzwerte schon übereinstimmen. ■

Beispiel. In Satz 4.2 hatten wir gesehen, dass alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, also insbesondere auch alle offenen Intervalle, in $\mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}$ liegen. Für diese Mengen haben wir jetzt also ein Volumen definiert. Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_1\big((a,b)\big) = \mathrm{Vol}_1\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{[a+\tfrac{1}{k}, b)}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})}\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von Vol auf } \mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathrm{Vol}_1([a+\tfrac{1}{k}, b)) = \lim_{k\to\infty} (b-(a+\tfrac{1}{k})) = b-a.$$

Satz 4.6. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Prämaß. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathcal{A}^{\uparrow} &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \quad \textit{wobei } A_k \in \mathcal{A} \textit{ mit } A_k \uparrow A \end{aligned}$$

besitzt folgende Eigenschaften:

(1) *Es seien A und B in $\mathcal{A}^{\uparrow}$, dann gilt*
$$A \subset B \implies \mu(A) \le \mu(B) \qquad \textit{Monotonie.}$$
(2) *Es seien A und B in $\mathcal{A}^{\uparrow}$, dann gilt*
$$A \cap B = \varnothing \implies \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \textit{Additivität.}$$
(3) *Es sei $A_k \in \mathcal{A}^{\uparrow}, k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Mengen, dann gilt*
$$A_k \uparrow A \implies \mu(A_k) \uparrow \mu(A) \qquad \textit{Stetigkeit von unten.}$$
(4) *Für eine beliebige Folge $A_k \in \mathcal{A}^{\uparrow}, k \in \mathbb{N}$ gilt*[23]
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad \sigma\textit{-Subadditivität.}$$

Beweis. Es seien $A, B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$. Wir wählen aufsteigende Folgen $A_k \uparrow A$ und $B_k \uparrow B$ in $\mathcal{A}$.

(1) Es gilt
$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.1 (1) ist} \\ \mu \text{ monoton auf } \mathcal{A}}}{\le} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cup B_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } A \subset B \text{ und } B_k \uparrow B \\ \text{folgt } (A_k \cup B_k) \uparrow B}}{=} \mu(B).$$

[23] Aus Satz 4.4 folgt, dass $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}^{\uparrow}$, also ist $\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)$ in der Tat definiert.

(2) Wir nehmen nun, dass $A \cap B = \varnothing$. Wir erhalten, dass

$$\mu(A \sqcup B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nachdem} \\ (A_k \sqcup B_k) \uparrow (A \sqcup B)}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \sqcup B_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.1 (3) ist } \mu \text{ additiv auf } \mathcal{A}, \\ \text{und aus } A \cap B = \varnothing \text{ folgt } A_k \cap B_k = \varnothing}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) + \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu(A) + \mu(B).$$

Es sei nun $A_k \in \mathcal{A}^\uparrow, k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}^\uparrow$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine aufsteigende Folge $A_{ki} \uparrow A_k$ in $\mathcal{A}$. Wir betrachten

$$A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty A_{ki} = \bigcup_{m=1}^\infty \underbrace{\bigcup_{k=1}^m A_{km}}_{=:B_m}.$$

Dann liegt B_m, als Vereinigung von endlich vielen Mengen in $\mathcal{A}$, ebenfalls in $\mathcal{A}$. Zudem gilt

$$B_m \uparrow A \quad \text{also} \quad \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = \mu(A).$$

$$B_3 \quad \begin{array}{ccccccccccc} A_{11} & \subset & A_{12} & \subset & A_{13} & \subset & A_{14} & \dots & \subset & A_1 \\ A_{21} & \subset & A_{22} & \subset & A_{23} & \subset & A_{24} & \dots & \subset & A_2 \\ A_{31} & \subset & A_{32} & \subset & A_{33} & \subset & A_{34} & \dots & \subset & A_3 \\ A_{41} & \subset & A_{42} & \subset & A_{43} & \subset & A_{44} & \dots & \subset & A_4 \end{array}$$

(3) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(B_m) \underset{\uparrow}{\leq} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^m A_k\Big) \underset{\uparrow}{\leq} \mu(A).$$

folgt aus der gerade in (1) bewiesenen Monotonieeigenschaft von μ auf $\mathcal{A}^\uparrow$

Indem wir nun den Grenzwert $m \to \infty$ bilden erhalten wir, dass

$$\underbrace{\lim_{m\to\infty} \mu(B_m)}_{=\mu(A)} \leq \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^m A_k\Big) \leq \mu(A).$$

Wir sehen also, dass der mittlere Grenzwert den Wert $\mu(A)$ annimmt.

(4) In diesem Fall ist

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup_{k=1}^\infty A_k}_{=A}\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } B_m \uparrow A}}{=} \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = \lim_{m\to\infty} \Big(\bigcup_{k=1}^m A_{km}\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 3.1 (4) ist} \\ \mu \text{ subadditiv auf } \mathcal{A}}}{\leq} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \underbrace{\mu(A_{km})}_{\leq \mu(A_k)} \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).$$

■

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgendem, vielleicht auf den ersten Blick doch etwas überraschenden Lemma.

Lemma 4.7. *Es gibt eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, welche alle rationalen Zahlen enthält, aber welche ein endliches Volumen besitzt.*

Beweis. Aus [**Fr1**, Satz 4.13] wissen wir, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Wir wählen eine Abzählung $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{Q}$. Wir betrachten dann die Menge

$$A \ := \ \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a_i - \tfrac{1}{2^{i+1}}, a_i + \tfrac{1}{2^{i+1}}\right).$$

Die Menge A ist als Vereinigung von offenen Mengen wiederum offen. Aus Satz 4.2 folgt zudem $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}$. Die Menge A enthält offensichtlich alle rationalen Zahlen. Wir wollen nun zeigen, dass das Volumen von A endlich ist. Es ist

$$\mathrm{Vol}(A) \ = \ \mathrm{Vol}\Bigg(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a_i - \tfrac{1}{2^{i+1}}, a_i + \tfrac{1}{2^{i+1}}\right)}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})^{\uparrow}}\Bigg) \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 4.6 (4)}}}{\leq} \ \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mathrm{Vol}\left(\left(a_i - \tfrac{1}{2^{i+1}}, a_i + \tfrac{1}{2^{i+1}}\right)\right)}_{=\frac{1}{2^i}} \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ = \ 1.$$

■

4.3. **Das äußere Maß und die Pseudometrik auf Teilmengen.** In diesem Teilkapitel sei weiterhin $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei

$$\mu\colon \mathcal{A} \ \to \ \overline{\mathbb{R}}_+$$

ein Prämaß, d.h. μ ist ein σ-additiver Inhalt. Wir nehmen jetzt zudem an, dass μ σ-endlich ist. Unser Ziel ist es immer noch, μ zu einem Maß

$$\widetilde{\mu}\colon \langle \mathcal{A} \rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \ \to \ \overline{\mathbb{R}}_+$$

fortzusetzen.

Definition. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß. Für eine beliebige Teilmenge $X \subset \Omega$ definieren wir das äußere Maß von X als[24]

$$\mu^*(X) \ := \ \inf\left\{\mu(A) \,\middle|\, X \subset A \text{ und } A \in \mathcal{A}^{\uparrow}\right\} \ \in \ \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}.$$

Bemerkung. Wenn $X \in \mathcal{A}^{\uparrow}$, insbesondere, wenn $X \in \mathcal{A}$, dann folgt aus der Monotonie von $\mu\colon \mathcal{A}^{\uparrow} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, dass $\mu^*(X) = \mu(X)$.

Beispiel. Wir betrachten den Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ mit dem Prämaß Vol. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\epsilon > 0$, dass

$$0 \ \leq \ \mathrm{Vol}^*(\{x\}) \ \leq \ \mathrm{Vol}(\underbrace{[x, x+\epsilon)}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})}) \ = \ \epsilon.$$

Wir sehen also, dass $\mathrm{Vol}^*(\{x\}) = 0$. In Übungsblatt 10 zeigen wir, dass für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt:

$$\mathrm{Vol}^*\left([a,b]\right) \ = \ b - a.$$

[24]Nachdem $\mathcal{A}$ als σ-endlich vorausgesetzt ist gibt es insbesondere eine Folge von Mengen $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$. Wir sehen also, dass $\Omega \in \mathcal{A}^{\uparrow}$. Es folgt, dass das Infimum in der Definition von $\mu^*(X)$, existiert, denn die Menge der möglichen A's enthält Ω, sie ist also insbesondere nicht leer.

Satz 4.8. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß. Die Abbildung $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ besitzt folgende Eigenschaften:*

(1) *Es gilt*
$$X \subset Y \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(X) \le \mu^*(Y) \qquad \textit{Monotonie.}$$

(2) *Es sei X_i, $i \in I$ eine abzählbare Familie von Teilmengen in Ω. Dann gilt*
$$\mu^*\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \;\le\; \sum_{i\in I} \mu^*(X_i) \qquad \sigma\textit{-Subadditivität.}$$

Bemerkung. Wir haben also jetzt insbesondere eine Funktion
$$\mathrm{Vol}^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
eingeführt, welche nach Satz 4.8 die Eigenschaft

(B) Monotonie

besitzt. Andererseits hatten wir in Satz 1.2 gesehen, dass Vol^* nicht noch zeitgleich alle drei Eigenschaften

(A) Normierung $\mathrm{Vol}^*([0,1]^n) = 1$,
(C) Translationsinvarianz,
(D) σ-Additivität,

erfüllen kann. Man kann leicht zeigen, dass Vol^* sowohl (A) als auch (C) erfüllt. Wir sehen also, dass Vol^* auf $\mathcal{P}(\Omega)$ nicht (D) erfüllt, also nicht σ-additiv ist.[25]

Beweis.

(1) Diese Aussage ist trivial.[26]

(2) Es genügt den Fall zu betrachten, dass $X_i, i \ge 1$ eine unendliche Folge von Teilmengen in Ω ist.[27] Wenn $\mu^*(X_i) = \infty$ für ein $i \in \mathbb{N}$, dann ist die Aussage trivialerweise wahr. Wir betrachten nun also noch den Fall, dass $\mu^*(X_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ endlich ist.

In Satz 4.6 hatten wir die Aussage schon gezeigt, wenn alle X_i's in $\mathcal{A}^\uparrow$ liegen. Dies ist hier natürlich im allgemeinen nicht der Fall, aber wir können die X_i's beliebig gut durch Mengen in $\mathcal{A}^\uparrow$ „approximieren".

Es sei nun $\epsilon > 0$. Aus der Definition von μ^* folgt, dass es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $B_i \in \mathcal{A}^\uparrow$ gibt mit $X_i \subset B_i$ und mit $\mu(B_i) \le \mu^*(X_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$. Also folgt, dass

$$\bigcup_{i=1}^\infty X_i \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^\infty B_i}_{\substack{\in \mathcal{A}^\uparrow \text{ nach}\\ \text{Satz 4.4}}} \quad \text{und damit} \quad \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^\infty X_i\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Definition von } \mu^*}}{\le} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \mu \text{ ist nach Satz 4.6 (4)}\\ \sigma\text{-subadditiv auf } \mathcal{A}^\uparrow.}}{\le} \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(X_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^i}}_{=\epsilon}.$$

Für alle $\epsilon > 0$ gilt also
$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^\infty X_i\Big) \;\le\; \sum_{i=1}^\infty \mu^*(X_i) + \epsilon.$$

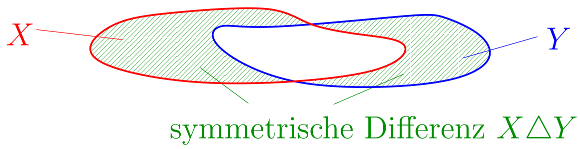
[25] Nach Satz 4.8 ist Vol^* σ-subadditiv. Nachdem Vol^* nicht σ-additiv ist, folgt aus Satz 3.2 , dass Vol^* noch nicht einmal additiv ist.

[26] Warum?

[27] Den Fall von einer endlichen Vereinigung $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ kann man auf den unendlichen Fall zurückführen, indem man für $i \ge 1$ jeweils $X_{k+i} = \varnothing$ setzt.

Daraus folgt die gewünschte Ungleichung. ∎

Für zwei Teilmengen $X, Y \subset \Omega$ misst $\mu^*(X \triangle Y)$ anschaulich wie unterschiedlich X und Y sind. Das folgende Lemma besagt, dass dieser„Abstand" zwischen Mengen X und Y viele Eigenschaften einer Metrik besitzt.



Lemma 4.9. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf einer Menge Ω und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß. Es seien $X, Y \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt*

(a) $\quad X = Y \;\Rightarrow\; \mu^*(X \triangle Y) = 0,$

(b) $\quad \mu^*(X \triangle Y) = \mu^*(Y \triangle X)$ *Symmetrie.*

Zudem gilt für $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\Omega)$, dass

(c) $\quad \mu^*(X \triangle Z) \le \mu^*(X \triangle Y) + \mu^*(Y \triangle Z)$ *Dreiecksungleichung.*

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind trivial. Es verbleibt die Dreiecksungleichung zu beweisen. Es seien also X, Y und Z beliebige Teilmengen von Ω. Dann gilt [28] [29]

$$\mu^*(X \triangle Z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } (\varnothing \triangle Z) = Z}}{=} \mu^*(X \triangle \varnothing \triangle Z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } Y \triangle Y = \varnothing}}{=} \mu^*(X \triangle Y \triangle Y \triangle Z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie von } \mu^*, \text{ siehe Satz 4.8 (1),} \\ \text{angewandt auf } A \triangle B \subset A \cup B}}{\le} \mu^*\big((X \triangle Y) \cup (Y \triangle Z)\big)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subadditivität von } \mu^*, \text{ siehe Satz 4.8 (2)}}}{\le} \mu^*(X \triangle Y) + \mu^*(Y \triangle Z).$$

∎

Definition. Es sei $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$ und $X \in \mathcal{P}(\Omega)$. Wir definieren

$$Y_k \xrightarrow{\mu^*} X \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \mu^*(Y_k \triangle X) = 0.$$

Der folgende Satz besagt, dass μ^* stetig ist bezüglich der obigen Konvergenz von Teilmengen von Ω.

Satz 4.10. *Es sei $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$ und $X \in \mathcal{P}(\Omega)$. Wenn $\mu^*(Y_k) < \infty$ für alle k und wenn $\mu^*(X) < \infty$, dann gilt*

$$Y_k \xrightarrow{\mu^*} X \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \mu^*(Y_k) = \mu^*(X).$$

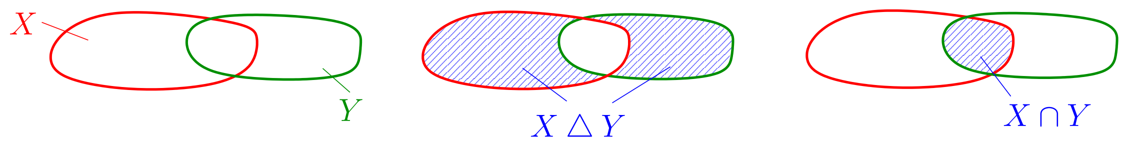
Beweis (∗). Die Aussage des Satzes folgt aus den Definitionen und folgender Behauptung.

[28] Es folgt aus der Assoziativität von $\triangle$, welche wir in Lemma 2.1 gezeigten, dass wir uns bei Ausdrücken, welche nur mit $\triangle$ verknüpft sind, um die Klammersetzung keine Gedanken machen müssen.

[29] Das Argument ist nun eine Variation auf das wohlvertraute Schema

$$|x - z| = |x - 0 - z| = |x - (y - y) - z| = |(x - y) - (y - z)| \le |x - y| + |y - z|.$$

Behauptung. Es seien X und Y Teilmengen von Ω mit $\mu^*(X) < \infty$ und $\mu^*(Y) < \infty$, dann gilt
$$\left|\mu^*(X) - \mu^*(Y)\right| \;\leq\; \mu^*(X \triangle Y).$$



Es seien also $X, Y \in \mathcal{P}(\Omega)$. Es gilt
$$X \cap Y \quad\subset\quad X, Y \quad\subset\quad X \cup Y$$
also folgt aus der in Satz 4.8 bewiesenen Monotonie von μ^*, dass

(a) $$\mu^*(X \cap Y) \;\leq\; \mu^*(X), \mu^*(Y) \;\leq\; \mu^*(X \cup Y)$$

Zudem folgt aus
$$X \cup Y \;=\; (X \cap Y) \sqcup (X \triangle Y),$$
mithilfe der in Satz 4.8 bewiesenen Subadditivität[30] von μ^*, dass

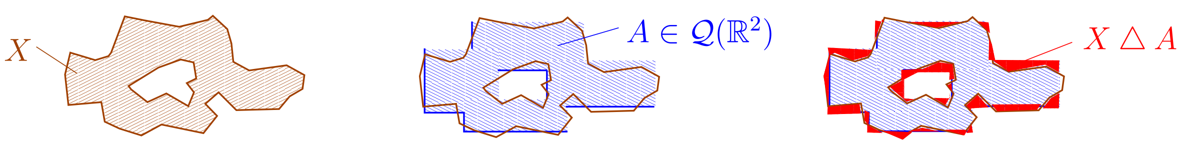
(b) $$\mu^*(X \cup Y) \;\leq\; \mu^*(X \cap Y) + \mu^*(X \triangle Y)$$

Zusammenfassend erhalten wir, dass
$$\left|\mu^*(X) - \mu^*(Y)\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (a)}}}{\leq} \mu^*(X \cup Y) - \mu^*(X \cap Y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (b)}}}{\leq} \mu^*(X \triangle Y).$$
■

Definition. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring, es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein σ-endliches Prämaß und es sei $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ das zugehörige äußere Maß. Wir definieren

$X \subset \Omega$ ist $\mathcal{A}$-approximierbar $\;:\Longleftrightarrow\;$ zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(X \triangle A) < \epsilon$.

Wir bezeichnen mit $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller $\mathcal{A}$-approximierbaren Teilmengen.



Beispiel. Es seien $a \leq b \in \mathbb{R}$. Dann ist $[a, b]$ eine $Q(\mathbb{R})$-approximierbare Teilmenge von $\mathbb{R}$, denn für jedes $\epsilon > 0$ ist
$$\mathrm{Vol}^*([a,b] \triangle \underbrace{[a,b)}_{\in \mathcal{Q}(\mathbb{R})}) \;=\; \mathrm{Vol}^*(\{b\}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Beispiel auf Seite 159}}}{=} 0 \;<\; \epsilon.$$

[30]Wir haben für μ^* die Additivität nicht zur Verfügung, wir können also *nicht* schließen, dass
$$\mu^*(X \cup Y) \;=\; \mu^*(X \cap Y) + \mu^*(X \triangle Y).$$

Satz 4.11. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra, $\mu \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein endliches Prämaß. Dann ist*

$$\widetilde{\mathcal{A}} \;:=\; \text{alle } \mathcal{A}\text{-approximierbaren Teilmengen von } \Omega$$

eine σ-Algebra auf Ω.

Beispiel. Für $s > 0$ ist

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \;=\; \text{alle halboffenen Quader, welche in } [-s, s)^n \subset \mathbb{R}^n \text{ liegen}$$

nach Lemma 2.8 eine Mengenalgebra auf dem halboffenen Würfel $[-s, s)^n$. Zudem folgt leicht aus Satz 3.6, dass Vol_n ein endliches Prämaß auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$ ist. Der Satz besagt nun also, dass $\widetilde{\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)}$ eine σ-Algebra bildet.

In dem Beweis von Satz 4.11 werden wir folgendes elementare Lemma aus der Mengentheorie verwenden.

Lemma 4.12. *Es seien $X_i, i \in I$ und $A_i, i \in I$ Familien von beliebigen Teilmengen von Ω. Dann gilt*

$$\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) \triangle \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \;\subset\; \bigcup_{i \in I} (X_i \triangle A_i).$$

Beweis. Es sei also

$$z \in \Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) \triangle \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big).$$

Wir betrachten zuerst den Fall, dass $z \in \bigcup_{i \in I} X_i$. Dann folgt $z \notin \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann liegt z also in mindestens einem X_i aber in keinem A_i, d.h. z liegt in $X_i \triangle A_i$, insbesondere liegt z in $\bigcup_{i \in I} (X_i \triangle A_i)$. Nachdem die Aussage symmetrisch in X_i und A_i ist, folgt die Aussage im Fall, dass $z \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ganz analog. ■

Lemma 4.13. *Es sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra. Wenn μ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{A}$ ist, dann gilt für alle $Y \in \mathcal{A}^{\uparrow}$, dass $\mu(Y) < \infty$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra auf einer Menge Ω und es sei μ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{A}$. Es sei $Y \in \mathcal{A}^{\uparrow}$. Wir wählen eine aufsteigende Folge A_k in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = Y$. Dann gilt

$$\mu(Y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition} \\ \text{von } \mu \text{ auf } \mathcal{A}^{\uparrow}}}{=} \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \mathcal{A} \text{ eine Mengenalgebra ist,} \\ \text{gilt } \mu \in \mathcal{A}, \text{ also } \mu(A_k) \leq \mu(\Omega)}}{\leq} \mu(\Omega) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \mu \text{ endlich}}}{<} \infty.$$

■

Beweis von Satz 4.11. Wir müssen also folgende Aussagen beweisen:

(1) $\qquad \varnothing \in \widetilde{\mathcal{A}},$

(2) $\qquad X \in \widetilde{\mathcal{A}} \implies X^{\mathbf{c}} \in \widetilde{\mathcal{A}},$

(3) die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen in $\widetilde{\mathcal{A}}$ liegt ebenfalls in $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Wir wenden uns nun dem Beweis der drei Aussagen zu.

(1) Die erste Aussage ist trivial.[31]

[31] Warum ist das trivial?

(2) Wir werden diese Aussage in Übungsblatt 11 beweisen.

(3) Es genügt zu zeigen, dass für eine unendliche Folge $X_1, X_2, \dots \in \widetilde{\mathcal{A}}$ auch die Vereinigung $X := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ in $\widetilde{\mathcal{A}}$ liegt.[32] Es reicht nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $B \in \mathcal{A}$ mit
$$\mu^*(X \triangle B) \ \le\ \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Ganz analog zum Beweis von Satz 4.8 wählen wir uns zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $A_k \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(X_k \triangle A_k) < \frac{1}{2^{k+1}}\epsilon$. Wir setzen
$$A \ := \ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ = \ \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_k}_{=:B_k \in \mathcal{A}} \ \in \ \mathcal{A}^{\uparrow}.$$

Wir wollen also jetzt X durch eine Menge in $\mathcal{A}$ approximieren. Die Menge A erscheint zwar wie eine gute Approximation, liegt aber nicht notwendigerweise in $\mathcal{A}$. Nachdem A wiederum durch die Mengen $B_m \in \mathcal{A}$ approximiert wird, wollen wir nun X durch ein geeignet gewähltes B_m approximieren.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass für m groß genug gilt, dass $\mu^*(X \triangle B_m) \le \epsilon$. Wir betrachten dazu erst einmal ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mu^*(X \triangle B_m) \ \underset{\uparrow}{\le}\ \mu^*\big(X \triangle A\big) + \mu^*(A \triangle B_m)$$

Dreiecksungleichung aus Lemma 4.9

$$\le \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \triangle \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) + \mu^*(\underbrace{A \triangle B_m}_{\substack{= A \setminus B_m, \\ \text{da } B_m \subset A}}) \ \underset{\uparrow}{\le}\ \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(X_k \triangle A_k)\Big) + \mu^*(A \setminus B_m)$$

Lemma 4.12 und Monotonie von μ^*

$$\underset{\uparrow}{\le} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mu^*(X_k \triangle A_k)}_{\le \frac{\epsilon}{2^{k+1}}} + \mu(A \setminus B_m) \qquad \underset{\uparrow}{\le} \frac{\epsilon}{2} + (\mu(A) - \mu(B_m)).$$

wir wenden σ-Subadditivität von μ^* auf den ersten Term an zudem folgt aus Satz 4.4, dass $A \setminus B_m \in \mathcal{A}^{\uparrow}$, und damit $\mu^*(A \setminus B_m) = \mu(A \setminus B_m)$

dies folgt aus $A = (A \setminus B_m) \sqcup B_m$, denn μ ist nach Satz 4.6 additiv auf $\mathcal{A}^{\uparrow}$

Nachdem $B_m \uparrow A$ folgt aus Satz 4.6, dass $\mu(B_m) \uparrow \mu(A)$. Da μ ein endlicher Inhalt ist und da $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra erhalten wir aus Lemma 4.13, dass $\mu(A) < \infty$. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A) - \mu(B_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann hat $B = B_m$ die gewünschte Eigenschaft. ■

Satz 4.14. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ ein endliches Prämaß, und $\widetilde{\mathcal{A}}$ die σ-Algebra der $\mathcal{A}$-approximierbaren Mengen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Die Abbildung*
$$\begin{aligned} \mu^*\colon \widetilde{\mathcal{A}} &\to \mathbb{R}_{\ge 0} \\ A &\mapsto \mu^*(A) \end{aligned}$$

[32] Den Fall von einer endlichen Vereinigung $X_1 \cup \dots \cup X_k$ kann man auf den unendlichen Fall zurückführen, indem man $X_{k+i} = \varnothing$ für $i \ge 1$ setzt.

ist ein Maß.[33]

(2) *Die Abbildung* $\mu^*\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *ist das einzige Maß auf* $\widetilde{\mathcal{A}}$*, welches auf* $\mathcal{A}$ *mit* μ *übereinstimmt.*

Bemerkung.

(1) Es gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A} & \subset & \mathcal{A}^{\uparrow} & \underset{\uparrow}{\subset} & \langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} & \underset{\uparrow}{\subset} & \widetilde{\mathcal{A}}. \end{array}$$

folgt aus Lemma 2.10 — per Definition ist $\langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma}$ in allen σ-Algebren enthalten, welche $\mathcal{A}$ enthalten

Unter der Voraussetzung, dass μ endlich ist, besagt Satz 4.14 nun also, dass wir das Prämaß $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ zu einem Maß $\mu^*\colon \langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ fortgesetzt haben.

(2) Es sei $s > 0$. Wir betrachten wieder den halboffenen Würfel $[-s, s)^n$. Wir können Satz 4.14 insbesondere auf die Mengenalgebra[34]

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \;=\; \text{alle endliche Vereinigungen von halboffenen Quadern in } [-s, s)^n$$

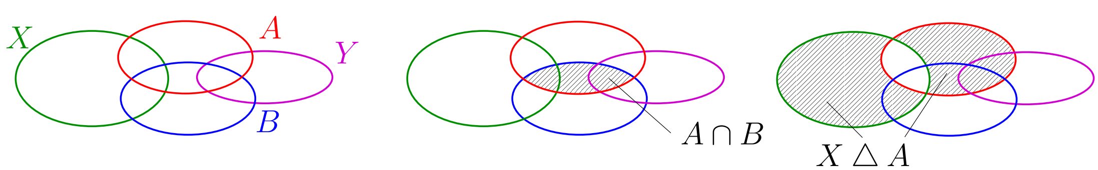
und das endliche Prämaß $\mathrm{Vol}_n\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ anwenden. Wir erhalten dann also ein Maß $\widetilde{\mathrm{Vol}}_n$ auf der σ-Algebra $\langle\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$.

Wir brechen den Beweis von Satz 4.14 in seine zwei Bestandteile auf.

Beweis von Satz 4.14 (1). Im Beweis von Satz 4.14 (1) werden wir folgende elementare Behauptung aus der Mengentheorie verwenden.

Behauptung. Für beliebige Teilmengen A, B, X und Y von Ω gilt

$$X \cap Y \;=\; \varnothing \quad\Longrightarrow\quad A \cap B \;\subset\; (X \mathbin{\triangle} A) \cup (Y \mathbin{\triangle} B).$$



Es seien X und Y disjunkte Teilmengen von Ω. Es sei nun $z \in A \cap B$ beliebig. Wenn $z \in X$, dann kann z nach Voraussetzung nicht in Y liegen. Also ist $z \in B \setminus Y$, also ist $z \in Y \mathbin{\triangle} B$. Andererseits, wenn $z \notin X$, dann zeigt das gleiche Argument, dass $z \in A \setminus X$, also ist $z \in X \mathbin{\triangle} A$. In beiden Fällen haben wir gezeigt, dass z in $(X \mathbin{\triangle} A) \cup (Y \mathbin{\triangle} B)$ liegt. ⊞

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Beweis zu. Es sei also $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein endliches Prämaß, und $\widetilde{\mathcal{A}}$ die σ-Algebra der $\mathcal{A}$-approximierbaren Mengen. Wir müssen zeigen, dass die Einschränkung von μ^* auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ ein Maß ist. Es ist klar, dass $\mu^*(\varnothing) = 0$. Wir müssen noch zeigen, dass μ^* auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ σ-additiv ist. In Satz 4.8 hatten wir immerhin schon gesehen, dass μ^* σ-subadditiv ist. Es folgt aus Satz 3.2, dass es nun genügt

[33] Zur Erinnerung, ein Maß ist definiert als ein σ-additiver Inhalt auf einer σ-Algebra.

[34] Wir hatten in Lemma 2.8 gesehen, dass $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$ eine Mengenalgebra auf der Menge Menge $[-s, s)^n$ ist.

zu zeigen, dass μ^* auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ ein Inhalt ist. Wir müssen also nur noch folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Für alle disjunkten $X, Y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ gilt
$$\mu^*(X \sqcup Y) \;=\; \mu^*(X) + \mu^*(Y).$$

Da $X, Y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ existieren Folgen $\{A_k\}_{k\geq 1}$ und $\{B_k\}_{k\geq 1}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_k \xrightarrow{\mu^*} X$ und $B_k \xrightarrow{\mu^*} Y$. Aus der Abschätzung

$$\mu^*\big((X \cup Y) \triangle (A_k \cup B_k)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 4.12 und der Monotonie von } \mu^*}}{\leq} \mu^*\big((X \triangle A_k) \cup (Y \triangle B_k)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subadditvität von } \mu^*}}{\leq} \mu^*(X \triangle A_k) + \mu^*(Y \triangle B_k)$$

folgt dann, dass $A_k \cup B_k \xrightarrow{\mu^*} X \cup Y$. Wir sehen nun, dass

$$\begin{aligned}
\mu^*(X \cup Y) &\overset{\substack{\text{nach Satz 4.10} \\ \downarrow}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cup B_k) \overset{\substack{\text{folgt aus Lemma 3.1 (2), da } \mu(A_k) \text{ und } \mu(B_k) \text{ endlich} \\ \downarrow}}{=} \lim_{k\to\infty} \big(\mu(A_k) + \mu(B_k) - \mu(A_k \cap B_k)\big) \\
&= \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mu(A_k)}_{\substack{= \mu^*(X), \text{ nach} \\ \text{Satz 4.10}}} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mu(B_k)}_{\substack{= \mu^*(Y), \text{ nach} \\ \text{Satz 4.10}}} - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_k).
\end{aligned}$$

Wir wollen also noch zeigen, dass der letzte Grenzwert verschwindet. Dies ist in der Tat der Fall, denn es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_k) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \mu = \mu^* \text{ auf } \mathcal{A}}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k \cap B_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus der Anfangsbehauptung und der Monotonie von } \mu^*}}{\leq} \lim_{k\to\infty} \mu^*\big((X \triangle A_k) \cup (Y \triangle B_k)\big) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subadditivität von } \mu^*}}{\leq} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mu^*(X \triangle A_k)}_{= 0, \text{ nach Wahl von } A_k} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mu^*(Y \triangle B_k)}_{= 0, \text{ nach Wahl von } B_k} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

■

Beweis von Satz 4.14 (2) (∗). Wir wenden uns der zweiten Aussage des Satzes zu. Es seien μ_1 und μ_2 zwei Maße auf $\widetilde{\mathcal{A}}$, welche $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ fortsetzen. Wir müssen zeigen, dass $\mu_1 = \mu_2$. Da μ_1 und μ_2 dann insbesondere stetig von unten sind gilt

$$\mu_1(B) \;=\; \mu_2(B) \;=\; \mu(B) \quad \text{ für alle } B \in \mathcal{A}^{\uparrow}.$$

Es sei nun $X \in \widetilde{\mathcal{A}}$ beliebig. Es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $\epsilon > 0$ ist $|\mu_1(X) - \mu_2(X)| < 2\epsilon$.

Es sei also $\epsilon > 0$. Aus der Definition von Approximierbarkeit folgt, dass es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(X \triangle A) < \frac{\epsilon}{2}$ gibt. Aus der Definition von $\mu^*(X \triangle A)$ folgt nun, dass es ein $B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$ gibt mit $X \triangle A \subset B$ und $\mu(B) < \epsilon$. Elementare Mengentheorie zeigt, dass aus $X \triangle A \subset B$ folgt, dass

$$A \setminus B \quad \subset \quad X \quad \subset \quad A \cup B.$$

Also gilt für $i = 1, 2$

$$\begin{array}{rrcccll} & \mu_i(A \setminus B) & \leq & \mu_i(X) & \leq & \mu_i(A \cup B) & \text{Monotonie der Maße } \mu_i \\ \Longrightarrow & \mu_i(A) - \mu_i(A \cap B) & \leq & \mu_i(X) & \leq & \mu_i(A) + \mu_i(B \setminus A) & \text{Additivität der Maße } \mu_i \\ \Longrightarrow & \mu_i(A) - \mu_i(B) & \leq & \mu_i(X) & \leq & \mu_i(A) + \mu_i(B) & \text{Monotonie der Maße } \mu_i \\ \Longrightarrow & \mu(A) - \mu(B) & \leq & \mu_i(X) & \leq & \mu(A) + \mu(B) & \text{denn } \mu_i = \mu \text{ auf } \mathcal{A}^{\uparrow} \\ \Longrightarrow & \mu(A) - \epsilon & < & \mu_i(X) & < & \mu(A) + \epsilon & \text{denn } \mu(B) < \epsilon. \end{array}$$

Für $i = 1, 2$ erhalten wir also

$$|\mu_i(X) - \mu(A)| \quad < \quad \epsilon.$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir dann, dass

$$|\mu_1(X) - \mu_2(X)| \quad < \quad 2\epsilon. \qquad \blacksquare$$

In Satz 4.14 hatten wir gesehen, dass wir ein *endliches* Prämaß $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf einer *Mengenalgebra* $\mathcal{A}$ eindeutig zu einem Maß $\mu\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ fortsetzen können. Der folgende Satz besagt nun, das wir ein σ-*endliches* Prämaß $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf einem *Mengenring* $\mathcal{A}$ eindeutig zu einem Maß $\mu\colon \langle \mathcal{A} \rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ fortsetzen können.

Satz 4.15. *Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Es gibt eine eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Maß*
$$\widetilde{\mu}\colon \langle \mathcal{A} \rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \ \to \ \overline{\mathbb{R}}_+.$$
(2) *Für jedes $A \in \langle \mathcal{A} \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ gilt* $$\widetilde{\mu}(A) \ = \ \mu^*(A).$$

Beispiel. Das für uns wichtigste Beispiel ist der Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ zusammen mit dem σ-endlichen Inhalt Vol_n auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Satz 4.15 gibt uns nun, die schon seit längerem gewünschte, Fortsetzung von Vol_n zu einem Maß auf der σ-Algebra $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}$.

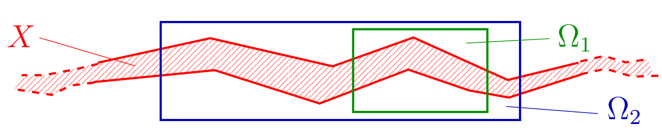
Beweis.

Die Idee des Beweises ist, dass wir die Voraussetzung, dass μ ein σ-endliches Prämaß ist verwenden, um die Aussage auf den im Satz 4.14 behandelten Fall des endlichen Prämaßes zurückzuführen.

Da μ ein σ-endliches Prämaß ist gibt es eine aufsteigende Folge $\Omega_m \uparrow \Omega$ von Teilmengen $\Omega_m \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(\Omega_m) < \infty$ für alle m. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathcal{A}_m \ := \ \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\Omega_m).$$

Man kann sicht leicht davon überzeugen, dass $\mathcal{A}_m$ eine Mengenalgebra auf Ω_m ist, und dass die Einschränkung μ_m von μ auf $\mathcal{A}_m$ ein endliches Prämaß ist. Nach Satz 4.14 gibt es nun eine eindeutige Fortsetzung von der Einschränkung von μ auf $\mathcal{A}_m$ zu einem Maß auf $\langle \mathcal{A}_m \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$, welches wir mit $\widetilde{\mu}_m$ bezeichnen.



Für $X \in \langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ definieren wir nun[35]

$$\widetilde{\mu}(X) \;:=\; \lim_{m\to\infty} \widetilde{\mu}_m\big(\underbrace{X \cap \Omega_m}_{\in\langle\mathcal{A}_m\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}}\big).$$

Wir zeigen zuerst, dass $\widetilde{\mu}$ und μ^* auf $\langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ übereinstimmen. Es sei also $X \in \langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$. Wir setzen $X_m := X \cap \Omega_m$. Dann gilt

$$\widetilde{\mu}(X) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per Definition}}}{=} \lim_{m\to\infty} \widetilde{\mu}_m(X_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 4.14 angewandt auf } (\mathcal{A}_m,\mu_m)}}{=} \lim_{m\to\infty} \mu_m^*(X_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{wenn } A\in\mathcal{A}^{\uparrow} \text{ mit } X\subset A \text{ dann}\\ \text{ist } A\cap X_m \in \mathcal{A}_m^{\uparrow}\text{, daraus folgt,}\\ \text{dass } \mu_m^*(X_m)\le\mu^*(X)}}{\le} \mu^*(X).$$

Wir setzen nun $Y_1 := X_1$ und für $m \geq 2$ setzen wir $Y_m := X_m \setminus X_{m-1}$. Dann ist

$$\mu^*(X) \underset{\substack{\uparrow\\ \sigma\text{-Subadditivität von } \mu^*\\ \text{angewandt auf } X=\cup Y_k}}{\le} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(Y_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu^*(Y_k) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 4.14}\\ \text{angewandt auf } \mathcal{A}_k}}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \widetilde{\mu}(Y_k) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } X_m \text{ ist die disjunkte}\\ \text{Vereinigung von } Y_1,\dots,Y_m}}{=} \lim_{m\to\infty} \widetilde{\mu}(X_m) = \widetilde{\mu}(X).$$

Diese beiden Ungleichungen zusammen ergeben $\mu^*(X) = \widetilde{\mu}(X)$.

Wir wollen nun beweisen, dass $\widetilde{\mu}$ in der Tat ein Maß auf $\langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ ist, d.h. dass es ein σ-additiver Inhalt ist. Wir zeigen als erstes, dass $\widetilde{\mu}$ ein Inhalt ist. Es ist klar, dass $\widetilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Wir zeigen nun, dass $\widetilde{\mu}$ additiv ist. Es seien also X und Y disjunkte Mengen in $\langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $X_m := X \cap \Omega_m$ und $Y_m := Y \cap \Omega_m$. Dann gilt

$$\widetilde{\mu}(X \sqcup Y) = \lim_{m\to\infty} \widetilde{\mu}_m(X_m \sqcup Y_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } \widetilde{\mu}_m \text{ ein Maß ist, gilt } \widetilde{\mu}_m(X_m\sqcup Y_m)=\widetilde{\mu}_m(X_m)+\widetilde{\mu}_m(Y_m)}}{=} \lim_{m\to\infty} \big(\widetilde{\mu}_m(X_m) + \widetilde{\mu}_m(Y_m)\big) = \widetilde{\mu}(X) + \widetilde{\mu}(Y).$$

Wir haben also gezeigt, dass $\widetilde{\mu}$ additiv ist. Nach Satz 4.8 ist μ^* zudem σ-subadditiv ist. Es folgt nun aus Satz 3.2, dass der Inhalt $\widetilde{\mu} = \mu^*$ auf $\langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ auch σ-additiv, also ein Maß ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\mu}\colon \langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ die einzige Fortsetzung von μ ist. Es sei also $\widehat{\mu}\colon \langle\mathcal{A}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine weitere Fortsetzung, welche ein Maß ist. Dann gilt

$$\widehat{\mu}(X) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Satz 3.2,}\\ \text{denn } (X\cap\Omega_m)\uparrow\Omega}}{=} \lim_{m\to\infty} \widehat{\mu}(X \cap \Omega_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Eindeutigkeit der Fortsetzung}\\ \text{von } \mu_m \text{ zu einem Maß auf } \mathcal{A}_m}}{=} \lim_{m\to\infty} \widetilde{\mu}_m(X \cap \Omega_m) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition von } \mu^*}}{=} \widetilde{\mu}(X).$$

■

[35] Die Aussage, dass $X \cap \Omega_m$ in $\langle\mathcal{A}_m\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ liegt ist nicht ganz offensichtlich. Dies kann man wie folgt sehen. Es sei Ω eine Menge, es sei $\mathcal{A}$ ein Mengenring auf $\mathcal{P}(\Omega)$ und es sei $\Lambda \in \mathcal{A}$.

(a) Es sei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Λ mit $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\Lambda) \subset \mathcal{B}$. In dem wir zu $\mathcal{B}$ alle Mengen in $\Omega \setminus \Lambda$ hinzufügen erhalten wir eine σ-Algebra $\mathcal{C}$ auf Ω mit $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}(\Lambda)$.

(b) Wir wenden (a) auf $\mathcal{B} = \langle\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\Lambda)\rangle^{\sigma}$ und erhalten eine σ-Algebra $\mathcal{C}$ auf Ω mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}(\Lambda) = \langle\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\Lambda)\rangle^{\sigma}$.

(c) Per Definition von $\langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma}$ gilt $\langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} \subset \mathcal{C}$.

(d) Es sei $X \in \langle A\rangle^{\sigma}$. Es folgt aus (c), dass $X \in \langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} \subset \mathcal{C}$.

(e) Da $\Lambda \in \mathcal{A}$ und da $\langle A\rangle^{\sigma}$ eine σ-Algebra ist gilt auch $X \cap \Lambda \in \langle\mathcal{A}\rangle^{\sigma} \subset \mathcal{C}$.

(f) Es folgt aus (e) und (b), dass $X \cap \Lambda \in \langle\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\Lambda)\rangle^{\sigma}$.

5. Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

5.1. **Die Definition des Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.** Im Folgenden wollen wir nur noch mit dem für uns im Moment wichtigsten Beispiel arbeiten, nämlich dem Lebesgue-Maß auf $\Omega = \mathbb{R}^n$. Wir fassen dazu die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse zusammen.

Definition. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine Abbildung.

(1) Wir sagen μ ist normiert, wenn $[0,1]^n \in \mathcal{A}$ und
$$\mu\big([0,1]^n\big) \;=\; 1.$$
(2) Wir sagen μ ist translationsinvariant, wenn für $A \in \mathcal{A}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ auch $x + A \in \mathcal{A}$ und wenn zudem
$$\mu(x+A) \;=\; \mu(A).$$
(3) Wir sagen μ ist σ-additiv, wenn für jede Folge $A_k \subset \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$ von paarweise disjunkten Mengen mit $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ gilt
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

In Lemma 3.1 hatten wir schon gesehen, dass eine solche σ-additive Abbildung auch monoton ist. Mit diesen Definitionen können wir nun Satz 1.2 wie folgt formulieren.

Satz 1.2. *Es gibt keine normierte, translationsinvariante, σ-additive Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Unser Ziel in den letzten Kapiteln war es, einen normierten, translationsinvarianten, σ-additiven Inhalt auf einer möglichst großen σ-Algebra einzuführen. Wir erinnern im Folgenden noch einmal an die wichtigsten Schritte.

- Ein *halboffener Quader in* $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ der Form
$$Q \;=\; [a_1,b_1) \times \cdots \times [a_n,b_n).$$
Das Volumen davon ist definiert als
$$\operatorname{Vol}(Q) \;:=\; \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$
- Wir bezeichnen mit $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, welche Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern sind. In Satz 3.4 hatten wir gezeigt, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) &\;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\;\mapsto\; \operatorname{Vol}(A) := \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{Vol}(Q_i), \end{aligned} \quad \text{wobei } A \text{ die disjunkte Vereinigung der halboffenen Quadern } Q_1,\dots,Q_m \text{ ist}$$
wohldefiniert ist. Aus den Definitionen, aus Lemma 3.1 und aus Satz 3.6 kann man herleiten, dass Vol ein σ-additiver, translationsinvarianter Inhalt ist.
- Als nächstes hatten wir definiert
$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow} \;=\; \Big\{ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\Big|\, A_1 \subset A_2 \subset \dots \text{ ist eine aufsteigende Folge in } \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \Big\}.$$

Für solch ein $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^\uparrow$ hatten wir

$$\mathrm{Vol}(A) \;=\; \lim_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(A_k) \quad \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

gesetzt. Das Volumen von $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ist nach Lemma 4.5 wohldefiniert.

- Aus Satz 4.6 folgt, dass Vol auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^\uparrow$ wieder monoton und additiv ist. Zudem folgt aus den Definitionen, dass Vol wiederum translationsinvariant ist.
- Für eine beliebige Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist das *äußere Maß* definiert als

$$\mathrm{Vol}^*(X) \;:=\; \inf \left\{ \mathrm{Vol}(A) \,\middle|\, X \subset A \text{ und } A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^\uparrow \right\}.$$

  Wie in Übungsblatt 10 kann man zeigen, dass für $a_i \le b_i$, $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\mathrm{Vol}^*\big(\underbrace{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]}_{\text{kompakter Quader}}\big) \;=\; \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

  Insbesondere sehen wir, dass Vol^* normiert ist. Es folgt aus Satz 4.8, dass Vol^* monoton und σ-subadditiv ist. Zudem folgt leicht aus den Definitionen, dass Vol^* translationsinvariant ist. Es folgt nun aus Satz 1.2, dass $\mathrm{Vol}^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ nicht auch noch σ-additiv sein kann.
- Wir erhalten die σ-Additivität indem wir uns aus auf eine kleinere σ-Algebra als $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, nämlich $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$, einschränken.

Definition.

(1) Wir bezeichnen

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;:=\; \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \;=\; \text{die kleinste } \sigma\text{-Algebra auf } \mathbb{R}^n, \text{ welche } \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \text{ enthält}$$

als die Borelsche σ-Algebra.

(2) Nach Satz 4.15 ist die Einschränkung von $\mathrm{Vol}^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auch σ-additiv. Anders ausgedrückt, die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) &\;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\;\mapsto\; \mathrm{Vol}(A) \;:=\; \mathrm{Vol}^*(A) \end{aligned}$$

ist ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dieses Maß wird das Lebesgue-Maß oder auch Volumen auf $\mathbb{R}^n$ genannt.

(3) Die Mengen, welche in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ liegen, heißen Lebesgue-messbar oder kürzer, messbar.

Wir fassen in den folgenden beiden Sätzen die wichtigsten Eigenschaften von messbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß zusammen. In den allermeisten Fällen genügt es im Folgenden diese beide Sätze zu kennen. Wir werden die Aussagen dieser beiden Sätze oft ohne Bemerkung verwenden.

Satz 5.1. (Eigenschaften von messbaren Mengen)

(1) *Alle halboffenen Quader sind messbar.*
(2) *Komplemente von messbaren Mengen sind wiederum messbar.*
(3) *Die Vereinigung von abzählbar vielen messbaren Mengen ist wiederum messbar.*
(4) *Der Durchschnitt von abzählbar vielen messbaren Mengen ist wiederum messbar.*

(5) *Verschiebungen von messbaren Mengen sind wieder messbar, d.h. wenn* $A \subset \mathbb{R}^n$ *messbar ist und wenn* $p \in \mathbb{R}^n$, *dann ist auch* $p + A$ *messbar.*
(6) *Offene Mengen sind messbar.*
(7) *Abgeschlossene Mengen sind messbar.*

Beweis. Die ersten drei Aussagen folgen sofort aus der Tatsache, dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\uparrow}$ eine σ-Algebra ist, welche alle halboffenen Quadern enthält. Die vierte Aussage folgt aus (2) und (3) sowie der de Morgan Regel 2.2. Es ist klar, dass $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ unter Translationen abgeschlossen ist. Damit ist auch $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ abgeschlossen unter Translationen. Wir haben damit die fünfte Aussage bewiesen. Die sechste Aussage hatten wir in Satz 4.2 bewiesen. Die letzte Aussage folgt aus der zweiten und der sechsten Aussage. ■

Satz 5.2. (Eigenschaften des Lebesgue–Maß) *Es gibt genau eine Abbildung*

$$\mathrm{Vol}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ \to \ \overline{\mathbb{R}}_+,$$

genannt das Lebesgue-Maß oder das Volumen, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) *Es gilt*
$$\mathrm{Vol}(\varnothing) \ = \ 0 \quad \textit{und} \quad \mathrm{Vol}\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]\big) \ = \ \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$
(2) *Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant, d.h. für alle messbaren* $A \subset \mathbb{R}^n$ *und alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt*
$$\mathrm{Vol}(x + A) \ = \ \mathrm{Vol}(A).$$
(3) *Das Lebesgue-Maß ist* σ*-additiv, d.h. für jede Folge* $A_k, k \in \mathbb{N}$ *von disjunkten messbaren Mengen gilt*[36]
$$\mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(A_k).$$
(4) *Das Lebesgue-Maß ist monoton, d.h. für alle messbaren* $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ *gilt*
$$\mathrm{Vol}(A) \ \leq \ \mathrm{Vol}(B).$$
(5) *Das Lebesgue-Maß ist* σ*-subadditiv, d.h. für jede Folge* $A_k, k \in \mathbb{N}$ *von messbaren Mengen gilt*
$$\mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(A_k).$$
(6) *Das Lebesgue-Maß ist stetig von unten, d.h. für jede Folge* $A_k, k \in \mathbb{N}$ *von messbaren Mengen gilt*
$$A_k \uparrow A \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Vol}(A_k) \uparrow \mathrm{Vol}(A).$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Existenz von solch einer Abbildung $\mathrm{Vol}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$. In Satz 4.15 hatten wir gezeigt, dass die Einschränkung des äußeren Maß $\mathrm{Vol}^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ ein Maß ist. Dieses erfüllt dann per Definition die Eigenschaft (3). Aus der Additivität folgt sofort die Monotonie (4). Die letzten beiden Eigenschaften folgen aus (3) und Satz 3.2.

[36]Die analoge Aussage gilt natürlich auch für endlich viele disjunkte messbare Mengen $A_1, \ldots, A_k$. Man erhält diese aus der σ-Additivität indem man $A_{k+i} := \varnothing$ für $i \geq 1$ setzt.

Die erste Aussage wird genau wie die entsprechende Aufgabe in Übungsblatt 10 bewiesen. Da $\mathrm{Vol}\colon \mathcal{Q}(\mathbb{R})^n \to \mathbb{R}_+$ translationsinvariant ist, ist auch das äußere Maß Vol^* translationsinvariant. Daraus folgt (2). Wir haben damit alle Aussagen nachgewiesen.

Wir werden in Übungsblatt 11 die Eindeutigkeit von $\mathrm{Vol}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ beweisen. ■

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgendem einfachen Satz.

Satz 5.3. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:*

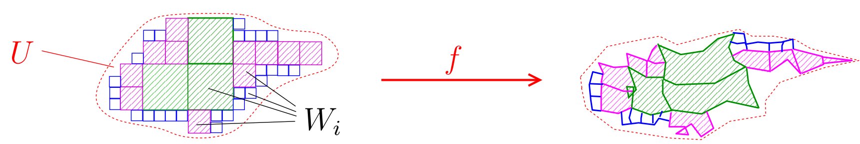
(1) *Wenn U abgeschlossen ist, dann ist $f(U)$ messbar.*
(2) *Wenn U offen ist, dann ist $f(U)$ messbar.*

Beweis.

(1) Die erste Aussage wird in Übungsblatt 11 bewiesen.
(2) Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Der Beweis von Satz 4.3 kann leicht abgeändert[37] werden um zu zeigen, dass U geschrieben werden kann als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen abgeschlossenen Würfeln W_i, $i \in I$. Dann ist

$$f(U) \;=\; f\Big(\bigcup_{i\in I} W_i\Big) \;=\; \bigcup_{i\in I} f(W_i).$$

Es folgt also aus (1), dass $f(U)$ messbar ist. ■



5.2. **Nullmengen.**

Definition. Wir sagen $X \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge, falls X messbar ist mit $\mathrm{Vol}(X) = 0$.

Beispiel. Nach Satz 5.2 (1) ist jeder kompakte Quader, welcher eine Seite der Länge null besitzt, eine Nullmenge. Insbesondere definiert für $n \geq 1$ jeder Punkt in $p \in \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.

Bemerkung. In der Literatur sagt man manchmal, dass $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist, falls $\mathrm{Vol}^*(X) = 0$. Es wird also nicht vorausgesetzt, dass X messbar ist. Mithilfe des Beispiels aus dem Beweis von Satz 1.2 kann man jedoch zeigen, dass es Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Vol}^*(X) = 0$ gibt, welche nicht messbar sind.

Lemma 5.4.

(1) *Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.*
(2) *Eine messbare Teilmenge einer Nullmenge ist wiederum eine Nullmenge.*

Beweis. Die beiden Aussagen folgen sofort aus Satz 5.2. ■

[37] Wir müssen in der Definition $\mathcal{W}_k$ nur die halb-offenen Würfel durch die abgeschlossenen Würfel ersetzen. Der Rest des Arguments ist dann im Prinzip unverändert.

Beispiele.

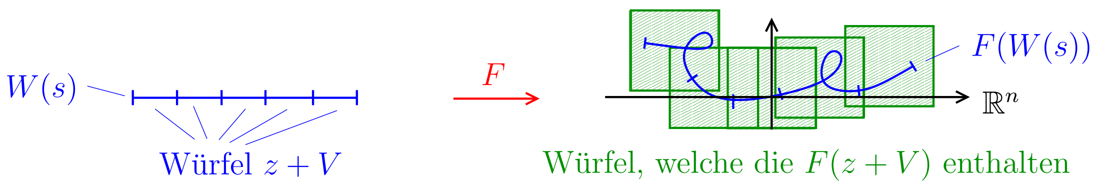
(1) Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist eine abzählbare Menge. Nachdem jeder Punkt eine Nullmenge ist, folgt nun aus Lemma 5.4, dass auch $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge ist.

(2) Es folgt aus Lemma 5.4, dass jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Nullmenge ist. Andererseits ist

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{R}) \;=\; \mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}[-m,m]\Big) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da Vol stetig von unten}}}{=}\; \lim_{m\to\infty} \underbrace{\mathrm{Vol}\big([-m,m]\big)}_{=2m} \;=\; \infty.$$

Wir haben also nun einen neuen Beweis für die Aussage, dass die Menge $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

Satz 5.5. *Es sei $k < n$. Wenn $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, dann ist das Bild $F(\mathbb{R}^k)$ eine Nullmenge.*



Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ \varphi &\mapsto (\sin(\varphi), \cos(\varphi)). \end{aligned}$$

Das Bild ist gerade der Kreis

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Also ist der Kreis nach Satz 5.5 eine Nullmenge.

Beweis. Es sei also $k < n$ und es sei $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es folgt aus Satz 5.3, dass $F(\mathbb{R}^k)$ messbar ist. Wir müssen nun also noch zeigen, dass $\mathrm{Vol}(F(\mathbb{R}^k)) = 0$.

Für $s \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$W(s) := [-s,s]^k.$$

Dann ist

$$F(\mathbb{R}^k) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F(W(s)).$$

Nach Lemma 5.4 (1) genügt es also zu zeigen, dass jedes $F(W(s))$ eine Nullmenge ist. Wir beginnen mit folgender Behauptung.

Behauptung. Es gibt ein $D \geq 0$, so dass für jeden abgeschlossenen Würfel $V \subset W(s)$ gilt, dass[38]

$$\mathrm{Vol}_n(F(V)) \leq D \cdot \mathrm{Vol}_k(V)^{\frac{n}{k}}.$$

[38] Es folgt aus Satz 5.3, dass $F(V)$ messbar ist.

Die Menge $W(s)$ ist kompakt. Nachdem F stetig differenzierbar und da $W(s)$ kompakt ist, existiert nach Lemma 5.1 also

$$C := \max\Big\{ \underbrace{\|\,\mathrm{D}F(P)\,\|}_{\substack{\text{Norm des}\\ \text{Differentials } \mathrm{D}F(P)}} \;\Big|\; P \in W(s)\Big\}.$$

Es sei nun V ein Würfel in $W(s)$. Wir bezeichnen mit d die Seitenlänge von V. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\text{Seitenlänge}(V) = d \;&\Longrightarrow\; \text{Durchmesser}(V) = \sqrt{n}\cdot d \;\overset{\substack{\text{Lemma 5.1}\\ \downarrow}}{\Longrightarrow}\; \text{Durchmesser}(F(V)) \le C\cdot\sqrt{n}\cdot d \\
&\Longrightarrow\; F(V) \text{ ist enthalten in einem Würfel der Seitenlänge } C\cdot\sqrt{n}\cdot d \\
&\Longrightarrow\; F(V) \text{ ist enthalten in einem Würfel mit Volumen } \underbrace{(C\cdot\sqrt{n})^n}_{=:D}\cdot d^n \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus der Monotonie von } \mathrm{Vol}_n}}{\Longrightarrow}\; \mathrm{Vol}_n(F(V)) \le D\cdot d^n \;\Longrightarrow\; \mathrm{Vol}_n(F(V)) \le D\cdot \underbrace{\mathrm{Vol}_k(V)}_{=d^k}{}^{\frac{n}{k}}.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $D := (C\cdot\sqrt{n})^n$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. ⊞

Die Idee ist nun $W(s)$ durch„kleine" Würfel zu überdecken, und dann die Behauptung anzuwenden.

Es sei nun erst einmal $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten

$$V = \left[0, \tfrac{s}{N}\right] \times \cdots \times \left[0, \tfrac{s}{N}\right] \subset \mathbb{R}^k$$

und wir setzen

$$\begin{aligned}
Z &= \left\{(x_1,\dots,x_k)\,\middle|\, x_i = -s, -s+\tfrac{s}{N}, -s+\tfrac{2s}{N},\dots, s-\tfrac{s}{N}\right\} \\
&= \text{“alle Eckpunkte des Karomusters mit Seitenlänge } \tfrac{s}{N} \text{ in } [-s,s)^k\text{”}.
\end{aligned}$$

Wir können jetzt alles zusammenfassen und erhalten, dass

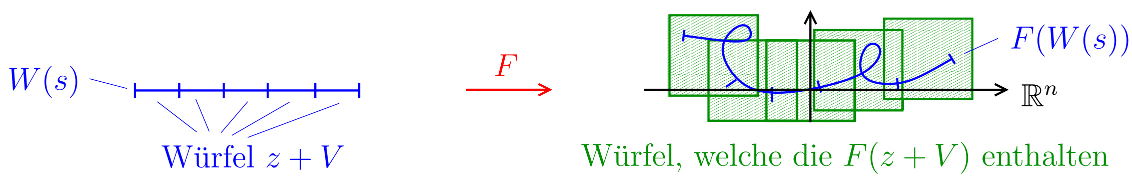
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_n(F(W(s))) &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } W(s)\subset \bigcup_{z\in Z}(z+V)}}{\le} \mathrm{Vol}_n\Big(F\Big(\bigcup_{z\in Z} z+V\Big)\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Subadditivität von } \mathrm{Vol}_n}}{\le} \sum_{z\in Z}\mathrm{Vol}_n(F(z+V)) \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{obige Behauptung}}}{\le} \sum_{z\in Z} D\cdot \underbrace{\mathrm{Vol}_k(z+V)}_{=(\frac{s}{N})^k}{}^{\frac{n}{k}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } Z \text{ aus } (2\cdot s\cdot N)^k \text{ Elementen besteht}}}{=} D\cdot(2sN)^k\cdot\left(\tfrac{s}{N}\right)^n = \underbrace{D\cdot 2^k\cdot s^{n+k}}_{\text{unabhängig von } N}\cdot\frac{1}{N^{k-n}}.
\end{aligned}$$

Nachdem $k<n$ geht mit $N\to\infty$ die rechte Seite gegen null. Also folgt, dass

$$\mathrm{Vol}_n(F(W(s))) = 0.$$

Wir haben damit den Satz bewiesen. ■

Wir beschließen das Kapitel mit folgender Verallgemeinerung von Satz 5.5.



Satz 5.6. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und es sei $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Wenn $A \subset U$ eine Nullmenge ist, so dass das Bild $F(A)$ messbar ist, dann ist auch $F(A)$ eine Nullmenge.*

Beweis. Dieser Satz wird in [**Fo3**, Seite 36] bewiesen. ■

5.3. **Die Cantor–Menge.** Wir haben schon folgende Eigenschaften von Nullmengen bewiesen:

(1) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$, welche aus abzählbar vielen Punkten besteht, ist eine Nullmenge.
(2) Eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ enthält kein offenes Intervall.[39]

Eine Nullmenge von $\mathbb{R}$ ist also in einem gewissen Sinne„klein", und man kann sich die Frage stellen, ob vielleicht eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ immer abzählbar ist. Überraschenderweise ist die Antwort zu dieser Frage allerdings„Nein":

Satz 5.7. *Es gibt eine beschränkte Nullmenge von $\mathbb{R}$, welche überabzählbar viele Punkte enthält.*

Der Beweis von Satz 5.7 erstreckt sich über das ganze Teilkapitel. Wir konstruieren im Folgenden die„Cantor-Menge C" und zeigen danach, dass diese die gewünschte Eigenschaft besitzt. Wir betrachten folgende Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$C_0 \;=\; \big[0,1\big], \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Vol}(C_0) \;=\; 1.$$

Wir bilden nun C_1, indem wir aus dem Intervall C_0 das mittlere offene Drittel entfernen, d.h. es ist

$$C_1 \;=\; \big[0,\tfrac{1}{3}\big] \cup \big[\tfrac{2}{3},1\big], \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Vol}(C_1) \;=\; \tfrac{2}{3}\cdot\operatorname{Vol}(C_0) \;=\; \tfrac{2}{3}.$$

Wir bilden als nächstes C_2, indem wir aus den beiden Teilintervallen von C_1 wiederum jeweils das mittlere offene Drittel entfernen, d.h. es ist

$$C_2 \;=\; \big[0,\tfrac{1}{9}\big] \cup \big[\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}\big] \cup \big[\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}\big] \cup \big[\tfrac{8}{9},1\big] \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Vol}(C_2) \;=\; \tfrac{2}{3}\cdot\operatorname{Vol}(C_1) \;=\; \big(\tfrac{2}{3}\big)^2.$$

Wir fahren nun induktiv so fort. Wir erhalten eine absteigende Folge $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, so dass

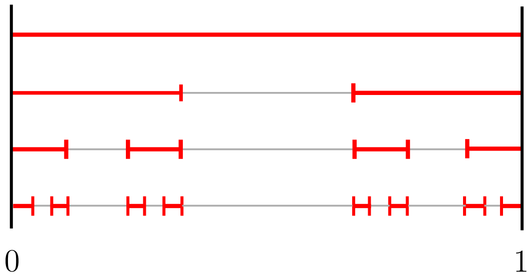
$$C_k \;=\; \begin{array}{l}\text{Vereinigung von } 2^k \text{ kompakten}\\ \text{Intervallen der Länge } \frac{1}{3^k}\end{array} \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Vol}(C_k) \;=\; \tfrac{2}{3}\cdot\operatorname{Vol}(C_{k-1}) \;=\; \big(\tfrac{2}{3}\big)^k.$$

[39] In der Tat, denn aus $(a,b) \in A$ folgt $\operatorname{Vol}(A) \geq \operatorname{Vol}((a,b)) = b-a > 0$.

Definition. Wir bezeichnen

$$C \ := \ \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

als die Cantor-Menge



$C_0 = [0,1]$

$C_1 = \left[0,\tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3},1\right]$

$C_2 = \left[0,\tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}\right] \cup \left[\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9},1\right]$

C_3

Wir werden im Folgenden eine andere Beschreibung der Cantor-Menge C geben. Wir führen dazu folgende Definition ein, welche eine Abwandlung der Definition der Dezimaldarstellung von [**Fr1**, Kapitel 4.2] ist.

Definition. Es sei $n \geq 2$ und es sei zudem $a \in [0,1]$. Nach [**Fr1**, Satz 4.9] existiert eine Folge $a_i \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $i \in \mathbb{N}$, so dass

$$a \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot n^{-i}.$$

Wir bezeichnen dann

$$a \ =: \ 0, a_1\, a_2\, a_3 \dots$$

als n-adige Darstellung von a.

Beispiel. Beispielsweise gilt in der 3–adigen Darstellung, dass

$$0,11111111111\dots \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} \ - 1 \ = \ \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \ - 1 \ = \ \frac{1}{2}.$$

Die 3–adige Darstellung ist nicht eindeutig, beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} &= 0,10000000000\dots \qquad \text{aber auch} \\ \tfrac{1}{3} &= 0,02222222222\dots \end{aligned}$$

Das Argument von [**Fr1**, Satz 4.10] zeigt, dass dies die„einzige Quelle” von nicht eindeutigen 3–adigen Darstellungen ist. Diese Nichteindeutigkeit spielt im weiteren Verlauf aber keine ernsthafte Rolle.

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass

C_1 := alle reellen Zahlen a in $[0,1]$, so dass a eine 3–adige Darstellung besitzt, in welcher in der ersten Stelle nur die Ziffer 0 oder die Ziffer 2 verwendet wird.

Allgemeiner gilt für $k \in \mathbb{N}$, dass

C_k := alle reellen Zahlen a in $[0,1]$, so dass a eine 3–adige Darstellung besitzt, in welcher in den ersten k Stellen nur die Ziffern 0 und 2 verwendet werden und daher auch

$$C \;:=\; \text{alle reellen Zahlen } a \text{ in } [0,1], \text{ so dass } a \text{ eine 3–adige Darstellung besitzt, in welcher nur die Ziffern 0 und 2 verwendet werden.}$$

Definition. Wir definieren die Cantor-Funktion

$$\Phi\colon [0,1] \;\to\; [0,1]$$

wie folgt: Es sei $x \in [0,1]$.

1. Fall. $x \in [0,1]$ besitzt eine 3–adige Darstellung der Form

$$x \;=\; 0, \underbrace{a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, \dots}_{\text{alle } a_i\text{'s liegen in } \{0,2\}}$$

Wir definieren dann

$$\Phi(x) \;:=\; \underbrace{0, \tfrac{a_1}{2}\, \tfrac{a_2}{2}\, \tfrac{a_3}{2}\, \tfrac{a_4}{2}\, \tfrac{a_5}{2}\, \dots}_{2-\text{adige Darstellung}}$$

2. Fall. Andernfalls besitzt $x \in [0,1]$ eine 3–adige Darstellung der Form

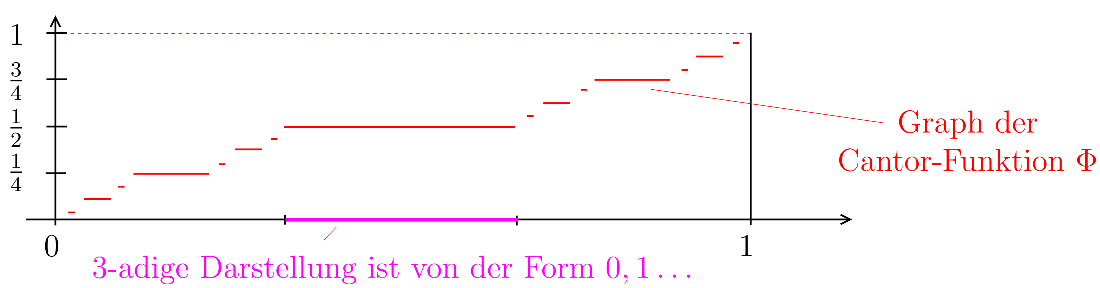
$$x \;=\; 0, \underbrace{a_1\, a_2\, a_3\, \dots\, a_{k-1}}_{\text{jeweils in } \{0,2\}} 1\, a_{k+1}\, \dots$$

Wir definieren dann

$$\Phi(x) \;=\; \underbrace{0, \tfrac{a_1}{2}\, \tfrac{a_2}{2}\, \dots\, \tfrac{a_{k-1}}{2}\, 1\,0\,0\,0\, \dots}_{2-\text{adige Darstellung}}$$

Die Funktion Φ ist konstant auf den Intervallen, welche man jeweils vom Übergang von C_k zu C_{k+1} herausgenommen hat. Beispielsweise gilt

$$\begin{array}{llllll}
\text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], & \text{d.h. für } x = 0,1a_2a_3\dots & \text{ist} & \Phi(x) & = & 0,1000\dots = \frac{1}{2}, \\
\text{für } x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], & \text{d.h. für } x = 0,01a_3a_4\dots & \text{ist} & \Phi(x) & = & 0,0100\dots = \frac{1}{4}, \\
\text{für } x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right], & \text{d.h. für } x = \underbrace{0,21a_3a_4\dots}_{3-\text{adig}} & \text{ist} & \Phi(x) & := & \underbrace{0,1100\dots}_{2-\text{adig}} = \frac{3}{4}.
\end{array}$$



Lemma 5.8. *Die Cantor-Funktion $\Phi\colon [0,1] \to [0,1]$ hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Für jedes $x \in [0,1]$ gibt es ein $c \in C$, so dass $\Phi(c) = x$.*
(2) *Φ ist monoton steigend und stetig.*

Beweis. Es sei $x \in [0,1]$. Wir schreiben

$$x = \underbrace{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}_{\text{2-adige Darstellung}}$$

Dann gilt
$$\Phi(\underbrace{0, (2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots}_{\substack{\text{3-adige Darstellung,} \\ \text{dies ist eine Zahl in } C}}) = \underbrace{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}_{2-\text{adige Darstellung}} = x.$$

Dies beweist schon die erste Aussage. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass die Cantor-Funktion monoton ist. Mithilfe der ϵ-δ-Definition von Stetigkeit kann man auch problemlos zeigen, dass die Cantor-Funktion stetig ist. Nachdem wir diese Aussagen jedoch nicht weiter verwenden werden, überlassen wir den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe. ■

Beweis von Satz 5.7. Jedes C_k ist die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen, also messbar. Als Durchschnitt der abzählbar vielen messbaren Mengen C_k ist die Cantor-Menge C wiederum messbar. Nachdem $\mathrm{Vol}(C_k) = (\frac{2}{3})^k$ gegen 0 konvergiert, und C in jedem C_k enthalten ist, folgt, dass C eine Nullmenge ist.

Aus Lemma 5.8 (1) und der Tatache, dass $[0, 1]$ überabzählbar ist, folgt, dass die Cantormenge überabzählbar ist. ■

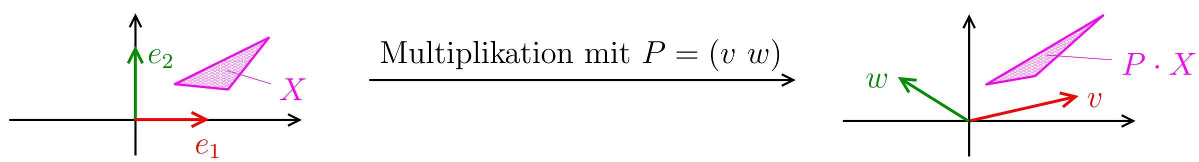
5.4. **Messbare Mengen und Homöomorphismen.**

Satz 5.9. *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene Teilmengen. Wenn $F : U \to V$ ein Homöomorphismus*[40] *ist, dann ist für jede messbare Menge $X \subset U$ auch das Bild $F(X)$ messbar.*

Beispiel. Es sei $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto P \cdot x \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus. Diese führt also messbare Mengen in messbare Mengen über.



Wir geben im Folgenden den Beweis von Satz 5.9. Der Beweis ist etwas technisch und wir haben diesen in der Vorlesung nicht ausgeführt. Der Beweis ist also nicht offizieller Teil der Vorlesung.

Bevor wir uns dem eigentlichen Beweis von Satz 5.9 zuwenden erinnern wir noch einmal an folgende Definition von Seite 138.

Definition. Es sei Ω eine Menge und es sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir bezeichnen

$$\langle \mathcal{S} \rangle_\Omega^\sigma := \text{Durchschnitt aller } \sigma\text{-Algebren von } \Omega, \text{ welche } \mathcal{S} \text{ enthalten,}$$

als die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra.

Wir führen nun noch folgende neue Notation ein.

[40]Zur Erinnerung, eine Abbildung $F : U \to V$ ist ein Homöomorphismus, wenn F stetig und bijektiv ist, und wenn die Umkehrfunktion $F^{-1} : V \to U$ ebenfalls stetig ist.

Notation. Für eine offene Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(U)$ die Menge der offenen Teilmengen von X.

Das folgende Lemma besagt nun, dass die Borel σ-Algebra auch von den offenen Mengen erzeugt wird.

Lemma 5.10. *Es ist*
$$\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n} \;=\; \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n}.$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit folgender ganz allgemeinen Behauptung.

Behauptung. Es sei Ω eine Menge.

(1) Es seien $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt
$$\mathcal{S} \;\subset\; \mathcal{T} \quad \Longrightarrow \langle \mathcal{S}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega} \;\subset\; \langle \mathcal{T}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega}.$$

(2) Wenn $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra ist, dann ist $\langle \mathcal{S}\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega} = \mathcal{S}$.

Beide Aussagen folgen sofort aus den Definitionen. ⊞

Es folgt aus Satz 4.2, dass $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)^{\uparrow} \subset \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n}$. Aus der Behauptung folgt nun, dass $\langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n} \subset \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n}$.

Nachdem jeder halboffene Quader geschrieben werden kann als Durchschnitt von endlich vielen offenen und abgeschlossenen Mengen (d.h. von Komplementen von offenen Mengen) folgt, dass alle halboffenen Quader in $\langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n}$ liegen. Daraus folgt dann wiederum aus der Behauptung die Inklusion $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n} \subset \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n}$. ■

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 5.9 zu.

Beweis von Satz 5.9. Wir beginnen den Beweis wiederum mit einer allgemeinen Behauptung.

Behauptung. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt
$$\langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{X} \;=\; \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n} \cap \mathcal{P}(X).$$

Nachdem X offen ist, folgt leicht, dass $\langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n} \cap \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra auf X ist, welche $\mathcal{O}(X)$ enthält. Also folgt die Inklusion $\langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{X} \subset \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n} \cap \mathcal{P}(X)$ aus der Definition von $\langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{X}$.

Andererseits kann man auch problemlos zeigen, dass
$$\{A \sqcup B \,|\, A \in \langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{X} \text{ und } B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \setminus X)\}$$
eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ ist, welche $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ enthält. Es folgt, dass
$$\langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n} \;\subset\; \{A \sqcup B \,|\, A \in \langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{X} \text{ und } B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \setminus X)\}.$$
Wir erhalten also die gewünschte Inklusion
$$\langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n} \cap \mathcal{P}(X) \;\subset\; \underbrace{\{A \sqcup B \,|\, A \in \langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{X} \text{ und } B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \setminus X)\} \cap \mathcal{P}(X).}_{=\langle \mathcal{O}(X)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{X}}$$
⊞

Es sei $F\colon U \to V$ ein Homöomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Außerdem sei $A \subset U$ eine messbare Menge. Nach Lemma 5.10 gilt also $A \in \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{R}^n}$. Nachdem $A \subset U$ folgt aus der Behauptung, dass $A \in \langle \mathcal{O}(U)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}_{U}$. Die Voraussetzung, dass die Abbildung $F\colon U \to V$ ein Homöomorphismus ist, impliziert, dass $F\colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ eine Bijektion ist[41]. Insbesondere ist dann aber auch

$$F\colon \langle \mathcal{O}(U) \rangle_U^{\boldsymbol{\sigma}} \ \to \ \langle \mathcal{O}(V) \rangle_V^{\boldsymbol{\sigma}}$$

eine Bijektion. Es folgt, dass $F(A) \in \langle \mathcal{O}(V) \rangle_V^{\boldsymbol{\sigma}}$. Es folgt dann wiederum aus der Behauptung, dass $F(A) \in \langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \rangle_{\mathbb{R}^n}^{\boldsymbol{\sigma}}$, d.h. $F(A)$ ist messbar. ■

[41]Warum ist dies der Fall?

6. Die Eindeutigkeit des Lebesgue-Maß

6.1. **Translationsinvariante Maße.** Das Lebesgue-Maß Vol auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathbb{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ ist translationsinvariant. Wenn wir das Lebesgue-Maß mit einer festgewählten positiven Konstante multiplizieren erhalten wir natürlich wiederum ein translationsinvariantes Maß.

Der folgende Satz besagt nun, dass jedes„vernünftige” translationsinvariante Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ von dieser Form ist.

Satz 6.1. *Es sei*

$$\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;\to\; \overline{\mathbb{R}}_+$$

ein translationsinvariantes Maß mit der Eigenschaft, dass es eine offene, beschränkte Menge $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(X) \in (0,\infty)$ gibt. Dann existiert ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\mu(B) \;=\; C \cdot \mathrm{Vol}(B) \qquad \textit{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Beispiel. Die Abbildung $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mu(X) := \#X$ ist auch ein translationsinvariantes Maß, welches aber die Bedingung von Satz 6.1 *erfüllt*.

Beweis. Es sei also $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein translationsinvariantes Maß und es sei zudem $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine offene, beschränkte Menge mit $\mu(X) \in (0,\infty)$.

Für $q > 0$ schreiben wir

$$W_q \;:=\; \big[0, \tfrac{1}{q}\big)^n \;=\; \text{der halboffene Würfel mit Kantenlänge } \tfrac{1}{q}.$$

Wir setzen nun

$$C \;:=\; \mu(W_1) \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Wir wollen nun zeigen, dass C die gewünschte Eigenschaft besitzt. Wir beginnen mit folgender Behauptung:

Behauptung. Für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt $\quad \mu(W_q) \;=\; C \cdot \mathrm{Vol}(W_q)$.

Die Aussage gilt per Definition von C für $q = 1$. Für $q \in \mathbb{N}$ können wir W_1 als Vereinigung von q^n disjunkten Verschiebungen von W_q schreiben. Also gilt:

$$q^n \cdot \mu(W_q) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Translationsinvarianz} \\ \text{und Additivität von } \mu}}{=} \mu(W_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } C}}{=} C \cdot \mathrm{Vol}(W_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Translationsinvarianz} \\ \text{und Additivität von Vol}}}{=} C \cdot q^n \cdot \mathrm{Vol}(W_q).$$

$\boxplus$

Behauptung. Es ist $C > 0$ und $C < \infty$.

Die Menge X ist beschränkt, also enthalten in der Vereinigung von endlich vielen Verschiebungen $A_1, \dots, A_k$ von W_1. Also gilt

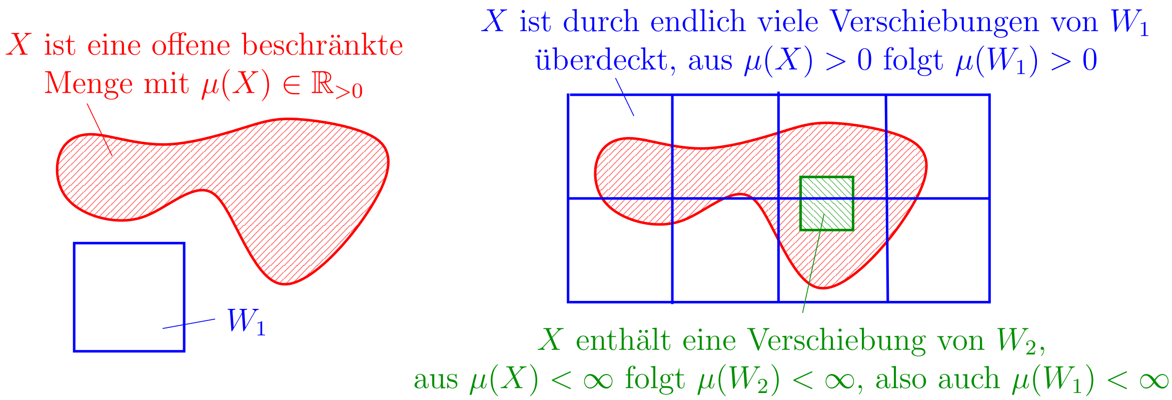
$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } X}}{<} \mu(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie von } \mu}}{\leq} \mu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subadditivität von } \mu}}{\leq} \mu(A_1) + \dots + \mu(A_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Translationsinvarianz von } \mu}}{=} k \cdot \mu(W_1).$$

Es folgt, dass $C = \mu(W_1) > 0$.

Nachdem X offen ist, gibt es ein $q \in \mathbb{N}$, so dass eine Verschiebung von W_q im Inneren von X enthalten ist. Also gilt

$$C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } C}}{=} \mu(W_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erste Behauptung}}}{=} q^n \cdot \mu(W_q) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie und} \\ \text{Translationsinvarianz von } \mu}}{\leq} q^n \cdot \mu(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft von } X}}{<} \infty.$$

⊞



Behauptung. Für jedes $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\quad \mu(A) \;=\; C \cdot \mathrm{Vol}(A)$.

Ein Argument ganz ähnlich wie im Beweis von Satz 4.3 zeigt, dass $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ als disjunkte, abzählbare Vereinigung von Verschiebungen von Quadern der Form W_q geschrieben werden kann. Die Behauptung folgt nun aus der ersten Behauptung, der Translationsinvarianz von Vol und μ und der σ-Additivität von Vol und μ. ⊞

Wir haben nun also gezeigt, dass die Maße $\frac{1}{C} \cdot \mu$ und Vol auf $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ übereinstimmen. Es folgt nun aus Satz 4.15, dass $\frac{1}{C} \cdot \mu$ und Vol auch auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}$ übereinstimmen. ■

6.2. **Volumen und Determinante.** Wir erinnern an folgende Definition aus [**Fr2**, Kapitel 20].

Notation. Für Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit

$$P(v_1, \dots, v_n) \;:=\; \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \,\middle|\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] \right\}$$

das durch $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte Parallelotop. Für $n = 2$ ist dies insbesondere das durch v_1 und v_2 aufgespannte Parallelogramm. Für $n = 3$ ist dies der durch v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Spat.

Notation. Wir schreiben

$$e_i \;=\; (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Koordinate}}}{1}, 0, \dots, 0).$$

Beispiel. Offensichtlich ist $P(e_1, \dots, e_n)$ der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^n$. Jedes Paralellotop erhält man mithilfe einer linearen Abbildung aus dem Einheitswürfel $[0,1]^n$. Genauer gesagt, es seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit T die $n \times n$-Matrix $(v_1 \; \dots \; v_n)$. Dann gilt:

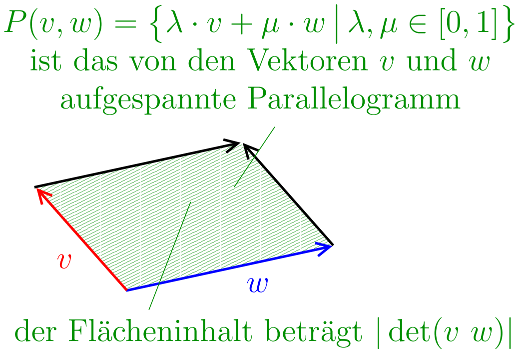
$$P(v_1, \dots, v_n) \;=\; P(T \cdot e_1, \dots, T \cdot e_n) \;=\; T \cdot \underbrace{P(e_1, \dots, e_n)}_{=[0,1]^n}.$$

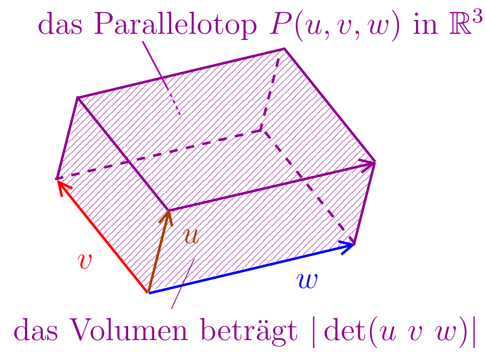
Der folgende Satz gibt uns nun insbesondere eine geometrische Interpretation des Absolutbetrags der Determinante einer quadratischen Matrix.[42]

[42]Für Motivationszwecke hatten wir den folgenden Satz schon in Analysis II als Lemma 20.1 formuliert, obwohl wir damals natürlich über keinen Volumenbegriff verfügten.

Satz 6.2. *Es seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}\left(P(v_1, \ldots, v_n)\right) \;=\; \left|\det\left(v_1 \,\ldots\, v_n\right)\right|.$$





Wir werden gleich sehen, dass dieser Satz aus folgendem stärkeren Satz folgt.

Satz 6.3. *Es sei $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dass*[43]

$$\mathrm{Vol}(\underbrace{T \cdot B}_{\substack{\uparrow \\ \textit{messbar nach Satz 5.9}}}) \;=\; |\det(T)| \cdot \mathrm{Vol}(B).$$

Beispiel.

(1) Es sei T eine diagonale Matrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. Dann ist $T \cdot B$ gerade die Streckung von B in die verschiedenen Koordinatenrichtungen um jeweils den Faktor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Das Volumen verändert sich dann also um den Faktor $\det(T) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

(2) Es sei $T \in \mathrm{O}(n)$ eine orthogonale Matrix. Dann ist $\det(T) = 1$, also gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dass $\mathrm{Vol}(T \cdot B) = \mathrm{Vol}(B)$. Mit anderen Worten, Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix ist volumenerhaltend. Wie wir in Analysis II gesehen hatten werden unter anderem Drehungen und Spiegelungen durch orthogonale Matrizen beschrieben, diese sind also volumenerhaltend.

Beweis von Satz 6.2 mithilfe von Satz 6.3. Es seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben $T := \left(v_1 \,\ldots\, v_n\right)$.

Wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, dann liegt $P(v_1, \ldots, v_n)$ in einem echten Unterraum von $\mathbb{R}^n$, es folgt dann aus Satz 5.5, dass $\mathrm{Vol}\left(P(v_1, \ldots, v_n)\right) = 0$. Andererseits ist dann natürlich auch $\det(T) = 0$.

Wir betrachten nun den Fall, dass $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_n\left(P(v_1, \ldots, v_n)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Beispiel oben}}}{=} \mathrm{Vol}(T \cdot [0,1]^n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 6.3, angewandt auf den Würfel } [0,1]^n}}{=} |\det(T)| \cdot \mathrm{Vol}([0,1]^n) = |\det(T)|. \qquad \blacksquare$$

Die Idee beim Beweis von Satz 6.3 ist diesen durch einen Trick mithilfe von Satz 6.1 zu beweisen. Dazu benötigen wir folgendes einfache Lemma.

[43] Hierbei ist $T \cdot B := \{T \cdot b \mid b \in B\}$.

Lemma 6.4. *Es sei $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \mu_T\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B & \mapsto & \mu_T(B) := \mathrm{Vol}(T\cdot B) \end{array}$$

ein translations-invariantes Maß.

Beweis. Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir also $\mu_T(B) := \mathrm{Vol}(T\cdot B)$. Wir zeigen zuerst, dass μ_T in der Tat ein Maß ist. Offensichtlich gilt $\mu_T(\emptyset) = 0$. Es seien nun $B_k, k \in \mathbb{N}$ disjunkte Mengen in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\mu_T\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \;=\; \mathrm{Vol}\Big(T\cdot\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big)\Big) \;=\; \mathrm{Vol}\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} T\cdot B_k\Big) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn Vol ist ein Maß und die } T\cdot B_k\text{'s sind disjunkt}}}{=}\; \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Vol}(T\cdot B_k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\mu_T(B_k).$$

Die Translationsinvarianz von μ_T zeigen wir nun fast genauso leicht. Es sei also $p \in \mathbb{R}^n$ und zudem sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\mu_T\cdot(p+B) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition von } \mu_T}}{=}\; \mathrm{Vol}(T\cdot(p+B)) \;=\; \mathrm{Vol}(T\cdot p + T\cdot B) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn Vol ist translationsinvariant}}}{=}\; \mathrm{Vol}(T\cdot B) \;=\; \mu_T(B).$$

■

Im Folgenden benötigen wir auch noch folgenden Satz aus der linearen Algebra.

Satz 6.5. *Jede Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ kann geschrieben werden als*[44]

$$T \;= A\cdot D\cdot B,$$

wobei A und B orthogonale Matrizen sind und D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist.

Beweis von Satz 6.5 $(*)$. Die Matrix $T^T\cdot T$ ist symmetrisch. Es folgt aus dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen [**Fr2**, Satz 8.20], dass es eine orthogonale Matrix S und eine reelle diagonale Matrix P gibt, so dass

$$S^T\cdot(T^T\cdot T)\cdot S \;=\; P.$$

Behauptung. Die diagonalen Einträge $p_1,\dots,p_n$ von P sind positiv.

Für jedes $k \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$p_k \;=\; e_k^T\cdot P\cdot e_k \;=\; e_k^T\cdot S^T\cdot A^T\cdot A\cdot S\cdot e_k \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } (X\cdot Y)^T = Y^T\cdot X^T}}{=}\; (ASe_k)^T\cdot(ASe_k) \;=\; \|ASe_k\|^2 \;>\; 0.$$

⊞

Wir bezeichnen nun mit D die diagonale Matrix mit den Einträgen $\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n}$. Wir setzen $A = T\cdot S\cdot D^{-1}$. Dies ist eine orthogonale Matrix, denn[45]

$$A^T\cdot A \;=\; (TSD^{-1})^T\cdot(TSD^{-1}) \;=\; D^{-1}\cdot\underbrace{S^TT^T\cdot TS}_{=P}\cdot D^{-1} \;=\; D^{-1}\underbrace{P}_{=D^2}D^{-1} \;=\; \mathrm{id}_n\,.$$

[44]Eine solche Zerlegung von T wird als Singulärwertzerlegung bezeichnet.

[45]Nach [**Fr1**, Lemma 7.3] ist eine quadratische Matrix A genau dann orthogonal, wenn $A^T\cdot A = \mathrm{id}$.

Der Satz folgt jetzt durch Auflösen von $A = TSD^{-1}$ nach T und der Beobachtung, dass die Matrix $B := S^{-1}$ orthogonal ist. ■

Korollar 6.6. *Es sei*

$$\begin{array}{rccl} \Phi\colon & \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ & A & \mapsto & \Phi(A), \end{array}$$

eine Abbildung, welche folgende drei Eigenschaften besitzt:

(1) Φ *ist ein Gruppenhomomorphismus,*
(2) *für jede diagonale Matrix D mit positiven Diagonaleinträgen gilt $\Phi(D) = \det(D)$,*
(3) *für jede orthogonale Matrix A gilt $\Phi(A) = 1$.*

Dann gilt $\Phi(T) = |\det(T)|$ für alle $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Beweis. Es sei $\Phi\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Abbildung, welche die drei Eigenschaften erfüllt. Es sei nun $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ beliebig. Nach Satz 6.5 gibt es orthogonale Matrizen A und B und eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen, so dass $T = A \cdot D \cdot B$. Es folgt, dass

$$\begin{array}{rclll} \Phi(T) & = & \Phi(A \cdot D \cdot B) & = \ \Phi(A) \cdot \Phi(D) \cdot \Phi(B) & \text{Eigenschaft (1)} \\ & & & = \ \det(D) & \text{Eigenschaft (2) und (3)} \\ & & & = \ |\det(A)| \cdot \det(D) \cdot |\det(B)| & \text{denn die Determinate von} \\ & & & & \text{orthogonalen Matrizen ist } \pm 1 \\ & & & = \ |\det(A \cdot D \cdot B)| & \text{Multiplikativität der Determinante} \\ & & & = \ |\det(T)|. & \end{array}$$

■

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen um Satz 6.3 zu beweisen.

Beweis von Satz 6.3. Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist die Abbildung $X \mapsto \mu_T(X) = \mathrm{Vol}(T(X))$ nach Lemma 6.4 ein translationsinvariantes Maß. Es folgt aus Satz 6.1 dass es eine Zahl gibt, welche wir $\Phi(T)$ nennen, so dass

$$\mathrm{Vol}(T \cdot X) \ = \ \Phi(T) \cdot \mathrm{Vol}(X) \qquad \text{für alle } X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Wir wollen zeigen, dass $\Phi(T) = |\det(T)|$ für alle $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Im Hinblick auf Korollar 6.6 genügt es jetzt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

(1) Φ ist ein Gruppenhomomorphismus,
(2) für jede diagonale Matrix D mit positiven Diagonaleinträgen gilt $\Phi(D) = \det(D)$,
(3) für jede orthogonale Matrix A gilt $\Phi(A) = 1$.

[45] Wir können hierbei die offene, beschränkte Menge $X := T^{-1}((0,1)^n)$ verwenden, denn $\mu_T(X) = \mathrm{Vol}(T(X)) = \mathrm{Vol}((0,1)^n) = 1$.

In allen drei Teilen der Behauptung bestimmen wir Φ durch eine geeignete Wahl von einer messbaren Menge X mit $\mathrm{Vol}(X) > 0$.

(1) Es seien $S, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Es sei X eine beliebige messbare Menge mit $\mathrm{Vol}(X) > 0$. Dann ist

$$\Phi(S \cdot T) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } \Phi(S\cdot T) \\ \text{angewandt auf } X}}{=} \frac{\mathrm{Vol}((S \cdot T) \cdot X))}{\mathrm{Vol}(X)} = \underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(S \cdot (T \cdot X))}{\mathrm{Vol}(T \cdot X)}}_{\substack{= \Phi(S), \text{ berechnet} \\ \text{mithilfe von } T \cdot X}} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(T \cdot X)}{\mathrm{Vol}(X)}}_{\substack{= \Phi(T), \text{ berechnet} \\ \text{mithilfe von } X}} = \Phi(S) \cdot \Phi(T).$$

(2) Es sei D eine Diagonalmatrix mit den positiven Diagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_n$. Dann ist

$$\Phi(D) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } \Phi(D) \text{ angewandt auf } X = [0,1]^n}}{=} \frac{\mathrm{Vol}(D \cdot [0,1]^n))}{\mathrm{Vol}([0,1]^n)} = \mathrm{Vol}([0, d_1] \times \cdots \times [0, d_n]) = \prod_{i=1}^{n} d_i = \det(D).$$

(3) Es sei A eine orthogonale Matrix. Dann gilt

$$\Phi(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } \Phi(A) \\ \text{angewandt auf } X = \overline{B}^n}}{=} \frac{\mathrm{Vol}(A \cdot \overline{B}^n)}{\mathrm{Vol}(\overline{B}^n)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } A \text{ orthogonal, also längenerhaltend ist,} \\ \text{gilt } A \cdot \overline{B}^n = \overline{B}^n}}{=} \frac{\mathrm{Vol}(\overline{B}^n)}{\mathrm{Vol}(\overline{B}^n)} = 1.$$

■

7. Das Lebesgue-Integral

7.1. **Einführung.** Wir beginnen mit zwei harmlosen Notationen.

Notation.

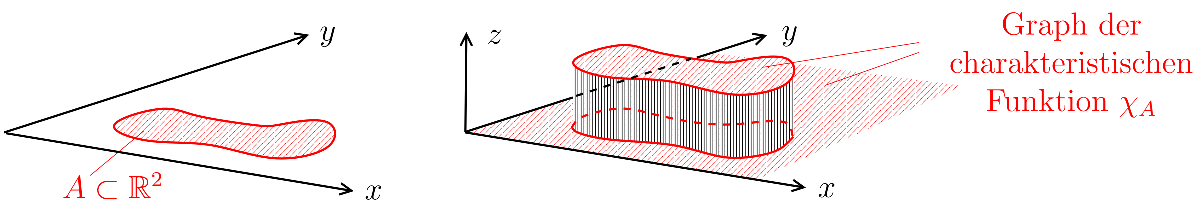
(1) Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir

$$\begin{array}{rcl} \chi_A\colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A, \end{cases} \end{array}$$

als die charakteristische Funktion von A.

(2) Für zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$f \le g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \le g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$



Beispiel. Für die Teilmenge $A = \mathbb{Q}$ ist die zugehörige charakteristische Funktion die Dirichlet-Funktion

$$\begin{array}{rcl} \chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \end{array}$$

welche wir schon in Analysis I kennengelernt hatten.

Unser Ziel ist es einen möglichst allgemeinen Begriff von integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{\text{integrierbare Funktionen}\} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ g & \mapsto & \int g \, d\lambda \end{array}$$

einzuführen, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(0) Für alle messbaren[46] $A \subset \mathbb{R}^n$ ist χ_A integrierbar und es gilt

$$\int \chi_A \, d\lambda \;=\; \mathrm{Vol}_n(A) \qquad \text{Normierung.}$$

(1) Für integrierbare Funktionen f und g sowie $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int \mu \cdot f + \nu \cdot g \, d\lambda \;=\; \mu \int f \, d\lambda \;+\; \nu \int g \, d\lambda \qquad \text{Linearität.}$$

(2) Für integrierbare Funktionen f und g gilt

$$f \le g \;\Rightarrow\; \int f \, d\lambda \le \int g \, d\lambda \qquad \text{Monotonie.}$$

(3) Für eine Folge $\{f_k\}_{k\ge 1}$ von Funktionen, welche„punktweise konvergiert", gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda = \int f \, d\lambda \qquad \text{Stetigkeit.}$$

[46] Wie auf Seite 170 nennen wir eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ *messbar*, wenn die Menge in der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Selbst wenn wir uns nur auf den Fall $n = 1$ einschränken müssen wir arbeiten, denn das klassische Riemann-Integral erfüllt Eigenschaft (0) nicht. In der Tat, denn wie schon mehrmals erwähnt, ist die Menge $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ zwar messbar, aber die zugehörige charakteristische Funktion χ_A ist nach [**Fr1**, Kapitel 15.1] nicht Riemann-integrierbar.

7.2. **Messbare Funktionen.** Zur Vorbereitung der Definitions des Lebesgue-Integrals müssen wir noch den Begriff der messbaren Funktion einführen.

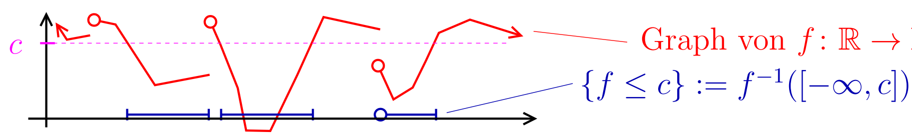
Definition. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion.

(1) Für $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\{f \leq c\} \;:=\; f^{-1}\big([-\infty, c]\big) \;=\; \{\text{alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } f(x) \leq c\}.$$

Ganz analog definieren wir auch $\{f < c\}$, $\{f \geq c\}$, $\{f > c\}$, $\{a < f < b\}$ usw.

(2) Wir sagen die Funktion f ist messbar, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f \leq c\}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.



Beispiel.

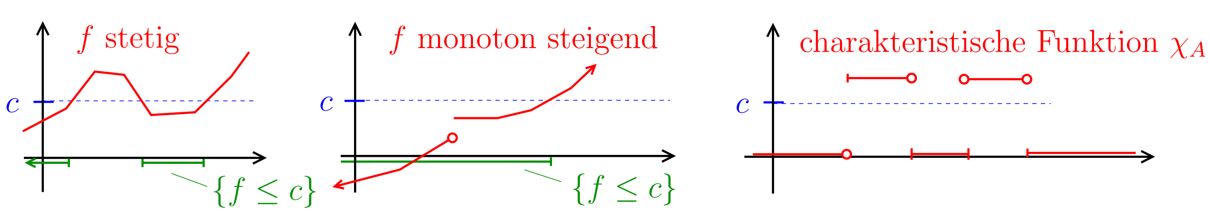
(1) Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist messbar, denn für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist

$$\{f \leq c\} \;=\; f^{-1}\Big(\underbrace{(-\infty, c]}_{\text{abgeschlossen}}\Big)$$

nach [**Fr2**, Satz 2.15] eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, also messbar nach Satz 5.1.

(2) Jede monoton steigende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist messbar, denn für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f \leq c\}$ ein Intervall, also messbar.

(3) Für jede messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die charakteristische Funktion χ_A messbar, denn $\{\chi_A \leq c\}$ ist, je nach Wahl von c, entweder $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^n \setminus A$ oder $\varnothing$. Dies sind jeweils messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.



Lemma 7.1. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *f ist messbar,*

(2) *für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f < c\}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$,*

(3) *für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f \geq c\}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$,*

(4) *für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f > c\}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Wir beweisen, dass Messbarkeit die anderen Aussagen impliziert. Die Äquivalenz der Aussagen beweist man ganz analog. Es sei also f eine messbare Funktion und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{f < c\} \;=\; f^{-1}((-\infty, c)) \;=\; f^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(-\infty, c-\tfrac{1}{k}]\Big) \;\underset{\substack{\uparrow\\ [\textbf{Fr2}, \text{ Satz } 2.14]}}{=}\; \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, c-\tfrac{1}{k}]) \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{f \leq c-\tfrac{1}{k}\}}_{\substack{\text{messbar nach}\\ \text{Voraussetzung}}}.$$

Dies ist eine abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen, also nach Satz 5.1 wiederum messbar. Zudem sind

$$\{f \geq c\} \;=\; \mathbb{R}^n \setminus \{f < c\} \qquad \text{und} \qquad \{f > c\} \;=\; \mathbb{R}^n \setminus \{f \leq c\}.$$

Komplemente von messbaren Mengen, also messbar. ■

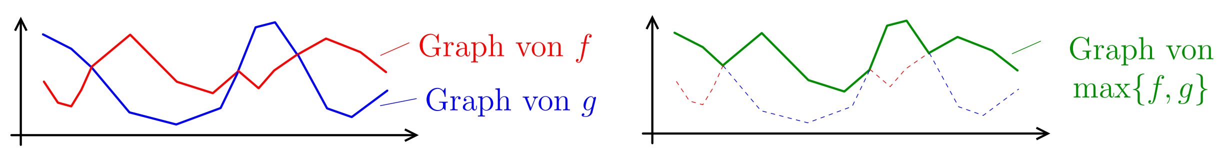
Wir beweisen nun noch, wie wir aus messbaren Funktionen, weitere messbare Funktionen erhalten.

Lemma 7.2. *Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen. Dann gilt*

(1) *für alle $c \in \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $c \cdot f$ messbar,*
(2) *die Funktion f^2 ist messbar,*
(3) *die Summe $f + g$ ist messbar,*
(4) *das Produkt $f \cdot g$ ist messbar,*
(5) *die Funktionen*

$$\begin{aligned} \min\{f,g\}\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min\{f(x), g(x)\} \end{aligned} \qquad \textit{und} \qquad \begin{aligned} \max\{f,g\}\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

sind messbar.



Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind Übungsaufgaben in Übungsblatt 12.

(3) Nach Lemma 7.1 (2) $\Rightarrow$ (1) genügt es zu zeigen, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f + g < c\}$ messbar ist. Es sei also $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\{f+g<c\} \;\overset{\substack{\text{wie im Beweis von Lemma 7.1}\\ \downarrow}}{=}\; \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f+g<c-\tfrac{1}{n}\} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{wenn } f(x)+g(x)<c-\frac{1}{n}, \text{ dann wähle } r\in\mathbb{Q} \text{ mit } r\in(f(x), f(x)+\frac{1}{n}), \text{ dann}\\ \text{gilt } f(x)<r \text{ und auch } g(x)<c-\frac{1}{n}-f(x)<c-r}}{\subset}\; \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \overbrace{\{f<r\}}^{\text{messbar}} \cap \overbrace{\{g<c-r\}}^{\text{messbar}} \;\subset\; \{f+g<c\}.$$

Alle Inklusionen sind also Gleichheiten, und wir sehen, dass $\{f + g < c\}$ die abzählbare Vereinigung von Durchschnitten von jeweils zwei messbaren Mengen ist. Also ist $\{f + g < c\}$ nach Satz 5.1 wiederum messbar.

(4) Diese Aussage folgt aus den Aussagen (1), (2) und (3) und der Beobachtung, dass

$$f \cdot g \;=\; \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big).$$

(5) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\min\{f,g\} \geq c\} \;=\; \{f \geq c\} \cap \{g \geq c\}$$

und

$$\{\max\{f,g\} \leq c\} \;=\; \{f \leq c\} \cap \{g \leq c\}.$$

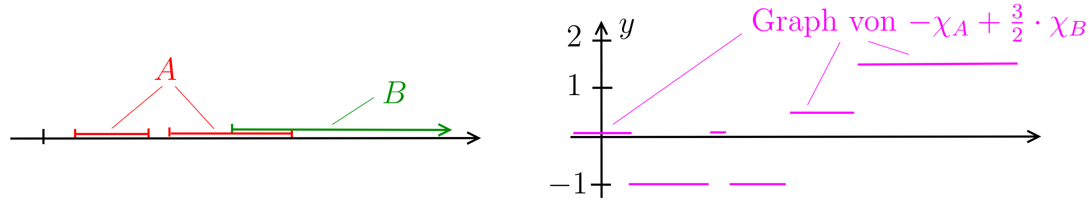
Die Aussage folgt nun aus den Definitionen und aus Lemma 7.1. ■

7.3. **Das Lebesgue-Integral für Stufenfunktionen.**

Definition. Eine Stufenfunktion ist eine Funktion der Form

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \chi_{A_i},$$

wobei $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ und $A_1, \dots, A_m$ messbare Mengen sind.[47]



Lemma 7.3. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *f ist eine Stufenfunktion*
(2) *Die Funktion f nimmt endlich viele Werte $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$ an, und jedes Urbild $f^{-1}(\{d_i\})$ ist messbar.*
(3) *Es gibt disjunkte, messbare Mengen $A_1, \dots, A_m$ mit $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_m = \mathbb{R}^n$ und es gibt $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, so dass*

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \chi_{A_i}.$$

Beweis (∗)**.** Wir beweisen zuerst die (1) ⇒ (2)-Aussage. Es sei also $f = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \cdot \chi_{A_i}$, wobei $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ und wobei $A_1, \dots, A_m$ messbare Mengen sind. Für $i = 1, \dots, m$ schreiben wir $A_i^+ := A_i$ und $A_i^- := A_i^{\mathsf{c}}$. Dann ist

$$\mathbb{R}^n \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(A_i^+ \sqcup A_i^-)}_{=\mathbb{R}^n} \;=\; \bigsqcup_{(r_1,\dots,r_n)\in\{\pm\}^n} \overbrace{(A_1^{r_1} \cap \dots \cap A_n^{r_n})}^{\text{messbar}}.$$

↑
der Wert von f auf dieser Menge ist gegeben
durch die Summe der c_i mit $r_i = +$

Wir sehen also, dass f nur endlich viele Werte annimmt, und das die Urbilder der Werte wiederum messbar sind.

[47] Mit anderen Worten, eine Stufenfunktion ist eine Linearkombination von charakteristischen Funktionen von messbaren Mengen. Man beachte, dass die Teilmengen unendliches Maß besitzen können.

Wir beweisen nun (2) ⇒ (3). Wenn also die Funktion f nur die Werte $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{R}$ annimmt, und wenn jedes Urbild $f^{-1}(\{d_i\})$ messbar, dann ist

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{k} d_i \cdot \chi_{f^{-1}(\{d_i\})}$$

eine Stufenfunktion, wobei die Urbilder disjunkt sind, und die Vereinigung der Urbilder ist der ganze $\mathbb{R}^n$.

Die (3) ⇒ (1) Aussage ist natürlich trivial. ■

Lemma 7.4. *Es seien f und g zwei Stufenfunktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Die Summe $f + g$ der Stufenfunktionen ist wiederum eine Stufenfunktion.*
(2) *Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist das Skalarprodukt $c \cdot f$ wieder eine Stufenfunktion.*
(3) *Die Funktionen $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$ sind ebenfalls Stufenfunktionen.*

Beweis. Wir überlassen den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe. ■

Lemma 7.5. *Stufenfunktionen sind messbar.*

Beweis. Auf Seite 188 hatten wir schon gesehen, dass charakteristische Funktionen von messbaren Mengen messbar sind. Es folgt nun aus Lemma 7.2, dass jede Stufenfunktion messbar ist. ■

Definition. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Stufenfunktion. Es folgt aus Lemma 7.3, dass es disjunkte, messbare Teilmengen $A_1, \ldots, A_m$ von $\mathbb{R}^n$ und $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, so dass

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \chi_{A_i}.$$

Wir setzen[48]

$$\int f\, d\lambda \;:=\; \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \operatorname{Vol}(A_i) \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Wir sagen f ist Lebesgue-integrierbar, wenn $\int f\, d\lambda < \infty$ und wir bezeichnen dann $\int f\, d\lambda$ als das Lebesgue-Integral von f.[49]

Bemerkung. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Stufenfunktion. Wir bezeichnen mit $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}_{>0}$ die verschiedenen positiven Funktionswerte. Es folgt leicht aus der Additivität von Vol, dass

$$\int f\, d\lambda \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \operatorname{Vol}(f^{-1}(c_i)).$$

Dies zeigt insbesondere, dass das Lebesgue-Integral von f wohldefiniert ist.

[48] Die Notation $\int \ldots d\lambda$ hat hierbei keine Bedeutung. Genauer gesagt, für das Integral in einem„Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$" wird das Integral einer Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ normalerweise als $\int f\, d\mu$ geschrieben. In unserem Fall ist $\mu = \operatorname{Vol}$, d.h. wir müssten logischerweise $\int f\, d\operatorname{Vol}$ schreiben. Um die Notation etwas zu verkürzen schreiben wir jedoch $d\lambda$ anstatt $d\operatorname{Vol}$. Das„λ" soll dabei an Lebesgue erinnern.

[49] Warum haben wir uns in der Definition eigentlich auf *nichtnegative* Stufenfunktionen eingeschränkt?

Beispiel. Das Standardbeispiel einer Funktion, welche nicht Riemann-integrierbar ist, ist gegeben durch

$$\underbrace{\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases} \end{array}}_{2 \cdot \text{charakteristische Funktion von } \mathbb{Q} \cap [0,1]}$$

Es folgt, dass

$$\text{Lebesgue-Integral von } f \;=\; \int 2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per Definition}}}{=} 2 \cdot \operatorname{Vol}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \mathbb{Q}\cap[0,1] \text{ abzählbar}}}{=} 0.$$

Wir sehen also, dass sich der Begriff des Lebesgue-Integrals im Fall $n = 1$ vom Begriff des Riemann-Integrals unterscheidet.

Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und es sei $f_k\colon A \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen.

(1) Wir sagen die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wenn für alle $x \in A$ gilt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.

(2) Für eine Folge von Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $k \geq 1$ und für eine weitere Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ schreiben wir

$$f_k \uparrow f \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{die Funktionenfolge ist monoton steigend} \\ \text{und konvergiert punktweise gegen } f.\end{array}$$

Ganz analog definieren wir natürlich auch $f_k \downarrow f$.

In folgendem Satz fassen wir einige der wichtigsten Eigenschaften des Lebesgue-Integrals für nichtnegative Stufenfunktionen zusammen.

Satz 7.6.

(0) *Für alle messbaren $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\int \chi_A \, d\lambda \;=\; \operatorname{Vol}_n(A) \qquad \textit{Normierung.}$$

(1a) *Für jede nichtnegative Stufenfunktion f und jedes $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt*

$$\int c \cdot f \, d\lambda \;=\; c \cdot \int f \, d\lambda \qquad \textit{Homogenität.}$$

(1b) *Für alle nichtnegativen Stufenfunktionen f und g gilt*

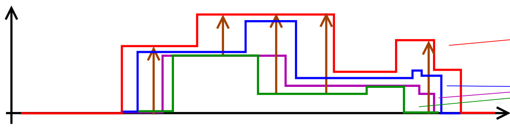
$$\int f + g \, d\lambda \;=\; \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda \qquad \textit{Additivität.}$$

(2) *Für nichtnegativen Stufenfunktionen f und g gilt*

$$f \leq g \;\Rightarrow\; \int f \, d\lambda \leq \int g \, d\lambda \qquad \textit{Monotonie.}$$

(3) *Für eine Folge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ von nichtnegativen Stufenfunktion und eine Stufenfunktion f gilt*

$$f_k \uparrow f \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda = \int f \, d\lambda \qquad \textit{Stetigkeit.}$$



Beweis. Die Aussagen (0) und (1a) sind trivial. Wir beweisen nun (1b) und (2). Es seien also f und g zwei nichtnegative Stufenfunktionen. Nach Lemma 7.3 können wir schreiben

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \chi_{A_i}, \qquad \text{wobei } c_1,\dots,c_r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und wobei } A_1,\dots,A_r \text{ disjunkt und messbar mit } A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r = \mathbb{R}^n$$

und

$$g \;=\; \sum_{j=1}^{s} d_j \cdot \chi_{B_j}, \qquad \text{wobei } d_1,\dots,d_s \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und wobei } B_1,\dots,B_s \text{ disjunkt und messbar mit } B_1 \sqcup \dots \sqcup B_s = \mathbb{R}^n.$$

Wir können nun f und g jeweils als Linearkombinationen der charakteristischen Funktionen der gleichen Mengen $A_i \cap B_j$ schreiben. Aber dann sind die Aussagen (1b) und (2) fast schon trivialerweise richtig.

Zum Abschluss beweisen wir Aussage (3). Es sei nun $\{f_k\}_{k\geq 1}$ eine Folge von nichtnegativen Stufenfunktion mit $f_k \uparrow f$, wobei f eine weitere Stufenfunktion ist.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\int f\,d\lambda = \infty$. Dann gibt es ein $c > 0$ und eine messbare Menge A mit $\operatorname{Vol}(A) = \infty$, so dass $f \geq c \cdot \chi_A$. Wir setzen

$$A_k \;:=\; \big\{x \in A \,|\, f_k(x) \geq \tfrac{c}{2}\big\}.$$

Diese Menge ist messbar nach Lemma 7.5. Wir sehen nun, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\lambda \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus der Monotonie des Integrals} \\ \text{und aus } f_k \,\geq\, \frac{c}{2}\cdot\chi_{A_k}}}{\geq}\; \frac{c}{2}\cdot \lim_{k\to\infty} \operatorname{Vol}(A_k) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn aus } f_k \uparrow f \text{ folgt } A_k \uparrow A, \text{ also folgt} \\ \text{aus Satz 5.2, dass } \lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Vol}(A_k) = \operatorname{Vol}(A)}}{=}\; \frac{c}{2}\cdot \operatorname{Vol}(A) \;=\; \infty.$$

Wir betrachten nun den Fall, dass $\int f\,d\lambda < \infty$. Wir setzen $g_k := f - f_k$. Dann gilt $g_k \downarrow 0$. Wir müssen nun nur noch[50] zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k\,d\lambda \;=\; 0.$$

Wir setzen $M := \max\{g_1(x)\,|\,x \in \mathbb{R}^n\}$ und $S := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g_1(x) > 0\}$. Es folgt aus Lemmata 7.1 und 7.5, dass S messbar ist. Aus

$$\operatorname{Vol}(S)\cdot \text{kleinster positiver Funktionswert von } g_1 \;\leq\; \int g_1\,d\lambda \;\leq\; \int f\,d\lambda \;<\; \infty,$$

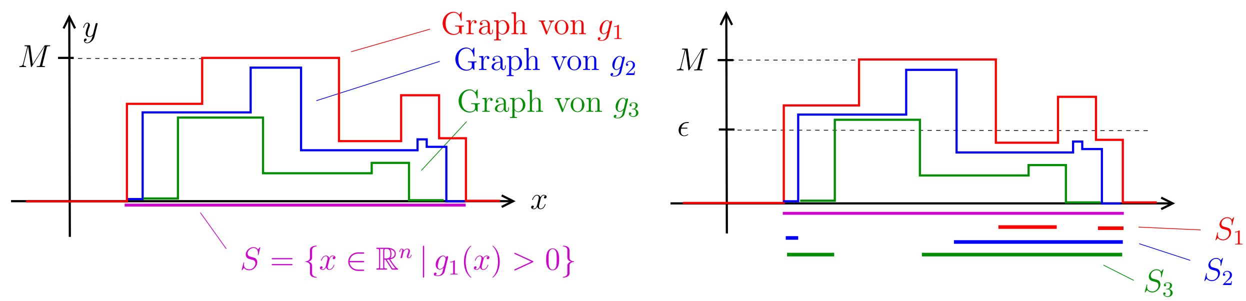
folgt zudem, dass $\operatorname{Vol}(S) < \infty$.

Wir wählen nun ein $\epsilon > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$S_k \;:=\; \{x \in S \,|\, g_k(x) \leq \epsilon\}.$$

[50] In der Tat, denn aus

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k\,d\lambda \;=\; 0 \text{ folgt } \int f\,d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \int \underbrace{f_k + g_k}_{=f} d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\lambda + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \int g_k\,d\lambda}_{=0} \;=\; \lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\lambda.$$



Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$0 \quad \leq \quad g_k(x) \quad \leq \begin{cases} = 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \\ \leq M, & \text{wenn } x \in S \setminus S_k, \\ \leq \epsilon & \text{wenn } x \in S_k. \end{cases}$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$0 \quad \leq \quad g_k \quad \leq \quad M \cdot \chi_{S \setminus S_k} + \epsilon \cdot \chi_{S_k}.$$

Daraus, und aus der gerade bewiesenen Additivität und Monotonie des Lebesgue-Integral von nichtnegativen Stufenfunktionen, folgt, dass

$$0 \quad \leq \quad \int g_k \, d\lambda \quad \leq \quad \underbrace{\underbrace{\int M \cdot \chi_{S \setminus S_k} \, d\lambda}_{M \cdot (\mathrm{Vol}(S) - \mathrm{Vol}(S_k))} + \underbrace{\int \epsilon \cdot \chi_{S_k} \, d\lambda}_{= \epsilon \cdot \mathrm{Vol}(S_k)}}_{= M(\mathrm{Vol}(S) - \mathrm{Vol}(S_k)) + \epsilon \cdot \mathrm{Vol}(S_k)}.$$

Also folgt, dass

$$0 \quad \leq \quad \lim_{k \to \infty} \int g_k \, d\lambda \quad \leq \quad M \cdot \underbrace{\lim_{k \to \infty} (\mathrm{Vol}(S) - \mathrm{Vol}(S_k))}_{\substack{= 0, \text{ denn aus } g_k \downarrow 0 \text{ folgt } S_k \uparrow S, \\ \text{also folgt aus Satz 5.2,} \\ \text{dass } \mathrm{Vol}(S_k) \uparrow \mathrm{Vol}(S)}} + \epsilon \cdot \underbrace{\lim_{k \to \infty} \mathrm{Vol}(S_k)}_{= \mathrm{Vol}(S)} \; = \; \epsilon \cdot \mathrm{Vol}(S).$$

Nachdem diese Ungleichung für jedes $\epsilon > 0$ gilt, folgt, dass

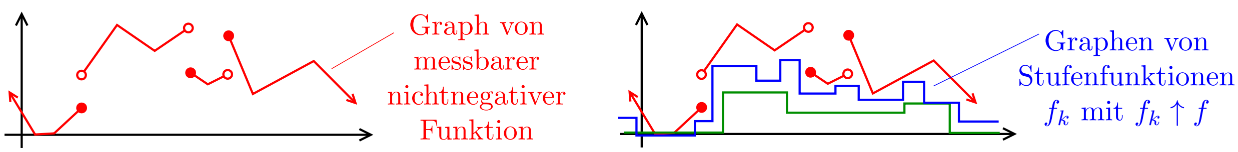
$$\lim_{k \to \infty} \int g_k \, d\lambda \quad = \quad 0.$$

■

Satz 7.6 besagt also, dass das Lebesgue-Integral von Stufenfunktionen die in Kapitel 7.1 gewünschten Eigenschaften besitzt. Aber wir sind natürlich noch lange nicht fertig, wir wollen ja nicht nur nichtnegative Stufenfunktionen sondern allgemeinere Funktionen, z.B. stetige Funktionen, integrieren. Wir werden deshalb im nächsten Kapitel den Begriff des Lebesgue-Integrals auf größere Klassen von Funktionen erweitern.

7.4. **Das Lebesgue-Integral für messbare nichtnegative Funktionen.** Wir wollen jetzt das Lebesgue-Integral von Stufenfunktionen auf messbare nichtnegative Funktionen fortsetzen.

Satz 7.7. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine nichtnegative messbare Funktion. Dann gibt es eine aufsteigende Folge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ von nichtnegativen Stufenfunktionen mit $f_k \uparrow f$.*



Beweis. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass alle Werte von f in $[0,1)$ liegen.

Die Idee ist nun für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f_k als die„größte" Stufenfunktion zu wählen, welcher kleiner gleich f ist, und welche nur Werte in $\{\frac{i}{2^k} \,|\, i = 0, \ldots, 2^k - 1\}$ annimmt.

Wir erinnern noch an folgende Notation aus der Analysis I: für $y \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\lfloor y \rfloor \;:=\; \text{“}y \text{ abgerundet”} \;:=\; \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq y\}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$\begin{aligned} f_k\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{2^k} \cdot \lfloor 2^k \cdot f(x) \rfloor. \end{aligned}$$

Wir müssen nun noch folgende Aussagen beweisen:

(1) jedes f_k ist eine nichtnegative Stufenfunktion,
(2) die Funktionenfolge $f_k, k \in \mathbb{N}$ ist aufsteigend,
(3) die Funktionenfolge $f_k, k \in \mathbb{N}$ konvergiert punktweise gegen f.

Wir beweisen nun diese drei Aussagen:

(1) Es ist klar, dass f_k nichtnegativ ist, und dass die Werte von f_k in $\{0, \frac{1}{2^k}, \ldots, \frac{2^k-1}{2^k}\}$ liegen. Zudem ist für $i \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ das Urbild
$$f_k^{-1}\big(\tfrac{i}{2^k}\big) \;=\; f^{-1}\big(\big[\tfrac{i}{2^k}, \tfrac{i+1}{2^k}\big)\big) \;=\; \underbrace{\{f < \tfrac{i+1}{2^k}\}}_{\text{messbar}} \setminus \underbrace{\{f < \tfrac{i}{2^k}\}}_{\text{messbar}}$$
messbar. Also ist f_k nach Lemma 7.3 eine Stufenfunktion.

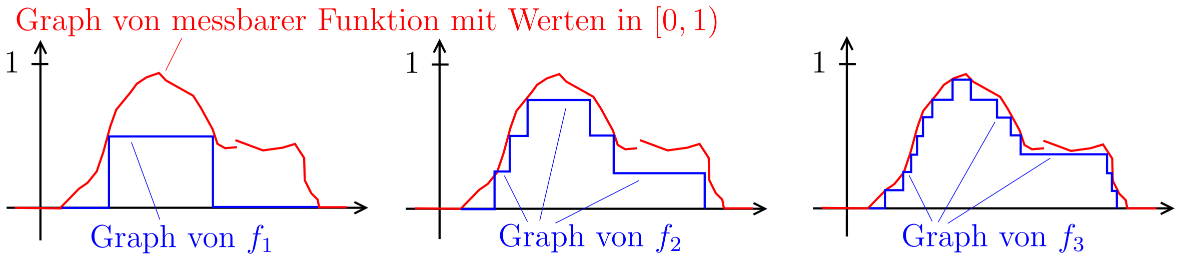
(2) Diese Aussage folgt aus der elementaren Beobachtung, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung gilt:
$$\tfrac{1}{2^{k+1}} \cdot \lfloor 2^{k+1} \cdot y \rfloor \;\geq\; \tfrac{1}{2^k} \cdot \lfloor 2^k \cdot y \rfloor.$$

(3) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2^k}$. Also konvergiert die Funktionenfolge $f_k, k \in \mathbb{N}$ punktweise gegen f.

Wir haben damit den Satz in dem Spezialfall bewiesen. Der allgemeine Fall, dass f beliebige Werte annimmt wird in Übungsblatt 13 behandelt. ■

Definition. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine nichtnegative, messbare Funktion. Nach Satz 7.7 gibt es eine aufsteigende Folge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ von nichtnegativen Stufenfunktionen mit $f_k \uparrow f$. Wir setzen

[50] Anders ausgedrückt, f_k ist die Funktion, welche wir erhalten, indem wir jeden Funktionswerte von f auf die größte Zahl der Form $\{0, \frac{1}{2^k}, \ldots, \frac{2^k-1}{2^k}\}$ abrunden.



$$\int f\,d\lambda \;:=\; \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int f_k\,d\lambda}_{\substack{\uparrow \\ \text{monoton steigende Folge, d.h. der Grenzwert existiert in } \overline{\mathbb{R}}_+}} \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Wenn $\int f\,d\lambda < \infty$, dann nennen wir f Lebesgue-integrierbar und wir bezeichnen $\int f\,d\lambda$ als das Lebesgue-Integral von f.

A priori hängt die Definition des Lebesgue-Integral von f von der Wahl der Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ab. Das nächste Lemma besagt, dass dies, zum Glück, nicht der Fall ist.

Lemma 7.8. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine nichtnegative, messbare Funktion und es seien zudem $\{f_k\}_{k\ge 1}$ und $\{g_k\}_{k\ge 1}$ zwei aufsteigende Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen mit $f_k \uparrow f$ und $g_k \uparrow f$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \int g_k\,d\lambda.$$

Beweis. [51] Wir zeigen die Ungleichung

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\lambda \;\le\; \lim_{m\to\infty} \int g_m\,d\lambda.$$

Aus Symmetriegründen gilt dann aber auch die umgekehrte Ungleichung, d.h. es folgt, dass beide Grenzwerte gleich sind.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int f_k\,d\lambda \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 7.6 (3), da } \min\{f_k,g_m\}\uparrow f_k}}{=} \quad \lim_{m\to\infty} \int \min\{f_k, g_m\}\,d\lambda \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 7.6 (2), denn } \min\{f_k,g_m\}\le g_m}}{\le} \quad \lim_{m\to\infty} \int g_m\,d\lambda.$$

Nachdem dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, gilt diese Ungleichung auch für den Grenzwert $k \to \infty$. Wir haben damit also die gewünschte Ungleichung der Grenzwerte bewiesen. ■

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x &\mapsto \begin{cases} \infty, & \text{wenn } x = 3, \\ 0, & \text{wenn } x \ne 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist keine Stufenfunktion, nachdem sie den Wert ∞ annimmt. Die Funktion ist jedoch messbar.[52] Wir können die Funktion f auch schreiben als $f = \infty \cdot \chi_{\{3\}}$. Wir

[51] Der Beweis des Lemmas hat eine gewisse formale Ähnlichkeit zum Beweis von Lemma 4.5.

[52] Warum?

setzen $f_k = k \cdot \chi_{\{3\}}$. Dann gilt $f_k \uparrow f$. Also ist

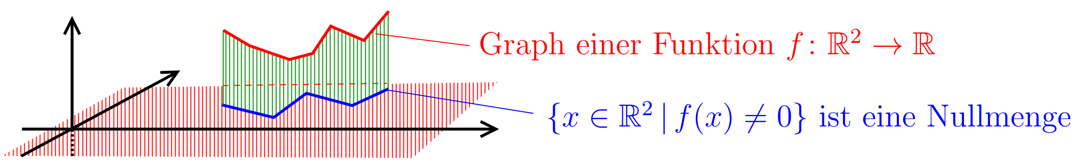
$$\int f\, d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int k \cdot \chi_{\{3\}}}_{=k\cdot \mathrm{Vol}(\{3\})=0}\, d\lambda \;=\; 0.$$

Die Funktion f nimmt also den Wert ∞ an, ist aber Lebesgue-Integrierbar mit Lebesgue-Integral gleich null.

Das folgende Lemma verallgemeinert etwas das vorherige Beispiel.

Lemma 7.9. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine nichtnegative, messbare Funktion. Dann gilt*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \neq 0\} \text{ ist eine Nullmenge} \quad \Rightarrow \quad \int f\, d\lambda \;=\; 0.$$



Beweis. Das Lemma wird in Übungsblatt 13 bewiesen. ■

Der folgende Satz ist nun eine Verallgemeinerung von Satz 7.10 auf nichtnegative, messbaren Funktionen.

Satz 7.10.

(1) *Für alle nichtnegativen, messbaren Funktionen f und g und alle $c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt*

$$\int c \cdot f + d \cdot g\, d\lambda \;=\; c \cdot \int f\, d\lambda + d \cdot \int g\, d\lambda \qquad \textit{Lineariät.}$$

(2) *Für alle nichtnegativen, messbaren Funktionen f und g gilt*

$$f \;\leq\; g \;\;\Rightarrow\;\; \int f\, d\lambda \leq \int g\, d\lambda \qquad \textit{Monotonie.}$$

(3) *Für eine Folge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ von nichtnegativen, messbaren Funktionen und eine weitere nichtnegative, messbare Funktion g gilt*

$$f_k \uparrow g \;\;\Rightarrow\;\; \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\lambda = \int g\, d\lambda \qquad \textit{Stetigkeit.}$$

Beweis. Der Beweis von (1) ist elementar und ist eine freiwillige Übungsaufgabe. Der Beweis von (2) ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 13.

Wir beweisen nun noch Aussage (3).[53] Nach Satz 7.7 gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge $\{f_{kj}\}_{j\geq 1}$ von Stufenfunktionen mit $f_{kj} \uparrow f_k$. Daraus folgt, dass

$$\int \max\{f_{1k}, \ldots, f_{kk}\}\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn aus } f_{ik} \leq f_i \leq f_k \text{ folgt } \max\{f_{1k},\ldots,f_{kk}\} \leq f_k}}{\leq} \int f_k\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } f_k \leq g}}{\leq} \int g\, d\lambda.$$

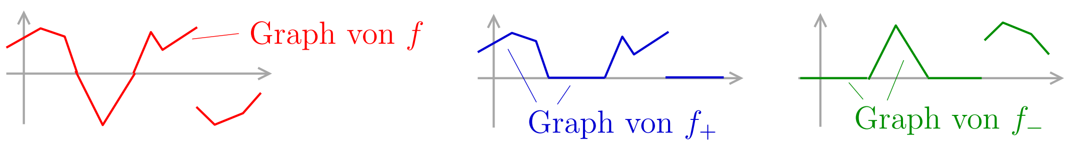
[53]Der Beweis dieser Aussage ist halbwegs analog zum Beweis von Satz 4.6 (3).

Zudem gilt [54] $\max\{f_{1k}, \ldots, f_{kk}\} \uparrow g$. In dem wir jetzt also in den obigen Ungleichungen den Grenzwert $m \to \infty$ bilden erhalten wir auf beiden Seiten $\int g\, d\lambda$. Wir erhalten also gerade die gewünschte Aussage. ■

7.5. **Das Lebesgue-Integral.**

Definition. Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir nun

$$f_+ \;:=\; \max\{f, 0\} \quad \text{und} \quad f_- \;:=\; -\min\{f, 0\}.$$



Wenn f messbar ist, dann folgt aus Lemma 7.2, dass auch f_- und f_+ messbar sind. Wir können dann also $f = f_+ - f_-$ als Differenz von zwei messbaren, nichtnegativen Funktionen schreiben. Dies ermöglicht es uns nun, ganz allgemein den Begriff des Lebesgue-Integral einzuführen.

Definition. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Wir sagen, f ist Lebesgue-integrierbar, wenn f messbar ist, und wenn für die beiden Funktionen $f_+, f_-\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt

$$\int f_+\, d\lambda \;<\; \infty \quad \text{und} \quad \int f_-\, d\lambda \;<\; \infty.$$

Wir bezeichnen dann

$$\int f\, d\lambda \;:=\; \int f_+\, d\lambda \;-\; \int f_-\, d\lambda$$

als das Lebesgue-Integral von f.

Der nächste Satz ist zum großen Teil das Analogon zu Satz 7.10.

Satz 7.11. *Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen.*

(1a) *Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $c \cdot f$ Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int c \cdot f\, d\lambda \;=\; c \cdot \int f\, d\lambda \qquad \textit{Homogenität.}$$

(1b) *Wenn $f + g$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist,*[55] *dann ist auch $f + g$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt*

$$\int f + g\, d\lambda \;=\; \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda \qquad \textit{Additivität.}$$

(2) *Es gilt*

$$f \le g \;\Rightarrow\; \int f\, d\lambda \le \int g\, d\lambda \qquad \textit{Monotonie.}$$

(3) *Die Funktion $|f|$ ist Lebesgue-integrierbar und es gilt die Ungleichung*

$$\left| \int f\, d\lambda \right| \;\le\; \int |f|\, d\lambda.$$

Für den Beweis von Satz 7.11 benötigen wir folgende zwei Lemmata.

[54] Warum ist das so? Genauer gesagt, warum ist die Funktionenfolge $\max\{f_{1k}, \ldots, f_{kk}\}$ aufsteigend, und warum konvergiert sie punktweise gegen g?

[55] Zur Erinnerung, $f + g$ ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert, wenn es kein $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass eine Funktion den Wert $-\infty$ und die andere Funktion den Wert ∞ annimmt.

Lemma 7.12. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann gilt* [56]

$$f \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \int |f|\, d\lambda < \infty.$$

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann gilt

$$f \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \quad \underset{\text{gilt per Definition}}{\Longleftrightarrow} \quad \int f_+\, d\lambda < \infty \text{ und } \int f_-\, d\lambda < \infty \quad \overset{\text{folgt aus Satz 7.10 und } |f| = f_- + f_+}{\underset{\text{folgt aus Satz 7.10 und } f_\pm \leq |f|}{\rightleftarrows}} \quad \int |f|\, d\lambda < \infty.$$

■

Lemma 7.13. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Wir nehmen an, dass es zwei nichtnegative messbare Funktionen $\varphi_1, \varphi_2\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gibt, so dass*

$$f \;=\; \varphi_1 - \varphi_2 \quad \textit{und} \int f_i\, d\lambda \;<\; \infty \;\; \textit{für } i = 1, 2.$$

Dann ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int f\, d\lambda \;=\; \int \varphi_1\, d\lambda - \int \varphi_2\, d\lambda.$$

Beweis. Aus $|f| \leq \varphi_1 + \varphi_2$ und der Voraussetzung folgt, dass $\int |f|\, d\lambda < \infty$, also ist f nach Lemma 7.12 Lebesgue-integrierbar. Zudem gilt, dass

$$\int f\, d\lambda \overset{\text{per Definition}}{=} \int f_+\, d\lambda - \int f_-\, d\lambda \underset{\text{hierbei folgt aus } \varphi_1 \geq f_+, \text{ dass } \int \varphi_1 - f_+\, d\lambda < \infty}{\overset{\text{Satz 7.10 angewandt auf die nichtnegativen Funktionen } f_\pm \text{ und } \varphi_1 - f_+}{=}} \int \underbrace{f_+ + \varphi_1 - f_+}_{=\varphi_1} d\lambda \;-\; \int \underbrace{f_- + \varphi_1 - f_+}_{=\varphi_2, \text{ nachdem } f_+ - f_- = \varphi_1 - \varphi_2} d\lambda \;=\; \int \varphi_1\, d\lambda - \int \varphi_2\, d\lambda.$$

■

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 7.11 zu.

Beweis von Satz 7.11. Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen.

(1a) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Für $c = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $c > 0$ folgt die Behauptung aus Satz 7.10 und aus $(cf)_+ = cf_+$ und $(cf)_- = cf_-$. Für $c < 0$ folgt die Behauptung aus Satz 7.10 und aus $(cf)_+ = cf_-$ und $(cf)_- = cf_+$.

(1b) Es folgt aus Lemma 7.13, dass

$$f + g \;=\; (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

Lebesgue-integrierbar ist. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \int f + g\, d\lambda &\underset{\text{Lemma 7.13}}{=} \int f_+ + g_+\, d\lambda \;-\; \int f_- + g_-\, d\lambda \\ &\underset{\text{Satz 7.10}}{=} \int f_+\, d\lambda + \int g_+\, d\lambda - \int f_-\, d\lambda - \int g_-\, d\lambda \underset{\text{per Definition}}{=} \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda. \end{aligned}$$

[56] Die Funktion $|f| = \max\{-f, f\}$ ist messbar nach Lemma 7.2.

(2) Aus $f \le g$ folgt, dass $f_+ \le g_+$ und $f_- \ge g_-$. Daraus folgt, dass

$$\int f\,d\lambda \;=\; \int f_+\,d\lambda - \int f_-\,d\lambda \;\underset{\uparrow}{\le}\; \int g_+\,d\lambda - \int g_-\,d\lambda \;=\; \int g\,d\lambda.$$

folgt aus der Monotonie, siehe Satz 7.10, des Lebesgue-Integrals von nichtnegativen Funktionen

(3) Wir hatten in Lemma 7.12 gesehen, dass die Funktion $|f|$ Lebesgue-integrierbar ist. Zudem folgt aus

$$-|f| \;\le\; f \;\le\; |f|$$

und der gerade bewiesenen Monotonie des Lebesgue-Integrals, dass

$$-\int |f|\,d\lambda \;\le\; \int f\,d\lambda \;\le\; \int |f|\,d\lambda.$$

Aber dies ist gerade die Ungleichung, welche wir beweisen wollten. ■

In Satz 7.11 hatten wir keinerlei Stetigkeitseigenschaften formuliert. Der folgende Satz von Levi ist nun ein erster solcher Stetigkeitssatz. Später werden noch mehr Sätze folgen.

Satz 7.14. (Satz von der monotonen Konvergenz von Levi) *Es sei $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Wir nehmen an, dass alle Lebesgue-Integrale durch ein $M \in \mathbb{R}$ beschränkt sind, d.h. dass es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\int f_k\,d\lambda \;\le\; M \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Grenzfunktion $f := \lim\limits_{k\to\infty} f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int f\,d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\lambda.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für eine absteigende Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

In dem Beweis, dass die Grenzfunktion Lebesgue-integrierbar ist, werden wir folgendes Lemma verwenden, welches auch später immer wieder eine Verwendung findet.

Lemma 7.15. *Für jede aufsteigende Folge von messbaren Funktionen f_k ist auch die Grenzfunktion f messbar.*

Beweis von Lemma 7.15. Das Lemma folgt aus der Beobachtung, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{f \le c\} \;=\; \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{f_k \le c\}}_{\text{messbar}},$$

und der Tatsache, dass der Durchschnitt von abzählbar vielen messbaren Mengen wieder messbar ist. ■

Beweis des Satzes von der monotonen Konvergenz von Levi.

Indem wir f_1 „überall abziehen" können wir den allgemeinen Fall auf den Fall von nichtnegativen Funktionen zurückführen. Im Fall von nichtnegativen Funktionen können wir dann Satz 7.10 verwenden.

Wir führen folgende Notation ein:

$$\text{für } k \in \mathbb{N} \text{ setzen wir } g_k \;:=\; f_k - f_1, \qquad \text{und wir setzen} \qquad g \;:=\; \lim_{k\to\infty} g_k \;=\; f - f_1.$$

Es folgt aus der Linearität des Lebesgue-Integrals, siehe Satz 7.11, dass es nun genügt die analoge Aussage für die g_k's und g zu beweisen.

Jetzt ist $\{g_k\}_{k\geq\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von *nichtnegativen* messbaren Funktionen. Nach Lemma 7.15 ist die Funktion $g = \lim\limits_{k\to\infty} g_k$ messbar. Es folgt also aus Satz 7.10, dass

$$\int g\,d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty}\int g_k\,d\lambda.$$

Wir müssen nun noch beweisen, dass g Lebesgue-integrierbar ist, d.h. wir müssen zeigen, dass $\int g\,d\lambda$ endlich ist. Dies folgt aus dem obigen Grenzwert und der Beobachtung, dass für alle k gilt

$$\int g_k\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linearität, siehe Satz 7.11}}}{=} \int f_k - f_1\,d\lambda \;=\; \underbrace{\int f_k\,d\lambda}_{\leq M} - \int f_1 d\lambda \;\leq\; M - \int f_1\,d\lambda.$$

■

7.6. **Lebesgue-Integral und Nullmengen.**

Satz 7.16. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\{x\in\mathbb{R}^n \,|\, f(x)\neq 0\} \text{ ist eine Nullmenge } \Leftrightarrow\; f \text{ ist Lebesgue-integrierbar mit } \int |f|\,d\lambda = 0.$$

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion.

Wir beweisen zuerst die„$\Rightarrow$" Richtung. Wenn $\{x\in\mathbb{R}^n \,|\, f(x)\neq 0\}$ eine Nullmenge ist, dann gilt die gleiche Aussage auch für f_- und f_+. Lemma 7.9 besagt, dass f_- und f_+ Lebesgue-integrierbar sind mit Lebesgue-Integral null. Es folgt nun aus der Definition des Lebesgue-Integral von f, dass f Lebesgue-integrierbar ist. Zudem ist

$$\int |f|\,d\lambda \;=\; \int f_+\,d\lambda + \int f_-\,d\lambda \;=\; 0.$$

Wir beweisen nun die„$\Leftarrow$" Richtung. Wir nehmen also an, dass f Lebesgue-integrierbar ist mit $\int |f|\,d\lambda = 0$. Wir setzen $S := \{x\in\mathbb{R}^n \,|\, f(x)\neq 0\}$. Dann ist

$$\operatorname{Vol}(S) \;=\; \int \chi_S\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 7.10,} \\ \text{denn } \min\{k\cdot|f|,\chi_S\}\,\uparrow\,\chi_S}}{=} \lim_{k\to\infty}\int \min\{k\cdot|f|,\chi_S\}\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \min\{k\cdot|f|,\chi_S\}\leq k\cdot|f|}}{\leq} \lim_{k\to\infty} k\cdot \underbrace{\int |f|\,d\lambda}_{=0} \;=\; 0.$$

■

Definition. Wir sagen, dass eine Aussage über eine oder mehrere Funktionen fast überall gilt, wenn die Aussage außerhalb einer Nullmenge wahr ist.

Beispiel.

(1) Lemma 7.16 besagt also, dass das Lebesgue-Integral einer messbaren Funktion, welche fast überall verschwindet, null ist.
(2) Wir sagen zwei Funktionen f und g stimmen fast überall überein, wenn

$$\{x\in\mathbb{R}^n \,|\, f(x)\neq g(x)\}$$

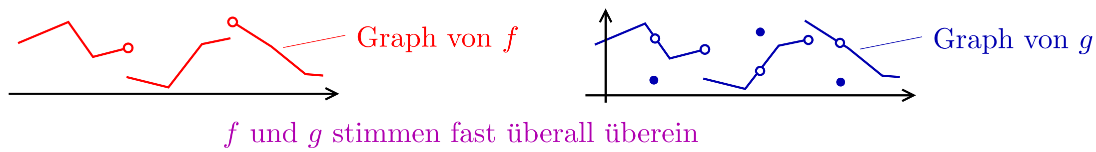
eine Nullmenge ist.

Satz 7.17. *Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei messbare Funktionen, welche fast überall übereinstimmen. Dann gilt*

$$f \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \iff g \text{ ist Lebesgue-integrierbar.}$$

Wenn die Funktionen Lebesgue-integrierbar sind, dann gilt zudem, dass

$$\int f\,d\lambda = \int g\,d\lambda.$$



Beweis. Da f und g messbar sind, ist auch $f-g$ messbar. Außerdem gilt, dass f und g fast überall übereinstimmen, also ist $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) - g(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge. Also folgt aus Satz 7.16 zusammen mit Satz 7.11, dass $f-g$ Lebesgue-integrierbar ist mit $\int f - g\,d\lambda = 0$. Der Satz folgt nun aus Satz 7.11 (1b), also aus der Additivität des Lebesgue-Integrals. ■

Wir erlauben durchgehend Funktionen, welche auch die Werte $\pm\infty$ annehmen. Das folgende Lemma besagt nun aber, dass eine Lebesgue-integrierbare Funktion fast überall endlich ist.

Satz 7.18. *Eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist fast überall endlich, d.h.*

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) = -\infty \text{ oder } f(x) = \infty\right\}$$

ist eine Nullmenge.

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Wir setzen

$$S := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) = -\infty \text{ oder } f(x) = \infty\right\}.$$

In (Präsenz-) Übungsblatt 13 zeigen wir, dass S messbar ist. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt zudem, dass

$$k \cdot \mathrm{Vol}(S) = \int k \cdot \chi_S\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Monotonie}}}{\leq} \int |f|\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 7.12}}}{<} \infty.$$

Also folgt, dass $\mathrm{Vol}(S) = 0$. ■

7.7. **Integration über Teilmengen.** Im Folgenden erweitern wir etwas den Begriff des Lebesgue-Integral.

Definition.

(1) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion und es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge. Wir sagen f ist über A Lebesgue-integrierbar, wenn die Funktion $\chi_A \cdot f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. Wenn dies der Fall ist, dann bezeichnen wir

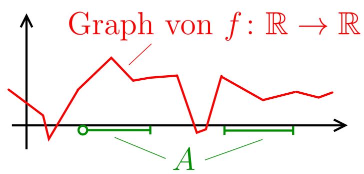
$$\int_A f\,d\lambda := \int \chi_A \cdot f\,d\lambda$$

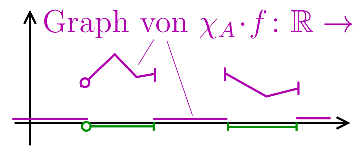
als das Lebesgue-Integral von f über A.

(2) Es sei $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion auf einer messbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir setzen diese zu einer Funktion $\widetilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ fort, indem wir $\widetilde{f}(x) = 0$ für $x \notin A$ setzen. Wir sagen f ist Lebesgue-integrierbar, wenn $\widetilde{f}$ Lebesgue-integrierbar ist. Wenn dies der Fall ist, dann bezeichnen wir

$$\int_A f \, d\lambda \ := \ \int \widetilde{f} \, d\lambda$$

als das Lebesgue-Integral von f.





Es gelten die offensichtlichen Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnisse von Lebesgue-Integralen auf $\mathbb{R}^n$ zu diesen beiden Erweiterungen. Beispielsweise ist das Lebesgue-Integral über eine Teilmenge A additiv und monoton.

Lemma 7.19. *Es sei X eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, es sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und es sei $X = A \cup B$ eine Zerlegung von X in zwei messbare Mengen A und B, so dass $A \cap B$ eine Nullmenge ist. Dann gilt*

$$f \text{ ist Lebesgue-integrierbar auf } A \cup B \iff f \text{ ist Lebesgue-integrierbar auf } A \text{ und auf } B.$$

Wenn die Funktion auf $A \cup B$ Lebesgue-integrierbar ist, dann gilt auch, dass

$$\int_{A \cup B} f \, d\lambda \quad = \quad \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda.$$

Beispiel. Es sei $f\colon [r,t] \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion auf einem Intervall $[r,t]$. Für jedes $s \in [r,t]$ folgt aus Lemma 7.19, angewandt auf $A = [r,s]$ und $B = [s,t]$ und die Nullmenge $A \cap B = \{s\}$, dass

$$\int_{[r,t]} f \, d\lambda \ = \ \int_{[r,s]} f \, d\lambda + \int_{[s,t]} f \, d\lambda,$$

wobei die linke Seite definiert ist genau dann, wenn die rechte Seite definiert ist.

Beweis $(*)$**.** Wir schreiben $a := f \cdot \chi_A$, $b := f \cdot \chi_B$ und $c := f \cdot \chi_{A \cap B}$. Wir machen folgende Beobachtungen:

(1) Es gilt $f = a + b - c$.
(2) Es gilt $f_+ = a_+ + b_+ - c_+$ und $f_- = a_- + b_- - c_-$.
(3) Da $A \cap B$ eine Nullmenge ist folgt aus Lemma 7.9, dass $\int c_\pm \, d\lambda = 0$.

Aus Satz 7.10 und den obigen Beobachtungen folgt, dass

$$\int f_\pm \, d\lambda \ = \ \int a_\pm \, d\lambda + \int b_\pm \, d\lambda.$$

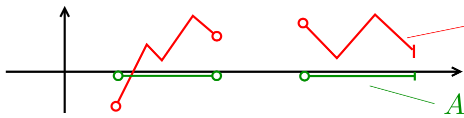
Da alle Integrale ≥ 0 gilt nun, dass

$$\int f_\pm \, d\lambda < \infty \iff \int a_\pm \, d\lambda < \infty \text{ und } \int b_\pm \, d\lambda < \infty.$$

Per Definition der Lebesgue-Integrierbarkeit auf Teilmengen folgt nun die gewünschte Aussage. ■

Der folgende Satz gibt nun ein oft hilfreiches Kriterium für Lebesgue-Integrierbarkeit.

Satz 7.20. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte messbare Teilmenge. Dann ist jede beschränkte stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar.*



Beispiel. Nach [**Fr2**, Korollar 3.10] ist jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge beschränkt. Es folgt also Satz 7.20, dass jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar ist.

Beweis. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte messbare Teilmenge und es sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Wir setzen f wiederum zu einer Funktion $\widetilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ fort, indem wir $\widetilde{f}(x) = 0$ für $x \notin A$ setzen.

Behauptung. Die Funktion $\widetilde{f}$ ist messbar.

Nach Lemma 7.1 müssen wir zeigen, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{\widetilde{f} < c\} \;:=\; \widetilde{f}^{-1}((-\infty, c))$$

messbar ist. Es sei also $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $c \leq 0$. In diesem Fall ist

$$\{\widetilde{f} < c\} \;=\; \widetilde{f}^{-1}((-\infty, c)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } c \leq 0}}{=} f^{-1}((-\infty, c)).$$

Die Teilmenge $(-\infty, c) \subset \mathbb{R}$ ist offen und die Funktion f ist nach Voraussetzung stetig. Dies bedeutet, dass $f^{-1}((-\infty, c))$ eine offene Teilmenge von A ist. Es folgt aus Lemma 7.1, dass es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f^{-1}((-\infty, c)) = U \cap A$. In Satz 4.2 hatten wir gezeigt, dass offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ messbar sind. Also ist auch $U \cap A$, als Durchschnitt von zwei messbaren Mengen, wiederum messbar.

Wir betrachten nun den Fall, dass $c > 0$. In diesem Fall ist

$$\{\widetilde{f} < c\} \;=\; \widetilde{f}^{-1}((-\infty, c)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } c > 0}}{=} f^{-1}((-\infty, c)) \;\cup\; \mathbb{R}^n \setminus A.$$

Das gleiche Argument wie oben zeigt, dass $f^{-1}((-\infty, c))$ messbar ist. Zudem ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ messbar, also ist auch $\{\widetilde{f} < c\}$ messbar. ⊞

Nach Lemma 7.12 genügt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.
$$\int |\widetilde{f}|\, d\lambda \;<\; \infty.$$

Nach Voraussetzung ist f beschränkt. Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|\widetilde{f}(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Es folgt nun, dass

$$\int |\widetilde{f}|\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } |f| \leq C \cdot \chi_A}}{\leq} \int C \cdot \chi_A \, d\lambda \;=\; C \cdot \mathrm{Vol}_n(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } A \text{ ist nach Voraussetzung beschränkt}}}{<} \infty.$$

■

Wir haben in diesem Kapitel das Lebesgue-Integral eingeführt und einige theoretische Aussagen bewiesen. Aber wir haben noch keinen rechten Anhaltspunkt, wie wir denn das Lebesgue-Integral in der Praxis berechnen können. Wir werden nun im Folgenden verschiedene Berechnungsmethoden kennenlernen.

8. Der Zusammenhang zwischen dem Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral

8.1. **Definition und Eigenschaften des Riemann-Integral.** Wir erinnern in diesem Kapitel an die Definition des Riemann-Integral und an einige Eigenschaften, welche wir in Analysis I bewiesen hatten.

Definition. Es sei nun $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Eine Zerlegung Z von $[a,b]$ ist eine Menge $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ von reellen Zahlen, so dass

$$a = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < z_n = b.$$

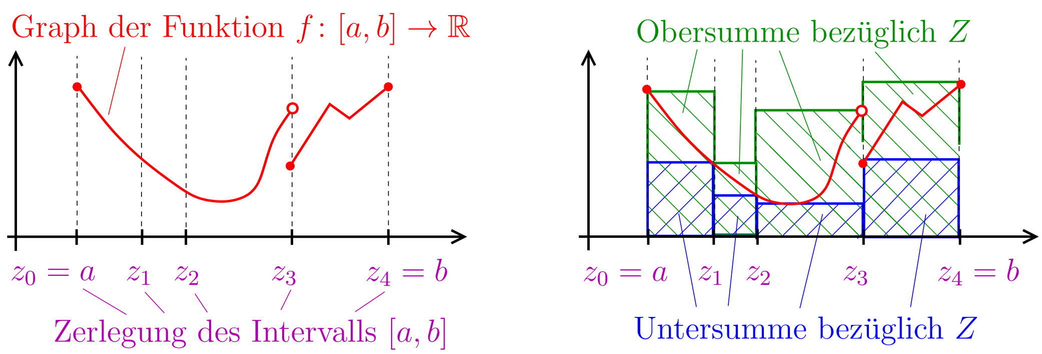
Sei nun $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$O(f,Z) \;:=\; \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \sup f([z_k, z_{k+1}])$$

die Obersumme von f bezüglich der Zerlegung Z und

$$U(f,Z) \;:=\; \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \inf f([z_k, z_{k+1}])$$

heißt die Untersumme von f bezüglich der Zerlegung Z.



Definition. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\sup\{U(f,Z)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \;=\; \inf\{O(f,Z)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}.$$

Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \inf\{O(f,Z)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

das Riemann-Integral über f von a nach b.

Beispiel. In [**Fr1**, Satz 15.10] hatten wir gezeigt, dass alle stetigen Funktionen Riemann-integrierbar sind.

Das folgende Beispiel gibt den Beweis, für die schon mehrmals erwähnte Aussage, dass es beschränkte Funktionen gibt, welche nicht Riemann-integrierbar sind.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \cap [0,3] \\ 2, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt für jede Zerlegung $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$ von $[a,b]$, dass

$$\begin{aligned} O(f,Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \underbrace{\sup f([z_k, z_{k+1}])}_{\substack{=2, \text{ weil } [z_k, z_{k+1}] \\ \text{irrationale Zahlen enthält}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot 2 = 3 \cdot 2 \\ U(f,Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \underbrace{\inf f([z_k, z_{k+1}])}_{\substack{=0, \text{ weil } [z_k, z_{k+1}] \\ \text{rationale Zahlen enthält}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist also nicht Riemann-integrierbar.

Der folgende Satz gibt uns nun ein brauchbares Kriterium für die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion.

Satz 8.1. *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es eine aufsteigende Folge von Zerlegungen $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots$ von $[a,b]$ gibt, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} O(f, Z_n).$$

Zudem, wenn es eine solche Folge von Zerlegungen gibt, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} O(f, Z_n).$$

Beweis. Der Satz folgt leicht aus Lemma 15.1 und Satz 15.2 aus der Analysis I [**Fr1**]. ■

8.2. **Der Zusammenhang zwischen dem Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral.** Für Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall haben wir nun zwei Integralbegriffe:

(1) In Analysis I hatten wir den Begriff Riemann-integrierbar eingeführt, und im Falle der Riemann-Integrierbarkeit, das

$$\text{Riemann-Integral} \quad \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)\,dx \quad \text{definiert.}$$

(2) Wir haben im vorherigen Kapitel den Begriff Lebesgue-integrierbar eingeführt, und im Falle der Lebesgue-Integrierbarkeit, das

$$\text{Lebesgue-Integral} \quad \int_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]} f\,d\lambda \quad \text{definiert.}$$

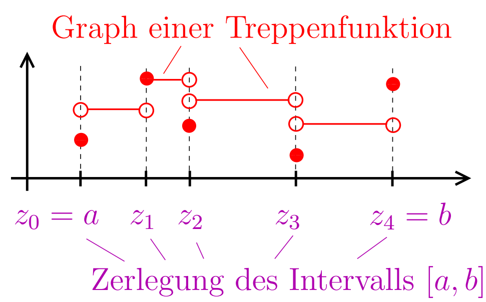
Wie schon mehrmals erwähnt sind diese beiden Integralbegriffe im Allgemeinen verschieden. Betrachten wir beispielsweise die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}\cap[0,1], \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir hatten gerade gesehen, dass f nicht Riemann-integrierbar ist. Andererseits hatten wir auf Seite 192 gezeigt, dass f Lebesgue-integrierbar ist mit Lebesgue-Integral 0.

Wir wollen im Folgenden den Zusammenhang zwischen dem Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral untersuchen. Dazu ist es hilfreich folgende Definition einzuführen.

Definition. Wir sagen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass f auf allen offenen Intervallen (z_i, z_{i+1}) konstant ist.[57]



Bemerkung.

(1) Jede Treppenfunktion ist eine Stufenfunktion. In der Tat, denn sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, d.h. es gibt eine Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ von $[a,b]$, so dass f auf allen offenen Intervallen (z_i, z_{i+1}) konstant ist. Die Treppenfunktion f ist also eine Linearkombination von charakteristischen Funktionen über den offenen Intervallen (z_i, z_{i+1}) und den Punkten $z_0, \dots, z_n$. Insbesondere ist die Treppenfunktion f eine Stufenfunktion.

(2) Andererseits ist nicht jede Stufenfunktion eine Treppenfunktion. Beispielsweise ist für $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ die charakteristische Funktion χ_A eine Stufenfunktion, aber keine Treppenfunktion.

Satz 8.2. *Für jede Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es eine aufsteigende Folge φ_n von Treppenfunktionen und eine absteigende Folge ψ_n von Treppenfunktionen, so dass $\varphi_n \le f \le \psi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx.$$

[57]Die Treppenfunktion kann auf den Punkten $z_0, \dots, z_n$ beliebige Werte annehmen.

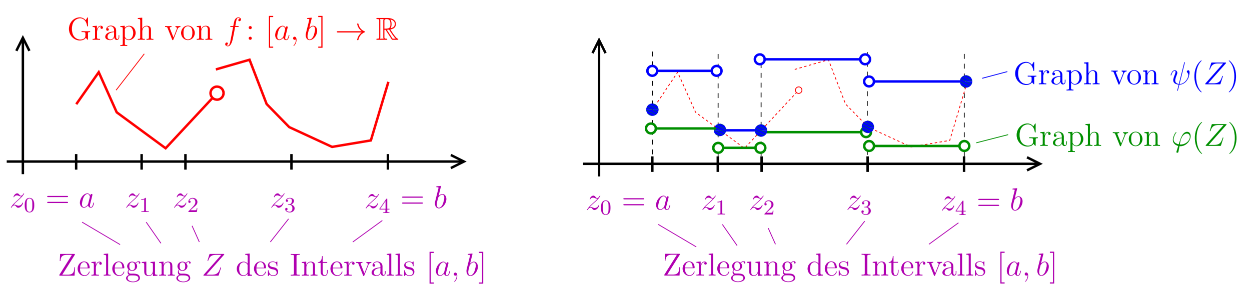
Beweis. Es sei also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für eine beliebige Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ von $[a,b]$ definieren wir

$$\begin{aligned} \psi(Z)\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in Z, \\ \sup\{f([z_k, z_{k+1}])\}, & \text{wenn } x \in (z_k, z_{k+1}) \end{cases} \end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned} \varphi(Z)\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in Z, \\ \inf\{f([z_k, z_{k+1}])\}, & \text{wenn } x \in (z_k, z_{k+1}). \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann folgende Aussagen leicht verifizieren:

(a) $\varphi(Z)$ und $\psi(Z)$ sind Treppenfunktionen,
(b) es ist $\varphi(Z) \le f \le \psi(Z)$,
(c) für Zerlegungen $Z \subset Z'$ gilt $\varphi(Z) \le \varphi(Z')$ und $\psi(Z') \le \psi(Z)$,
(d) es ist
$$\int_a^b \varphi(Z)(x)\,dx \;=\; U(f,Z) \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(Z)(x)\,dx \;=\; O(f,Z).$$



Nach Satz 8.1 existiert eine aufsteigende Folge von Zerlegungen $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots$ von $[a,b]$, so dass
$$\lim_{n\to\infty} U(f,Z_n) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} O(f,Z_n).$$
Nach (a) und (c) ist $\varphi_n := \varphi(Z_n)$ eine aufsteigende Folge von Treppenfunktionen und zudem ist $\psi_n := \psi(Z_n)$ eine absteigende Folge von Treppenfunktionen. Außerdem besagt (b), dass $\varphi_n \le f \le \psi_n$. Zudem folgt aus der Wahl der Zerlegungen Z_n und aus (d), dass
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Der folgende Satz besagt nun, dass jede Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. Der Begriff des Lebesgue-Integral beinhaltet also das Riemann-Integral, erweitert den Integralbegriff jedoch auf weitere Funktionen auf $\mathbb{R}$ und auch auf den mehrdimensionalen Fall.

Satz 8.3. *Jede Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Riemann-Integral}} = \underbrace{\int_{[a,b]} f\,d\lambda}_{\text{Lebesgue-Integral}}.$$

Beweis. Wir beginnen mit folgender Vorbemerkung:

($*$) Es folgt leicht aus den Definitionen, dass für eine Treppenfunktion das Riemann-Integral mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt.

Wir schreiten jetzt zum eigentlichen Beweis.

Wir wollen nun den allgemeinen Fall mithilfe von Satz 8.2 auf die Vorbemerkung ($*$) zurückführen.

Es sei also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Es folgt aus Satz 8.2 und der Vorbemerkung ($*$), dass es eine aufsteigende Folge φ_n von Treppenfunktionen und eine absteigende Folge ψ_n von Treppenfunktionen gibt, so dass $\varphi_n \le f \le \psi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n\,d\lambda \overset{\text{(i)}}{=} \int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n\,d\lambda.$$

Wir setzen $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ und $\psi = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$. Es folgt aus (i) und (iii), dass wir den Satz 7.14 von der monotonen Konvergenz von Levi anwenden können. Wir erhalten, dass φ und ψ Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{[a,b]} \varphi\,d\lambda \overset{\text{(iii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n\,d\lambda \quad \text{und} \quad \int_{[a,b]} \psi\,d\lambda \overset{\text{(iv)}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n\,d\lambda.$$

Behauptung. Die Funktionen φ und f stimmen fast überall überein.[58]

Es gilt

$$\int_{[a,b]} |\varphi - f|\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus } \varphi \le f \le \psi}}{\le} \int_{[a,b]} |\psi - \varphi|\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } \psi - \varphi \ge 0}}{=} \int_{[a,b]} \psi - \varphi\,d\lambda = \int_{[a,b]} \psi\,d\lambda - \int_{[a,b]} \varphi\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus (i)-(iv)}}}{=} 0.$$

Aus Satz 7.16 folgt, dass φ und f fast überall übereinstimmen. ⊞

Da φ Lebesgue-integrierbar ist folgt nun aus der Behauptung und aus Satz 7.17, dass auch f Lebesgue-integrierbar ist mit

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} \varphi\,d\lambda \overset{\text{(i),(iii)}}{=} \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

[58] Im Allgemeinen müssen φ, ψ und f nicht überall übereinstimmen. Wir betrachten z.B. die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \ne 0, \\ 1, & \text{wenn } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

und die Folge von Zerlegungen $Z_n = \{-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1\}$. In der Notation des Beweises von Satz 8.2 setzen wir $\varphi_n = \varphi(Z_n)$ und $\psi_n = \psi(Z_n)$. Dann sieht man leicht, dass $\varphi_n(0) = 0$ für alle n, aber $\psi_n(0) = 1$ für alle n. Darüber hinaus ist φ die Nullfunktion, aber $\psi = f$ ist nicht die Nullfunktion. D.h. φ und $\psi = f$ stimmen nur außerhalb der Nullmenge $\{0\}$ überein.

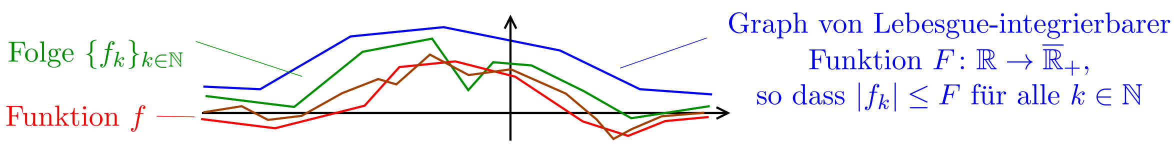
8.3. **Der Satz von der majorisierten Konvergenz.** Wir möchten als nächstes Satz 8.3 zu uneigentlichen Integralen erweitern. Beispielsweise möchten wir zeigen, dass für eine nichtnegative Riemann-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{\substack{\text{uneigentliches}\\ \text{Riemann-Integral}}} \quad = \quad \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} f\,d\lambda}_{\text{Lebesgue-Integral}}.$$

Um diese Aussage zu beweisen benötigen wir mehrere Vorbereitungen. Insbesondere werden wir folgenden wichtigen Satz verwenden.

Satz 8.4. (Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue) *Es sei im Folgenden $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$ eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen, welche punktweise fast überall gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiert.*[59] *Wenn es eine Lebesgue-integrierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gibt, so dass $|f_k| \leq F$ für alle $k \geq 1$, dann ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int f\,d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\lambda.$$



Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass f_k überall punktweise gegen f konvergiert.

Die Idee ist durch geschickt gewählte Hilfsfolgen den Satz auf den Satz 7.14 von der monotonen Konvergenz zurückzuführen. Insbesondere müssen wir aus der Folge f_k, welche nicht notwendigerweise monoton ist, Funktionenfolgen„basteln", welche monoton sind.

Behauptung. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\varphi_k \;:=\; \sup\{f_i \,|\, i \geq k\} \;=\; \sup\{f_k, f_{k+1}, \dots\}.$$

Dann gilt

(1) es ist $\varphi_k \downarrow f$,
(2) jede Funktion φ_k ist Lebesgue-integrierbar,
(3) die Funktion f ist Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\text{(a)} \qquad \int f\,d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\,d\lambda.$$

Wir wenden uns dem Beweis der Behauptung zu.

(1) Es ist ziemlich leicht zu sehen, dass $\varphi_k \downarrow f$.
(2) Wir wollen mithilfe des Satzes 7.14 von der monotonen Konvergenz zeigen, dass φ_k Lebesgue-integrierbar ist. Für $j \geq k$ setzen wir dazu

[59] Im Unterschied zum Satz 7.14 von der monotonen Konvergenz von Levi setzen wir nicht voraus, dass die Folge monoton ist.

$$\varphi_{kj} \;:=\; \max\{f_k, f_{k+1}, \dots, f_j\}, \text{ wobei } j \geq k.$$

Dies ist eine monoton steigende Funktionenfolge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen[60] mit $\varphi_{kj} \uparrow \varphi_k$. Zudem gilt für alle $j \geq k$, dass

$$\int \varphi_{kj}\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } \varphi_{kj} \leq \max\{|f_k|,\dots,|f_j|\} \leq F}}{\leq} \int F\, d\lambda \;=:\; M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } F \text{ Lebesgue-integrierbar}}}{\in} \mathbb{R}.$$

Also ist nach dem Satz 7.14 von der monotonen Konvergenz die Funktion φ_k Lebesgue-integrierbar.

(3) Nachdem $\varphi_k \downarrow f$ und nachdem

$$\int \varphi_k\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } \varphi_{kj} \geq \max\{-|f_k|, -|f_{k+1}|, \dots\} \geq -F}}{\geq} \int -F\, d\lambda \;=\; -M \;\in\; \mathbb{R}$$

kann man wiederum den Satz 7.14 von der monotonen Konvergenz anwenden und wir erhalten die dritte Aussage. ⊞

Ganz analog setzen wir nun

$$\psi_k \;:=\; \inf\{f_i \,|\, i \geq k\} \;=\; \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\}.$$

Wie oben zeigt man nun, dass die Funktionen ψ_k Lebesgue-integrierbar sind, und dass

$$\text{(b)} \qquad \int f\, d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty} \int \psi_k\, d\lambda.$$

Nun folgt das

$$\int f\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (b)}}}{=} \lim_{k\to\infty} \int \psi_k\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } \psi_k \,\leq\, f_k \,\leq\, \varphi_k}}{\leq} \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\lambda \underset{\uparrow}{\leq} \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (a)}}}{=} \int f\, d\lambda.$$

Wir haben also die gewünschte Gleichheit gezeigt. Wir haben damit den Satz bewiesen, in dem Spezialfall, dass die Folge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ überall punktweise gegen f konvergiert.

Wir betrachten nun noch den allgemeinen Fall. Nach Voraussetzung gibt es eine Nullmenge N, so dass

$$f(x) \;=\; \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus N.$$

Dann gilt

$$\underbrace{\chi_{\mathbb{R}^n\setminus N} \cdot f(x)}_{=:g(x)} \;=\; \lim_{k\to\infty} \underbrace{\chi_{\mathbb{R}^n\setminus N} \cdot f_k(x)}_{=:g_k(x)} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir können nun also den vorherigen Spezialfall auf die Folge $\{g_k\}_{k\geq\mathbb{N}}$ anwenden. Nachdem die Funktionen f_k und g_k sowie f und g fast überall gleich sind, folgt die Aussage dann aus Satz 7.17. ■

[60] Hierbei verwenden wir, dass für Lebesgue-integrierbare Funktionen f, g auch die Funktion $\max\{f, g\}$ Lebesgue-integrierbar ist. Dies wiederum folgt leicht aus Lemma 7.2 und Lemma 7.12.

Im nächsten Kapitel werden wir das Lebesgue-Integral dann endlich mit dem uneigentlichen Riemann-Integral vergleichen. Hierbei werden wir ein wichtiges Korollar zum Satz von der majorisierten Konvergenz verwenden. Um dieses Korollar zu formulieren benötigen wir noch eine Definition.

Definition. Eine messbare Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ ist eine aufsteigende Folge von messbaren Teilmengen $\{A_m\}_{m\geq 1}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $A_m \uparrow \mathbb{R}^n$.

Beispiel.
(1) Die Intervalle $[-m, m]$ mit $m \geq 1$ bilden eine messbare Ausschöpfung von $\mathbb{R}$.
(2) Allgemeiner bilden die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}_m(0)$ mit $m \geq 1$ eine messbare Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$.

Wir können nun den Ausschöpfungssatz formulieren.

Satz 8.5. (Ausschöpfungssatz) *Es sei $\{A_m\}_{m\geq 1}$ eine messbare Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ und es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, welche über jedes A_m Lebesgue-integrierbar ist. Wenn*

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{A_m} |f|\, d\lambda \;<\; \infty$$

dann ist auch f auf $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int f\, d\lambda \;=\; \lim_{m\to\infty} \int\limits_{A_m} f\, d\lambda.$$

Beweis. Wir setzen

$$f_m \;:=\; \chi_{A_m}\cdot f.$$

Aus $A_m \uparrow \mathbb{R}^n$ folgt

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) \;=\; f(x) \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R}^n.$$

Der Ausschöpfungssatz folgt nun aus den Definitionen, dem Satz 8.4 von der majorisierten Konvergenz und der folgenden Behauptung.

Behauptung. Wir setzen $F := |f|$. Dann gilt:
(1) $|f_m| \leq F$ für alle m,
(2) F ist Lebesgue-integrierbar.

Die erste Aussage folgt aus $|f_m| = |\chi_{A_m}\cdot f| \leq |f|$. Wir wenden uns der zweiten Aussage zu. Aus $A_m \uparrow \mathbb{R}^n$ folgt $|f_m| \uparrow F$. Da die Folge der Integrale

$$\int |f_m|\, d\lambda \;=\; \int\limits_{A_m} |f|\, d\lambda$$

nach Voraussetzung beschränkt ist folgt aus dem Satz 7.14 von der monotonen Konvergenz, dass F Lebesgue-integrierbar ist. ∎

8.4. **Das uneigentliche Riemann-Integral.** Wir erinnern zuerst an das uneigentliche Riemann-Integral, welches wir in Analysis I eingeführt hatten.

Definition. Es sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a\in\mathbb{R}$ und $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, so dass für jedes $a \leq d < b$ das Riemann-Integral $\int_a^d f(x)\,dx$ existiert. Das uneigentliche Integral von f auf $[a,b)$ ist definiert als

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \lim_{d \nearrow b} \int_a^d f(x)\,dx,$$

wenn der Grenzwert auf der rechten Seite existiert oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert. Ganz analog definiert man das uneigentliche Riemann-Integral auf einem halboffenen Intervall $(a, b]$.

Definition. Es sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass für ein $c \in (a, b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^{\mathbf{c}} f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ existieren oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergieren. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

wenn die rechte Seite definiert ist. Wir nennen dann $\int_a^b f(x)\,dx$ das uneigentliche Riemann-Integral von f auf (a, b).

Satz 8.6. *Es sei $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige*[61] *Funktion, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ gegen eine reelle Zahl konvergiert, dann ist f auf $[a, b)$ Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\underbrace{\int_{[a,b)} f\,d\lambda}_{\text{Lebesgue-Integral}} \quad = \quad \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx.}_{\text{uneigentliches Riemann-Integral}}$$

Es gelten die offensichtlichen analogen Aussagen für Funktionen auf $(a, b]$ und (a, b).

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $b = \infty$. Dann gilt

$$\int_{[a,\infty)} f\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ausschöpfungssatz 8.5 angewandt auf } A_m = [a,m],\\ \text{diesen kann man anwenden, da das uneigentliche}\\ \text{Riemann-Integral } \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ endlich ist}}}{=} \lim_{m\to\infty} \int_{[a,m]} f\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 8.3}}}{=} \lim_{m\to\infty} \int_a^m f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition des uneigentlichen}\\ \text{Riemann-Integrals}}}{=} \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Der Fall $b \in \mathbb{R}$ wird ganz ähnlich behandelt, in diesem Fall verwenden wir die Ausschöpfung, welche gegeben ist durch die Intervalle $[a, b - \frac{1}{m}]$. ■

Bemerkung. Satz 8.6 gilt nur unter der Voraussetzung, dass das uneigentliche Integral über den Absolutbetrag von f existiert, d.h. wenn

$$\int_a^b |f|\,dx$$

[61] Die Voraussetzung„stetig” führt dazu, dass wir uns um die Existenz der Riemann-Integrale auf kompakten Intervallen keine Gedanken machen müssen.

existiert. Auf [**Fo3**, Seite 59] wird gezeigt, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \quad < \quad \infty$$

existiert. Andererseits divergiert das uneigentliche Riemann-Integral über den Absolutbetrag, d.h. es ist

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \quad = \quad \infty.$$

Die Voraussetzung von Satz 8.6 ist also *nicht* erfüllt. Und in der Tat existiert das Lebesgue-Integral von f über $(0, \infty)$ *nicht*. Das folgt aus der Tatsache, dass nach Satz 7.11 (3) der Absolutbetrag einer Lebesgue-integrierbaren Funktionen wiederum Lebesgue-Integrierbar ist. Aber dies ist bei dieser Funktion nicht der Fall. Die Details zu diesem Argument kann man auf [**Fo3**, Seite 59] nachlesen.

9. Das Cavalierische Prinzip und der Satz von Fubini

Wir haben jetzt also gesehen, dass für viele Funktionen auf $\mathbb{R}$, z.B. für alle stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall, dass Lebesgue-Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt. Dies erlaubt es uns insbesondere die Rechenmethoden aus der Analysis I anzuwenden, um viele Lebesgue-Integrale im eindimensionalen Fall zu bestimmen. In diesem Kapitel wollen wir nun viele Lebesgue-Integrale im Mehrdimensionalen mithilfe von mehreren Riemann-Integralen in einer Variable bestimmen.

In diesem Kapitel werden wir öfters eine„suggestive Notation" für Lebesgue-Integrale verwenden. Genauer gesagt, für eine Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R}^n & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ z & \mapsto & g(z) \end{array}$$

schreiben wir desöfteren

$$\int\limits_{z\in\mathbb{R}^n} g(z)\,dz \;:=\; \int g\,d\lambda.$$

Vom Kontext her sollte eigentlich immer klar sein, was gemeint ist.

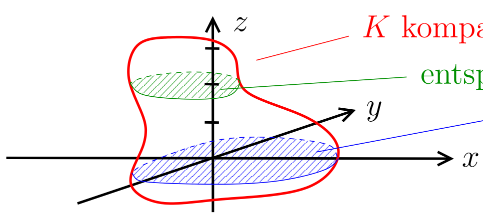
9.1. **Das Cavalierische Prinzip.** Das Cavalierische Prinzip, welches eventuell aus der Schule bekannt ist, besagt insbesondere, dass wir das Volumen von 3-dimensionalen Körpern aus den Flächeninhalten von 2-dimensionalen Schnittflächen bestimmen können. Der folgende Satz ist nun eine allgemeinere Version des Cavalierischen Prinzips, welcher beliebige kompakte Teilmengen in $\mathbb{R}^n$ behandelt.

Satz 9.1. (Cavalierisches Prinzip) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Für $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $K(t)$ die Menge*

$$K(t) \;:=\; \big\{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \,\big|\, (x_1,\dots,x_{n-1},t) \in K\big\}.$$

Dann gilt[62][63]

$$\mathrm{Vol}_n(K) \;=\; \int\limits_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K(t))\,dt.$$



Beispiel. Es folgt insbesondere aus dem Cavalierischen Prinzip 9.1, dass wenn K und L zwei kompakte Mengen in $\mathbb{R}^3$ sind, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen $K(t)$ und $L(t)$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, dann besitzen K und L das gleiche Volumen. Beispielsweise folgt daraus, dass für alle kompakten Teilmengen $F \subset \mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ und alle Punkte $Q \in \mathbb{R}^3$

---

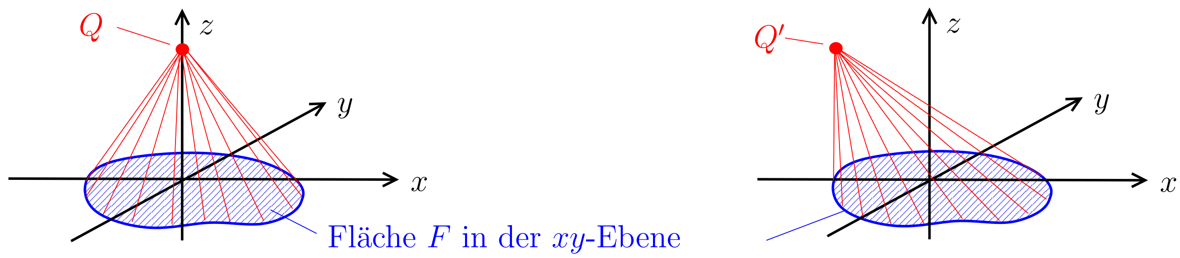
[62] Insbesondere machen wir hier implizit die Aussage, dass die Funktion $t \mapsto \mathrm{Vol}_{n-1}(K(t))$ Lebesgue-integrierbar ist.

[63] Der Satz von Heine-Borel besagt, dass eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ kompakt ist, genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. Insbesondere ist jede kompakte Menge messbar mit endlichem Volumen.

das Volumen des Kegel

$$\{t \cdot P + (1-t) \cdot Q \,|\, P \in F \text{ und } t \in [0,1]\}$$

nur von der z–Koordinate von Q abhängt.



die beiden Kegel besitzen das gleichen Volumen,
weil die z-Koordinaten von Q und Q' übereinstimmen

Das Cavalierische Prinzip folgt aus Folgendem, etwas allgemeineren Satz.

Satz 9.2. (Verallgemeinertes Cavalierisches Prinzip) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^{k+m} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ eine messbare Teilmenge.*

(1) *Für $y \in \mathbb{R}^m$ ist Menge*
$$A(y) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^k \,|\, (x,y) \in A\}$$
eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^k$.

(2) *Die Funktion*
$$\begin{aligned} F_A \colon \mathbb{R}^m &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ y &\mapsto F_A(y) := \mathrm{Vol}_k(A(y)) \end{aligned}$$
ist eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^m$.

(3) *Es ist*
$$\mathrm{Vol}_{k+m}(A) \;=\; \int\limits_{y \in \mathbb{R}^m} \underbrace{\mathrm{Vol}_k(A(y))}_{=F_A(y)}\, dy \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Beweis.

Es ist elementar zu überprüfen, dass die Aussage für halboffene Quader gilt. Alle messbaren Mengen können nun aus halboffenen Quadern durch verschiedene Operationen (Vereinigungen, Komplementbildung etc.) gebildet werden. Wir müssen also nur zeigen, dass sich die Aussagen mit diesen Operationen vertragen.

Wir setzen $n = k + m$. Für $X \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\mathcal{M}(X) \;:=\; \{A \subset X \,|\, A \text{ ist messbar und die Aussagen (1), (2) und (3) gelten}\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\sigma}$. Für $s \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Quader

$$X_s \;:=\; [-s, s)^n.$$

Der Beweis besteht aus zwei Teilen.

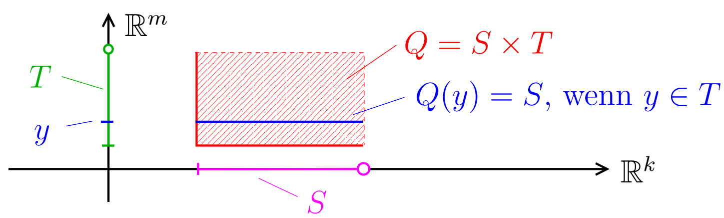
(i) Es sei $s \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Aussage zuerst für alle messbaren Teilmengen von X_s. Wir wollen also zeigen, dass $\mathcal{M}(X_s) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$. Wir machen hierzu folgende Beobachtungen.

(a) Jeder halboffene Quader $Q \subset X_s$ liegt in $\mathcal{M}(X_s)$. In der Tat, denn wir können schreiben $Q = S \times T$, wobei $S \subset \mathbb{R}^k$ und $T \subset \mathbb{R}^m$ halboffene Quader sind. Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$Q(y) \;=\; \begin{cases} S, & \text{wenn } y \in T, \\ \varnothing, & \text{wenn } y \notin T. \end{cases}$$

Es folgt, dass $F_Q = \mathrm{Vol}_k(S) \cdot \chi_T$, also ist die Funktion F_S messbar. Zudem gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} F_Q(y)\,dy \;=\; \mathrm{Vol}_k(S) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_T(y)\,dy \;=\; \mathrm{Vol}_k(S) \cdot \mathrm{Vol}_m(T) \;\underset{\substack{\text{folgt aus der Definition des}\\ \text{Volumens von halboffenen Quadern}}}{=}\; \mathrm{Vol}_n(Q).$$



(b) Wenn A, B disjunkte Teilmengen von X_s sind, welche in $\mathcal{M}(X_s)$ liegen, dann sieht man leicht, dass auch $A \sqcup B$ in $\mathcal{M}(X_s)$ liegt. Jedes $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$ ist nach Lemma 2.7 die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern. Es folgt nun aus der obigen Bemerkung und aus (a), dass auch $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \subset \mathcal{M}(X_s)$.

(c) Es sei $A \in \mathcal{M}(X_s)$. Da X_s ein halboffener Quader ist, liegt X_s selber auch in $\mathcal{M}(X_s)$. Aus $X_s = A \sqcup A^{\mathbf{c}}$ folgt leicht, wie zu Beginn des Arguments in (b), dass auch $A^{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}(X_s)$.

(d) Es sei nun $A_i, i \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge von Mengen in $\mathcal{M}(X_s)$. Wir wollen zeigen, dass $A := \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ auch in $\mathcal{M}(X_s)$ liegt. Wir überprüfen jetzt die drei Aussagen:

(1) Für alle $y \in \mathbb{R}^m$ ist $A_i(y) \uparrow A(y)$, also ist $A(y)$ messbar nach Satz 5.1.

(2) Für alle $y \in \mathbb{R}^m$ gilt nach Satz 5.2, dass

$$F_{A_i}(y) := \mathrm{Vol}_k(A_i(y)) \uparrow \mathrm{Vol}_k(A(y)) =: F_A(y).$$

Es ist also $F_{A_i} \uparrow F_A$. Daher folgt aus Lemma 7.15, dass F_A messbar ist.

(3) Es ist

$$\mathrm{Vol}_n(A) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 5.2}}}{=} \lim_{i\to\infty} \mathrm{Vol}_n(A_i) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } A_i \in \mathcal{M}(X_s)}}{=} \lim_{i\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F_{A_i}(y)\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Satz 7.10 (3), da } F_{A_i} \uparrow F_A}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F_A(y)\,dy.$$

Wir haben also gezeigt, dass A in $\mathcal{M}(X_s)$ liegt.

(e) Es folgt nun aus (b), (c) und (d), dass $\mathcal{M}(X_s)$ eine σ-Algebra ist, welche $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)$ enthält. Aus der Definition von $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$ erhalten wir nun die gewünschte Inklusion $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s)\rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \subset \mathcal{M}(X_s)$.

(ii) Es sei nun $A \in \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$. Aus (i) folgt, dass für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt, dass $A_s := A \cap X_s$ in $\mathcal{M}(X_s) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ liegt.[64] Das Argument von (i) (d) zeigt nun, dass auch $A = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} A_s$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ liegt. ■

9.2. **Der Satz von Fubini und Beispiele.** Satz 8.3 und Satz 8.6 besagen insbesondere, dass man bei„vernünftigen" Funktionen, beispielsweise stetige Funktionen auf kompakten Intervallen, dass Lebesgue-Integral mithilfe des Riemann-Integral bestimmen kann. Dies ist natürlich sehr hilfreich, nachdem wir n Analysis I viele Rechenmethoden für das Riemann-Integral kennengelernt hatten.

Mithilfe vom folgenden Satz von Fubini kann man Lebesgue-Integrale im mehrdimensionalen mithilfe von mehreren Lebesgue-Integralen in kleineren Dimensionen bestimmen.

Satz 9.3. (Fubini) *Es sei*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\to \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$ die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

Lebesgue-integrierbar ist, und es gilt

$$\int\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^{k+m}} f(x,y)\,d\lambda \;=\; \int\limits_{y\in\mathbb{R}^m\setminus N} \underbrace{\int\limits_{x\in\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx}_{\text{definiert für } y\in\mathbb{R}^m\setminus N}\,dy.$$

Bemerkung. Es sei $A \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ eine messbare Teilmenge. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_{k+m}(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} \chi_A\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 9.3 von Fubini}}}{=} \int\limits_{y\in\mathbb{R}^m} \int\limits_{x\in\mathbb{R}^k} \chi_{A(y)}\,dx\,dy = \int\limits_{y\in\mathbb{R}^m} \mathrm{Vol}_k(A(y))\,dy.$$

Dies zeigt, dass das Cavalierische Prinzip 9.2 ein Spezialfall des Satzes 9.3 von Fubini ist.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } y \neq 2, \\ 1, & \text{wenn } y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Dies ist die charakteristische Funktion der Nullmenge $\mathbb{R}\times\{2\}$ also Lebesgue-integrierbar. Für $y = 2$ ist die Funktion $x \mapsto (x,2)$ jedoch nicht Lebesgue-integrierbar. In diesem Fall gilt der Satz 9.3 von Fubini für die Nullmenge $N = \{2\} \subset \mathbb{R}$.

In der Praxis will man oft f gar nicht über ganz $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ integrieren, sondern nur über eine Teilmenge. Dies führt uns zu folgendem Satz.

[64] Hierbei verwenden wir implizit, dass $\langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^{\boldsymbol{\sigma}} \cap \mathcal{P}(X_s) \subset \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n, s) \rangle^{\boldsymbol{\sigma}}$. Diese Aussage kann man mithilfe des Arguments der Behauptung auf Seite 179 beweisen.

Satz 9.4. (Fubini) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ eine messbare Teilmenge und es sei*

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Wir schreiben

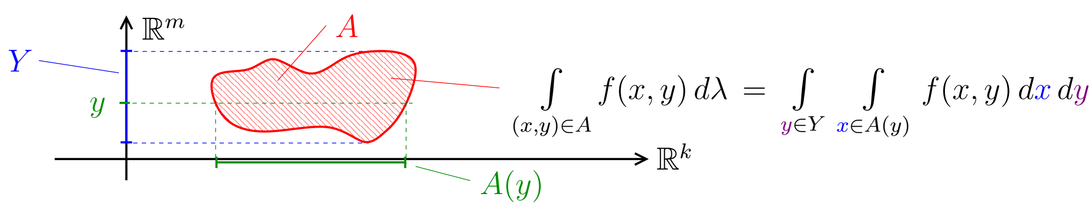
$$Y \;:=\; \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, \text{es gibt ein } x \in \mathbb{R}^k \text{ mit } (x,y) \in A\},$$

und für alle $y \in Y$ setzen wir

$$A(y) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^k \,|\, (x,y) \in A\}.$$

Wenn[65] *für alle $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ auf $A(y)$ Lebesgue-integrierbar ist, dann gilt*

$$\int\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)\,d\lambda \;=\; \int\limits_{y\in Y}\;\int\limits_{x\in A(y)} f(x,y)\;dx\;\;dy.$$



Beweis. Der Satz folgt aus den Definitionen und dem vorherigen Satz von Fubini 9.3. ■

Beispiel. Es sei A das Dreieck

$$A \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,2] \text{ und } y \in [0,x]\}.$$

Wir betrachten die Funktion

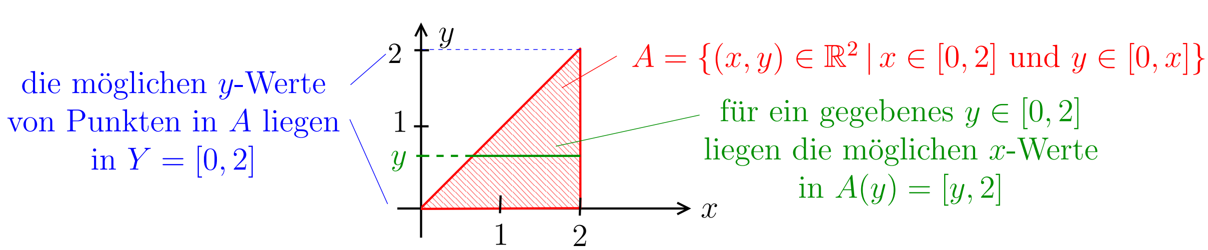
$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array}.$$

Es folgt aus Satz 7.20, dass f Lebesgue-integrierbar ist. Wir möchten nun das Lebesgue-Integral von f mithilfe des Satzes von Fubini bestimmen. In diesem Fall ist

$$Y \;=\; \text{alle möglichen } y\text{-Werte von Punkten in } A \;=\; [0,2].$$

Zudem gilt für jedes $y \in [0,2]$, dass

$$A(y) \;=\; \text{alle } x\text{-Werte von Punkten in } A \text{ mit } y\text{-Wert } y \;=\; [y,2].$$



---

[65]Beispielsweise ist diese Voraussetzung nach Lemma 7.20 erfüllt, wenn für alle $y \in Y$ die Menge $A(y)$ kompakt ist und wenn f stetig ist.

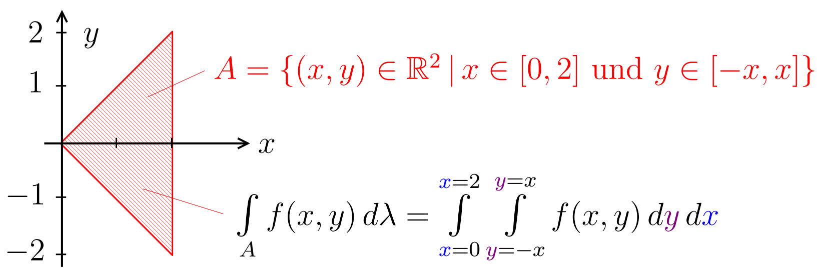
Es folgt also, dass

$$\int_A x^2+y^2\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.4 von Fubini}}}{=} \int_{[0,2]}\ \int_{[y,2]} x^2+y^2\,dx\ \ dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 8.3}}}{=} \int_{y=0}^{y=2}\int_{x=y}^{x=2} x^2+y^2\,dx\ \ dy = (*)$$

Der Rest der Rechnung besteht nun aus zwei Riemann-Integralen, welche wir mithilfe von Stammfunktionen leicht bestimmen können:

$$(*) = \int_{y=0}^{y=2} \underbrace{\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=y}^{x=2}}_{=\frac{8}{3}+2y^2-\frac{y^3}{3}-y^3} dy = \int_{y=0}^{y=2} \frac{8}{3}+2y^2-\frac{y^3}{3}-y^3\ dy = \frac{16}{3}.$$

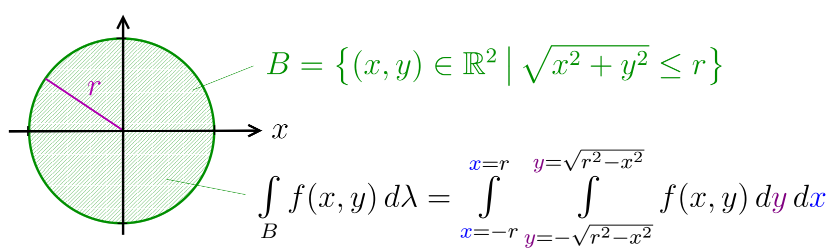
Beispiel. In vielen Beispielen ist das schwierigste Problem, die korrekten Grenzen für das x-Integral und das y-Integral zu finden. Manchmal ist es einfacher für ein gegebenes x die möglichen y-Werte zu bestimmen, wir können dann die Reihenfolge der x- und y-Integrale vertauschen. Ein solches Beispiel wird in der Abbildung skizziert.



Beispiel. Wir betrachten nun noch

$$B(r) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2}\le r\right\},$$

also die abgeschlossene Scheibe um den Ursprung mit Radius r.



Wir bestimmen nun den Flächeninhalt für $r=1$. Es gilt

$$\text{Flächeninhalt von } B(1) = \operatorname{Vol}_2(B(1)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 7.6 (0)}}}{=} \int \chi_B\,d\lambda = \int_B 1\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.4 von Fubini und Satz 8.3}}}{=} \int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\,dx = (*)$$

Wir müssen nun dieses zweifache Riemann-Integral bestimmen. Dies ist nun eine Übungsaufgabe aus der Analysis I. Der Vollständigkeit halber wollen wir diese hier ausführen. Es ist

$$(*) \;=\; \int_{x=-1}^{x=1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; 2\int_{x=-1}^{x=1}(1-x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitution } u=\arcsin(x) \text{ mit } \frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}{=}\; 2\int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} 1-\sin^2(u)\,du$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{aus den Additionstheoremen folgt } \cos(2u)=\cos^2(u)-\sin^2(u) \text{ mithilfe}\\ \text{von } \sin^2(u)+\cos^2(u)=1 \text{ erhalten wir } 2(1-\sin^2(u))=1+\cos(2u)}}{=}\; \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2u)\,du \;=\; \Big[u+\tfrac{1}{2}\sin(2u)\Big]_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} \;=\; \pi.$$

Mit noch etwas mehr Aufwand, oder mithilfe von Satz 6.3, kann man nun auch zeigen, dass

$$\text{Flächeninhalt von } B(r) \;=\; \mathrm{Vol}_2(B(r)) \;=\; \pi\cdot r^2.$$

Beispiel. Wir wollen nun noch das Volumen des Kegels

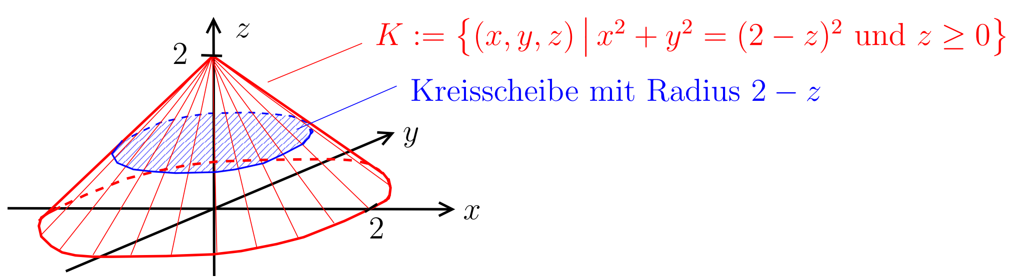
$$K \;:=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\Big|\, \sqrt{x^2+y^2}=2-z \text{ und } z\ge 0\Big\}$$

bestimmen. Für jedes $z\in[0,2]$ ist der Schnitt von K mit der um z verschobenen xy-Ebene eine Scheibe von Radius $2-z$. Genauer gesagt, für gegebenes $z\in[0,2]$ ist

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, (x,y,z)\in K\} \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{x^2+y^2}=2-z\} \;=\; B(2-z).$$

Es folgt, dass

$$\text{Volumen von } K \;=\; \int_K 1\,d\lambda \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.4 von Fubini}\\ \text{und Satz 8.3}}}{=}\; \int_{z=0}^{z=2} \underbrace{\int_{(x,y)\in B(2-z)} 1\,dx\,dy}_{\substack{=\pi(2\text{-}z)^2 \text{ nach vorherigem}\\ \text{Beispiel}}}\;dz \;=\; \int_{z=0}^{z=2}\pi\cdot(2-z)^2\,dz \;=\; \frac{8}{3}\pi.$$



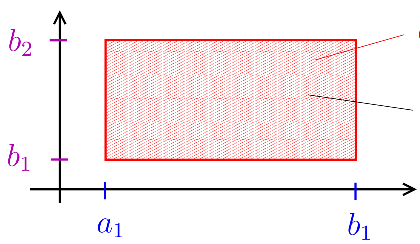
Bemerkung. Man kann den Satz von Fubini auch mehrmals anwenden, und ein n-dimensionales Lebesgue-Integral in n ein-dimensionale Lebesgue-Integrale zerlegen. Beispielsweise gilt für jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f(x,y,z)$ auf dem Kegel K, dass

$$\int_K f\,d\lambda \;=\; \int_{z=0}^{z=2}\;\int_{x=-(2-z)}^{x=2-z}\;\int_{y=-\sqrt{(2-z)^2-x^2}}^{y=\sqrt{(2-z)^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz.$$

Beispiel. Der wohl einfachste Fall ist, wenn wir ein Rechteck $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$ betrachten. Für eine beliebige stetige Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int\limits_Q f\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.4 von Fubini und Satz 8.3}}}{=} \int\limits_{y=a_2}^{y=b_2} \int\limits_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{die Namen„}x\text{" und„}y\text{" spielen keine Rolle und}\\ \text{können beliebig ausgetauscht werden}}}{=} \int\limits_{v=a_2}^{v=b_2} \int\limits_{u=a_1}^{u=b_1} f(u,v)\,du\,dv.$$

Ganz analog kann man auch das Integral über einen 3-dimensionalen Quader als dreifach iteriertes Riemann-Integral schreiben.



$$\int\limits_Q f\,d\lambda = \underbrace{\int\limits_{y=a_2}^{y=b_2} \int\limits_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{gleiche Variable}} = \underbrace{\int\limits_{v=a_2}^{v=b_2} \int\limits_{u=a_1}^{u=b_1} f(u,v)\,du\,dv}_{\text{gleiche Variable}}$$

9.3. **Der Beweis des Satzes von Fubini.** Wir beweisen den Satz von Fubini zuerst für nichtnegative messbare Funktionen. Dieser Spezialfall wird manchmal das Lemma von Tonelli genannt.

Lemma 9.5. (Lemma von Tonelli) *Es sei*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Dann gilt:

(1) *Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ ist die Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

messbar.

(2) *Die Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ y &\mapsto \int\limits_{x \in \mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx \end{aligned}$$

ist ebenfalls messbar und es gilt

$$\int\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^{k+m}} f(x,y)\,d\lambda = \int\limits_{y\in\mathbb{R}^m} \int\limits_{x\in\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Beweis.

(a) Für charakteristische Funktionen von messbaren Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^{k+m}$ sind dies, wie wir auf Seite 219 gesehen hatten, gerade die Aussagen des verallgemeinerten Cavalierischen Prinzips, welches wir in Satz 9.2 bewiesen hatten.

(b) Eine nichtnegative Stufenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von messbaren Mengen. Es ist leicht zu sehen, dass wenn die

Aussagen des Lemmas von Tonelli für Funktionen $f_1, \dots, f_n$ gelten, dann gelten die Aussagen auch für alle nichtnegativen Linearkombinationen von $f_1, \dots, f_n$. Insbesondere folgt aus (a), dass die Aussagen für nichtnegative Stufenfunktion gelten.

(c) Es sei f eine beliebige nichtnegative messbare Funktion. Nach Satz 7.7 ist die Funktion f der aufsteigende Limes einer Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen f_n.

(1) Es sei nun $y \in \mathbb{R}^m$. Nach (b) sind die Funktionen $x \mapsto f_n(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$ messbar. Nach Lemma 7.15 ist dann auch die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ messbar.

(2) Für $y \in \mathbb{R}^m$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$F_n(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_n(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad F(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx.$$

Nachdem $f_n(x,y) \uparrow f(x,y)$ (aufgefasst als Funktion in x) folgt aus Satz 7.10 (3), dass $F_n \uparrow F$. Nun folgt aus (b), und aus Lemma 7.15, dass F messbar ist. Zusammengefasst gilt

$$\int\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^{k+m}} f(x,y)\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 7.10 (3) angewandt auf } f_n\uparrow f}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^{k+m}} f_n(x,y)\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fall (b)}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{y\in\mathbb{R}^m} F_n(y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 7.10 (3), angewandt auf } F_n\uparrow F}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} F(y)\,dy.$$

Wir haben also die gewünschte Aussage bewiesen. ■

Wir beweisen nun den allgemeinen Fall des Satzes von Fubini.

Beweis des Satzes von Fubini. Es sei also

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\to \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Wie üblich schreiben wir

$$f_+ := \max\{f, 0\} \quad \text{und} \quad f_- := -\min\{f,0\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x,y)\,dx\,dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f_+(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^{k+m}} f_-(x,y)\,dx\,dy \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 9.5 von Tonelli}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^k} f_+(x,y)\,dx}_{=:F_+(y)}\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^k} f_-(x,y)\,dx}_{=:F_-(y)}\,dy = (*) \end{aligned}$$

Wir können jetzt nicht einfach die Integrale zusammenfassen, weil im Allgemeinen die Differenz $F_+(y) - F_-(y)$ nicht definiert[66] ist. Nachdem die Integrale über F_+ und F_- jeweils endlich sind, folgt aus Satz 7.18, dass es Nullmengen $N_\pm \subset \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $F_\pm(y) < \infty$

[66] Denn es könnte sein, dass sowohl $F_+(y)$ als auch $F_-(y)$ den Wert ∞ annehmen.

für alle $y \in \mathbb{R}^m \setminus N_\pm$. Wir setzen nun $N := N_- \cup N_+$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } N \text{ Nullmenge}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus N} F_+(y)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus N} F_-(y)\,dy
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 7.11 (1b)}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus N} \underbrace{F_+(y) - F_-(y)}_{\text{definiert für } y \in \mathbb{R}^m \setminus N}\,dy \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus N} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_+(x,y)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_-(x,y)\,dx\,dy
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition des Lebesgue-Integral von } x \mapsto f(x,y)}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus N} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

■

10. Die Transformationsformel

10.1. **Die Transformationsformel.** Der Satz 9.4 von Fubini erlaubt es uns in vielen Fällen die Berechnung des mehrdimensionalen Lebesgue-Integrals auf die Berechnung von ein-dimensionalen Integralen zu reduzieren. Wir hatten gesehen, dass diese Methode besonders einfach funktioniert, wenn der Definitionsbereich ein Rechteck oder Quader ist. Bei komplizierteren Integrationsbereichen, z.B. Kreischreiben und Kegeln, wurden die Berechnungen schnell kompliziert. Die Transformationsformel 10.2, welche wir gleich formulieren werden, ermöglicht es in vielen Fälen die Berechnung von Lebesgue-Integralen auf die Berechnung von Lebesgue-Integralen über Rechtecken und anderen einfachen Integrationsbereichen zurückzuführen.

Definition. Eine Abbildung $\Phi\colon U \to V$ zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ heißt $\mathcal{C}^1$–invertierbar, wenn die folgendes gilt:

(1) Φ stetig differenzierbar ist,
(2) Φ ist bijektiv ist, und
(3) wenn die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Der folgende Satz gibt uns ein einfaches Kriterium um zu überprüfen, ob eine gegebene Abbildung $\mathcal{C}^1$-invertierbar ist.

Satz 10.1. *Eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $\Phi\colon U \to V$ zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann $\mathcal{C}^1$–invertierbar, wenn für alle $P \in U$ das Differential $\mathrm{D}\Phi_P$ eine invertierbare Matrix ist.*

Beweis. Es sei $\Phi\colon U \to V$ ein bijektive stetig differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wenn Φ $\mathcal{C}^1$–invertierbar ist, dann folgt aus der Kettenregel, angewandt auf $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}$, dass jedes Differential $\mathrm{D}\Phi_P$ eine invertierbare Matrix ist. Umgekehrt, wenn für alle $P \in U$ das Differential $\mathrm{D}\Phi_P$ eine invertierbare Matrix ist, dann folgt aus dem Satz über die Umkehrabbildung [**Fr2**, Satz 14.4], dass Φ^{-1} stetig differenzierbar ist. ■

Jetzt können wir den eigentlichen Star des Kapitels, ja vielleicht der ganzen Vorlesung, formulieren.

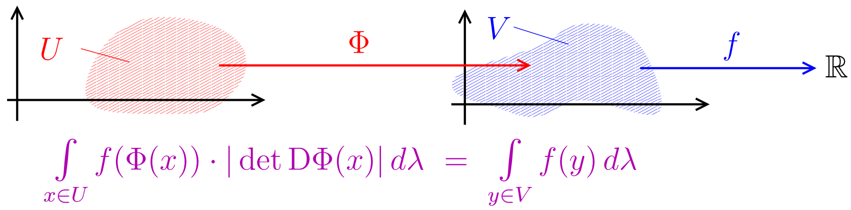
Satz 10.2. (Transformationsformel) *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, es sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung. Dann ist $f\colon V \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, genau dann, wenn*

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\Phi(x)) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi(x)| \end{array}$$

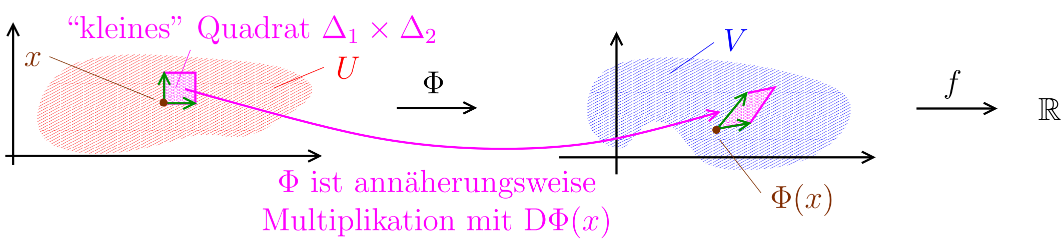
Lebesgue-integrierbar ist. Im Falle der Lebesgue-Integrierbarkeit gilt

$$\int\limits_{x\in U} f(\Phi(x)) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi(x)|\, d\lambda \;=\; \int\limits_{y\in V} f(y)\, d\lambda.$$

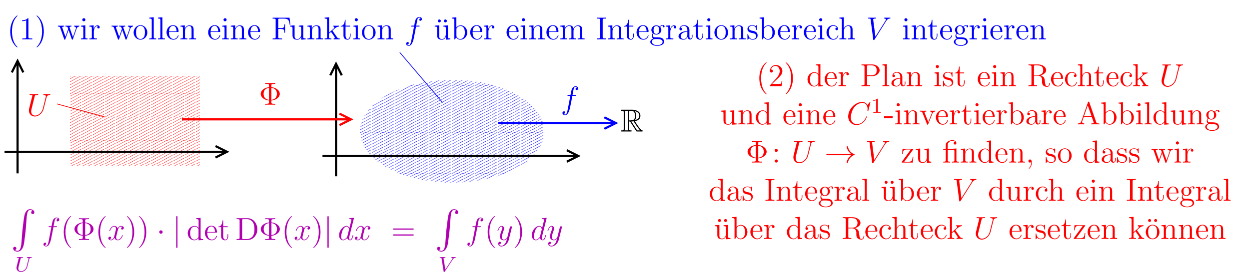
Beweisskizze. Wir werden die Transformationsformel im nächsten Kapitel beweisen. Der Beweis ist lang und schwierig. Für $n = 2$ ist die Aussage aber anschaulich eigentlich relativ klar: In der Nähe eines Punkts $x \in U$ ist Φ annäherungsweise gegeben durch Multiplikation



mit dem Differential $\mathrm{D}\Phi(x)$. Insbesondere führt die Abbildung Φ „kleine" Quadrate $\Delta_1 \times \Delta_2$ an einem Punkt x annäherungsweise in Parallelogramme über. Nach Satz 6.3 ändert sich der Flächeninhalt um den Multiplikationsfaktor $|\det(\mathrm{D}\Phi(x))|$. Diese Tatsache wird in der Abbildung unten illustriert. ■



Bemerkung. Die Transformationsformel 10.2 hat viele theoretische Anwendungen, welche wir vor allem in Analysis auf Mannigfaltigkeiten noch ausnützen werden. Die Transformationsformel 10.2 hat aber auch viele praktische Anwendungen. In der Praxis will man oft ein Lebesgue-Integral über einen Integrationsbereich V bestimmen, welcher mit Fubini nur schwer zu beschreiben ist. Die Hoffnung ist nun, dass man ein Rechteck U und eine C^1-invertierbare Abbildung $\Phi\colon U \to V$ finden kann, so dass man das Integral über V durch ein Integral über U ersetzen kann.



Wir beweisen die Transformationsformel 10.2 erst im nächsten Kapitel. In diesem Kapitel wollen wir erst viele Beispiele betrachten.

10.2. **Der eindimensionale Fall.** Im Folgenden sei $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende differenzierbare Funktion mit $\Phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist insbesondere $\Phi\colon (a,b) \to (\Phi(a), \Phi(b))$ eine C^1-invertierbare Abbildung zwischen den offenen Intervallen (a,b) und $(\Phi(a), \Phi(b))$. Für jede stetige Funktion $f\colon [\Phi(a), \Phi(b)] \to \mathbb{R}$ gilt also, dass[67] [68]

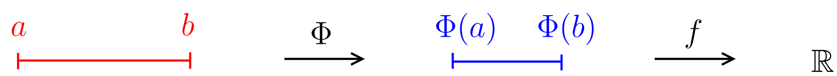
[67]Die Voraussetzung, dass f stetig ist, verwenden wir im Folgenden nur, um uns keine Gedanken um Lebesgue-Integrierbarkeit zu machen.

[68]Wo haben wir jetzt verwendet, dass Φ streng monoton *steigend* ist? Wie ändert sich das Argument, wenn Φ streng monoton *fallend* ist?

$$\int_{x=a}^{x=b} f(\Phi(x))\cdot\Phi'(x)\,dx \overset{\substack{\text{Satz 8.3}\\ \downarrow}}{=} \int_{[a,b]} f(\Phi(x))\cdot\Phi'(x)\,dx \overset{\substack{\text{Satz 7.17}\\ \downarrow}}{=} \int_{(a,b)} f(\Phi(x))\cdot\Phi'(x)\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Transformationsformel 10.2, da } \Phi'(x)>0}}{=} \int_{(\Phi(a),\Phi(b))} f(u)\,du \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nochmal Satz 8.3 und Satz 7.17}}}{=} \int_{u=\Phi(a)}^{u=\Phi(b)} f(u)\,du.$$

Wir erhalten also aus der Transformationsformel 10.2, mit leicht anderen Voraussetzungen,



die klassische Substitutionsregel [**Fr1**, Satz 16.12] als Spezialfall. Die Transformationsformel 10.2 ist allerdings viel Allgemeiner als die Substitutionsregel. Zum einen gilt sie auch im mehrdimensionalen Fall, zum anderen kann diese nicht nur auf stetige, sondern allgemeiner auch auf Lebesgue-integrierbare Funktionen angewandt werden.

10.3. **Lineare Abbildungen.** Die vielleicht einfachsten C^1-invertierbaren Abbildungen sind gegeben durch Matrizenmultiplikationen. Genauer gesagt, es sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, dann ist für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} U & \to & A\cdot U \\ x & \mapsto & A\cdot x \end{array}$$

eine C^1-invertiere Abbildung, dessen Differential überall A ist.

Wir betrachten beispielsweise den Fall

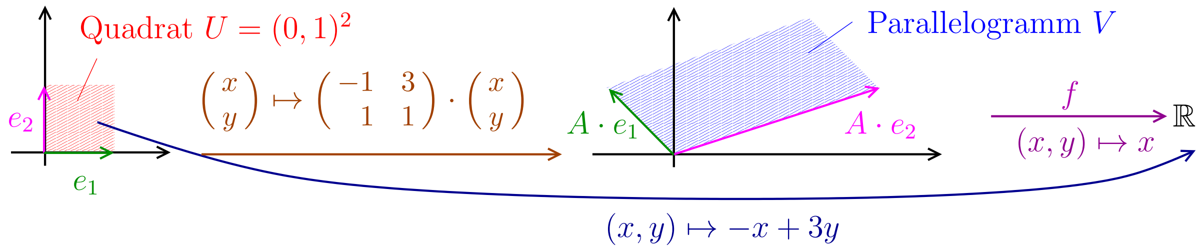
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = (0,1)^2, \quad \text{und } V = A\cdot U,$$

welcher in der Abbildung unten skizziert ist. Für die Funktion $f(x,y)=x$ gilt dann

$$\int_V \underbrace{f(x,y)}_{=x}\,d\lambda \overset{\substack{\text{Transformationsformel 10.2}\\ \downarrow}}{=} \int_{(0,1)^2} \underbrace{f\left(A\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\right)}_{=f(-x+3y,x+y)=-x+3y} \cdot \underbrace{|\det A|}_{=4}\,d\lambda \overset{\substack{\text{Satz 9.4 von Fubini}\\ \downarrow}}{=} \int_{y\in(0,1)}\int_{x\in(0,1)} 4(-x+3y)\,dx\,dy$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 7.17, da sich die Definitionsbereiche}\\ \text{nur um eine Nullmenge unterscheiden}}}{=} \int_{y\in[0,1]}\int_{x\in[0,1]} 4(-x+3y)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 8.3}}}{=} \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1} -4x+12y\,dx\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \underbrace{\Big[-2x^2+12yx\Big]_{x=0}^{x=1}}_{=-2+12y} dy = \Big[-2y+6y^2\Big]_{y=0}^{y=1} = 4.$$



Wir haben diesem Fall also ein Integral über das Parallelogramm V durch ein viel ein Integral über Quadrat ersetzt, welches mithilfe des Satzes 9.4 von Fubini dann leicht zu bestimmen ist.

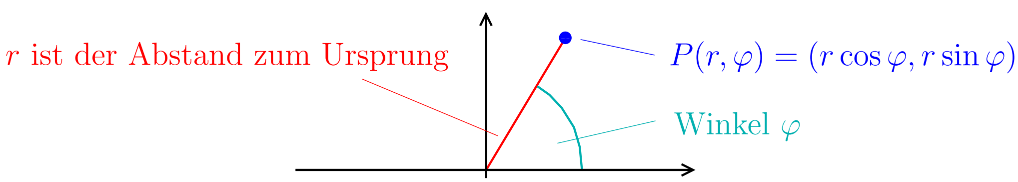
10.4. **Polarkoordinaten.** Die wohl wichtigsten Anwendungen der Transformationsformel 10.2 basieren auf den

(1) Polarkoordinaten,
(2) zylindrische Koordinaten, und
(3) sphärische Koordinaten,

welche wir schon in Analysis II kennengelernt hatten. Wir behandeln diese drei Koordinaten in den folgenden drei Teilkapiteln.

Notation. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Bemerkung. Der Satz über die Polarkoordinatendarstellung [**Fr1**, Satz 11.11] besagt, dass die Abbildung $P\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ surjektiv ist, und dass für $r, r' > 0$ und $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$P(r,\varphi) = P(r',\varphi') \quad \Longleftrightarrow \quad r = r' \text{ und } \varphi = \varphi' + 2\pi \cdot k \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}.$$

Definition. Wenn $(x,y) = P(r,\varphi)$, dann bezeichnen wir r und φ als Polarkoordinaten von (x,y). Die Diskussion oben zeigt, dass für einen Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ die Polarkoordinaten (r,φ), bis auf Addition von einem Vielfachen von 2π zu φ, eindeutig bestimmt sind.

Lemma 10.3. *Für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\det(\mathrm{D}P(r,\varphi)) \;=\; r.$$

Beweis. Es gilt:

$$\det(\mathrm{D}P(r,\varphi)) \;=\; \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} r\cos\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r. \qquad \blacksquare$$

Satz 10.4. (Polarkoordinaten) *Für $d \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\overline{B_d^2(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le d^2\}$ die abgeschlossene Scheibe von Radius d, und es sei $f\colon \overline{B_d^2(0)} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*[69]

$$\int\limits_{\overline{B_d^2(0)}} f(x,y)\,d\lambda \;=\; \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int\limits_{r=0}^{r=d} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{wichtig!}}}{\boldsymbol{r}}\, dr\, d\varphi.$$

Das „r-Integral" und das „φ-Integral" kann man dabei auch vertauschen.

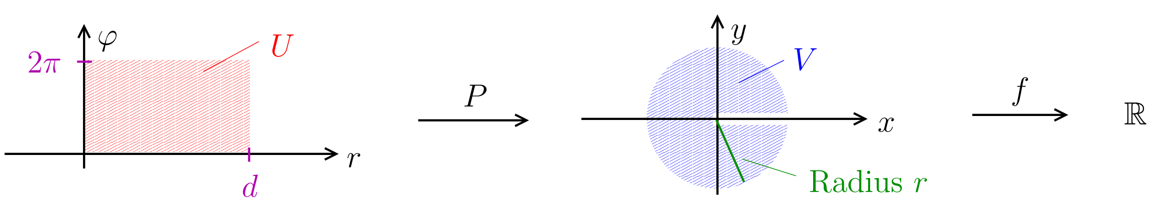
Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} P\colon U := (0,d)\times(0,2\pi) & \to & V := \{(x,y)\in B_d^2(0)\,|\, x<0 \text{ oder } y\neq 0\} \\ (r,\varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{array}$$

Es folgt aus Lemma 10.3, Satz 10.1 und der obigen Diskussion der Polarkoordinaten, dass die Abbildung eine C^1–invertierbare Abbildung ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\overline{B_d^2(0)}} f(x,y)\,d\lambda &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } \overline{B_d^2(0)}\setminus V \text{ ist eine Nullmenge}}}{=} \int\limits_V f(x,y)\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Transformationsformel 10.2 und Lemma 10.3}}}{=} \int\limits_{U=(0,d)\times(0,2\pi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot \boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi \\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.4 von Fubini}}}{=} \int\limits_{\varphi\in(0,2\pi)} \int\limits_{r\in(0,d)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot \boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi \underset{\substack{\uparrow\\ \text{die Definitionsbereiche unterscheiden sich um eine Nullmenge}}}{=} \int\limits_{\varphi\in[0,2\pi]} \int\limits_{r\in[0,d]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot \boldsymbol{r}\,d\lambda \\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Satz 8.3}}}{=} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int\limits_{r=0}^{r=d} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot \boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi. \end{aligned}$$

■



Beispiele.

(1) Es sei $d \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_2\left(\overline{B_d^2(0)}\right) \;=\; \int\limits_{\overline{B_d^2(0)}} 1\,d\lambda \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 10.4}}}{=}\; \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int\limits_{r=0}^{r=d} 1\cdot \boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi \;=\; \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=d} d\varphi \;=\; \pi\cdot d^2.$$

[69] Es folgt aus Satz 7.20, dass das Lebesgue-Integral auf der linken Seite definiert ist.

(2) Wir wollen das Lebesgue-Integral von x^2+y^2 über der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_3(0)}$ von Radius 3 bestimmen. Es gilt:

$$\int\limits_{\overline{B_3(0)}} x^2+y^2\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Satz 10.4}}}{=} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3 \underbrace{\big((r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2\big)}_{=r^2}\cdot \boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3 r^2\cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi\cdot\frac{3^4}{4}.$$

(3) Die Aussage von Satz 10.4 kann nun auch abgewandelt werden um Definitionsbereiche zu behandeln, welche zwar keine Scheiben sind, welche aber durch Polarkoordinaten gut beschrieben werden. Dies trifft beispielsweise auf„Tortenstücke" oder„Ringe" zu. Wir führen dazu nun ein Beispiel aus. Es sei T das„Tortenstück'

$$T \;:=\; \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2+y^2\le 4 \text{ und } x\ge 0 \text{ sowie } |y|\le x\big\},$$

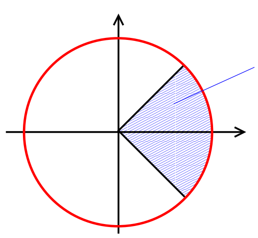
welches in der Abbildung unten skizziert ist. Dieses läßt sich viel leichter mit Polarkoordinaten beschreiben, in der Tat ist

$$T \;=\; \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ mit Polarkoordinaten } r\in[0,2] \text{ und } \varphi\in\big[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\big]\big\}.$$

Dann ist

$$\int\limits_T x\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Analogon von Satz 10.4} \\ \text{angewandt auf } f(x,y)=x}}{=} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^2 r\cos(\varphi)\cdot\boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \cos(\varphi) \text{ ist eine Konstante} \\ \text{bezüglich des } r\text{-Integrals}}}{=} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\cdot\underbrace{\int\limits_0^2 r^2\,dr}_{=\frac{8}{3}}\,d\varphi \;=\; \sqrt{2}\cdot\frac{8}{3}.$$

Ganz allgemein bieten sich die Polarkoordinaten an, wenn sich der Integrationsbereich leicht mithilfe von Polarkoordinaten beschreiben läßt.



$T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2+y^2\le 4 \text{ und } x\ge 0 \text{ sowie } |y|\le x\big\}$
oder einfacher beschrieben als
$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ mit Polarkoordinaten } r\in[0,2] \text{ und } \varphi\in\big[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\big]\big\}$

Jetzt nachdem wir den Flächeninhalt von Scheiben bestimmt haben können wir auch das Volumen von Rotationskörpern bestimmen.

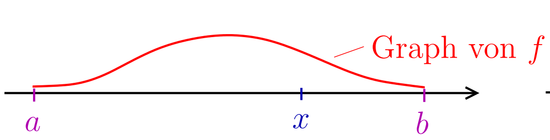
Satz 10.5. (Volumen von Rotationskörpern) *Es sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ eine differenzierbare Funktion. Wir betrachten den Rotationskörper*

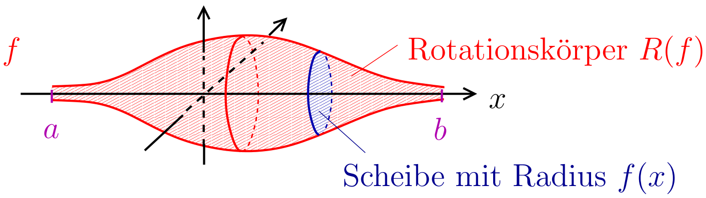
$$R(f) \;:=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, y^2+z^2\le f(x)^2\}.$$

Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(R(f)) \;=\; \int\limits_{x=a}^{x=b} \underbrace{\pi\cdot f(x)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{der } x\text{-Scheibe}}}\;dx.$$

Analoge Aussagen gelten auch, wenn f auf anderen Typen von Intervallen definiert ist.





Beweis. Es gilt

$$\mathrm{Vol}_3(R(f)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cavalierisches Prinzip 9.2}}}{=} \int_{x=a}^{x=b} \mathrm{Vol}_2(\text{Scheibe mit Radius } f(x)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Berechnung auf Seite 230}}}{=} \int_{x=a}^{x=b} \pi \cdot f(x)^2.$$

■

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

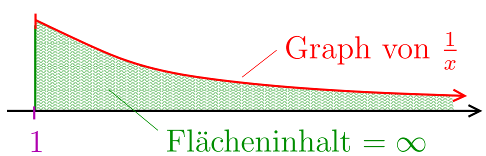
$$\begin{aligned} f\colon [1,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{x}. \end{aligned}$$

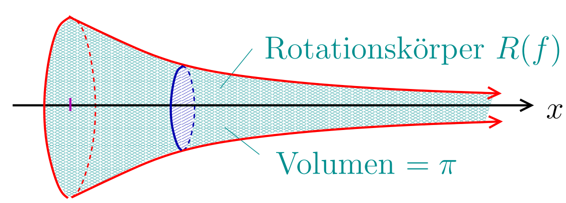
Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_2\Big(\underbrace{\big\{(x,y)\,|\, x\in[1,\infty) \text{ und } y\in[0,\tfrac{1}{x}]\big\}}_{\text{Fläche„unter dem Graphen”}}\Big) \overset{\substack{\text{Cavalierisches Prinzip 9.2 und Satz 8.6} \\ \downarrow}}{=} \int_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{x=1}^{x=b} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \big[\ln(x)\big]_{x=1}^{x=b} = \infty.$$

Andererseits gilt für das Volumen des Rotationskörpers $R(f)$, dass

$$\mathrm{Vol}_3(R(f)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 10.5}}}{=} \int_{x=1}^{x=\infty} \pi\cdot\big(\tfrac{1}{x}\big)^2\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{x=1}^{x=b} \frac{\pi}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \Big[-\frac{\pi}{x}\Big]_{x=1}^{x=b} = \pi < \infty.$$



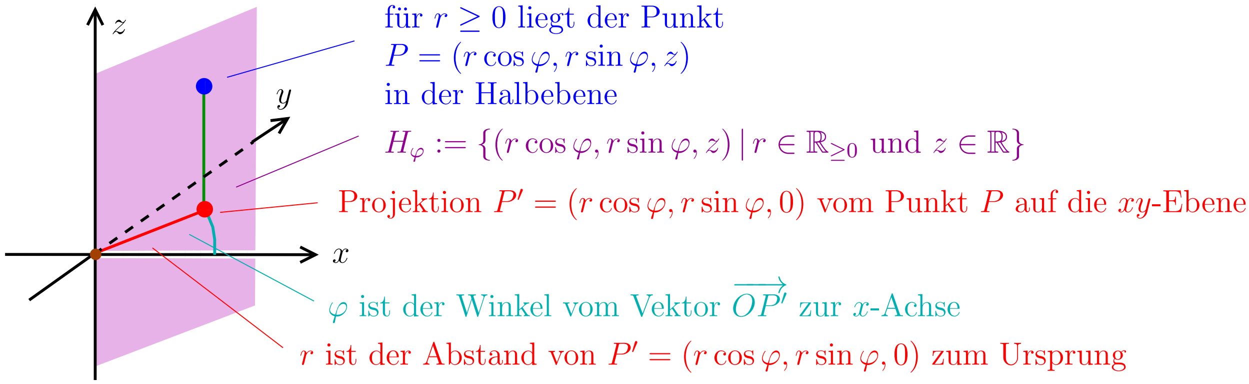


10.5. **Zylindrische Koordinaten.**

Definition. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} Z\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\varphi,z) &\mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z). \end{aligned}$$

Aus der obigen Diskussion von Polarkoordinaten folgt, dass diese Abbildung surjektiv ist. Wenn $(x,y,z) = Z(r,\varphi,z)$, dann bezeichnen wir (r,φ,z) als Zylinderkoordinaten von (x,y,z). Die Diskussion der Polarkoordiaten zeigt auch, dass für einen Punkt (x,y,z) mit $(x,y)\neq(0,0)$ die Zylinderkoordinaten (r,φ,z), bis auf Addition von einem Vielfachen von 2π zu φ, eindeutig bestimmt sind.



Lemma 10.6. *Für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \varphi, z \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\det(DZ(r,\varphi,z)) \;=\; r.$$

Beweis. Es ist

$$\det(DZ(r,\varphi,z)) \;=\; \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} r\cos\varphi & \frac{\partial}{\partial z} r\cos\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} r\sin\varphi & \frac{\partial}{\partial z} r\sin\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} z & \frac{\partial}{\partial \varphi} z & \frac{\partial}{\partial z} z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; r.$$

■

Beispiel. Wir betrachten den„Viertelkegel"

$$M \;:=\; \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4 \text{ und } z \in [0, 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}]\right\},$$

welcher in der Abbildung unten skizziert ist. Wir wollen das Volumen von M bestimmen. Wir können M mithilfe der Zylinderkoordinaten wie folgt beschreiben

$$M \;:=\; \begin{array}{l} \text{Punkte in } \mathbb{R}^3 \text{ mit Zylinderkoordinaten } (r,\varphi,z), \text{ wobei} \\ r \in [0,2],\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ und } z \in [0, 1 - \frac{r}{2}]. \end{array}$$

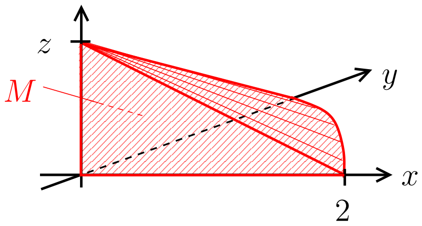
Nachdem es sehr einfach ist M mithilfe von Zylinderkoordinaten zu beschreiben bietet es sich auch an, Integral mithilfe des Transformationssatzes angewandt auf die Abbildung Z zu berechnen. Mithilfe der Zylinderkoordinaten können wir nun das Volumen von M wie folgt berechnen:

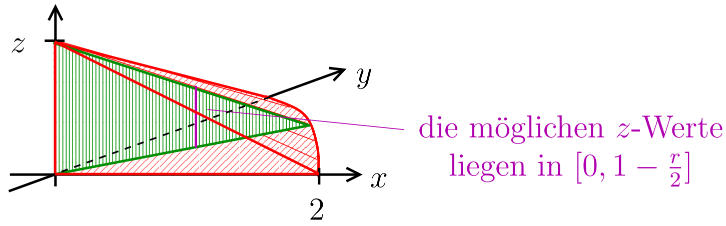
$$\mathrm{Vol}(M) \;=\int_M 1\,d\lambda \;\underset{\uparrow}{=}\; \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2} \int_{z=0}^{z=1-\frac{r}{2}} 1 \cdot \underset{\uparrow}{\boldsymbol{r}}\, dz\, dr\, d\varphi \;=\; \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2} \underbrace{\Big[r\cdot z\Big]_{z=0}^{z=1-\frac{r}{2}}}_{=r-\frac{r^2}{2}} dr\, d\varphi$$

analog zu Satz 10.4, unter Verwendung von Lemma 10.6

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6}\right]_{r=0}^{r=2} d\varphi \;=\; \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\, d\varphi \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3} \;=\; \frac{\pi}{3}.$$

10.6. **Sphärische Koordinaten.** Wir erinnern nun noch an die sphärischen Koordinaten.



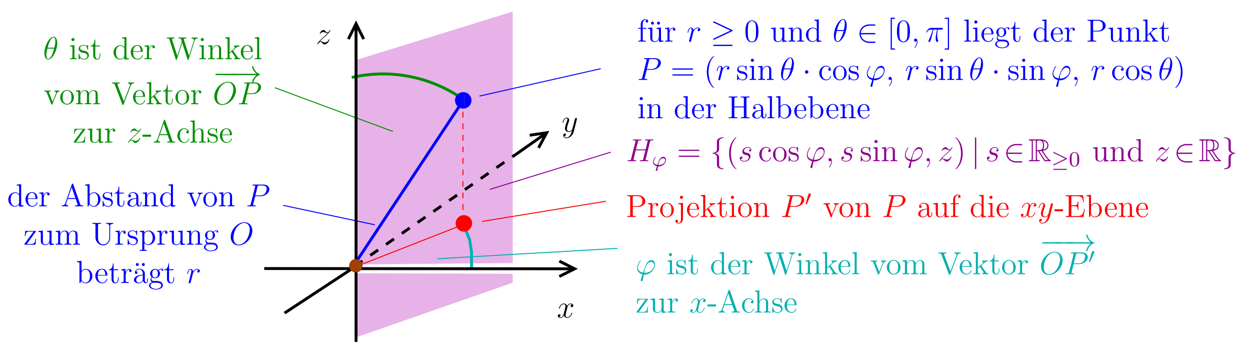


Definition. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} S\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\varphi,\theta) &\mapsto \big(r\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ r\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ r\cos\theta\big). \end{aligned}$$

Für einen Punkt $(x,y,z)=S(r,\varphi,\theta)$ bezeichnen wir (r,φ,θ) als sphärische Koordinaten[70] von (x,y,z).

Bemerkung. In Analysis II hatten wir gesehen, dass jeder Punkt in $\mathbb{R}^3$ sphärische Koordinaten (r,φ,θ) mit $r\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\varphi\in[0,2\pi]$ und $\theta\in[0,\pi]$ besitzt.



Lemma 10.7. *Für alle $r\in\mathbb{R}_{\geq 0}, \varphi,\theta\in\mathbb{R}$ ist*

$$\det(DS(r,\varphi,\theta)) \;=\; -r^2\cdot\sin\theta.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in folgender langweiligen Rechnung:

$$\begin{aligned}
\det(DS(r,\varphi,\theta)) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\theta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}r\cdot\cos(\theta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}r\cdot\cos(\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}r\cdot\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cdot\sin(\theta) & -r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta) & r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cdot\sin(\theta) & r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\theta) & r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\cdot\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \cos(\theta)(-r^2\cdot\sin^2(\varphi)\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) - r^2\cdot\cos^2(\varphi)\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)) \\
&\quad -r\cdot\sin(\theta)\cdot(\cos^2(\varphi)\cdot\sin^2(\theta)+r\cdot\sin^2(\varphi)\cdot\sin^2(\theta)) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1}}{=} -r^2\cdot\cos^2(\theta)\cdot\sin(\theta) - r^2\cdot\sin(\theta)\cdot\sin^2(\theta) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1}}{=} -r^2\cdot\sin(\theta).
\end{aligned}$$

■

[70]Manchmal sagt man auch„Kugelkoordinaten" anstatt„sphärische Koordinaten".

Beispiel. Es sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir betrachten nun die Kugel

$$K \;=\; \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2+z^2 \le s^2\big\}.$$

In sphärischen Koordinaten können wir schreiben

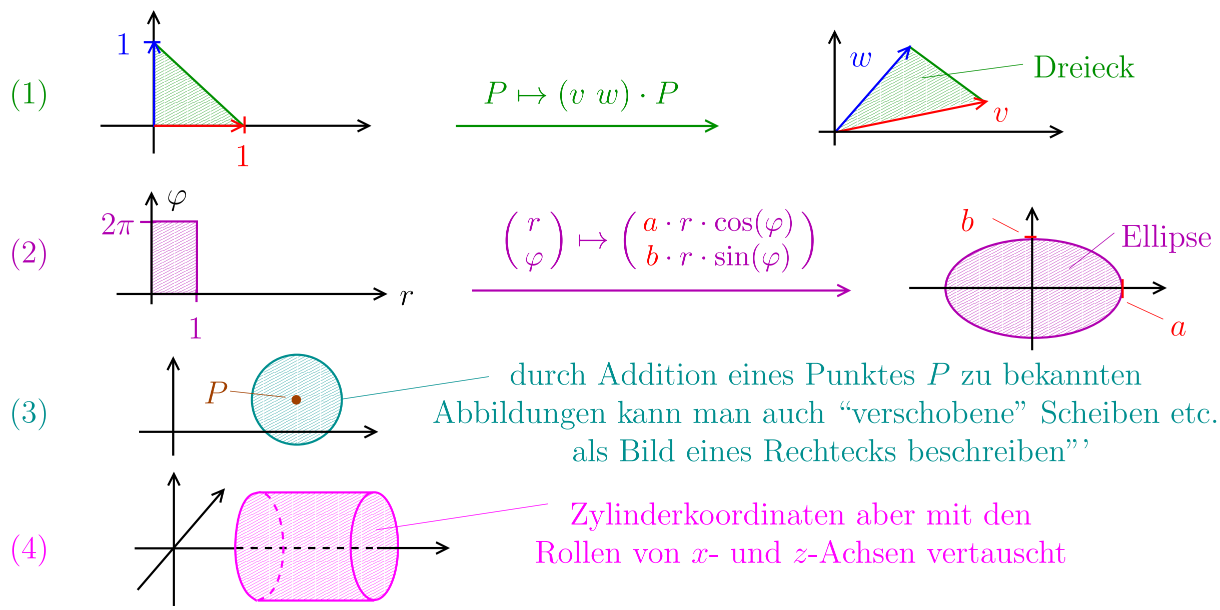
$$K \;=\; \big\{S(r,\varphi,\theta) \,\big|\, r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi] \text{ und } \theta \in [0,\pi]\big\}.$$

von Radius s. Es folgt nun, dass

$$\operatorname{Vol}(K) = \int_K 1\, d\lambda \underset{\uparrow}{=} \int_{r=0}^{r=s} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 1 \cdot \underset{\uparrow}{\boldsymbol{r^2 \cdot \sin(\theta)}}\, d\theta\, d\varphi\, dr \;=\; \int_{r=0}^{r=s} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 2r^2\, d\varphi\, dr \;=\; \int_{r=0}^{r=s} 4\pi r^2\, dr \;=\; \frac{4}{3}\pi \cdot s^3.$$

analog zu Satz 10.4, unter Verwendung von Lemma 10.7

10.7. **Weitere Beispiele für Anwendungen der Transformationsformel 10.2.** In der Abbildung skizzieren wir weitere Beispiele, bei denen die Transformationsformel 10.2 angewandt werden kann.



11. Beweis der Transformationsformel

Das einzige Ziel in diesem Kapitel ist die Transformationsformel 10.2 zu beweisen. Ganz am Ende betrachten wir dann, zur Belohnung allerseits, eine besonders hübsche Anwendung der Transformationsformel.

Wir erinnern noch einmal an die Aussage:

Satz 10.2. (Transformationsformel) *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, es sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung. Dann ist $f\colon V \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, genau dann, wenn*

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\Phi(x)) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi(x)| \end{array}$$

Lebesgue-integrierbar ist. Im Falle der Lebesgue-Integrierbarkeit gilt

$$\int\limits_{x \in U} f(\Phi(x)) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi(x)|\, d\lambda \;=\; \int\limits_{y \in V} f(y)\, d\lambda.$$

Beispiel. Es sei $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Multiplikation mit T definiert eine C^1-invertierbare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Es sei zum $X \subset V$ eine messbare Teilmenge. Wir betrachten die zugehörige charakteristische Funktion $\chi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt

$$\begin{array}{rcl} \int\limits_{y \in V = \mathbb{R}^n} f(y)\, d\lambda & = & \int\limits_{y \in \mathbb{R}^n} \chi_A\, d\lambda \;= \mathrm{Vol}(A), \\ \int\limits_{x \in U = \mathbb{R}^n} f(\Phi(x)) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi(x)|\, d\lambda & = & \int\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\chi_A(T \cdot x)}_{\chi_{T^{-1} \cdot A}(x)} \cdot |\det(T)|\, d\lambda \;=\; \mathrm{Vol}(T^{-1} \cdot X) \cdot |\det(T)|. \end{array}$$

Wir sehen also, dass in diesem Spezialfall die Aussage von Transformationsformel 10.2 gerade der Aussage von Satz 6.3 enspricht.

Der Beweis der Transformationsformel 10.2 erfolgt in zwei Schritten:

(1) Wir beweisen die Aussage in Satz 11.5 zuerst für stetige Funktionen, welcher nur auf einer beschränkten Menge $\neq 0$ sind. Wir beweisen diese Aussage indem wir die Aussage auf das oben genannte Beispiel„im Grenzwert" zurückführen.
(2) Wir behandeln die allgemeine Aussage indem wir beliebige Lebesgue-integrierbare Funktionen durch stetige Funktionen wie in (1) geeignet approximieren.

11.1. **Vorbereitungen zum Beweis der Transformationsformel.** Wir erinnern an folgende Definitionen.

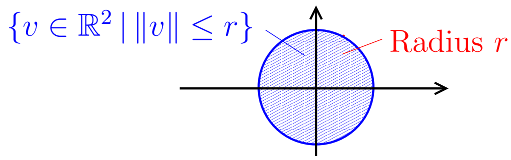
Definition. Für einen Vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

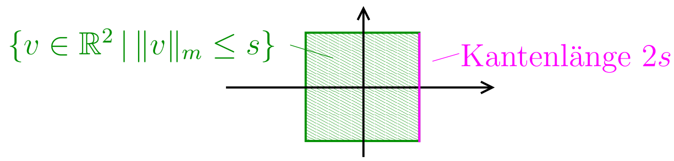
$$\begin{array}{lrcll} & \|v\| & := & \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} & \text{Euklidische Norm} \\ \text{und} & \|v\|_m & := & \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} & \text{Maximumsnorm.} \end{array}$$

Für eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ setzen wir zudem

$$\|A\| \;:=\; \max\big\{ \|A \cdot v\| \,\big|\, v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \big\}.$$

Lemma 11.1. *Die Abbildung*





$$\begin{array}{rcl} M(n\times n,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$$

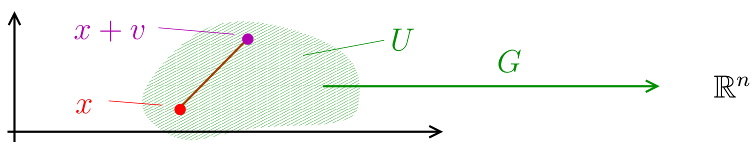
ist stetig.

Beweis. Dies Aussage folgt aus Lemma 6.12 aus der Analysis II. ■

Die Aussage von folgendem Lemma ist ganz ähnlich der Aussage von Lemma 5.1 aus der Funktionentheorie.

Lemma 11.2. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $G\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so dass $x + t\cdot v \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$\big\|G(x+v)-G(x)\big\|_m \;\leq\; \|v\|_m \cdot \sqrt{n}\cdot \max\big\{\|DG(x+t\cdot v)\| \,\big|\, t\in[0,1]\big\}.$$



Beweis. Es folgt leicht aus den Definitionen, siehe auch [**Fr2**, Lemma 1.2], dass für alle $w \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|w\| \;\leq\; \|w\|_m \;\leq\; \|w\|$$

gelten. Der Schrankensatz [**Fr2**, Satz 12.2] besagt, dass

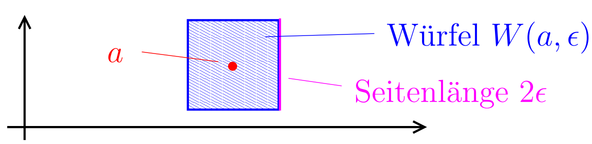
$$\big\|G(x+v)-G(x)\big\| \;\leq\; \|v\|\cdot \max\big\{\|DG(x+t\cdot v)\| \,\big|\, t\in[0,1]\big\}.$$

Das Lemma folgt also sofort aus dem Schrankensatz und den obigen Ungleichungen. ■

11.2. **Zwei Hilfssätze für den Beweis der Transformationsformel.**

Notation. Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon \geq 0$ schreiben wir

$$W(a,\epsilon) \;:=\; \big\{x\in\mathbb{R}^n \,\big|\, \|x-a\|_m \leq \epsilon\big\} \;=\; [a_1-\epsilon, a_1+\epsilon]\times\cdots\times[a_n-\epsilon,a_n+\epsilon].$$



Der erste Hilfssatz besagt, dass wenn eine Abbildung nahe an der Identität ist, in dem Sinne, dass das Differential nahe an der Identität ist, dann wird jeder beliebige abgeschlossene Würfel der Form $W(a,\epsilon)$ im Definitionsbereich nur wenig gestreckt oder gestaucht.

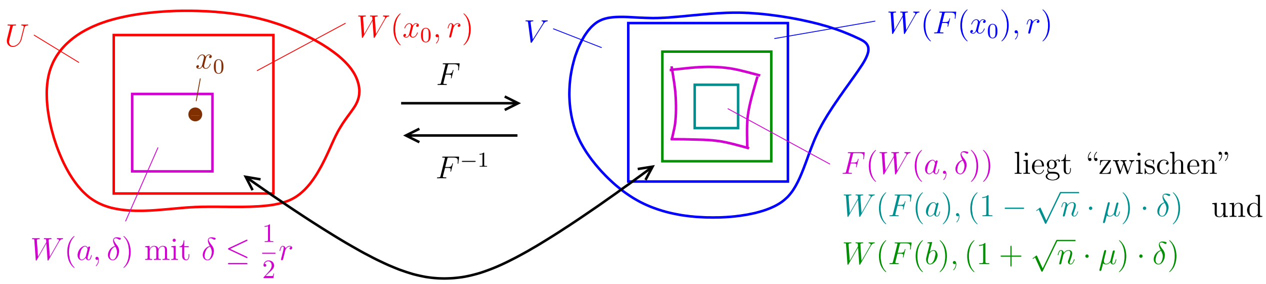
Hilfssatz 11.3. *Es seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und es sei $F\colon U \to V$ eine C^1-invertierbare Abbildung mit Umkehrabbildung F^{-1}. Es sei $x_0 \in U$. Zudem seien $r > 0$*

und $\mu \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ *gegeben, so dass* $W(x_0, r) \subset U$*, so dass* $W(F(x_0), r) \subset V$ *und, so dass*

$$\max_{x \in W(x_0,r)} \| \underbrace{\mathrm{D}F(x) - \mathrm{id}}_{n \times n\text{-Matrix}} \| \;\leq\; \mu \quad \textit{und} \quad \max_{y \in W(F(x_0),r)} \| \mathrm{D}F^{-1}(y) - \mathrm{id} \| \;\leq\; \mu.$$

Dann gilt für jeden Würfel der Form $W = W(a, \delta)$ *mit* $\delta \leq \frac{1}{2} r$ *und mit* $x_0 \in W$*, dass*

$$(1 - \sqrt{n} \cdot \mu)^n \;\leq\; \frac{\mathrm{Vol}(F(W))}{\mathrm{Vol}(W)} \;\leq\; (1 + \sqrt{n} \cdot \mu)^n.$$



die Einschränkungen von F auf $W(x_0, r)$ und F^{-1} auf $W(F(x_0), r)$ sind "nahe" an der Identität

Beweis von Hilfssatz 11.3.

Es folgt aus der Voraussetzung, zusammen mit Lemma 11.2, dass die Abbildungen F und F^{-1} die Maximumsnorm kaum verzerren, und damit auch die Volumina von Würfeln kaum verzerren. Die einzige Kunst ist nun diese Beobachtung in explizite Formeln überzuführen.

Es sei nun also $W(a, \delta)$ ein Würfel mit $\delta \leq \frac{1}{2} r$ und mit $x_0 \in W(a, \delta)$. Wir setzen $b := F(a)$. Es genügt folgende zwei Inklusionen zu beweisen:

$$\underbrace{W(b, (1 - \sqrt{n} \cdot \mu) \cdot \delta)}_{\text{Volumen } = \, \delta^n \cdot (1\text{-}\mu)^n} \;\subset\; \underbrace{F(W(a, \delta))}_{\text{Volumen } = \, \delta^n} \;\subset\; \underbrace{W(b, (1 + \sqrt{n}\mu) \cdot \delta)}_{\text{Volumen } = \, \delta^n \cdot (1 + \mu)^n}.$$

Wir beweisen die beiden Inklusionen in den folgenden zwei Behauptungen.

Behauptung 1. Es ist $\quad F(W(a, \delta)) \;\subset\; W(b, (1 + \sqrt{n} \cdot \mu) \cdot \delta).$

Wir zeigen zuerst, dass $W(a, \delta) \subset W(x_0, r)$: es sei also $x \in W(a, \delta)$, dann gilt

$$\|x - x_0\|_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung für die Maximumsnorm}}}{\leq} \|x - a\|_m + \|a - x_0\|_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } x_0 \in W(a,\delta) \text{ folgt, dass } \|a - x_0\|_m \leq \delta}}{\leq} \delta + \delta \;\leq\; r.$$

Für $x \in W(a, \delta)$ gilt dann, dass

$$\begin{aligned} \|F(x) - \overbrace{F(b)}^{=a}\|_m &\overset{\substack{\text{wir führen } F - \mathrm{id} \text{ ein, da wir darüber Kontrolle besitzen} \\ \downarrow}}{=} \|(F - \mathrm{id})(x) - (F - \mathrm{id})(a) + (x - a)\|_m \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} \|(F - \mathrm{id})(x) - (F - \mathrm{id})(a)\|_m + \|x - a\|_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 11.2, angewandt auf } G = F - \mathrm{id} \\ \text{und der Voraussetzung, dass} \\ \|\mathrm{D}F(z) - \mathrm{id}\| \leq \mu \text{ für alle } z \in W(a,\delta) \subset W(x_0, r)}}{\leq} \sqrt{n}\mu \cdot \|x - a\|_m + \|x - a\|_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } x \in W(a,\delta)}}{\leq} (1 + \sqrt{n}\mu) \cdot \delta. \end{aligned}$$

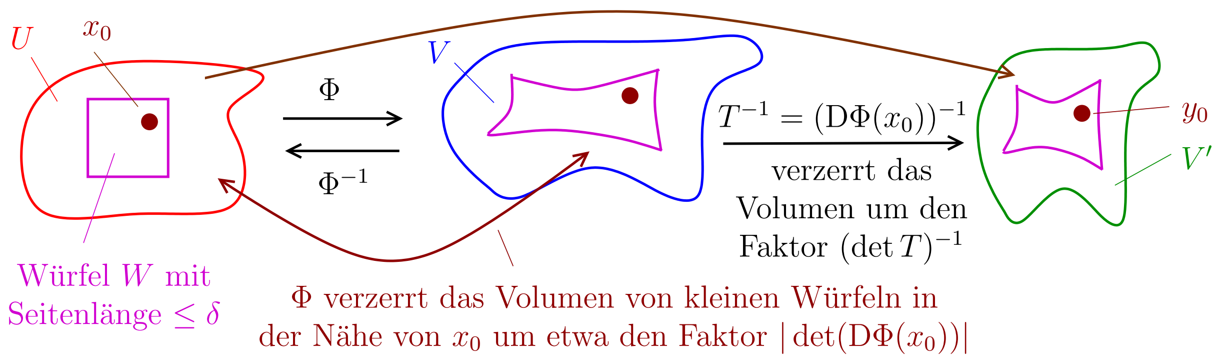
Also gilt $F(x) \in W(b,(1+\sqrt{n}\cdot\mu)\cdot\delta)$. ⊞

Behauptung 2. Es ist
$$W(b,(1-\sqrt{n}\cdot\mu)\cdot\delta) \;\subset\; F(W(a,\delta)).$$
Aus Behauptung 1 und $\mu \in [0,\frac{1}{\sqrt{n}}]$ folgt, dass $F(W(a,\delta)) \subset W(b,r)$. Wir können also die Voraussetzung an $\|\mathrm{D}F^{-1}(y) - \mathrm{id}\,\|$ anwenden. Man zeigt man nun, fast genauso wie in Behauptung 1, dass $F^{-1}(W(b,(1-\sqrt{n}\cdot\mu)\cdot\delta)) \subset W(a,\delta)$. Die Behauptung 2 folgt dann durch Anwenden der Abbildung F auf diese Inklusion. ■

In Satz 6.3 hatten wir gesehen, dass bei Anwenden einer Matrix A auf einen messbare Menge sich das Volumen mit dem Faktor $|\det(A)|$ multipliziert. Der folgende Satz gibt nun eine, gezwungenermassen, schwächere Aussage für C^1-invertierbare Abbildungen.

Hilfssatz 11.4. *Es seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1-invertierbare Abbildung und es sei $x_0 \in U$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $r > 0$, so dass für jeden Würfel $W = W(a,\delta)$ in U mit $0 < \delta \le \frac{1}{2}r$ und $x_0 \in W$ gilt, dass*
$$\left|\frac{\mathrm{Vol}(\Phi(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - |\det(\mathrm{D}\Phi(x_0))|\right| \;\le\; \epsilon.$$

mit $T := \mathrm{D}\Phi(x_0)$ gilt: $F := T^{-1}\circ\Phi$ verzerrt das Volumen in der Nähe von x_0 kaum



Beweis.

Wir wissen aus Satz 6.3, dass eine Matrix A das Volumen um den Faktor $|\det(A)|$ multipliziert. Zudem wissen wir aus Hilfssatz 11.3, dass eine C^1-invertierbare Abbildung F mit $\mathrm{D}F(x_0) = \mathrm{id}$ das Volumen„kaum" ändert. Wir führen jetzt die gewünschte Aussage auf diese beiden Aussagen zurück.

Wir setzen $T := \mathrm{D}\Phi(x_0)$ und wir betrachten die Abbildung

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rr, bend right, "=:F"'] & V \arrow[r, "v\mapsto T^{-1}\cdot v"] & V' := T^{-1}(V)\,. \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $F = T^{-1}\circ\Phi$ ist ebenfalls C^1-invertierbar. Wir setzen $y_0 := F(x_0)$. Aus der Kettenregel folgt, dass $\mathrm{D}F(x_0) = \mathrm{id}$ und $\mathrm{D}F^{-1}(y_0) = \mathrm{id}$. Wir machen nun folgende

Vorüberlegung. Für jeden Würfel W gilt

$$\left|\frac{\operatorname{Vol}(\Phi(W))}{\operatorname{Vol}(W)} - |\det T|\right| \overset{\text{denn } \Phi = T\circ F}{\downarrow}{=} \Bigg| \underbrace{\frac{\operatorname{Vol}(T(F(W)))}{\operatorname{Vol}(F(W))}}_{=\,|\det T|,\text{ nach Satz 6.3}} \cdot \frac{\operatorname{Vol}(F(W))}{\operatorname{Vol}(W)} - |\det T|\Bigg| = |\det T| \cdot \left|\frac{\operatorname{Vol}(F(W))}{\operatorname{Vol}(W)} - 1\right|.$$

Es genügt nun also folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $r > 0$, so dass für jeden Würfel $W = W(a, \delta)$ in U mit $\delta \le \frac{1}{2}r$ und $x_0 \in W$ gilt, dass

$$-\frac{\epsilon}{|\det T|} \;\le\; \frac{\operatorname{Vol}(F(W))}{\operatorname{Vol}(W)} - 1 \;\le\; \frac{\epsilon}{|\det T|}.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Wir wählen ein $\mu \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$, so dass[71]

$$-\frac{\epsilon}{|\det T|} \le (1 - \sqrt{n}\cdot\mu)^n - 1 \quad \text{und} \quad (1 + \sqrt{n}\cdot\mu)^n - 1 \le \frac{\epsilon}{|\det T|}.$$

Aus der Tatsache, dass $\mathrm{D}F(x_0) = \mathrm{id}$, $\mathrm{D}F^{-1}(y_0) = \mathrm{id}$, der Stetigkeit von $\mathrm{D}F$ und $\mathrm{D}F^{-1}$ und aus Lemma 11.1 folgt, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$W(x_0, r) \;\subset\; U \quad \text{und} \quad W(y_0, r) \;\subset\; V',$$

und so dass folgende Ungleichungen gelten

$$\max_{x \in W(x_0, r)} \|\mathrm{D}F(x) - \mathrm{id}\| \;\le\; \mu \quad \text{und} \quad \max_{y \in W(y_0, r)} \|\mathrm{D}F^{-1}(y) - \mathrm{id}\| \;\le\; \mu.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $r > 0$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Es sei jetzt also $W = W(a, \delta) \subset U$ ein Würfel mit $x_0 \in W$ und $\delta \le \frac{1}{2}r$. Hilfssatz 11.3 besagt nun, dass

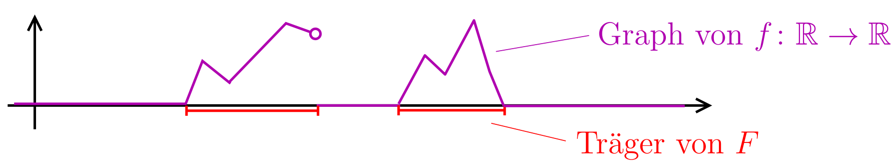
$$\underbrace{(1 - \sqrt{n}\cdot\mu)^n - 1}_{\ge -\frac{\epsilon}{|\det T|}\text{ nach Wahl von }\mu} \;\le\; \frac{\operatorname{Vol}(F(W))}{\operatorname{Vol}(W)} - 1 \;\le\; \underbrace{(1 + \sqrt{n}\cdot\mu)^n - 1}_{\le \frac{\epsilon}{|\det T|}\text{ nach Wahl von }\mu}.$$

■

11.3. Beweis der Transformationsformel für Abbildungen mit kompaktem Träger.

Definition. Der Träger einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Menge

$$\text{Träger}(f) \;:=\; \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \ne 0\}} \;=\; \text{Abschluss der Menge } \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \ne 0\}.$$

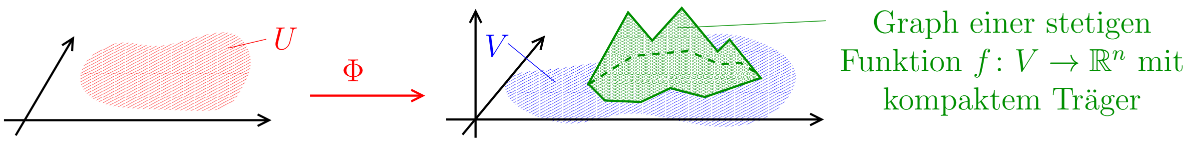


In diesem Teilkapitel beweisen wir die Transformationsformel 10.2 für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger. Im nächsten Teilkapitel werden wir den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurückführen.

[71] Warum existiert solch ein μ?

Satz 11.5. *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung. Es sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int\limits_{x\in U} f(\Phi(x)) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi(x)|\, d\lambda \;=\; \int\limits_{y\in\Phi(U)} f(y)\, d\lambda.$$



Für den Beweis von Satz 11.5 werden wir folgendes Lemma benötigen.

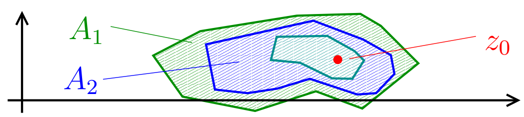
Lemma 11.6. *Es sei $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ eine absteigende Folge von kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, so dass*

$$\mathrm{Vol}(A_k) > 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{Durchmesser}(A_k) \;=\; 0.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Es existiert genau ein $z_0 \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$.*
(2) *Für jede stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g(z_0) = 0$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{Vol}(A_k)} \int\limits_{z\in A_k} g(z)\, d\lambda \;=\; 0.$$



Beweis. Die erste Aussage haben wir in Übungsaufgabe 2 von Übungsblatt 3 bewiesen. Aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals folgt, dass für jede kompakte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\Bigg|\int\limits_{z\in M} g(z)\, d\lambda\Bigg| \;\le\; \mathrm{Vol}(M) \cdot \sup\big\{|g(z)| \,\big|\, z \in M\big\}$$

gilt. Die zweite Aussage folgt nun leicht aus dieser Beobachtung, der Stetigkeit von g, der Tatsache, dass $g(z_0) = 0$ und der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Durchmesser}(A_k) = 0$. ■

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 11.5 zu.

Beweis von Satz 11.5. Wir beweisen den Satz in dem Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^n$. Der allgemeine Fall wird ganz ähnlich bewiesen, siehe [**Fo3**, Seite 103].

Es sei nun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Wir setzen

$$e(x) \;:=\; f(\Phi(x)) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi(x)|.$$

Die Funktion e ist dann ebenfalls stetig. Der Träger von f ist nach Voraussetzung kompakt. Nachdem Φ ein Homöomorphismus ist, ist auch der Träger von e kompakt. Es folgt daher aus Satz 7.20, dass die Funktion e Lebesgue-integrierbar ist. Es genügt nun also die Gleichheit der Lebesgue-Integrale zu beweisen.

Für eine beliebige messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir den„Defekt”

$$\Delta(A) \;:=\; \int\limits_{y\in\Phi(A)} f(y)\,d\lambda \;-\; \int\limits_{x\in A} e(x)\,d\lambda.$$

Die Aussage des Satzes ist gerade, dass gilt $\Delta(\mathbb{R}^n) = 0$. Der Träger von e ist kompakt. Es gibt also einen Würfel Q in $\mathbb{R}^n$, so dass der Träger von e in Q enthalten ist. Es genügt also zu zeigen, dass $\Delta(Q) = 0$.[72]

Wir wollen also zeigen, dass $\Delta(Q) = 0$. Für„sehr kleine” Würfel W ist Φ„fast linear” und g ist„fast konstant”. In dem Fall, dass Φ linear und g konstant ist, folgt aus Satz 6.3, dass $\Delta(W) = 0$. Die Ausgangslage ist also wie im Beweis vom Cauchyschen Integralsatz 5.2 für Rechtecke. Auch in diesem Fall wollten wir zeigen, dass ein Integral über ein Rechteck verschwindet, aber wir hatten nur eine Aussage für kleine Rechtecke. Wir verfahren nun wie im Beweis des Cauchyschen Integralsatz 5.2 für Rechtecke. Durch sukzessives Halbieren der Seitenlängen konstruieren wir eine Folge von immer kleiner werdenden Würfeln, welche„gegen einen Punkt konvergieren”.

Behauptung 1. Es gibt eine Folge von Würfeln

$$Q \;=\; Q_0 \;\supset\; Q_1 \;\supset\; Q_2 \;\supset\; \dots$$

so dass gilt

(1) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $$\frac{|\Delta(Q_k)|}{\mathrm{Vol}(Q_k)} \;\le\; \frac{|\Delta(Q_{k+1})|}{\mathrm{Vol}(Q_{k+1})}.$$

(2) Es ist $$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Durchmesser}(Q_k) \;=\; 0.$$

Wir unterteilen jetzt den Würfel $Q_0 := Q$ durch Halbieren seiner Seiten in 2^n Würfel $R_1, \dots, R_{2^n}$. Wir wählen $j \in \{1, \dots, 2^n\}$, so dass $|\Delta(R_j)|$ maximal ist, dann gilt

$$\frac{|\Delta(Q)|}{\mathrm{Vol}(Q)} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{aus Lemma 7.19 folgt}\\ \Delta(Q)=\Delta(R_1)+\dots+\Delta(R_{2^n})}}{=}\; \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)}\cdot\left|\sum_{i=1}^{2^n}\Delta(R_i)\right| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\le}\; \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}|\Delta(R_i)| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wahl von } j \text{ und da } \mathrm{Vol}(R_i)=\frac{1}{2^n}\cdot\mathrm{Vol}(Q)}}{\le}\; \frac{1}{2^n\cdot\mathrm{Vol}(R_j)}\cdot\overbrace{\sum_{i=1}^{2^n}|\Delta(R_i)|}^{=2^n\cdot\Delta(R_j)} \;=\; \frac{|\Delta(R_j)|}{\mathrm{Vol}(R_j)}.$$

Wir setzen nun $Q_1 = R_j$. Wir unterteilen jetzt wiederum Q_1 in 2^n Würfel und führen das gleiche Verfahren durch. Wir erhalten eine Folge von Würfeln mit den gewünschten Eigenschaften. ⊞

Es folgt aus Behauptung 1, dass es nun genügt folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung 2. Es gilt $$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta(Q_k)}{\mathrm{Vol}(Q_k)} = 0.$$

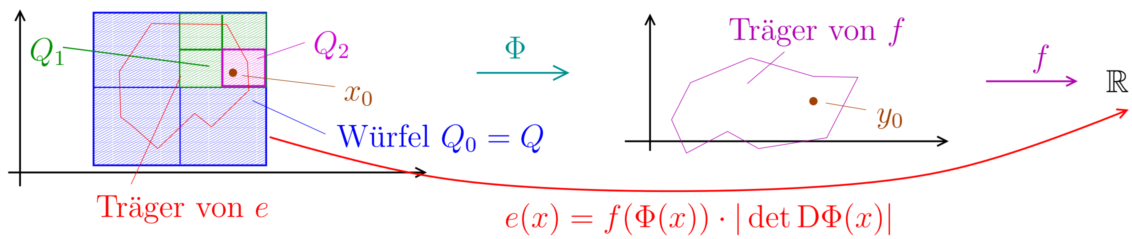
Wir führen einige Vorbereitungen durch:

(i) Es folgt aus Lemma 11.6, dass es einen Punkt x_0 gibt, welcher in allen Q_k's enthalten ist. Wir setzen $y_0 := \Phi(x_0)$.

[72] Hier haben wir verwendet, dass $U = \mathbb{R}^n$, so dass wir den Träger eben in einem Würfer„unterbringen” können. Im allgemeinen Fall muss man den Träger durch endlich viele Würfel abdecken und diese betrachten.

(ii) Wir setzen
$$C \;:=\; \sup\left\{\|\mathrm{D}\Phi(x)\| \,\middle|\, x\in Q\right\} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } Q \text{ ist kompakt}}}{\in} \mathbb{R}.$$

(iii) Wie in Lemma 5.1 sieht man, dass Durchmesser$(\Phi(Q_k)) \leq C \cdot$ Durchmesser(Q_k).
(iv) Es folgt aus Lemma 11.2, dass für $D = (\sqrt{n}\cdot n)^n$ gilt: $\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k)) \leq D \cdot \mathrm{Vol}(Q_k)$.



Es folgt, dass
$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\int\limits_{y\in\Phi(Q_k)}\beta(y)\,d\lambda \;=\; \lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}{\mathrm{Vol}(Q_k)}}_{\substack{\text{beschränkt}\\ \text{durch } D}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}\int\limits_{y\in\Phi(Q_k)}\beta(y)\,d\lambda}_{\text{aus Lemma 11.6 folgt } \lim\limits_{k\to\infty} = 0} \;=\; 0.$$
⊞

Nun gilt, dass
$$\frac{\Delta(Q_k)}{\mathrm{Vol}(Q_k)} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\left(\int\limits_{y\in\Phi(Q_k)} f(y)\,d\lambda \;-\; \int\limits_{x\in Q_k} e(x)\,d\lambda\right) \;=\; (*)$$

Wir wollen nun die Integranden umschreiben, so dass wir Integrale erhalten, auf welche wir entweder Lemma 11.6 anwenden können, oder welche konstant sind. Wir schreiben also

$$\begin{aligned}
(*) \quad &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\left(\int\limits_{y\in\Phi(Q_k)}\underbrace{f(y)-f(y_0)}_{=:\beta(y)}+f(y_0)\,d\lambda \;-\; \int\limits_{x\in Q_k}\underbrace{e(x)-e(x_0)}_{=:\alpha(x)}+\underbrace{f(y_0)\cdot|\det\mathrm{D}\Phi(x_0)|}_{=e(x_0)\text{ ausgeschrieben}}\,d\lambda\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{y\in\Phi(Q_k)}\beta(y)\,d\lambda + f(y_0)\cdot\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}_{\text{erstes Integral}} - \underbrace{\int\limits_{x\in Q_k}\alpha(x)\,d\lambda + f(y_0)\cdot|\det\mathrm{D}\Phi(x_0)|\cdot\mathrm{Vol}(Q_k)}_{\text{zweites Integral}}\Bigg)\\
&= \underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}{\mathrm{Vol}(Q_k)}}_{\substack{\text{nach (iv)}\\ \text{beschränkt}\\ \text{durch } D}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}\int\limits_{y\in\Phi(Q_k)}\beta(y)\,d\lambda}_{\substack{\text{es ist } \beta(y_0)=0, \text{ also folgt}\\ \text{aus Lemma 11.6 mit (iii),}\\ \text{dass } \lim\limits_{k\to\infty}=0}} - \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Vol}(Q_k)}\int\limits_{x\in Q_k}\alpha(x)\,d\lambda}_{\substack{\text{es ist } \alpha(x_0)=0, \text{ also}\\ \text{folgt aus Lemma 11.6,}\\ \text{dass } \lim\limits_{k\to\infty}=0}} + f(y_0)\cdot\Bigg(\underbrace{\frac{\mathrm{Vol}(\Phi(Q_k))}{\mathrm{Vol}(Q_k)}-|\det\mathrm{D}\Phi(x_0)|}_{\lim\limits_{k\to\infty}=0 \text{ nach Hilfssatz 11.4}}\Bigg).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\Delta(Q_k)}{\mathrm{Vol}(Q_k)} = 0$, d.h. wir haben uns Ziel erreicht. ■

11.4. **Das Lebesgue-Integral und Funktionenfolgen** $(*)$.

Definition. Für eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^n$ schreiben wir nun[73]

$$C_c(V) \;:=\; \text{Menge aller stetigen Funktionen } U \to \mathbb{R} \text{ mit kompaktem Träger.}$$

Wir haben im vorherigen Kapitel die Transformationsformel für Funktionen in $C_c(V)$ bewiesen. Die Idee ist nun den allgemeinen Fall auf diesen Fall zurückzuführen. Genauer gesagt, wir wollen eine beliebige Lebesgue-integrierbare Funktion auf V durch Funktionen in $C_c(V)$„approximieren".

Die folgende Definition gibt ermöglicht es uns nun den Begriff„approximieren" in eine saubere Form zu bringen.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir schreiben

$$\mathcal{L}(U) \;:=\; \text{Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf } U.$$

Für $f \in \mathcal{L}(U)$ definieren wir

$$\|f\|_{L^1} \;:=\; \int_U |f|\, d\lambda \;\in \mathbb{R}.$$

Das folgende Lemma fasst die wichtigsten Eigenschaften von $\|f\|_{L^1}$ zusammen.

Lemma 11.7. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.*

(1) *Für $f \in \mathcal{L}(U)$ gilt*
$$\|f\|_{L^1} = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; f = 0 \text{ fast überall,}$$

(2) *Für $f \in \mathcal{L}(U)$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt*
$$\|c \cdot f\|_{L^1} \;=\; |c| \cdot \|f\|_{L^1}$$

(3) *Für f und g in $\mathcal{L}(U)$ gilt*
$$\|f + g\|_{L^1} \;\le\; \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

Beweis. Die erste Aussage ist eine Umformulierung von Satz 7.16. Die zweite Aussage ist elementar und die dritte Aussage folgt aus der Dreiecksungleichung und aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals. ■

Bemerkung. Das Lemma besagt also inbesondere, dass $\| - \|_{L^1}$ eine Seminorm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(U)$ ist.[74]

Das folgende Lemma besagt, dass das Lebesgue-Integral stetig ist bezüglich der L^1-Seminnorm.

Lemma 11.8. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und es sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(U)$ und es sei $f \in \mathcal{L}(U)$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^1} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{k\to\infty} \int_U f_k\, d\lambda \;=\; \int_U f\, d\lambda.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Beobachtung, dass

$$\Big| \int_U f\, d\lambda - \int_U f_k\, d\lambda \Big| \;=\; \Big| \int_U f - f_k\, d\lambda \Big| \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 7.11 (3)}}}{\le}\; \int_U |f - f_k|\, d\lambda \;=\; \|f - f_k\|_{L^1}.$$
■

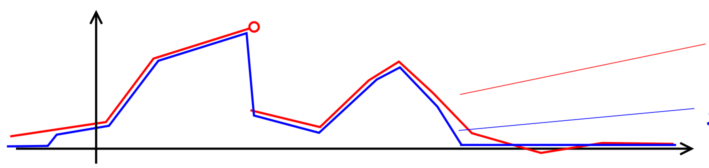
[73]Das„große C" in der Notation steht für„continuous', also stetig. Das„kleine c" steht für„compact".

[74]Eine *Seminorm* $\| - \|$ erfüllt alle Eigenschaften einer Norm, bis auf die Tatsache, dass aus $\|v\| = 0$ nicht notwendigerweise $v = 0$ folgt.

Unser Ziel ist es nun folgenden Satz zu beweisen.

Satz 11.9. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(U)$ mit*

$$\|f - g\|_{L^1} \; < \; \epsilon.$$



Bemerkung. Der Satz besagt also, dass bezüglich der Seminorm $\|-\|_{L^1}$ die Menge $C_c(U)$ dicht in der Menge $\mathcal{L}(U)$ liegt.[75]

Beweis. Wir beweisen den Satz nur im Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^n$. Der allgemeine Fall wird in [**Fo3**, Seite 65] bewiesen.

Nachdem jede Lebesgue-integrierbare Funktion die Differenz zweier nichtnegativer Lebesgue-integrierbare Funktionen ist, und nachdem $\|-\|_{L^1}$ die Dreiecksungleichung erfüllt genügt es den Satz für nichtnegative Funktionen zu beweisen. Der Satz folgt nun leicht aus der Tatsache, dass $\|-\|_{L^1}$ eine Seminorm ist und aus der folgenden Behauptung.

Behauptung.

(1) Für jede nichtnegative Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und jedes $\eta > 0$ gibt es eine Stufenfunktion g mit

$$\|f - g\|_{L^1} \; < \; \eta.$$

(2) Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $\eta > 0$ gibt es ein $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\chi_A - \chi_Q\|_{L^1} \; \leq \; \eta.$$

(3) Für alle halboffenen Quader Q und alle $\eta > 0$ gibt es ein $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\chi_Q - g\|_{L^1} \; < \; \eta.$$

Wir beweisen nun die drei Aussagen der Behauptung.

(1) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Lebesgue-integrierbare Funktion und $\eta > 0$. Nach Satz 7.7 gibt es eine Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_k \uparrow f$ und $\int f_k \, d\lambda \uparrow \int f \, d\lambda$. Es folgt aus der Konvergenz der Folge von Integralen, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\int f \, d\lambda \; - \; \int f_k \, d\lambda \;\; < \;\; \eta,$$

also auch

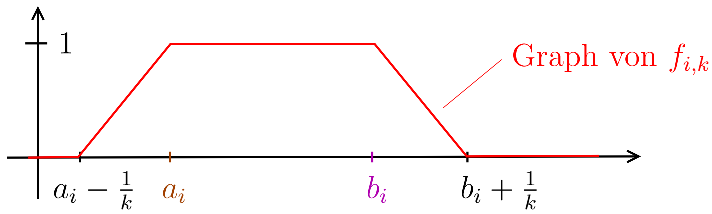
$$\|f - f_k\|_{L^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } f \geq f_k}}{=} \int f - f_k \, d\lambda \;\; \leq \;\; \int f \, d\lambda - \int f_k \, d\lambda \;\; < \;\; \eta.$$

(2) Es sei also $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und es sei $\eta > 0$. In Übungsblatt 11 hatten wir schon bewiesen, dass es ein $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{Vol}(Q \triangle A) < \epsilon$ gibt. Daraus folgt

[75] Gilt dies auch bezüglich anderen Normen, z.B. der Maximumsnorm?

nun, dass
$$\big\| |\chi_A - \chi_Q| \big\|_{L^1} \;=\; \|\chi_{A \triangle Q}\| \;=\; \mathrm{Vol}(Q \triangle A) \;<\; \epsilon.$$

(3) Es sei also
$$Q \;=\; [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$
ein halboffener Quader. Für $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, n$ betrachten wir die Funktion $f_{i,k}$, deren Graph in der Abbildung skizziert ist. [76] Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir dann



$$\begin{aligned} f_k \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f_{1,k}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{n,k}(x_n). \end{aligned}$$

Diese Funktionen liegen alle in $C_c(\mathbb{R}^n)$, und es ist
$$\|\chi_Q - f_k\|_{L^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } f_k \geq \chi_Q}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f_k - \chi_Q \, d\lambda \;\leq\; \underbrace{\prod_{i=1}^n \big(b_i - a_i + \tfrac{2}{k}\big) - \prod_{i=1}^n \big(b_i - a_i\big)}_{\lim\limits_{k\to\infty} = 0}.$$

Es folgt also, dass
$$\lim_{k \to \infty} \|\chi_Q - f_k\|_{L^1} \;=\; 0.$$

Das gewünschte g ist also durch ein f_k, mit k groß genug, gegeben. ■

Satz 11.10. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{f_m\}_{m \geq 1}$ eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}(U)$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}(U)$ mit*
$$\lim_{m \to \infty} \|f - f_m\|_{L^1} \;=\; 0.$$
Zudem gibt es eine Teilfolge $\{f_{m_k}\}_{k \geq 1}$, so dass
$$\lim_{k \to \infty} f_{m_k}(x) \;=\; f(x) \qquad \textit{für fast alle } x \in U.$$

Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen
$$\mathcal{N}(U) \;:=\; \{\text{alle } f \in \mathcal{L}(U) \text{ mit } \|f\|_{L^1} = 0\}.$$
Dies ist ein Untervektorraum[77] von $\mathcal{L}(U)$ und $\|-\|_{L^1}$ definiert eine Norm auf dem Quotientenvektorraum $\mathcal{L}(U)/\mathcal{N}(U)$. Satz 11.10 besagt nun insbesondere, dass jede L^1-Cauchyfolge

[76] Der Form halber ist hier noch die präzise Definition der Funktion, diese ist gegeben durch
$$\begin{aligned} f_{i,k} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in (-\infty, a_i - \frac{1}{k}], \\ k(t - a_i - \frac{1}{k}), & \text{wenn } x \in [a_i - \frac{1}{k}, a_i), \\ 1, & \text{wenn } x \in [a_i, b_i), \\ 1 - k(t - b_i), & \text{wenn } x \in [b_i, b_i + \frac{1}{k}), \\ 0, & \text{wenn } x \in [b_i + \frac{1}{k}, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

[77] Warum?

in dem normierten Vektorraum $\mathcal{L}(U)/\mathcal{N}(U)$ konvergiert, d.h. $\mathcal{L}(U)/\mathcal{N}(U)$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum, also ein Banachraum.

Bemerkung. Es erscheint auf den ersten Blick wohl etwas eigenartig, dass man in Satz 11.10 zu einer Teilfolge $\{f_{m_k}\}_{k\geq 1}$ übergehen muss, um punktweise Konvergenz zu erzielen. Dies ist im Allgemeinen aber unvermeidlich. Genauer gesagt, wir konstruieren eine Funktionenfolge wie folgt. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $m = 2^r + s$ mit $s \in \{0, \dots, 2^{r-1}\}$. Wir betrachten dann

$$\begin{aligned} f_m \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in [\frac{s}{2^r}, \frac{s+1}{2^r}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist
$$\|f_m\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f_m(x)|\, dx = \int_{[\frac{s}{2^r}, \frac{s+1}{2^r}]} 1\, dx = \frac{1}{2^r} \leq \frac{1}{m}.$$

Die Funktionenfolge $\{f_m\}_{m\geq 1}$ konvergiert also bezüglich der L^1-Seminorm gegen die Nullfunktion. Andererseits gilt für alle $x \in [0,1]$, dass[78]

$$\liminf f_m(x) = 0 \quad \text{und} \quad \limsup f_m(x) = 1.$$

Wir sehen also, dass die Funktionenfolge $\{f_m\}_{m\geq 1}$ auf keinem Punkt des Intervalls $[0,1]$ gegen die Nullfunktion konvergiert.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 11.10 zuwenden halten wir noch folgendes Korollar fest.

Korollar 11.11. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{L}(U)$ mit*

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{L^1} = 0.$$

Dann gibt es eine Teilfolge $\{f_{m_k}\}_{k\geq 1}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) = f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in U.$$

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{L}(U)$, welche bezüglich der L^1-Seminorm gegen $f \in \mathcal{L}(U)$ konvergiert. Dann ist $\{f_m\}_{m\geq 1}$ insbesondere eine L^1-Cauchfolge. Es sei $f' \in \mathcal{L}(U)$ die Funktion aus Satz 11.10. Dann ist $\|f - f\|_{L^1} = 0$. Also stimmen f und f' nach Lemma 11.7 fast überall überein. Die gewünschten Aussagen über f folgen nun leicht aus den Aussagen über f'. ■

In dem Beweis von Satz 11.10 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 11.12. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{g_k\}_{k\geq 1}$ eine Funktionenfolge in $\mathcal{L}(U)$ mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^1} < \infty.$$

[78] Warum gilt das?

Dann gibt es eine Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

(1) *Es gibt eine Nullmenge $N \subset U$, so dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \;=\; g(x) \qquad \textit{für alle } x \notin N.$$

(2) *Die Funktion g ist Lebesgue-integrierbar.*

(3) *Es gilt* $$\lim_{m\to\infty} \Big\| g - \sum_{k=1}^{m} g_k \Big\|_{L^1} \;=\; 0.$$

Beweis von Lemma 11.12.

Man würde am liebsten einfach $g(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_m(x)$ setzen. Aber es gibt a priori keinen Grund, warum diese Reihe in irgendeiner Weise konvergieren muss. Wir betrachten daher zuerst $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |g_m(x)|$, denn diese Reihe konvergiert zumindest gegen ein Element in $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Behauptung. Die Funktion $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |g_k| = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} |g_k|$ ist Lebesgue-integrierbar.

Für alle $m \geq 1$ gilt
$$\int_U \sum_{k=1}^{m} |g_k|\, d\lambda \;=\; \sum_{k=1}^{m} \|g_k\|_{L^1} \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^1} \;<\; \infty.$$
Die Lebesgue-Integrierbarkeit unserer Funktion folgt nun aus dem Satz 7.14 von der monotonen Konvergenz von Levi angewandt auf
$$\sum_{k=1}^{m} |g_k| \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|. \qquad \boxplus$$

Es folgt aus Satz 7.18, dass es eine Nullmenge $N \subset U$ gibt, so dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|g_k(x)| < \infty$ für alle $x \in U \setminus N$. Jede absolut konvergente Reihe ist insbesondere konvergent. Für alle $x \in U \setminus N$ existiert daher auch der Grenzwert
$$g(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \;\in\; \mathbb{R}.$$
Für $x \in N$ setzen wir zudem $g(x) = 0$.

Wir wollen nun (2) mithilfe des Satzes 8.4 von der majorisierten Konvergenz beweisen. Für die Partialsummen gilt die Majorisierung
$$\Big|\sum_{k=1}^{m} g_k\Big| \;\leq\; \sum_{k=1}^{m} |g_k| \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|.$$
Wir hatten gerade gezeigt, dass die Funktion auf der rechten Seite Lebesgue-integrierbar ist. Es folgt also aus Satz 8.4 von der majorisierten Konvergenz, dass g ebenfalls Lebesgue-integrierbar ist.

Es verbleibt (3) zu beweisen. Es ist
$$\lim_{m\to\infty} \Big\| g - \sum_{k=1}^{m} g_k \Big\|_{L^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \text{ außerhalb einer Nullmenge}}}{\leq} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{L_1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Voraussetzung ist } \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{L_1} < \infty}}{=} 0.$$
■

Wir sind nun in der Lage Satz 11.10 zu beweisen.

Beweis von Satz 11.10. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}(U)$.

Der Gedanke ist nun die Folge f_m als Reihe umzuschreiben, und dann Lemma 11.12 anzuwenden. Die erste Idee wäre wohl

$$f_m \;=\; f_1 + \sum_{k=2}^{m} (f_k - f_{k-1})$$

zu schreiben. Aber in diesem Fall ist es nicht klar, warum $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\|_{L^1} < \infty$ sein soll. Wir gehen nun zu einer Teilfolge von f_m über, um sicher zu stellen, dass diese Reihe dann doch konvergiert.

Nachdem $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}(U)$ ist, gibt es insbesondere eine Indexfolge $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, so dass[79]

$$\|f_{m_k} - f_{m_{k-1}}\|_{L^1} \;\leq\; 2^{-k} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir können nun Lemma 11.12 auf die Reihe

$$\underbrace{f_{m_1}}_{=:g_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{(f_{m_k} - f_{m_{k-1}})}_{=:\,g_k,\ \text{wobei } \|g\| \leq 2^{-k}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{f_{m_1} + \sum_{k=2}^{n} (f_{m_k} - f_{m_{k-1}})}_{=f_{m_n}} \Big)$$

anwenden. Lemma 11.12 besagt nun, dass es ein $f \in \mathcal{L}(U)$ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) \;=\; f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in U,$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{m_k} - f\|_{L^1} \;=\; 0.$$

Da $\{f_m\}_{m\geq 1}$ eine L^1-Cauchyfolge ist, folgt daraus auch, dass

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^1} \;=\; 0.$$

■

11.5. **Beweis der allgemeinen Transformationsformel** $(*)$**.** Wir beweisen nun die Transformationsformel im allgemeinen Fall.

Beweis von Satz 10.2. Es seien also $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, es sei $\Phi\colon U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung zudem sei eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ gegeben.

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\begin{aligned} e\colon U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e(x) := f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \end{aligned}$$

Lebesgue-integrierbar ist, und dass

$$\int_{x\in U} e(x)\, d\lambda \;=\; \int_{y\in V} f(y)\, d\lambda.$$

[79]Warum gibt es eine solche Indexfolge? Denken Sie an eine Cauchy-Folge $(a_m)_{m\geq 1}$ von reellen Zahlen. Warum gibt es eine Indexfolge $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, so dass $|a_{m_k} - a_{m_{k-1}}| \leq 2^{-k}$ für alle k?

Die Lebesgue-integrierbare Funktion f ist insbesondere messbar. Nachdem Φ ein Homöomorphismus ist folgt leicht aus Satz 5.9, dass auch $f \circ \Phi$ messbar ist.[80] Nachdem $|\det \mathrm{D}\Phi|$ stetig, insbesondere messbar ist, ist dann nach Lemma 7.2 auch $e = (f \circ \Phi) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi|$ messbar auf U.[81]

Es folgt aus Satz 11.9, dass es eine Folge von Funktionen $f_k \in C_c(V), k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^1} \;=\; 0.$$

Es folgt aus Korollar 11.11, dass wir, nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge, annehmen können, dass es eine Nullmenge $N \subset V$ gibt, so dass

$$f(y) \;=\; \lim_{k\to\infty} f_k(y) \qquad \text{für alle } y \in V \setminus N.$$

Wir setzen nun

$$e_k \;=\; (f_k \circ \Phi) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi|.$$

Dann gilt

$$e(x) \;=\; \lim_{k\to\infty} e_k(x) \qquad \text{für alle } x \in U \setminus \Phi^{-1}(N).$$

Nach Satz 5.6 und Satz 5.9 ist $\Phi^{-1}(N)$ eine Nullmenge in U. Wir erhalten nun also, dass

$$\int\limits_{y\in V} f(y)\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 11.8, da } \lim\limits_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{L^1}=0}}{=} \lim_{k\to\infty}\int\limits_{y\in V} f_k(y)\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 11.5}}}{=} \lim_{k\to\infty}\int\limits_{x\in U} e_k(x)\,d\lambda \;=\; (*)$$

Wir möchten jetzt natürlich am liebsten sagen, dass der Grenzwert der Lebesgue-Integrale der e_k's gerade das Lebesgue-Integral von e ist. Aber aus der punktweisen Konvergenz folgt a priori noch nicht, dass auch die Lebesgue-Integrale konvergieren. Im Hinblick auf Lemma 11.8 wollen wir nun also die Funktionenfolge e_k bezüglich der L^1-Seminorm betrachten.

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|e_k - e_l\|_{L^1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 11.5 angewandt auf } |f_k - f_l|}}{=} \|f_k - f_l\|_{L^1}.$$

Nachdem $\{f_k\}_{L^1}$ bezüglich der L^1-Seminorm eine konvergente Folge ist, ist dies auch eine L^1-Cauchyfolge. Aus der obigen Gleichheit folgt nun auch, dass $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge ist. Nach Satz 11.10 existiert ein $e' \in \mathcal{L}(U)$, so dass die g_k bezüglich der L^1-Seminorm gegen e' konvergieren, und so dass eine Teilfolge der g_k's außerhalb einer Nullmenge M punktweise gegen e' konvergiert. Wir können nun jetzt oben weiterfahren und erhalten, dass

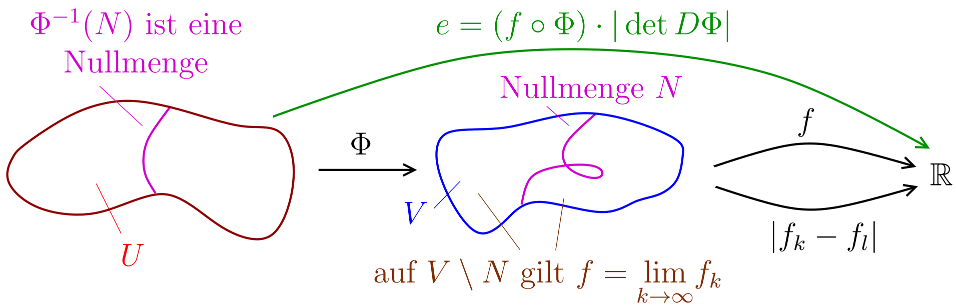
$$(*) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 11.8}}}{=} \int\limits_{x\in U} e'(x)\,d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } e=e' \text{ außerhalb der Nullmenge } M\cup\Phi^{-1}(N)}}{=} \int\limits_{x\in U} e(x)\,d\lambda.$$

Wir müssen nun noch die„Rückrichtung" von Beweis von Satz 10.2 zeigen. D.h. wir müssen beweisen, dass wenn

$$\begin{aligned} e\colon U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e(x) = f(\Phi(x)) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi(x)| \end{aligned}$$

[80] In der Tat, denn für $c \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \circ \Phi < c\} = \Phi^{-1}(\{f < c\})$.

[81] Wo wird im weiteren Verlauf des Beweises dieses Zwischenergebnis verwendet?



Lebesgue-integrierbar ist, dann ist auch die ursprüngliche Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dies folgt jedoch aus dem ersten Teil des Beweises angewandt auf die C^1-invertierbare Funktion $\Psi := \Phi^{-1}\colon V \to U$ und die Funktion e. Denn in diesem Fall ist

$$(e \circ \Psi) \cdot |\det \mathrm{D}\Psi| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } g}}{=} (f \circ \Phi \circ \Psi) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi \circ \Psi| \cdot |\det \mathrm{D}\Psi| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } (\mathrm{D}\Phi)\circ\Psi = (\mathrm{D}\Psi)^{-1} \text{ und } \Phi\circ\Psi^{-1} = \mathrm{id}}}{=} f.$$

■

11.6. **Beispiel für die allgemeine Transformationsformel: der Satz von Gauss.** Wir können jetzt zum Abschluss folgenden Satz von Gauss beweisen:

Satz 11.13.
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \;=\; \sqrt{\pi}.$$

Der Satz ist verblüffend, nachdem man, wie wir in [**Fr1**, Satz 16.6] gesehen hatten, keine explizite Stammfunktion von e^{-x^2} angeben kann (weder Substitution noch partielle Integration führen zum Erfolg), insbesondere kann man daher das uneigentliche Integral nicht„einfach per Hand" bestimmen. Es ist zudem auch überraschend, dass das Ergebnis die Kreiszahl π enthält.

Mithilfe von Substitution kann man nun auch leicht zeigen, dass für alle $\mu \in \mathbb{R}$ und alle $\sigma > 0$ die Gleichheit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \;=\; 1$$

gilt. Dieses Integral spielt eine wichtige Rolle in der Statistik.

Beweis. Mithilfe des Majoranten-Kriteriums für uneigentliche Riemann-Integrale [**Fr1**, Satz 18.3] kann man leicht zeigen, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

konvergiert gegen eine reelle Zahl. Wir setzen also

$$C \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 8.6}}}{=}\; \int_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \;\in\; \mathbb{R}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
C^2 &= C \cdot \int_{y\in\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linearität des Lebesgue-Integrals angewandt auf } C\in\mathbb{R}}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}} e^{-y^2}\cdot C\, dy = \int_{y\in\mathbb{R}} e^{-y^2}\cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx}_{=C}\; dy\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } e^{-y^2} \text{ ist Konstante bezüglich } x}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\, dx\; dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Funktionalgleichung}}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}}\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 9.3 von Fubini, bzw. Lemma 9.5 von Tonelli}}}{=} \int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, d\lambda \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ausschöpfungssatz 8.5}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{B_n^2} e^{-(x^2+y^2)}\, d\lambda\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 10.4 über die Polarkoordinaten}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{r=0}^{r=n}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} e^{-r^2}\cdot \boldsymbol{r}\, d\varphi\, dr \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Berechnung des } \varphi\text{-Integrals}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{r=0}^{r=n} 2\pi\cdot e^{-r^2}\cdot r\; dr\\
&= 2\pi\cdot \lim_{n\to\infty}\int_{r=0}^{r=n} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\cdot(-2r)\, dr \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitution } u=-r^2}}{=} 2\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\int_{u=0}^{u=-n^2} -\frac{1}{2}e^u\, du\\
&= 2\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\Big[-\frac{1}{2}e^u\Big]_0^{-n^2} = \pi.
\end{aligned}
$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir also, dass $C = \sqrt{\pi}$. ■