

ELEMENTARGEOMETRIE

STEFAN FRIEDL

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	2
1. Grundlegende Begriffe der Elementargeometrie	3
1.1. Ebene, Geraden und Strecken	3
1.2. Die Länge einer Strecke	8
1.3. Winkel	10
1.4. Winkel und Schnitte von Geraden	13
2. Bewegungen	14
2.1. Verschiebungen	14
2.2. Spiegelungen an Geraden	17
2.3. Drehungen	19
2.4. Bewegungen	20
2.5. Kongruente Teilmengen	21
3. Kreise	23
3.1. Schnittpunkte von Kreisen	24
3.2. Tangenten zu Kreisen	25
4. Kongruenzsätze für Dreiecke	28
4.1. Formulierung und Beweis der Kongruenzsätze für Dreiecke	28
4.2. Gleichwinklige und gleichschenklige Dreiecke	31
4.3. Die Konstruktion von Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal	34
4.4. Weitere Konstruktionen: die Winkelhalbierende	37
4.5. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks	38
4.6. Weitere Konstruktionen: Das Lot	41
5. Parallelen und Winkelsumme von Dreiecken	43
5.1. Parallele Geraden	43
5.2. Parallelogramme	43
5.3. Die Höhen eines Dreiecks	45
5.4. Die Winkelsumme eines Dreiecks	47
5.5. Reguläre n -Ecke	52
6. Die Kongruenzsätze $SS_{\frac{\pi}{2}}$ und SsW	56
6.1. Der Kongruenzsatz $SS_{\frac{\pi}{2}}$	56
6.2. Winkel und Längen in einem Dreieck	57
6.3. Der Kongruenzsatz SsW	59

6.4.	Der Abstand zwischen zwei Teilmengen der Ebene	61
6.5.	Die Winkelhalbierenden in einem Dreieck und der Inkreis	63
7.	Ähnliche Dreiecke und die Seitenhalbierenden eines Dreiecks	67
7.1.	Streckungen und ähnliche Dreiecke	67
7.2.	Der Strahlensatz	69
7.3.	Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks	73
7.4.	Die Eulersche Gerade (*)	74
8.	Flächeninhalte und der Satz von Pythagoras	77
8.1.	Flächeninhalte	77
8.2.	Der Satz von Pythagoras	79
8.3.	Ein warnendes Beispiel	84
9.	Sphärische Geometrie (*)	87
9.1.	Geodäten	87
9.2.	Volumen und Oberfläche einer Kugel	88
9.3.	Sphärische Dreiecke	91

Literatur:

LITERATUR

- [Fr] S. Friedl: *Analysis IV*, Skript im Sommersemester 2015.
- [Fr2] S. Friedl: *Geometrie für Lehramt Gymnasium*, Skript im Sommersemester 2019.
- [GMP] Gorski und Müller-Philip: *Leitfaden Geometrie*, 6. Auflage, Vieweg + Teubner (2014)
- [KK] M. Koecher und A. Krieg: *Ebene Geometrie*, 3. Auflage, Springer Verlag (2007)
- [Ku] E. Kunz: *Algebra*, 3. Auflage, Vieweg Verlag (2002)

1. GRUNDLEGENDE BEGRIFFE DER ELEMENTARGEOMETRIE

1.1. Ebene, Geraden und Strecken.

Definition. Mit der *Ebene* $\mathbb{E}$ bezeichnen wir die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

In den allermeisten Argumenten wollen die Ebene $\mathbb{E}$ gar nicht explizit als $\mathbb{R}^2$ betrachten, sondern wir wollen uns die “naive Tafel Ebene” oder “Papierebene” (oder vielleicht jetzt moderner, “Bildschirmebene”) aus der Schule vorstellen. Nur wenn wir gezwungen sind, ganz handfeste Argumente zu geben, dann werden wir mit $\mathbb{R}^2$ arbeiten.

Definition. Eine *Gerade* in der Ebene $\mathbb{E}$ ist eine Teilmenge der Form

$$\{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

wobei $P \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0 \in \mathbb{R}^2$.

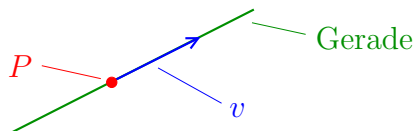


ABBILDUNG 1.

Eine der elementarsten und wichtigsten Eigenschaft von Geraden ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 1.1. *Durch zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene $\mathbb{E}$ verläuft genau eine Gerade, wir bezeichnen diese mit $g(A, B)$.*

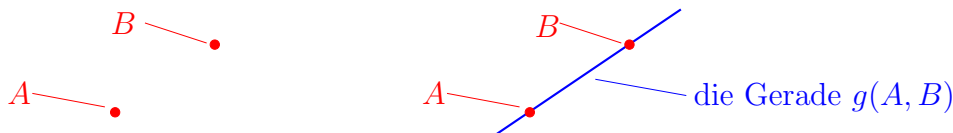


ABBILDUNG 2.

Beweis. Es seien also A, B zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Gerade

$$g := \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Nachdem A, B verschieden sind, ist $B - A \neq 0$, d.h. dies ist in der Tat eine Gerade. Zudem erhalten wir für $\lambda = 0$ den Punkt A und für $\lambda = 1$ erhalten wir den Punkt B . Mit anderen Worten, A und B liegen in der Tat auf der Gerade. Wir haben also gezeigt, dass es *eine* Gerade gibt, welche durch A und B verläuft.

Wir müssen nun noch die Eindeutigkeit der Gerade zeigen. Es sei also

$$h = \{P + \lambda \cdot w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

eine weitere Gerade, welche durch A und B verläuft. Wir müssen zeigen, dass $g = h$. Wir zeigen dies, indem wir zeigen, dass $g \subset h$ und $h \subset g$.

Wir beweisen zuerst, dass $g \subset h$. Wir müssen zeigen, dass jeder Punkt $Q \in g$ auch auf h liegt. Es sei also $Q = A + \lambda \cdot (B - A)$ ein Punkt auf g . Nachdem A und B auf h liegen gibt es $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $A = P + \mu \cdot v$ und $B = P + \nu \cdot v$. Dann gilt auch, dass

$$Q = A + \lambda \cdot (B - A) = \underbrace{P + \mu \cdot v}_\uparrow + \lambda \cdot (\underbrace{P + \nu \cdot v}_{=B} - \underbrace{(P + \mu \cdot v)}_{=A}) = \underbrace{P + v \cdot (\nu + \lambda \cdot \nu - \lambda \cdot \mu)}_{\text{Skalar}} \quad \uparrow \text{ Vereinfachen}$$

Einsetzen von $A = P + \mu v$ und $B = P + \nu v$

Wir haben also gezeigt, dass Q auf h liegt. Nachdem Q beliebig war gilt nun $g \subset h$.

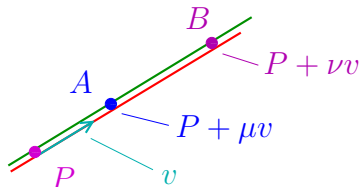


ABBILDUNG 3. Illustration von Lemma 1.1.

In der Übung 1 werden wir zeigen, dass $h \subset g$. □

Definition. Wir sagen zwei Geraden g und h sind *parallel*, wenn sich diese nicht schneiden *oder*, wenn die beiden Geraden identisch sind. Wir schreiben dann $g \parallel h$.

In einer Skizze markieren wir parallele Geraden durch die gleiche Anzahl von kleinen Strichen, siehe Abbildung 4.

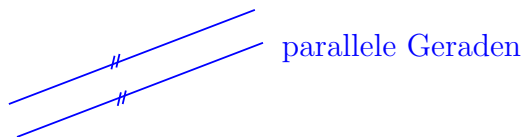


ABBILDUNG 4.

In Satz 1.1 hatten wir gesehen, dass wenn sich zwei Geraden in zwei verschiedenen Punkten schneiden, dann sind die Geraden schon identisch. Wir erhalten also sofort folgendes elementare Lemma.

Lemma 1.2. *Es seien g und h zwei Geraden. Dann gilt*

$$\begin{array}{l} \text{die Geraden } g \text{ und } h \\ \text{sind nicht parallel} \end{array} \iff \begin{array}{l} \text{die Geraden schneiden sich} \\ \text{in genau einem Punkt.} \end{array}$$

Beweis. Es seien g und h zwei Geraden. Nach Definition gilt

$$\begin{array}{ccc} \text{die Geraden } g \text{ und } h & & \text{die Geraden schneiden sich nicht, oder} \\ \text{sind parallel} & \iff & \text{die beiden Geraden sind identisch.} \end{array}$$

Äquivalent dazu ist die Aussage

$$\begin{array}{ccc} \text{die Geraden } g \text{ und } h & & \text{die Geraden schneiden sich und} \\ \text{sind nicht parallel} & \iff & \text{die beiden Geraden sind nicht identisch.} \end{array}$$

Es verbleibt also folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung.

$$\begin{array}{ccc} \text{die Geraden schneiden sich und} & & \text{die Geraden schneiden sich} \\ \text{die beiden Geraden sind nicht identisch} & \iff & \text{in genau einem Punkt.} \end{array}$$

Die Aussage “ $\Leftarrow$ ” ist klar. Die Aussage “ $\Rightarrow$ ” folgt aus Satz 1.1. In der Tat, denn wenn es mehr als einen Schnittpunkt gäbe, dann wären die beiden Geraden nach Satz 1.1 auch schon identisch. $\square$

Wir werden folgendes Lemma in der Übung 1 beweisen.

Lemma 1.3. *Es seien g, h, k drei Geraden. Wenn $g \parallel h$ und $h \parallel k$, dann gilt auch $g \parallel k$.*

Satz 1.4. *Zu jeder Gerade g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade durch P , welche parallel zu g verläuft.*

Bemerkung. Die Aussage von Satz 1.4 wird oft als das *Parallelenaxiom* bezeichnet. Wir beweisen Satz 1.4 mithilfe von linearer Algebra. Die Frage ob man das Parallelenaxiom auch rein aus der klassischen euklidischen Geometrie beweisen kann wurde über zwei Jahrtausende hitzig diskutiert. Mehr zu diesem Thema kann man, wie immer auf wikipedia finden:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelenaxiom>

Beweis. Es sei g eine Gerade. Wir wählen einen Punkt Q auf g und einen Richtungsvektor v , d.h. es ist $g = \{Q + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wir setzen nun $h = \{P + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$. In Übung 1 werden wir nachweisen, dass h parallel zu g verläuft, und dass h die einzige Gerade durch P ist, welche parallel zu g verläuft. $\square$

Definition. Es seien A, B zwei Punkte in der Ebene.

- (1) Wenn $A \neq B$, dann definieren wir die Strecke $\overline{AB}$ als die Menge aller Punkte auf der Gerade $g(A, B)$, welche zwischen A und B liegen, zusammen mit den Endpunkten A und B .
- (2) Wenn $A = B$, dann definieren wir Strecke $\overline{AB}$ als den Punkt A .

Wir illustrieren die Definition in Abbildung 6.

Das folgende Lemma gibt eine Beschreibung der Strecken, wenn wir explizit mit $\mathbb{R}^2$ arbeiten.

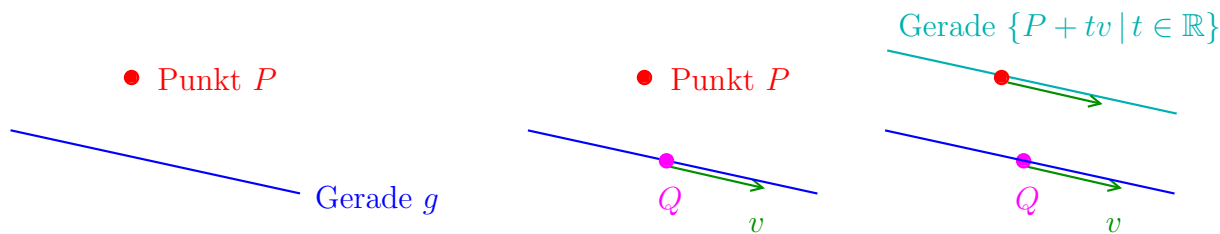


ABBILDUNG 5. Skizze zum Beweis von Satz 1.4.

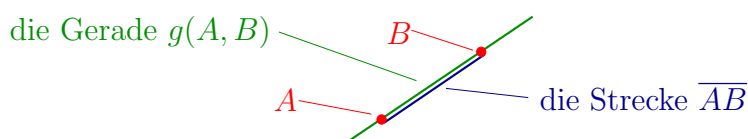


ABBILDUNG 6.

Lemma 1.5. Für zwei Punkte $A, B \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ gilt

$$\overline{AB} := \{A + t \cdot (B - A) \mid t \in [0, 1]\}.$$

□

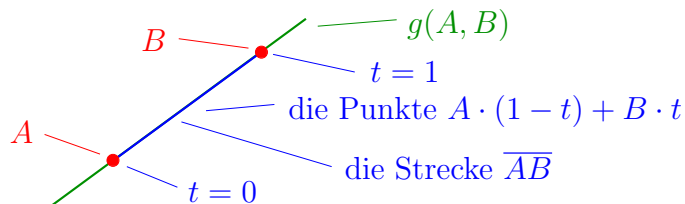


ABBILDUNG 7.

Wir führen nun folgende Definition ein.

Definition. Es sei g eine Gerade in der Ebene $\mathbb{E}$ und es seien P und Q zwei Punkte, welche nicht auf g liegen. Wir sagen zwei Punkte P und Q *liegen auf verschiedenen Seiten* von g , wenn die Strecke $\overline{PQ}$ die Gerade g schneidet. Ansonsten sagen wir, dass P und Q auf der *gleichen Seite* von g liegen.

Das folgende Lemma spiegelt nun die anschauliche Aussage wieder, dass eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerteilt.

Lemma 1.6. Es sei g eine Gerade in $\mathbb{E}$. Dann gibt es zwei Teilmengen U und V von $\mathbb{E} \setminus g$ mit folgenden vier Eigenschaften:

- (1) es ist $\mathbb{E} = U \cup V \cup g$,
- (2) die Mengen U und V schneiden sich nicht,

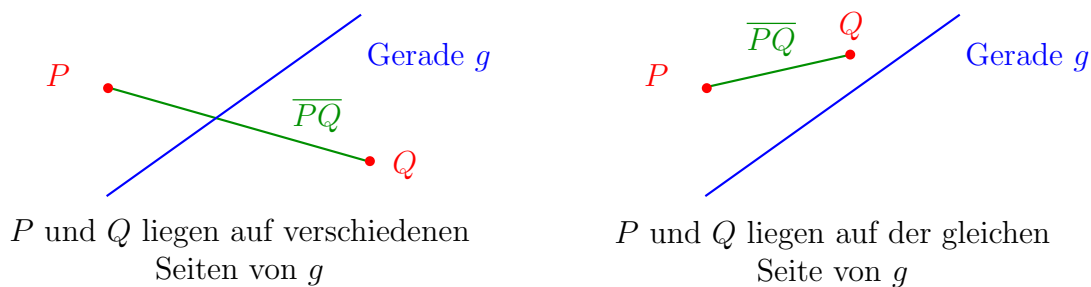


ABBILDUNG 8.

- (3) alle Punkte in U liegen auf der gleichen Seite von g , und
 (4) alle Punkte in V liegen auf der gleichen Seite von g .

Wir bezeichnen U und V als die durch g definierten Halbebenen.

Beweis. Wir werden den Beweis von Lemma 1.6 in der Übung 1 diskutieren. □

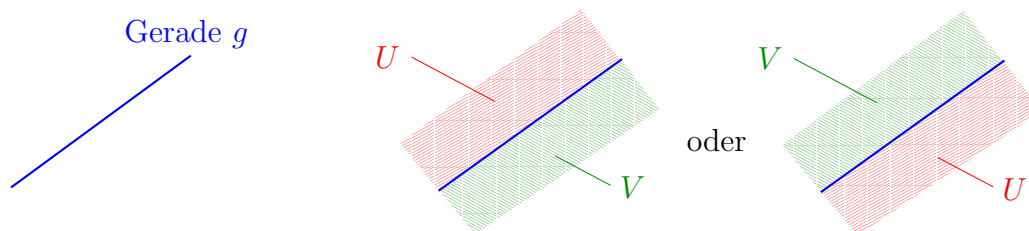


ABBILDUNG 9. Skizze zu Lemma 1.6.

Wir führen nun noch den Begriff des Strahls ein.

Definition. Es seien A, B zwei verschiedene Punkte der Ebene. Wir bezeichnen

$\overrightarrow{AB} :=$ Menge aller Punkte auf $g(A, B)$, welche bezüglich A
auf der gleichen Seite von B liegen

als *Strahl*, welcher von A ausgeht und durch B verläuft. Wir bezeichnen A manchmal als *Anfangspunkt* des Strahls. Die Definition wird in Abbildung 10 illustriert.

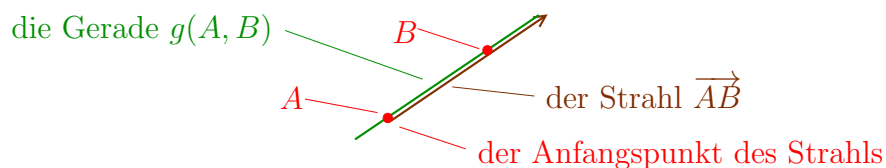


ABBILDUNG 10.

Folgendes Lemma ist das Analogon zu Lemma 1.5.

Lemma 1.7. Für zwei verschiedene Punkte A und B gilt

$$\overrightarrow{AB} = \{A + t \cdot (B - A) \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

□

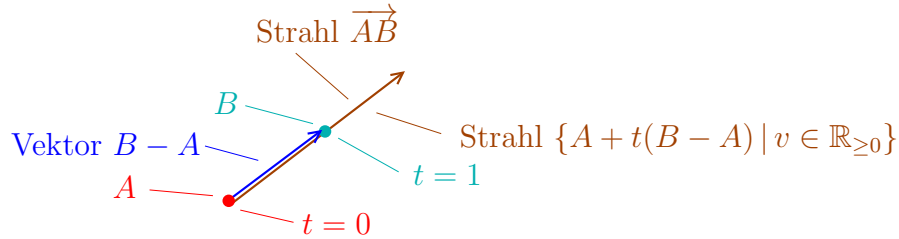


ABBILDUNG 11.

1.2. Die Länge einer Strecke.

Definition. Für zwei Punkte $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir

$$\ell(\overline{AB}) := \|B - A\| := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

als die *Länge der Strecke* $\overline{AB}$.

Nach diesem Unterkapitel werden wir fast nie mit der expliziten Definition der Länge einer Strecke arbeiten, sondern nur mit den Eigenschaften, welche in den folgenden beiden Sätzen formuliert werden.

Satz 1.8.

- (1) Für zwei Punkte A und B gilt

$$A \neq B \iff \ell(\overline{AB}) > 0.$$

- (2) Es seien A, B, C drei Punkte, welche auf einer Geraden liegen. Wenn B zwischen A und C liegt, dann ist

$$\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC}).$$

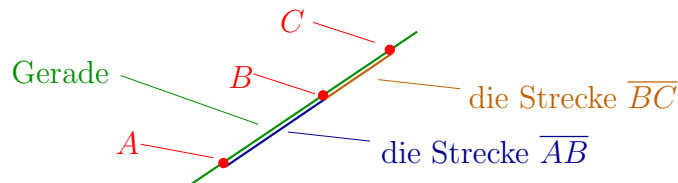


ABBILDUNG 12. Illustration von Satz 1.8.

Beweis. Wir werden diesen Satz in der Übung 2 beweisen.

□

Satz 1.9. (Dreiecksungleichung) *Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$. Dann gilt*

$$\ell(\overline{AC}) \leq \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC}).$$

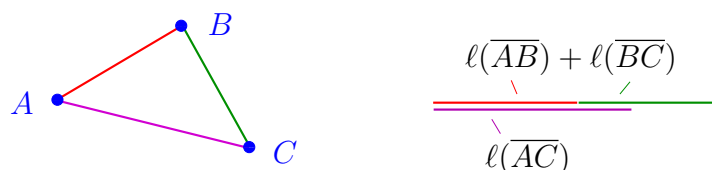


ABBILDUNG 13.

Beweis. Die Dreiecksungleichung ist anschaulich klar, und wir wollen diese deswegen nicht beweisen. Man kann die Dreiecksungleichung beispielsweise mithilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung aus der linearen Algebra bewiesen, siehe z.B. [Fr2]. Aber dieser Beweis ist auch nicht besonders erhellend. $\square$

Die Dreiecksungleichung besagt, salopp gesprochen, dass wenn Sie von A nach C fahren, dann kann die Strecke nicht dadurch kürzer werden, dass Sie über B fahren.

Bemerkung. Die Dreiecksungleichung gilt nicht notwendigerweise für Zugpreise. Wenn Sie von A nach C fahren wollen, dann kann es billiger sein, ein Zugticket von A nach B und dann von B nach C zu lösen.

Wir beschließen dieses Unterkapitel mit folgendem Lemma, welches wir Übung 2 beweisen werden.

Lemma 1.10. *Es seien P und Q zwei Punkte auf einem Strahl S mit Anfangspunkt A . Es gilt*

$$P = Q \iff \ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ}).$$

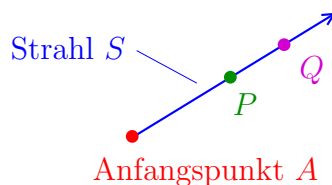


ABBILDUNG 14. Skizze zu Lemma 1.10.

1.3. Winkel.

Definition.

- (1) Ein *Winkel* ist definiert als die Vereinigung von zwei Strahlen s und t , welche vom gleichen Punkt ausgehen. Wir bezeichnen die Strahlen s und t als die *Schenkel* des Winkels.
- (2) Die beiden Strahlen teilen die Ebene in zwei Gebiete auf, wir nennen diese *Winkelfelder*. Die beiden Schenkel des Winkels liegen dabei in beiden Winkelfeldern.



ABBILDUNG 15.

Wir wollen im Folgenden den Begriff der “Größe” eines Winkels einführen. Wir benötigen dazu folgende Definition.

Definition.

- (1) Der *Kreis mit Mittelpunkt P und Radius $r > 0$* ist definiert als die Menge

$$K(P, r) := \{Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{PQ}) = r\}.$$

- (2) Wir definieren¹

$$\pi := \frac{1}{2} \cdot \text{Länge (=Umfang) eines Kreises von Radius 1}.$$

Mit anderen Worten, π ist definiert als die reelle Zahl, so dass

$$\text{Umfang eines Kreises von Radius 1} = 2\pi.$$

Wir können nun die Größe eines Winkels einführen.

Definition. Es sei ein Winkel gegeben durch zwei Strahlen s und t , welche vom gleichen Punkt P ausgehen. Es sei V das *kleinere* der beiden Winkelfelder und es sei $K(P, 1)$ der Kreis um P von Radius 1. Wir definieren die *Größe des Winkels* als

$$\sphericalangle(s, t) := \text{die Länge des Kreisabschnitts } K \cap V.$$

Manchmal bezeichnen wir $\sphericalangle(s, t)$ auch als *Winkelmaß*.

¹Es gibt auch Mathematiker, welche sagen, man sollte durchgehend nicht mit π arbeiten, sondern mit $\tau = 2\pi$, d.h. mit der Länge eines Kreises von Radius 1. In der Tat werden manche Formeln einfacher, wenn man diese mit τ aufschreibt als mit π . Aber für einen Wechsel ist es definitiv zu spät.

Bemerkung. Nachdem wir immer das *kleinere* Winkelfeld nehmen sehen wir, dass das maximale Winkelmaß gegeben ist die Länge eines Halbkreises, also durch π .

Definition.

- (1) Wir sagen der Winkel ist ein *Nullwinkel*, wenn das Winkelmaß 0 beträgt.
- (2) Wir sagen der Winkel ist ein *spitzer Winkel*, wenn das Winkelmaß in $(0, \frac{\pi}{2})$ liegt.
- (3) Wir sagen der Winkel ist ein *rechter Winkel*, wenn das Winkelmaß $\frac{\pi}{2}$ beträgt.
- (4) Wir sagen der Winkel ist ein *stumpfer Winkel*, wenn das Winkelmaß in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ liegt.
- (5) Wir sagen der Winkel ist ein *gestreckter*, wenn das Winkelmaß π beträgt.

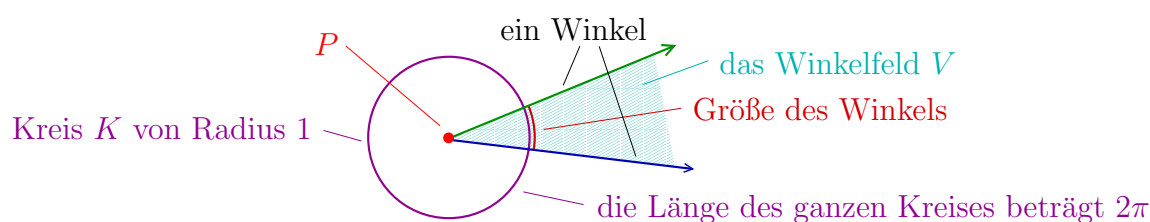


ABBILDUNG 16.

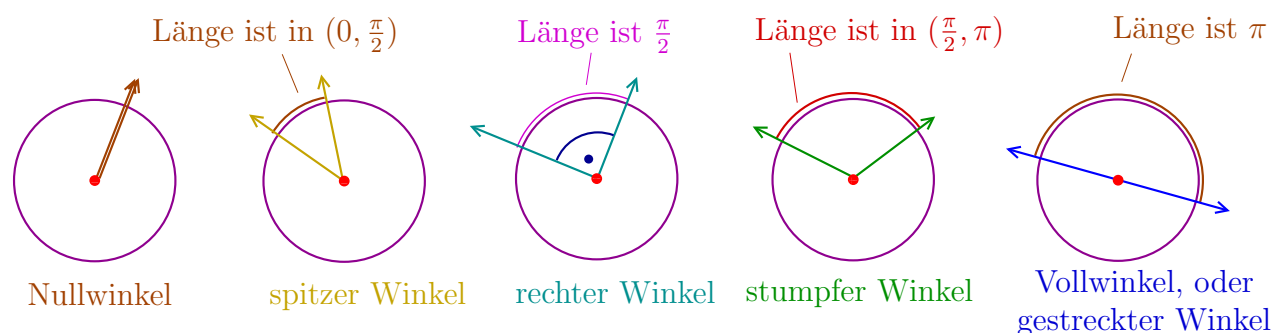


ABBILDUNG 17.

Notation. Wie üblich deuten wir in Zeichnungen einen rechten Winkel mithilfe von einem Punkt und einem Viertelkreis ein, siehe Abbildung 18

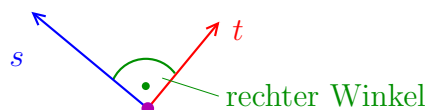


ABBILDUNG 18.

Wir führen zudem folgende fast schon selbsterklärende Notation ein.

Notation. Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$. Wir schreiben

$$\sphericalangle_{ABC} := \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}).$$

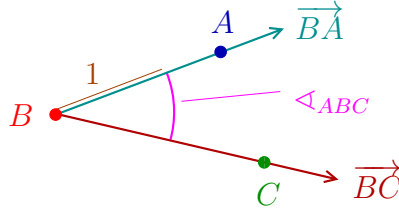


ABBILDUNG 19.

Der folgende Satz spielt in etwa die Rolle von Satz 1.8.

Satz 1.11. *Es seien A, B, C drei verschieden Punkte in $\mathbb{E}$.*

- (1) *Wenn die Strahlen $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ nicht identisch sind, dann gilt $\sphericalangle_{ABC} > 0$.*
- (2) *Wenn P ein Punkt ist, welcher im kleineren Winkelfeld des Winkels $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ liegt, dann gilt*

$$\sphericalangle_{ABC} = \sphericalangle_{ABP} + \sphericalangle_{PBC}.$$

- (3) *E ist $\sphericalangle_{ABC} = \sphericalangle_{CBA}$.*

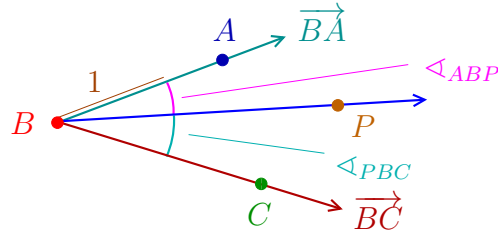


ABBILDUNG 20. Illustration von Satz 1.11.

Beweis.

- (1) Die Aussage folgt daraus, dass in diesem Fall der Kreisabschnitt aus mehr als nur einem Punkt besteht.
- (2) Der Kreisabschnitt für den Winkel, welcher durch A, B und C festgelegt wird, wird durch den Strahl $\overrightarrow{BP}$ in zwei Teile zerlegt. Nachdem die Winkel durch die Länge der Kreisabschnitte definiert sind, erhalten wir sofort die gewünschte Aussage.
- (3) Diese Aussage ist klar, da der Kreisabschnitt nicht von der Reihenfolge der Schenkel abhängt. $\square$

Folgendes Lemma ist das Analogon zu Lemma 1.10.

Lemma 1.12. Es sei $\overrightarrow{AB}$ ein Strahl und es seien P und Q zwei Punkte auf der gleichen Seite² der Gerade $g(A, B)$, welche von A verschieden sind. Wenn $\sphericalangle_{BAP} = \sphericalangle_{BAQ}$, dann gilt $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$.

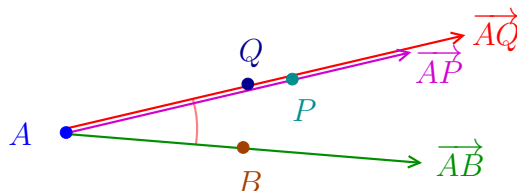


ABBILDUNG 21. Illustration von Lemma 1.12.

Beweis. Wir Aussage ist wohl anschaulich sowieso klar. Man kann die Aussage aber auch mithilfe von Satz 1.11 (1) und (2) beweisen. $\square$

1.4. Winkel und Schnitte von Geraden.

Definition. Es seien g und h zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P schneiden. Der Punkt P zerlegt die Geraden in jeweils zwei Strahlen. Wir nennen Winkel, welche gegenüber liegen *Scheitelwinkel* und wir nennen Winkel, welche nebeneinander liegen *Nebenwinkel*.

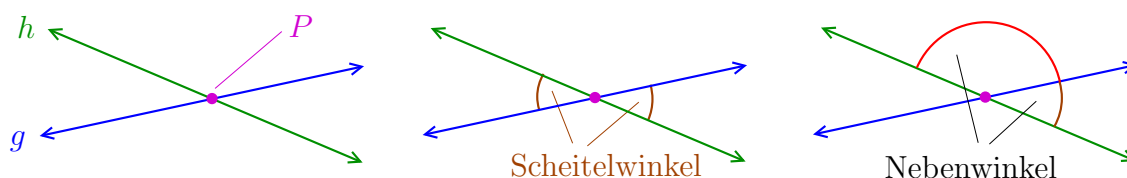


ABBILDUNG 22.

Satz 1.13. Es seien g und h zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P schneiden.

- (1) Die Größen von zwei Nebenwinkel ergeben zusammen π .
- (2) Scheitelwinkel sind gleich groß.

Beweis.

- (1) Zwei Nebenwinkel ergeben zusammen einen gestreckten Winkel. Die Aussage folgt also aus Satz 1.11 (2).
- (2) Wir werden diese Aussage in Übung 2 beweisen.

$\square$

²ist diese Zusatzvoraussetzung notwendig?

2. BEWEGUNGEN

Folgende Definition ist fast selbsterklärend.

Definition.

- (1) Eine Abbildung $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ heißt *längenerhaltend*, wenn für all $P, Q \in \mathbb{E}$ gilt, dass

$$\ell(\overline{\varphi(P)\varphi(Q)}) = \ell(\overline{PQ}).$$

- (2) Eine Abbildung $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ heißt *winkelerhaltend*, wenn für jede Wahl von drei verschiedenen Punkten $A, B, C \in \mathbb{E}$ gilt, dass

$$\sphericalangle_{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)} = \sphericalangle_{ABC}.$$

Satz 2.1. *Jede längenerhaltende Abbildung $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ist auch winkelerhaltend.*

Beweis. Nachdem Winkel über Längen definiert sind ist jede längenerhaltende Abbildung auch winkelerhaltend. $\square$

Satz 2.2. *Wenn $\varphi, \psi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ längenerhaltende Abbildungen sind, dann ist die Verknüpfung*

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi: \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{E} \\ P &\mapsto \varphi(\psi(P)) \end{aligned}$$

ebenfalls längenerhaltend.

Beweis. Wir werden diesen Satz in der Übung 2 beweisen. $\square$

In diesem Kapitel werden wir drei Typen von Abbildungen kennenlernen, welche längenerhaltend sind, nämlich:

- (1) Verschiebungen,
- (2) Spiegelung an Geraden,
- (3) Drehungen

Danach werden wir sehen, dass jede längenerhaltende Abbildung schon eine Verknüpfung von solchen Abbildungen ist.

2.1. Verschiebungen.

Definition. Es sei $v \in \mathbb{R}^2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{E} \\ P &\mapsto P + v \end{aligned}$$

heißt *Verschiebung*. Wir illustrieren die Definition in Abbildung 23.

Der folgende Satz beinhaltet die beiden für uns wichtigsten Eigenschaften von Verschiebungen.

Satz 2.3.

- (1) *Verschiebungen sind längen- und winkelerhaltend.*
- (2) *Verschiebungen führen Geraden in Geraden und Strecken in Strecken über.*

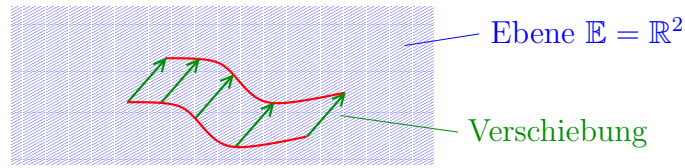


ABBILDUNG 23.

- (3) Zu je zwei Punkten P, Q in der Ebene gibt es genau eine Verschiebung, welche P in Q überführt.
- (4) Es sei φ eine Verschiebung. Für jede Gerade g ist $\varphi(g)$ parallel zu g .

Beweis.

- (1) Es sei als $v \in \mathbb{R}^2$ und $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige Verschiebung. Dann gilt für alle $P, Q \in \mathbb{E}$, dass

$$\begin{array}{ccccccc} \ell(\overline{\varphi(P)\varphi(Q)}) & = & \|\varphi(P) - \varphi(Q)\| & = & \|(P+v) - (Q+v)\| & = & \|P - Q\| = \ell(\overline{PQ}). \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ \text{per Definition, siehe Seite 8} & & \text{Definition von } \varphi & & & & \text{per Definition von } \ell(\overline{PQ}) \end{array}$$

Wir haben also gezeigt, dass Verschiebungen längenerhaltend sind. Aus Satz 2.1 folgt nun auch, dass Verschiebungen winkelerhaltend sind.

- (2) Wie in (1) sei also $v \in \mathbb{R}^2$ und es sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige Verschiebung. Wenn nun $g = \{P + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit Aufpunkt P ist, dann ist das Bild $\varphi(g) = \{P + v + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit Aufpunkt $P + v$. Das gleiche Argument gilt auch für Strecken.
- (3) Es seien P, Q zwei Punkte in der Ebene $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Die Verschiebung um $v = Q - P$ führt P in Q über. Es ist auch offensichtlich, dass dies die einzige solche Verschiebung ist.
- (4) Diese Aussage folgt aus einer leichten Rechnung. □

Wir können Verschiebungen verwenden, um folgenden Satz zu beweisen.

Satz 2.4. *Es seien $g \neq h$ zwei parallele Geraden und es sei k eine weitere Gerade, welche g und h schneidet. Dann gilt:*

- (1) *die Stufenwinkel, deren Definition in Abbildung 24 links skizziert ist, sind ebenfalls gleich groß,*
- (2) *die Wechselwinkel, deren Definition in Abbildung 24 rechts skizziert ist, sind gleich groß.*

Beweis. Wir bezeichnen mit P den Schnittpunkt von g mit k und wir bezeichnen mit Q den Schnittpunkt von h mit k . Nach Satz 2.3 (2) gibt es genau eine Verschiebung φ , welche P in Q überführt.

Behauptung.

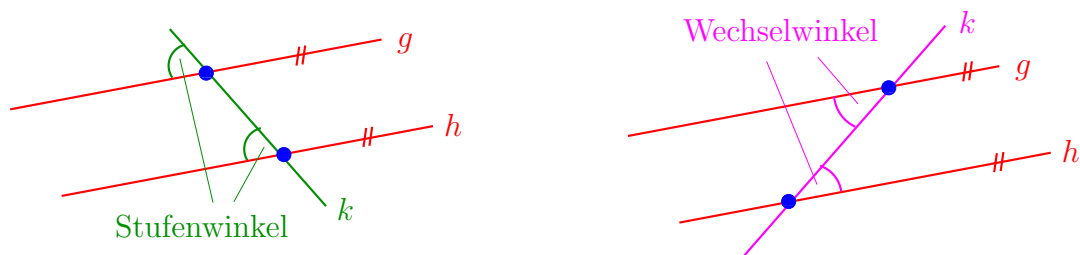


ABBILDUNG 24. Illustration von Satz 2.4.

- (a) Es ist $\varphi(g) = h$.
- (b) Es ist $\varphi(k) = k$.

Wir beweisen nun beide Aussagen:

- (a) Es folgt aus Satz 2.3 (3), dass $\varphi(g)$ parallel zu g verläuft, zudem folgt aus $\varphi(P) = Q$, dass $\varphi(g)$ durch Q verläuft. Es folgt aus der Eindeutigkeit von parallelen Geraden, siehe Satz 1.4, dass $\varphi(g) = h$.
- (b) Es folgt aus Satz 2.3 (3), dass $\varphi(k)$ parallel zu k verläuft. Nachdem $Q \in k$, $P \in k$ und $\varphi(P) = Q$ sehen wir, dass beide Geraden $\varphi(k)$ sowie k den Punkt $\varphi(P) = Q$ enthalten. Es folgt nun wiederum aus Satz 1.4, dass $\varphi(k) = k$. Da $\varphi(k)$ und k parallel sind gilt also, dass $\varphi(k) = k$.

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Es folgt aus der Behauptung, dass die Verschiebung φ den Stufenwinkel bei P in den Stufenwinkel bei Q überführt. Es folgt aus Satz 2.3, dass die Stufenwinkel gleich groß sind.

Die Verschiebung führt zudem den Wechselwinkel bei P in den Scheitelwinkel des Wechselwinkels bei Q über. Es folgt nun aus Satz 2.3 und Satz 1.13, dass die Stufenwinkel gleich groß sind.

□

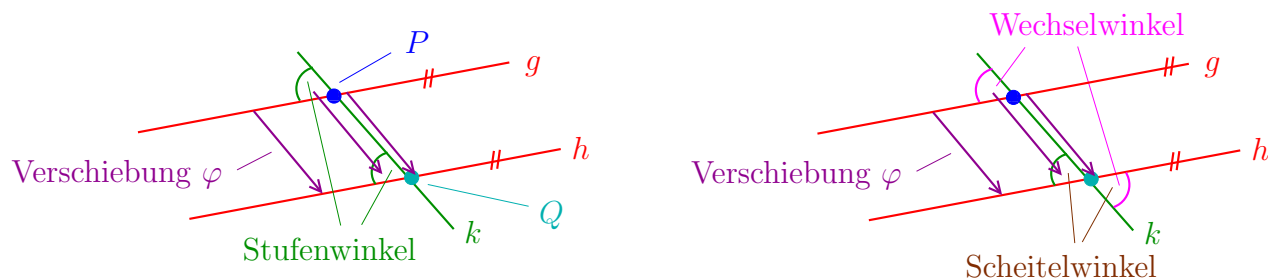


ABBILDUNG 25. Illustration für den Beweis von Satz 2.4.

Praktischerweise gilt auch die Umkehrung von Satz 2.4.

Satz 2.5. *Es seien $g \neq h$ zwei Geraden und es sei k eine weitere Gerade, welche g und h schneidet. Dann gilt:*

- (1) *Wenn die Stufenwinkel gleich groß sind, dann sind g und h parallel.*
- (2) *Wenn die Wechselwinkel gleich groß sind, dann sind g und h parallel.*

Beweis ().*³ Der Beweis ist ganz ähnlich zum Beweis von Satz 2.4. Wir bezeichnen mit P den Schnittpunkt von g und k und wir bezeichnen mit Q den Schnittpunkt von h und k . Es sei φ die Verschiebung von P nach Q . Es folgt dann aus unserer Voraussetzung und Lemma 1.12, dass $\varphi(g)$ parallel zu h ist. Dann war aber auch schon g parallel zu h . $\square$

2.2. Spiegelungen an Geraden. Wir wollen nun die Spiegelung an einer Geraden g einführen. Wir erinnern dazu erst einmal an folgende Definition aus der Schule.

Definition.

- (1) Zwei Geraden g und h heißen *senkrecht*⁴, wenn sich diese in einem Punkt schneiden, und die Strahlen, welche durch g und h gebildet werden, einen rechten Winkel bilden.
- (2) Ganz analog definieren wir auch den Begriff, dass zwei Strecken *senkrecht* sind.

Satz 2.6. *Es sei g eine Gerade in der Ebene $\mathbb{E}$ und es sei P ein beliebiger weiterer Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade h , welche senkrecht auf g steht und welche durch P verläuft. Wir bezeichnen diese Gerade als das Lot bezüglich P auf g und wir bezeichnen den Schnittpunkt von h mit g als den Lotfußpunkt.*

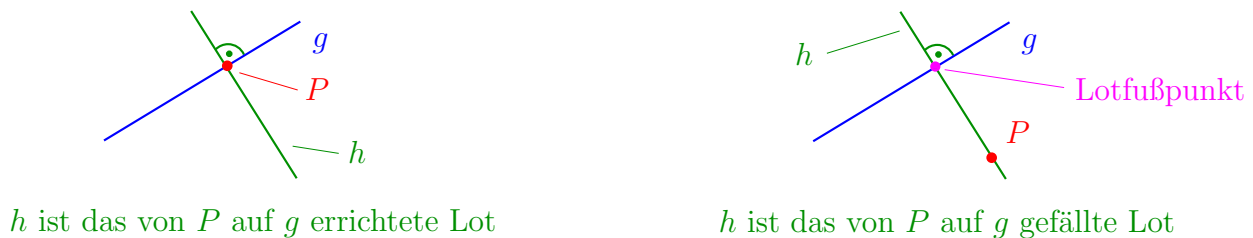


ABBILDUNG 26. Illustration von Satz 2.6.

Beweis. Man kann diesen Satz problemlos mithilfe von etwas linearer Algebra beweisen. Wir werden dies hier nicht ausführen, den wichtigsten Gedanken werden wir in Übung 3 diskutieren. $\square$

Wir können jetzt die Definition der Spiegelung entlang einer Gerade g geben.

Definition. Es sei g eine Gerade und P ein Punkt in $\mathbb{E}$. Wir definieren das Spiegelbild $s_g(P)$ in drei Schritten:

³Hier (*) bedeutet, dass wir den Beweis nicht in der Vorlesung ausgeführt haben, und man diesen getrost ignorieren kann.

⁴Manchmal sagt man auch, “orthogonal” anstatt “senkrecht”.

- (1) es sei h die nach Satz 2.6 eindeutig bestimmte Gerade, durch P , senkrecht zu g ,
- (2) wir bezeichnen mit Q den Lotfußpunkt,
- (3) wir definieren $s_g(P)$ als den eindeutig bestimmten Punkt auf g , mit folgenden zwei Eigenschaften:
 - (a) $s_g(P)$ und P liegen auf verschiedenen Seiten von g ,
 - (b) $s_g(P)$ und P haben den gleichen Abstand zum Lotfußpunkt Q .

Wir bezeichnen die Abbildung $s_g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ als die *Spiegelung entlang der Gerade g* .

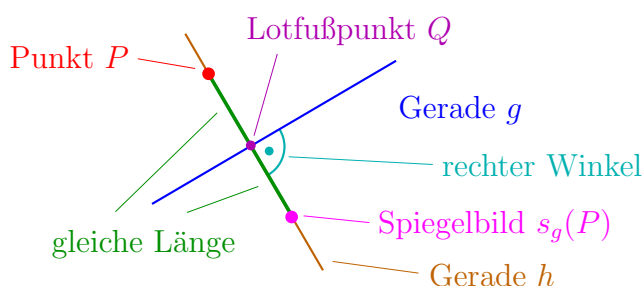


ABBILDUNG 27.

Bemerkung. Macht die obige Definition der Spiegelung entlang von g auch Sinn, wenn P auf der Gerade liegt?

Der folgende Satz folgt eigentlich direkt aus der Definition einer Spiegelung.

Satz 2.7. *Es sei g eine Gerade.*

- (1) *Die Spiegelung entlang der Gerade g vertauscht die Halbebenen, welche wir in Lemma 1.6 eingeführt hatten.*
- (2) *Für jeden Punkt $P \in \mathbb{E}$ gilt $s_g(s_g(P)) = P$. D.h., wenn wir zweimal entlang von g spiegeln, dann sind wir wieder beim Ausgangspunkt.*

Wir beschließen die Diskussion von Spiegelungen mit folgendem Satz.

Satz 2.8.

- (1) *Spiegelungen an Geraden sind längen- und winkelerhaltend.*
- (2) *Verschiebungen führen Geraden in Geraden und Strecken in Strecken über.*

Beweisskizze. Man kann Spiegelungen relativ leicht mithilfe von linearer Algebra beschreiben. Man kann dann problemlos nachrechnen, dass Spiegelungen längenerhaltend sind. Es folgt aus Satz 2.1, dass Spiegelungen auch winkelerhaltend sind. Die Aussage über Geraden und Strecken kann man ebenso problemlos nachrechnen. $\square$

2.3. Drehungen. Wir fügen nun noch eine dritte Art von Abbildung zu den vorherigen hinzu.

Satz 2.9. *Es seien s und t zwei verschiedene Strahlen, welche von einem Punkt P ausgehen. Es gibt genau eine Abbildung $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) φ ist längenerhaltend und winkelerhaltend,
- (2) es ist $\varphi(P) = P$,
- (3) es ist $\varphi(s) = t$,
- (4) s und $\varphi(t)$ liegen auf verschiedenen Seiten der Gerade, welche durch t festgelegt ist.⁵

Wir nennen jede solche Abbildung eine Drehung um P . Zudem bezeichnen wir $\sphericalangle(s, t)$ als den zugehörigen Drehwinkel.

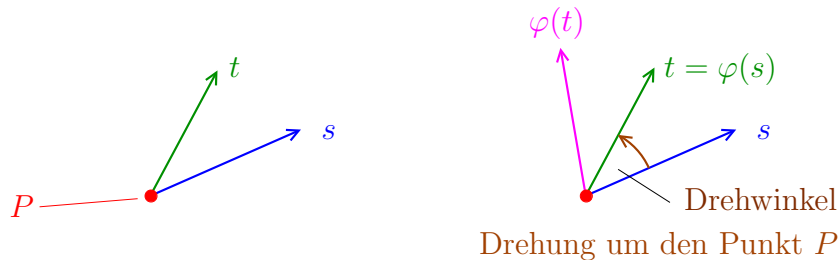


ABBILDUNG 28.

Beweisskizze. Man kann diesen Satz mit etwas Aufwand mithilfe von orthogonalen Matrizen aus der linearen Algebra beweisen. Nachdem dies jedoch kein linearer Algebra Kurs ist, unterlassen wir den Beweis. $\square$

Satz 2.10. *Es sei φ eine Drehung um den Punkt P mit Drehwinkel γ . Für jeden Strahl t mit Anfangspunkt P gilt $\sphericalangle(t, \varphi(t)) = \gamma$.*

Beweis ().* Per Definition einer Drehung um P mit Drehwinkel γ gibt es einen Strahl s mit Anfangspunkt P , so dass $\sphericalangle(s, \varphi(s)) = \gamma$. Nun ist

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Satz 1.11} & & \text{Satz 1.11} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \sphericalangle(t, \varphi(t)) & = \sphericalangle(\varphi(s), \varphi(t)) - \sphericalangle(\varphi(s), t) & = \sphericalangle(\varphi(s), \varphi(t)) - \sphericalangle(s, t) + \sphericalangle(s, \varphi(s)) \\
 & = \sphericalangle(s, t) - \sphericalangle(s, t) + \sphericalangle(s, \varphi(s)) & = \sphericalangle(s, \varphi(s)) = \gamma. \\
 \uparrow & & \\
 \text{da } \varphi \text{ nach Satz 2.9 winkelerhaltend} & &
 \end{array}$$

$\square$

Wir beschließen die kurze Einführung in Drehungen mit folgendem Satz.

Satz 2.11. *Drehungen führen Geraden in Geraden und Strecken in Strecken über.*

⁵Wir werden den Sinn dieser dritten Bedingung in der Übung diskutieren.



ABBILDUNG 29. Skizze zum Beweis von Satz 2.10.

Beweisskizze. Auch diesen Satz kann man mithilfe von linearer Algebra relativ leicht nachrechnen. $\square$

2.4. Bewegungen.

Definition. Eine *Bewegung* der Ebene ist eine Abbildung $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, welche die Verknüpfung von einer oder mehrerer Abbildungen von folgender Art ist:

- (1) Verschiebung,
- (2) Spiegelung entlang einer Gerade,
- (3) Drehung um einen Punkt.

Bemerkung.

- (1) Eine Bewegung wird oft auch *Kongruenzabbildung* bezeichnet. In der Literatur, z.B. in [GMP] werden manchmal als Bewegung nur Verschiebungen und Drehungen und deren Verknüpfungen bezeichnet.
- (2) Die Verknüpfung von Bewegungen ist per Definition eine Verknüpfung von Abbildungen von Typ (1), (2) und (3), also wiederum eine Bewegung.
- (3) In Übungsblatt 3 und 4 diskutieren wir ausgiebig, was passiert, wenn wir zwei Spiegelung bzw. zwei Drehungen verknüpfen.

Lemma 2.12. *Jede Bewegung ist längenerhaltend und winkelerhaltend.*

Beweis. Nach Satz 2.3, Satz 2.8 und Satz 2.9 wissen wir, dass Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen längenerhaltend sind. Es folgt aus Satz 2.2, dass Bewegungen ebenfalls längenerhaltend sind. Es folgt nun aus Satz 2.1, dass Bewegungen auch winkelerhaltend sind. $\square$

Der vollständigkeit halber formulieren wir folgenden Satz.

Satz 2.13. *Jede längenerhaltende Abbildung der Ebene ist eine Bewegung.*

Beweis. Dieser Satz ist nicht ganz trivial, er folgt durch eine längere Berechnung mit Methoden der linearen Algebra. Der Beweis wird z.B. in [Fr2] ausgeführt. $\square$

2.5. Kongruente Teilmengen.

Definition. Wir sagen zwei Teilmengen A und B der Ebene $\mathbb{E}$ sind *kongruent*, wenn es eine Bewegung f mit $f(A) = B$ gibt.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass alle Geraden kongruent zueinander sind und wir wollen bestimmen, wann zwei Strecken kongruent sind.

Lemma 2.14.

- (1) *Alle Strahlen sind zueinander kongruent.*
- (2) *Alle Geraden sind zueinander kongruent.*
- (3) *Es seien $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ zwei Strecken. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
 - (a) *$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind kongruent,*
 - (b) *es ist $\ell(\overrightarrow{AB}) = \ell(\overrightarrow{CD})$,*
 - (c) *es gibt eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.*

Beweis.

- (1) Es seien also $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ zwei Strahlen. Mithilfe einer Verschiebung φ , siehe Satz 2.3 (3), können wir den Punkt A in C überführen und erhalten den Strahl $\overrightarrow{CE}$. Satz 2.9 besagt nun, dass wir mithilfe einer Drehung ψ um den Punkt C können den $\overrightarrow{CE}$ in den Strahl $\overrightarrow{CD}$ überführen können. Insgesamt führen wir also $\overrightarrow{AB}$ mithilfe der Bewegung $\psi \circ \varphi$ in den Strahl $\overrightarrow{CD}$ über.

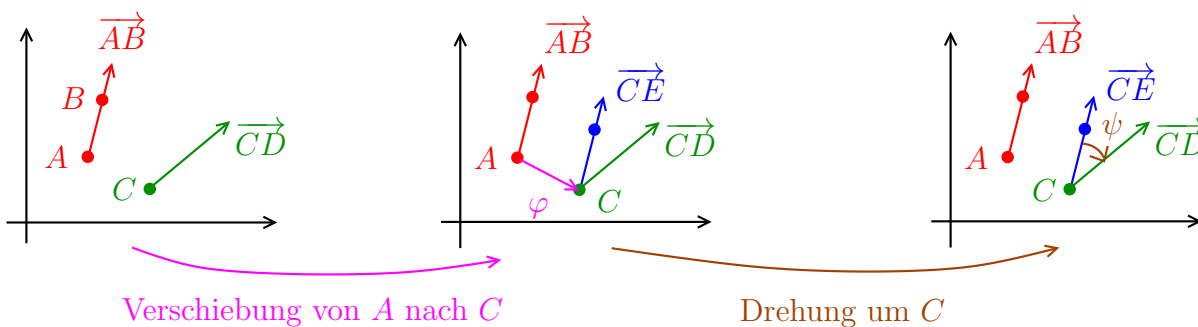


ABBILDUNG 30.

- (2) Das Argument für Geraden ist fast das gleiche wie für Strahlen. Durch eine Verschiebung stellen wir sicher, dass die Geraden sich in mindestens einem Punkt P schneiden. Wenn die Geraden dann schon identisch sind, sind wir fertig.
Ansonsten führen wir eine Drehung um P durch, um die eine Gerade in die andere Gerade überzuführen.
- (3) Nun seien $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ zwei Strecken. Wir müssen zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
 - (a) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind kongruent,
 - (b) es ist $\ell(\overrightarrow{AB}) = \ell(\overrightarrow{CD})$,

(c) es gibt eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.

Die Aussage “(a) $\Rightarrow$ (b)” folgt sofort aus Lemma 2.12. Wir beweisen nun die Aussage “(b) $\Rightarrow$ (c)”. Wir nehmen zuerst an, dass $\ell(\overrightarrow{AB}) = \ell(\overrightarrow{CD}) = 0$. In diesem Fall ist $A = B$ und $C = D$. Nachdem wir mit einer Verschiebung A in C überführen können wir dann auch $\overrightarrow{AB} = A$ in $\overrightarrow{CD} = C$ überführen.

Wir betrachten nun den Fall, dass $\ell(\overrightarrow{AB}) = \ell(\overrightarrow{CD}) > 0$. Anders ausgedrückt, wir betrachten den Fall, dass $A \neq B$ als auch $C \neq D$. Wir können daher die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ betrachten. Nach (1) können wir eine Bewegung φ finden, welche den Strahl $\overrightarrow{AB}$ in den Strahl $\overrightarrow{CD}$ überführt, insbesondere ist $\varphi(A) = C$. Es gilt nun

$$\begin{array}{ccccccc} \ell(\overrightarrow{C\varphi(B)}) & = & \ell(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) & = & \ell(\overrightarrow{AB}) & = & \ell(\overrightarrow{CD}). \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{Bewegungen sind} & & \text{nach Voraussetzung} & & \\ & & \text{längenerhaltend} & & & & \end{array}$$

Nachdem $\varphi(B)$ und D auf dem gleichen Strahl $\overrightarrow{CD}$ liegen und den gleichen Abstand zum Anfangspunkt C besitzen, gilt nach Lemma 1.10 schon, dass $\varphi(B) = D$.

Die Aussage “(c) $\Rightarrow$ (a)” ist eigentlich trivial. Wir nehmen also an, dass es eine Bewegung φ gibt, mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(C) = D$. Nachdem Bewegungen Strecken in Strecken überführen folgt dann auch schon, dass φ die Strecke $\overline{AB}$ in die Strecke $\overline{CD}$ überführt. $\square$

3. KREISE

Wir erinnern zuerst an die Definition eines Kreises und wir führen zudem auch die zugehörige Kreisscheibe ein.

Definition. Es sei $P \in \mathbb{E}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Der *Kreis* mit Mittelpunkt P und Radius r ist definiert als die Menge

$$K(P, r) := \{Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{PQ}) = r\}.$$

Die *Kreisscheibe* mit Mittelpunkt P und Radius r ist definiert als die Menge

$$S(P, r) := \{Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{PQ}) \leq r\}.$$

Bemerkung. Im allgemeinen und schulischen Sprachgebrauch wird oft leider nicht sorgfältig zwischen den Begriffen “Kreis” und “Kreisscheibe” unterschieden.

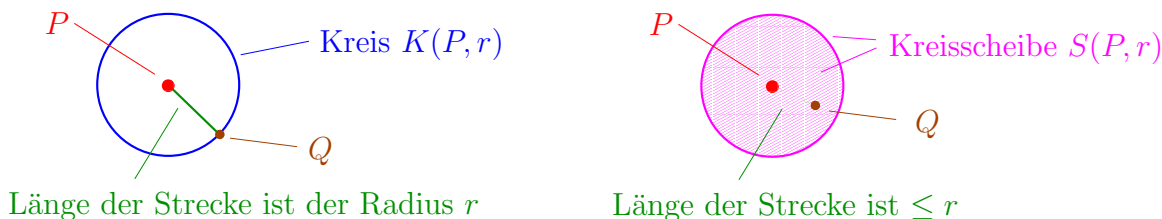


ABBILDUNG 31.

Definition. Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{E}$. Wir bezeichnen den maximalen Abstand zwischen zwei Punkten in X als *Durchmesser von X* . Mit anderen Worten, es ist

$$\text{Durchmesser von } X := \max\{\ell(\overline{PQ}) \mid P, Q \in X\}.$$

Beispiel. In Abbildung 32 sehen wir die beiden Punkte von maximalen Abstand in Bayern.

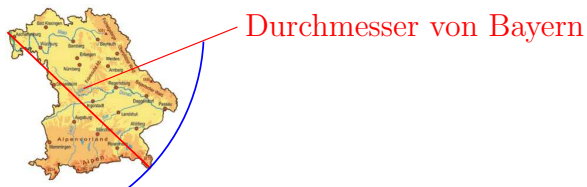


ABBILDUNG 32.

In Übungsblatt 5 werden wir folgendes Lemma beweisen.

Lemma 3.1. *Es gilt*

$$\text{Durchmesser von einem Kreis von Radius } r = 2r.$$

3.1. Schnittpunkte von Kreisen. In Lemma 2.12 hatten wir gesehen, dass Bewegungen längenerhaltend sind. Daraus folgt sofort folgendes Lemma.

Lemma 3.2. *Jede Bewegung f führt einen Kreis von Radius r in einen Kreis von Radius r über, genauer gesagt, für einen Kreis $K(P, r)$ gilt $f(K(P, r)) = K(f(P), r)$.*

Der folgende Satz ist deutlich interessanter.

Satz 3.3. *Es seien $M = K(P, r)$ und $N = K(Q, s)$ zwei Kreise mit $P \neq Q$. Wir bezeichnen mit $g = g(P, Q)$ die Gerade durch P und Q . Dann gilt genau einer der folgenden drei Aussagen:*

- (1) *die Kreise M und N schneiden sich nicht,*
- (2) *die Kreise M und N schneiden sich in genau einem Punkt und dieser liegt auf g .*
- (3) *die Kreise M und N schneiden sich in zwei Punkten U und V , diese haben zudem die Eigenschaft, dass $s_g(U) = V$.*

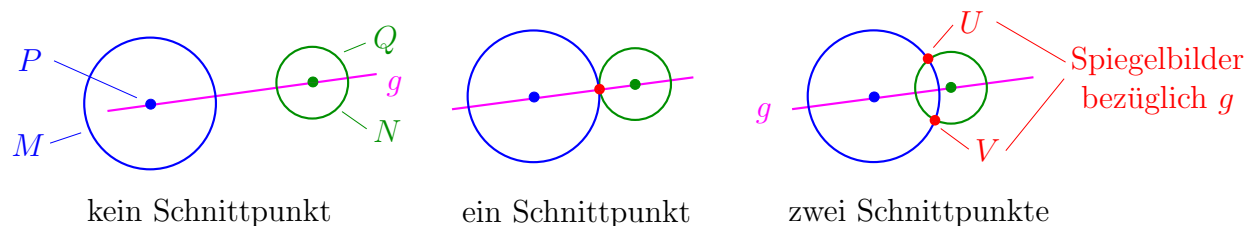


ABBILDUNG 33.

Beweis. Den Satz beweisen wir durch eine explizite Rechnung. Für die Rechnung werden wir ausnahmsweise mal ganz explicit in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ arbeiten und rechnen. Wir machen nun folgende Vorbemerkung:

- (*) Es sei $P = (p_1, p_2)$ ein Punkt $r \geq 0$ und $Q = (q_1, q_2)$ ein weiterer Punkt. Dann folgt sofort aus der Definition, dass

$$Q \in K(P, r) \iff \underbrace{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}_{= \|Q - P\|^2 = \ell(\overline{PQ})^2} = r^2.$$

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Satzes zu. Es seien also $M = K(P, r)$ und $N = K(Q, s)$ zwei Kreise mit $P \neq Q$. Es folgt aus Lemma 3.2, dass sich die Aussagen des Satzes nicht ändern, wenn wir zuerst eine Bewegung auf die Kreise anwenden. Nach Lemma 2.14 gibt es eine Bewegung f , so dass

$$f(\overrightarrow{PQ}) = \text{nicht-negative } x\text{-Achse},$$

d.h. es gilt $f(P) = (0, 0)$ und $f(Q) = (w, 0)$ für ein $w > 0$. Nach der vorherigen Bemerkung können wir nach Lemma 3.2 also jetzt o.B.d.A. annehmen, dass $M = K((0, 0), r)$ sowie $N = K((0, w), s)$.

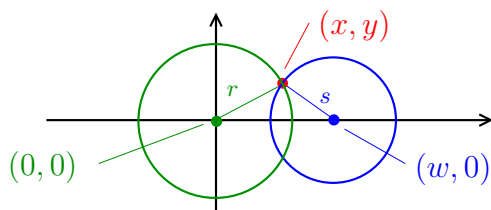


ABBILDUNG 34.

Es sei nun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in M \cap N &\iff (x, y) \text{ liegt auf } M \text{ und } (x, y) \text{ liegt auf } N \\
 &\stackrel{(*)}{\iff} \begin{aligned} (1) \quad &(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \\ (2) \quad &(x-w)^2 + (y-0)^2 = s^2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} (1) \quad &x^2 + y^2 = r^2 \\ (2) \quad &(x-w)^2 + y^2 = s^2 \end{aligned} \\
 &\iff \begin{aligned} (1) \quad &x^2 + y^2 = r^2 \\ (2) \quad &\underbrace{(x-w)^2 + (r^2 - x^2)}_{=x^2+w^2-2wx+r^2-x^2} = s^2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} (1) \quad &x^2 + y^2 = r^2 \\ (2) \quad &w^2 - 2wx + r^2 = s^2 \end{aligned} \\
 &\iff \begin{aligned} (1) \quad &y^2 = r^2 - x^2 \\ (2) \quad &x = \frac{-s^2 + r^2 + w^2}{2w} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also, dass

$$(x, y) \in M \cap N \iff x = \frac{-s^2 + r^2 + w^2}{2w} \text{ und } y^2 = r^2 - \underbrace{\left(\frac{-s^2 + r^2 + w^2}{2w}\right)^2}_{=:d}.$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- (1) Fall $d < 0$. Die Kreise schneiden sich nicht, denn es gibt keine reelle Zahl y mit $y^2 = d$.
- (2) Fall $d = 0$. Die Kreise schneiden sich in genau einem Punkt der Form $(x, 0)$, insbesondere liegt der Schnittpunkt auf der x -Achse, und dies ist die Gerade durch die Mittelpunkte der Kreise.
- (3) Fall $d > 0$. Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten der Form $(x, \pm\sqrt{d})$. Insbesondere sind die Schnittpunkte Spiegelbilder entlang der x -Achse. $\square$

3.2. Tangenten zu Kreisen.

Definition. Es sei K ein Kreis und Q ein Punkt auf K . Eine *Tangente zu K durch Q* ist eine Gerade, welche durch Q verläuft, und welche K nur in dem Punkt Q schneidet.

Satz 3.4. Es sei $K = K(P, r)$ ein Kreis und es sei Q ein Punkt auf K . Dann gilt:

- (1) Es gibt genau eine Tangente zu K durch Q .
- (2) Die Tangente zu K durch Q ist die Gerade durch Q , welche senkrecht auf der Gerade $g(P, Q)$ steht.

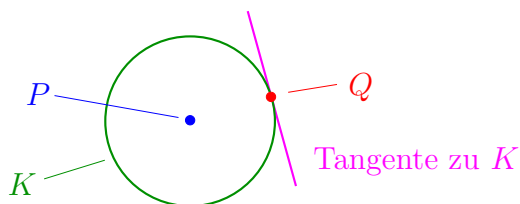


ABBILDUNG 35.

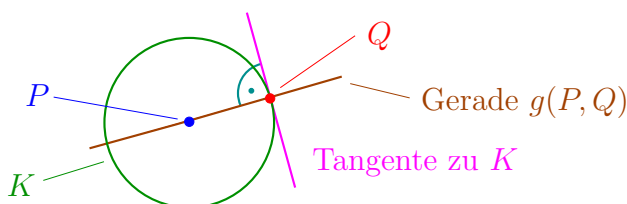


ABBILDUNG 36. Illustration von Satz 3.4.

Beweis ()*. Diesen Satz werden wir ebenfalls mit einer expliziten Rechnung beweisen. Es sei also $K = K(P, r)$ ein Kreis von Radius $r > 0$ und es sei Q ein Punkt auf K . Mithilfe einer Verschiebung können wir P in den Ursprung verschieben und mithilfe einer Drehung um den Ursprung können wir dann noch den Punkt Q in den Punkt $(r, 0)$ verschieben. Es genügt also folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es sei $K = K((0, 0), r)$ ein Kreis um den Ursprung. Zum Punkt $Q = (r, 0)$ gibt es genau eine Tangente, nämlich die Gerade $g = \{(r, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Es ist klar, dass die Gerade $g = \{(r, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ den Kreis K nur in $Q = (r, 0)$ schneidet, d.h. g ist eine Tangente zu K . Zudem ist klar, dass diese Gerade die Gerade durch den Ursprung und den Punkt Q , d.h. die x -Achse, senkrecht schneidet.

Wir müssen nun also noch zeigen, dass g die einzige Tangente zum Kreis K am Punkt $Q = (r, 0)$ ist. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass jede andere Gerade durch $Q = (r, 0)$ den Kreis K in einem zweiten Punkt schneidet.

Es sei nun h eine Gerade durch $Q = (r, 0)$, welche nicht vertikal ist. Wir müssen zeigen, dass die Gerade h den Kreis K in einem zweiten Punkt schneidet. Wir können h schreiben als

$$h = \{(r, 0) + t \cdot (a, b) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

wobei der Richtungsvektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nicht vertikal ist, d.h. es ist $a \neq 0$. Wir bestimmen

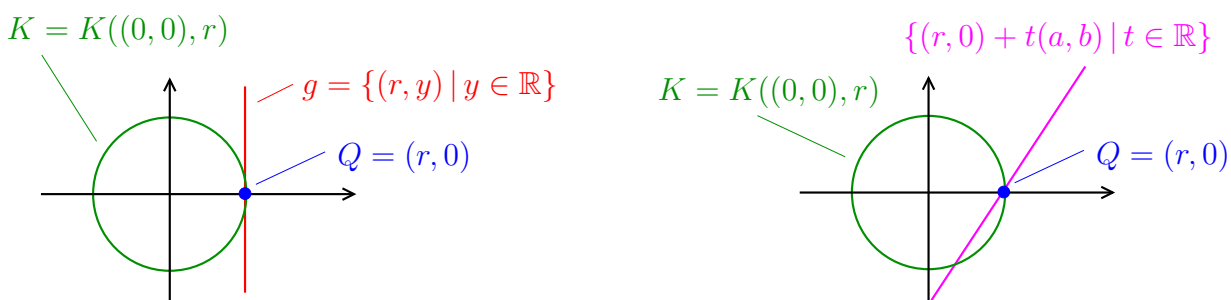


ABBILDUNG 37. Skizze zum Beweis von Satz 3.4.

nun die Schnittpunkte von h mit K : es gilt

$$\begin{aligned}
 &\text{denn } (x, y) \in K \iff |(x, y)|^2 = r^2 \\
 &\quad \downarrow \\
 (r, 0) + t(a, b) \in K &\iff |(r, 0) + t(a, b)|^2 = r^2 \iff |(r + ta, tb)|^2 = r^2 \\
 &\iff (r + ta)^2 + t^2 b^2 = r^2 \iff r^2 + t^2 a^2 + 2rta + tb^2 = r^2 \\
 &\iff t(ta^2 + 2ra + tb^2) = 0 \iff t = 0 \text{ oder } t = \frac{-2ra}{a^2 + b^2} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\text{hier verwenden wir, dass } a^2 + b^2 \neq 0
 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass es für $a \neq 0$ zwei Punkte auf h gibt, welche auf K liegen.⁶ □

⁶An welcher Stelle haben wir eigentlich verwendet, dass $r > 0$? Oder war diese Voraussetzung gar irrelevant?

4. KONGRUENZSÄTZE FÜR DREIECKE

In diesem Kapitel wollen wir die aus der Schule bekannten Kongruenzsätze für Dreiecke formulieren, beweisen und anwenden.

4.1. Formulierung und Beweis der Kongruenzsätze für Dreiecke. In diesem Kapitel studieren wir nun ausführlich Dreiecke.

Notation. Wir sagen drei Punkte A, B und C in der Ebene $\mathbb{E}$ sind *kollinear*, wenn diese auf einer Gerade liegen. Es seien nun A, B und C drei Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$, welche nicht kollinear sind. Wir bezeichnen dann

$$\triangle_{ABC} = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$$

als das von A, B und C aufgespannte Dreieck. Zudem schreiben wir, wie auf Seite 12:

$$\sphericalangle_{ABC} := \text{Winkel im Dreieck } \triangle_{ABC} \text{ am Eckpunkt } B := \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}).$$



ABBILDUNG 38.

Wir wenden uns nun der Kongruenz von Dreiecken zu.

Definition. Zwei Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ heißen *kongruent*, wenn es eine Bewegung φ gibt, so $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$.

Bemerkung.

- (1) Wenn zwei Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind, dann folgt aus Lemma 2.12, dass die entsprechenden Seitenlängen und Winkel gleich sind, d.h. es gilt

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}), \quad \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}), \quad \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{A'C'})$$

sowie

$$\underbrace{\sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{B'A'C'}}_{\text{Winkel am 1. Eckpunkt}}, \quad \underbrace{\sphericalangle_{ABC} = \sphericalangle_{A'B'C'}}_{\text{Winkel am 2. Eckpunkt}}, \quad \underbrace{\sphericalangle_{ACB} = \sphericalangle_{A'C'B'}}_{\text{Winkel am 3. Eckpunkt}}.$$

- (2) Es ist wichtig in der Definition der Kongruenz von Dreiecken, dass die Ecken der Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ in der gleichen Reihenfolge ineinander übergeführt werden. Beispielsweise sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ in Abbildung 39 *nicht* kongruent, weil gilt

$$\begin{array}{ccc} \text{Winkel am ersten Eckpunkt} & & \text{Winkel am ersten Eckpunkt} \\ \text{von } \triangle_{A'B'C'} & = \sphericalangle_{B'A'C'} \neq \sphericalangle_{BAC} = & \text{von } \triangle_{ABC}. \end{array}$$

Aber die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{C'B'A'}$ sind kongruent (man beachte hierbei die geänderte Reihenfolge der Eckpunkte!) denn die Spiegelung an der Gerade, welche in der Abbildung skizziert ist, führt die erste Ecke A in die erste Ecke C' , die zweite Ecke B in die zweite Ecke B' , und die dritte Ecke C in die dritte Ecke A' über.

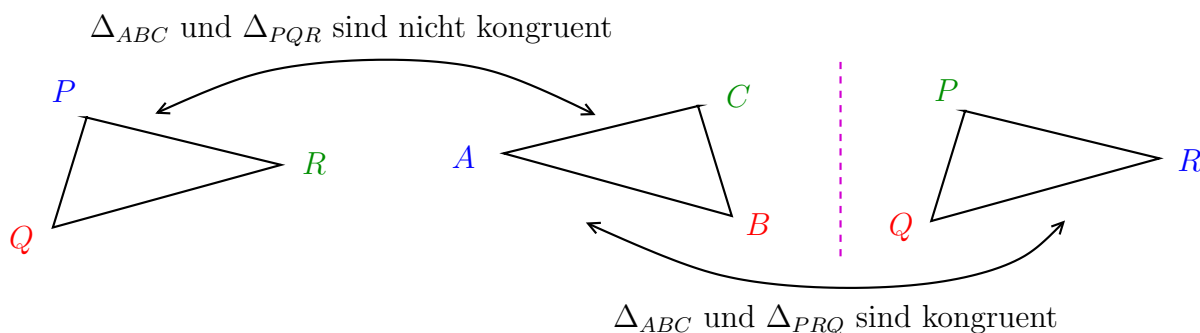


ABBILDUNG 39.

Um zu zeigen, dass zwei gegebene Dreiecke kongruent sind verwendet man oft Kongruenzsätze. Wir erinnern uns nun an folgende drei Kongruenzsätze aus der Schule:

Satz 4.1. (Kongruenzsätze SWS, WSW und SSS)

SWS: Wenn für zwei Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ gilt

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}) \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle_{ABC} = \sphericalangle_{A'B'C'},$$

dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent.

WSW: Wenn für zwei Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ gilt

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \sphericalangle_{CAB} = \sphericalangle_{C'A'B'} \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle_{ABC} = \sphericalangle_{A'B'C'},$$

dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent.

SSS: Wenn für zwei Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ gilt

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{A'C'}) \quad \text{sowie} \quad \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}),$$

dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent.

Die Aussagen von WSW und SWS gelten auch für die anderen Seiten. Beispielsweise, wenn die Seitenlängen von BC und $B'C'$ gleich sind und die anliegenden Winkel der Dreiecke gleich sind, dann sind $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent.

Diese drei Kongruenzsätze sind in Abbildungen 40 und 41 skizziert.

Beweis der Kongruenzsätze.

Kongruenzsatz SWS. Es seien $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei Dreiecke mit

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}) \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle_{ABC} = \sphericalangle_{A'B'C'}.$$

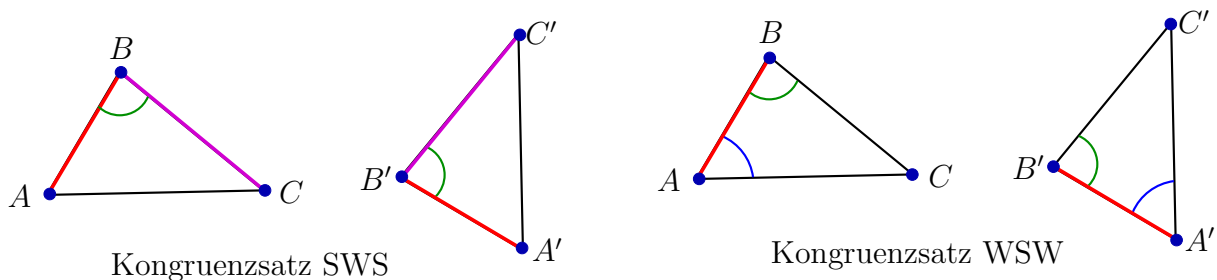


ABBILDUNG 40.

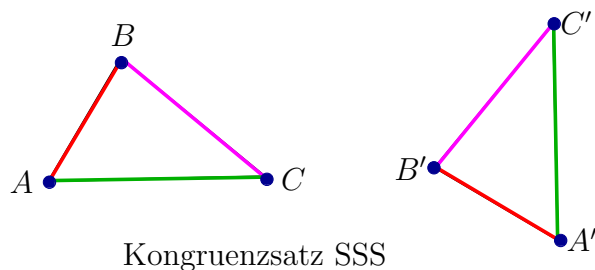


ABBILDUNG 41.

Es folgt aus der Voraussetzung $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$ und aus Lemma 2.14, dass wir, eventuell nach Anwendung einer Bewegung, schon annehmen können, dass $A = A'$ und $B = B'$.

Zudem folgt aus Lemma 1.12 zusammen mit Satz 2.7, dass nach einer eventuellen Spiegelung entlang der Gerade $g(B, A) = g(B', A')$ folgt, dass $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$. Nachdem $\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'})$ folgt aus Lemma 1.10, dass sogar schon $C = C'$. Wir haben also gezeigt, dass die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind.

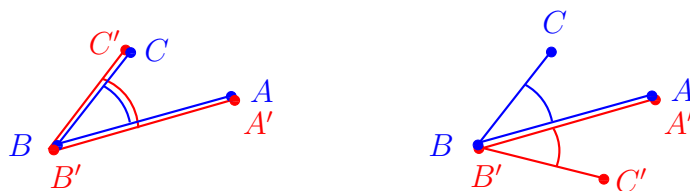


ABBILDUNG 42. Skizze zum Beweis von SWS.

Kongruenzsatz WSW. Es seien $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei Dreiecke mit

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \sphericalangle_{CAB} = \sphericalangle_{C'A'B'} \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle_{ABC} = \sphericalangle_{A'B'C'}.$$

Nachdem wiederum $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$ gilt können wir, wie im Beweis von SWS, nach einer etwaigen Bewegung annehmen, dass $A = A'$ und $B = B'$.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass C und C' auf verschiedenen Seiten der Gerade $g = g(A, B) = g(A', B')$ liegen. Nach Anwendung von Satz 2.7 (1) können wir C' in die Halbebene von C spiegeln. Wir können nun also annehmen, dass C und C' auf der gleichen Seite der Gerade g liegen.

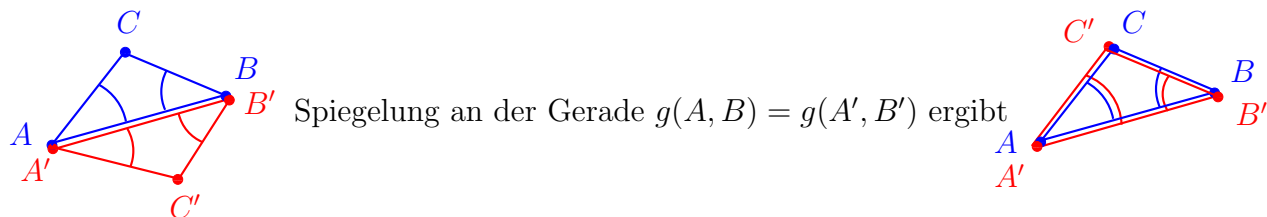


ABBILDUNG 43. Skizze zum Beweis von WSW.

Es folgt aus dieser Tatsache, aus der Voraussetzung, dass $\angle_{CAB} = \angle_{C'A'B'}$ zusammen mit Lemma 1.12, dass $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Ganz analog zeigt man auch, dass $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$. Es folgt aus Satz 1.1, dass die beiden Strahlen $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ höchstens einen Punkt gemeinsam haben. D.h. es muss schon gelten, dass $C = C'$. Wir haben damit also gezeigt, dass die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind.

Kongruenzsatz SSS. Es seien $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei Dreiecke mit

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{A'C'}) \quad \text{sowie} \quad \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}).$$

Wie im Beweis von SWS können wir aus der Voraussetzung $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$ folgern, dass nach einer Bewegung gilt, dass $A = A'$ und $B = B'$. Wir machen folgende zwei Beobachtungen:

- (1) Es folgt aus $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{A'C'})$, dass sowohl C als auch C' auf dem Kreis um $A = A'$ mit Radius $r := \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{A'C'})$ liegen.
- (2) Es folgt aus $\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'})$, dass sowohl C als auch C' auf dem Kreis um $B = B'$ mit Radius $s := \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'})$ liegen.

Zusammengefasst sehen wir also, dass C und C' Schnittpunkte von den zwei Kreisen $K(A, r)$ und $K(B, s)$ sind. Es folgt aus Satz 3.3, dass entweder $C = C'$ oder, dass wir C entlang der Gerade $g = g(A, B) = g(A', B')$ auf C' spiegeln können. In beiden Fällen haben wir gezeigt, dass die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind. □

4.2. Gleichwinklige und gleichschenklige Dreiecke. Nach dem langen Beweis der Kongruenzsätze wollen wir jetzt einige Schlußfolgerungen aus diesen ziehen. Wir erinnern an folgende Definition aus der Schule.

Definition.

- (1) Ein Dreieck heißt *gleichschenkelig*, wenn es zwei Seiten gibt, welche die gleiche Länge besitzen.

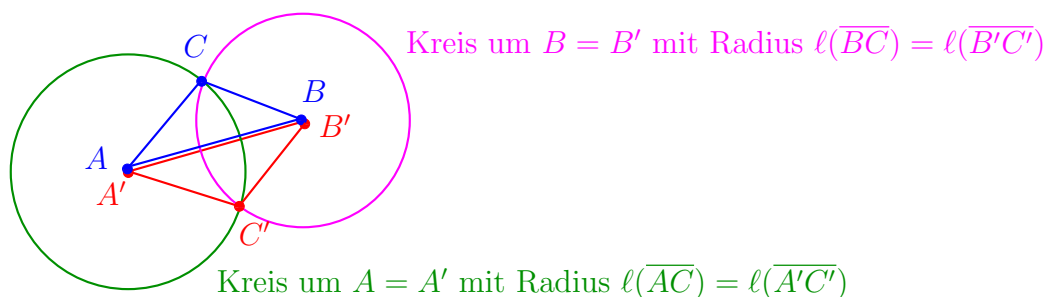


ABBILDUNG 44. Skizze zum Beweis von SSS.

- (2) Ein Dreieck heißt *gleichwinklig*, wenn es zwei Innenwinkel gibt, welche gleich groß sind.
- (3) Ein Dreieck heißt *gleichseitig*, wenn all drei Seiten die gleiche Länge besitzen.

Satz 4.2. *Ein Dreieck ist gleichschenkelig, genau dann, wenn es gleichwinklig ist. Genauer gesagt, es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Dann gilt*

$$\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC}) \iff \sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{ABC}.$$

Diese Aussage wird auch in Abbildung 45 skizziert.



ABBILDUNG 45. Skizze zu Satz 4.2.

Beweis. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck mit $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$. Wir wollen zeigen, dass dann auch gilt $\sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{ABC}$. Wir bezeichnen mit P den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. (Siehe dazu Abbildung 46.) Wir betrachten die Dreiecke $\triangle_{APC}$ und $\triangle_{BPC}$. Es gilt:

- (1) $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP})$, weil P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist,
- (2) $\ell(\overline{PC}) = \ell(\overline{PC})$, und
- (3) $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$.

Es folgt also aus dem Kongruenzsatz SSS, dass die Dreiecke $\triangle_{APC}$ und $\triangle_{BPC}$ kongruent sind. Dann stimmen aber auch die Innenwinkel der beiden Dreiecke am ersten Eckpunkt

über ein, d.h. es gilt $\sphericalangle_{PAC} = \sphericalangle_{PBC}$. Es ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle_{PAC} &= \sphericalangle(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \sphericalangle_{BAC} \\ &\quad \uparrow \\ &\text{denn } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}, \text{ da } P \text{ und } B \text{ auf der gleichen Gerade liegen} \end{aligned}$$

und ganz analog gilt auch, dass $\sphericalangle_{PBC} = \sphericalangle_{BAC}$. Also haben wir jetzt auch gezeigt, dass $\sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{ABC}$.



ABBILDUNG 46. Skizze zum Beweis von Satz 4.2.

Die umgekehrte Aussage, dass aus $\sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{ABC}$ folgt, dass $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$ wird in Übung 6 bewiesen. $\square$

Bemerkung. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck mit $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$. Wir wollen nun einen alternativen Beweis dafür geben, dass dann auch gilt $\sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{ABC}$. Dieser alternative Beweis ist insofern einfacher als der vorherige Beweis, als wir keinen neuen Punkt P einführen müssen. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle_{ACB}$ sowie $\triangle_{BCA}$. (Man beachte die Reihenfolge der Eckpunkte!) Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Innenwinkel am 2. Eckpunkt von } \triangle_{ACB} &= \sphericalangle_{ACB} \\ &= \sphericalangle_{BCA} = \text{Innenwinkel am 2. Eckpunkt von } \triangle_{ACB}. \\ &\quad \uparrow \\ &\text{siehe Satz 1.11 (3)} \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \text{Abstand zwischen 1. und 2. Eckpunkt} &= \ell(\overline{AC}) \\ \text{des Dreiecks } \triangle_{ACB} & \\ &= \ell(\overline{BC}) = \text{Abstand zwischen 1. und 2. Eckpunkt} \\ &\quad \uparrow \text{des Dreiecks } \triangle_{BCA}. \\ &\text{nach Voraussetzung} \end{aligned}$$

und

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Abstand zwischen 2. und 3. Eckpunkt} & = & \ell(\overline{CB}) \\
 \text{des Dreiecks } \triangle_{ACB} & & \\
 & = & \ell(\overline{CA}) = \text{Abstand zwischen 2. und 3. Eckpunkt} \\
 & \uparrow & \text{des Dreiecks } \triangle_{BCA}. \\
 & \text{nach Voraussetzung} &
 \end{array}$$

Es folgt also aus dem Kongruenzsatz SSS, dass die Dreiecke $\triangle_{ACB}$ sowie $\triangle_{BCA}$ kongruent sind. Insbesondere stimmen auch die Winkel am ersten Eckpunkt überein, d.h. es ist $\sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{ABC}$.

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgendem Korollar.

Korollar 4.3. *Alle Innenwinkel in einem gleichseitigen Dreieck sind gleich groß.*

Beweis. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein gleichseitiges Dreieck. Wie in Abbildung 47 skizziert bezeichnen wir die Innenwinkel mit α, β und γ . Dann gilt

$$\begin{array}{c}
 \text{folgt aus Satz 4.2, da } \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC}) \\
 \downarrow \\
 \alpha = \beta = \gamma. \\
 \uparrow \\
 \text{folgt aus Satz 4.2, da } \ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{AC})
 \end{array}$$

□

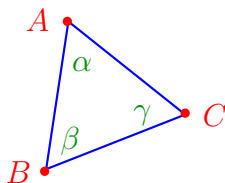


ABBILDUNG 47.

4.3. Die Konstruktion von Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal. Das folgende Lemma gibt uns insbesondere die Definition der Mittelsenkrechten.

Lemma 4.4. *Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$, welche senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Wir nennen diese Gerade die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$.*

Beweis. Es folgt aus Satz 2.6, dass es genau eine Gerade gibt, welche senkrecht auf der Strecke $\overline{AB}$ steht, und welche durch den Mittelpunkt der Strecke verläuft. □

Wir erinnern an folgende Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$ mithilfe von Zirkel und Lineal:

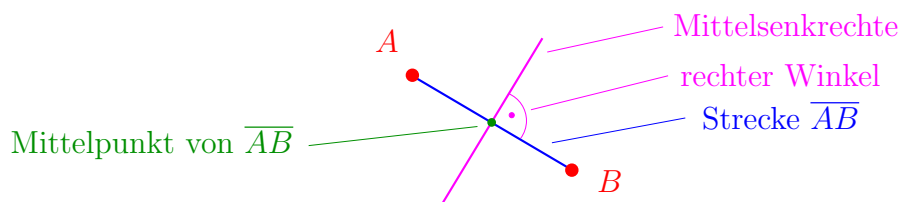
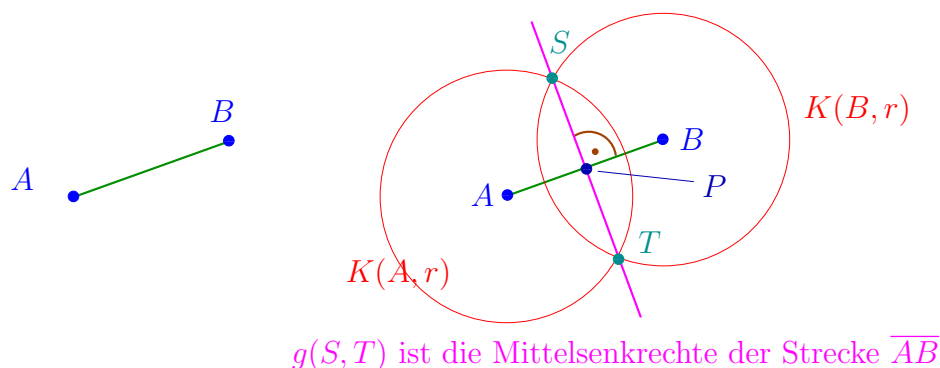


ABBILDUNG 48.

Konstruktion 4.5. Es seien A und B zwei verschiedene Punkte.

- (1) Wir wählen einen Radius r mit $r > \frac{1}{2}\ell(\overline{AB})$,
- (2) wir bezeichnen mit S und T die Schnittpunkte der Kreise $K(A, r)$ und $K(B, r)$,
- (3) der Schnittpunkt P der Gerade $g(S, T)$ mit der Gerade $g(A, B)$ ist dann der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und die Gerade $g(S, T)$ ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

Die Konstruktion wird in Abbildung 49 skizziert.

ABBILDUNG 49. Konstruktion der Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

Bei dieser Konstruktion stellen sich jedoch folgende zwei Fragen:

- (1) Warum schneiden sich die beiden Kreise $K(A, r)$ und $K(B, r)$ in zwei verschiedenen Punkten?
- (2) Warum führt die Konstruktion zum richtigen Ergebnis, d.h. warum ist die Gerade $g(S, T)$ in der Tat die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$?

Wir beantworten die beiden Fragen in den folgenden beiden Lemmas. Die erste Frage wird durch folgendes Lemma beantwortet.

Lemma 4.6. Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$ und es sei r ein Radius. Wenn $r > \frac{1}{2}\ell(\overline{AB})$, dann schneiden sich die Kreise $K(A, r)$ und $K(B, r)$ in zwei verschiedenen Punkten.

Das Lemma folgt aus einer relativ leichten Rechnung, welche wir hier nicht durchführen wollen. Wir werden die Aussage des Lemmas in Übungsblatt 6 noch etwas genauer besprechen.

Wir wenden uns nun der Frage zu, warum die obige Konstruktion in der Tat die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ liefert.

Lemma 4.7. *Die Gerade $g(S, T)$ in der obigen Konstruktion ist in der Tat die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.*

Beweis. Wir betrachten die Punkte, welche in Abbildung 50 links gezeigt sind. Im Moment wissen wir Folgendes:

- (1) Nachdem S und T auf dem Kreis von Radius r um A liegen gilt $\ell(\overline{AS}) = \ell(\overline{AT}) = r$.
- (2) Nachdem S und T auf dem Kreis von Radius r um B liegen gilt $\ell(\overline{BS}) = \ell(\overline{BT}) = r$.
- (3) Der Punkt P liegt sowohl auf der Strecke $\overline{AB}$ als auch auf der Strecke $\overline{ST}$.

Die Lage ist in Abbildung 50 links skizziert. Das Dreieck $\triangle_{ASB}$ ist gleichschenkelig. Es folgt also aus Satz 4.2, dass $\sphericalangle_{BAS} = \sphericalangle_{ABS}$. Die Lage ist jetzt in Abbildung 50 rechts skizziert.

das Dreieck $\triangle_{ASB}$ ist gleichschenkelig, also auch gleichwinklig



ABBILDUNG 50. Skizze zum Beweis von Lemma 4.7.

Wir betrachten jetzt die beiden “großen” Dreiecke $\triangle_{TAS}$ und $\triangle_{TBS}$. Es gilt aus dem Kongruenzsatz SSS, dass die Dreiecke $\triangle_{TAS}$ und $\triangle_{TBS}$ kongruent sind. Insbesondere folgt nun, dass $\sphericalangle_{TSA} = \sphericalangle_{TSB}$. Die Lage ist jetzt in Abbildung 51 skizziert.

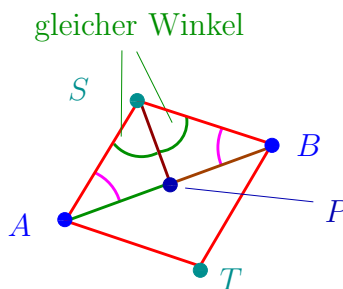


ABBILDUNG 51. Zweite Skizze zum Beweis von Lemma 4.7.

Wir betrachten als letztes die beiden Dreiecke $\triangle_{ASP}$ und $\triangle_{BSP}$. Für die beiden Dreiecke gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \sphericalangle_{PAS} = \sphericalangle_{BAS} & = & \sphericalangle_{ABS} = \sphericalangle_{PBS}, & \sphericalangle_{PSA} = \sphericalangle_{TSA} & = & \sphericalangle_{TSB} = \sphericalangle_{TPSB} & \text{ und } \ell(\overline{AS}) = r = \ell(\overline{BS}). \\ & \uparrow & & & \uparrow & & \\ & \text{siehe ganz oben} & & & \text{siehe oben} & & \end{array}$$

Die beiden Dreiecke sind also kongruent nach dem Kongruenzsatz WSW. Wir ziehen daraus folgende Schlüsse:

- (1) Aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle_{ASP}$ und $\triangle_{BSP}$ folgt, dass $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP})$. Insbesondere ist P in der Tat der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
- (2) Aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle_{ASP}$ und $\triangle_{BSP}$ folgt auch, dass $\sphericalangle_{APS} = \sphericalangle_{BPS}$. Nachdem sich beide Winkel zu π aufsummieren, muss jeder der beiden Winkel schon $\frac{\pi}{2}$ betragen. Wir sehen also, dass die Gerade durch S und T senkrecht auf der Gerade $g(A, B)$ steht.

Zusammengefasst zeigen (1) und (2), dass $g(S, T)$ die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist. $\square$

4.4. Weitere Konstruktionen: die Winkelhalbierende.

Konstruktion 4.8. (Konstruktion der Winkelhalbierenden) *Es seien S und T zwei Strahlen, welche von einem Punkt P ausgehen.*

- (1) *Wir wählen ein $r > 0$ und wir bezeichnen mit A und B die Punkte auf den Strahlen S und T mit $\ell(\overline{PA}) = r$ und $\ell(\overline{PB}) = r$.*
- (2) *Wir bezeichnen mit Q den zweiten Schnittpunkt der Kreise $K(A, r)$ und $K(B, r)$.*
- (3) *Dann ist der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ die Winkelhalbierende des Winkels, welcher durch die Strahlen S und T bestimmt ist, d.h. es ist*

$$\sphericalangle(S, \overrightarrow{PQ}) = \sphericalangle(T, \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\sphericalangle(S, T).$$

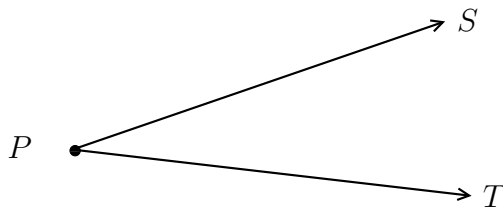


ABBILDUNG 52. Konstruktion der Winkelhalbierenden.

Beweis der Richtigkeit der Konstruktion. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle_{PAQ}$ und $\triangle_{PBQ}$, welche auch in Abbildung 53 skizziert sind. Es ist

$$\ell(\overline{PA}) = r = \ell(\overline{PB}), \quad \ell(\overline{AQ}) = r = \ell(\overline{BQ}) \quad \text{sowie offensichtlich } \ell(\overline{PQ}) = \ell(\overline{PQ}).$$

Es folgt also aus dem Kongruenzsatz SSS, dass die beiden Dreiecke $\triangle_{PAQ}$ und $\triangle_{PBQ}$ kongruent sind. Insbesondere ist $\sphericalangle_{QPA} = \sphericalangle_{QPB}$. Aber nachdem sich diese beiden Winkel zum Winkel $\sphericalangle(S, T)$ aufaddieren, gilt

$$\sphericalangle(S, \overrightarrow{PQ}) = \sphericalangle_{APQ} = \frac{1}{2}\sphericalangle(S, T).$$

Wir haben damit also die gewünschte Aussage bewiesen. $\square$

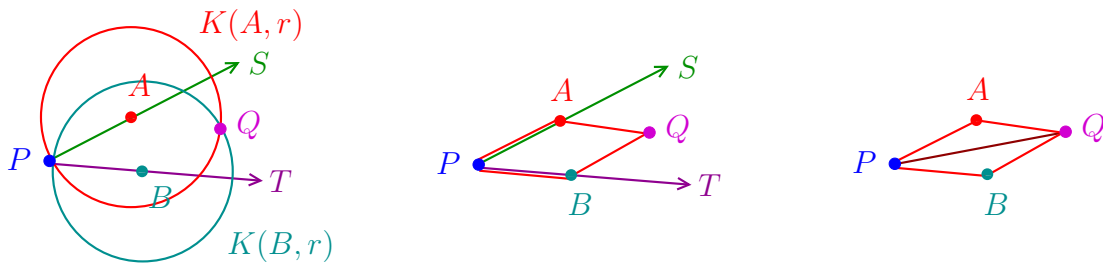


ABBILDUNG 53.

In dem wir die Konstruktion 4.8 zweimal hintereinander an anwenden, können wir natürlich jeden gegebenen Winkel vierteln. Aber wie schaut es mit dritteln aus? Folgende Frage hat auch schon die griechischen Mathematiker beschäftigt.

Frage. *Gibt es auch eine Möglichkeit mit Zirkel jeden Winkel zu dritteln?*

Wir wollen diese Frage später beantworten.

4.5. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks. Das nächste Lemma gibt eine alternative Beschreibung von Mittelsenkrechten.

Lemma 4.9. *Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$. Die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte, die zu A und B den gleichen Abstand besitzen, d.h. es ist*

$$\text{Mittelsenkrechte zu } \overline{AB} = \{Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\}.$$

Beweis. Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$. Wir bezeichnen mit P den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Wir müssen zeigen, dass

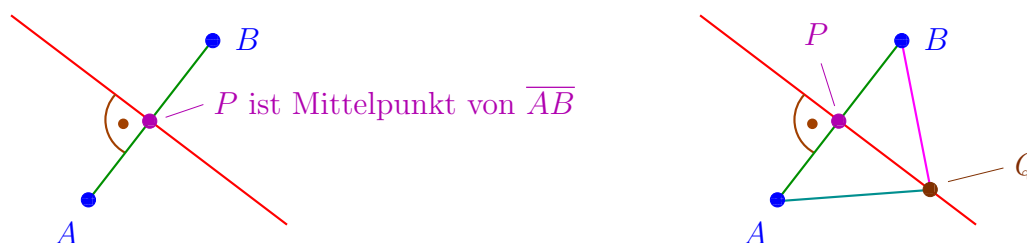
$$\underbrace{\text{Mittelsenkrechte zu } \overline{AB}}_{=:X} = \underbrace{\{Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\}}_{=:Y}.$$

Ganz allgemein gilt, wenn wir zeigen wollen, dass zwei Mengen X und Y gleich sind, dann genügt es zu zeigen, dass jeder Punkt $Q \in X$ auch in Y liegt, und dass jeder Punkt $Q \in Y$ auch in X liegt. Wir führen nun dieses Verfahren in unserem Fall durch.

- (1) Es sei Q ein Punkt auf der Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$. Wir müssen zeigen, dass Q in Y liegt, d.h. wir müssen zeigen, dass $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})$. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle_{QPB}$ und $\triangle_{QPA}$. Wir machen folgende Beobachtungen:

- (a) Nachdem die Gerade $g(P, Q)$ senkrecht auf der Strecke $\overline{AB}$ steht folgt, dass $\sphericalangle_{QPB} = \sphericalangle_{QPA}$,
- (b) nachdem P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist folgt, dass $\ell(\overline{PA}) = \ell(\overline{PB})$,
- (c) die Strecke $\overline{PQ}$ liegt auf beiden Dreiecken.

Es folgt also aus dem Kongruenzsatz SWS, dass die Dreiecke $\triangle_{QPB}$ und $\triangle_{QPA}$ kongruent sind. Insbesondere gilt dann, dass $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})$.



Definition der Mittelsenkrechte

ABBILDUNG 54. Skizze zum Beweis von Lemma 4.9.

- (2) Wir müssen nun noch zeigen, dass jeder Punkt Q mit $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})$ auf der Mittelsenkrechte liegt. Wir werden dies Übungsblatt 7 beweisen. $\square$



ABBILDUNG 55. Skizze zum Beweis von Lemma 4.9.

Folgender Satz ist wohl noch aus der Schule bekannt.

Satz 4.10. *Die drei Mittelsenkrechten eines beliebigen Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt.*

Beweis. Es sei also $\triangle_{ABC}$ ein beliebiges Dreieck. Wir bezeichnen mit d die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BC}$ und wir bezeichnen mit e die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AC}$. Diese Geraden sind nicht parallel, sie schneiden sich also in genau einem Punkt P . Wir müssen nun noch zeigen, dass die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ebenfalls durch P verläuft. Nach Lemma 4.9

genügt es zu zeigen, dass $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP})$. Es gilt nun in der Tat, dass

$$\ell(\overline{BP}) = \ell(\overline{CP}) = \ell(\overline{AP}).$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 Lemma 4.9 angewandt auf die Mittelsenkrechten d und e

□

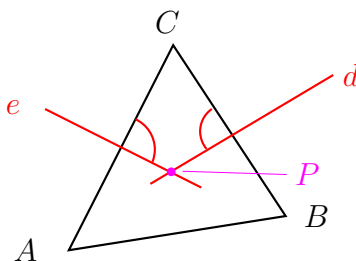


ABBILDUNG 56. Skizze für den Beweis von Satz 4.10.

Satz 4.11. *Es seien A, B und C drei nicht kollineare Punkte. Dann gibt es genau einen Kreis, welcher durch A, B und C verläuft.*

Der Kreis aus Satz 4.11 wird auch der *Umkreis* des Dreiecks $\triangle_{ABC}$ genannt.



Konstruktion des Mittelpunkts des Umkreises

ABBILDUNG 57. Der Umkreis eines Dreiecks.

Beweis. Es seien A, B und C drei nicht kollineare Punkte. Wir betrachten das Dreieck $\triangle_{ABC}$. Wir bezeichnen die drei Mittelsenkrechten zu den Strecken $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ mit g, h und i . Wir hatten gerade in Satz 4.10 gezeigt, dass sich die drei Mittelsenkrechten in genau einem Punkt P schneiden. Es gilt nun, dass

Lemma 4.9 angewandt auf die Mittelsenkrechte h zu $\overline{BC}$

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP}) = \ell(\overline{CP}).$$

$\downarrow$
 $\uparrow$

Lemma 4.9 angewandt auf die Mittelsenkrechte g zu $\overline{AB}$

Wir haben damit gezeigt, dass die Punkte A, B, C den gleichen Abstand zu P besitzen, d.h. P ist der Mittelpunkt eines Kreises durch A, B und C . □

Satz 2.6. *Es sei g eine Gerade in der Ebene $\mathbb{E}$ und es sei P ein beliebiger weiterer Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade h , welche senkrecht auf g steht und welche durch P verläuft. Wir bezeichnen diese Gerade als das Lot bezüglich P auf g und wir bezeichnen den Schnittpunkt von h mit g als den Lotfußpunkt.*



- (1) wenn der Punkt P auf der Gerade g liegt, dann sagt man, man *errichtet das Lot im Punkt P zur Gerade g* ,
- (2) wenn der Punkt P *nicht* auf der Gerade g liegt, dann sagt man, man *fällt das Lot von dem Punkt P auf die Gerade g* .

- (1) wir wählen ein $r > 0$ und bezeichnen mit S und T die Schnittpunkte des Kreises $K(P, r)$ mit der Gerade g ,
- (2) wir wählen ein $s > r$ und bezeichnen mit A und B die Schnittpunkte der Kreise $K(S, s)$ und $K(T, s)$,⁷
- (3) dann ist die Gerade $g(A, B)$ das Lot von g im Punkt P .

- (1) die Gerade $g(A, B)$ verläuft durch P , und
- (2) die Gerade $g(A, B)$ steht senkrecht auf der Gerade g .

⁷Es folgt aus Lemma 4.6 und $s > r$, dass es in der Tat zwei Schnittpunkte gibt.

$g(S, T)$ durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{ST}$, nämlich P . Zudem steht die Gerade $g(A, B)$ senkrecht auf der Gerade $g = g(S, T)$.

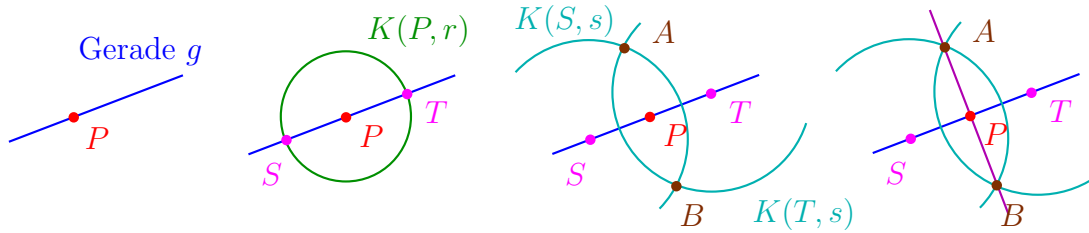


ABBILDUNG 59. Errichten des Lots.

Wir wenden uns nun der zweiten Konstruktion zu, diese wird in Abbildung 60 skizziert.

Konstruktion 4.13. (Fällen des Lots) *Es sei also g eine Gerade und P ein Punkt, welcher nicht auf der Gerade liegt.*

- (1) *wir wählen einen Radius $r > 0$, welcher so groß ist, dass der Kreis $K(P, r)$ die Gerade g in zwei verschiedenen Punkten S und T schneidet,*
- (2) *wir bezeichnen mit Q den zweiten Schnittpunkt der Kreise $K(S, r)$ und $K(T, r)$,⁸*
- (3) *dann ist die Gerade $g(P, Q)$ das von P auf die Gerade g gefällte Lot.*

Auch hier müssen wir noch begründen, warum die letzte Aussage wahr ist. Dies folgt wiederum aus der Beobachtung, dass wir in Konstruktion 4.5 gesehen hatten, dass die Gerade $g(P, Q)$ gerade die Mittelsenkrechte zu $\overline{ST}$ ist, insbesondere steht die Gerade $g(P, Q)$ senkrecht auf der Gerade $g = g(S, T)$.

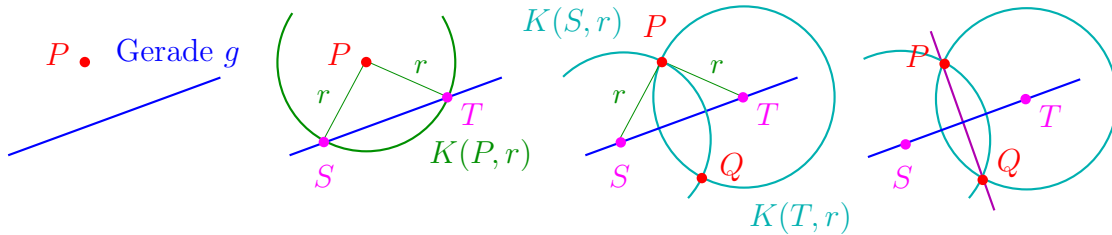


ABBILDUNG 60. Fällen des Lots.

⁸Es folgt aus Satz 3.3 und der Tatsache, dass P nicht auf g liegt, dass es in der Tat einen zweiten Schnittpunkt gibt.

5. PARALLELEN UND WINKELSUMME VON DREIECKEN

5.1. **Parallele Geraden.** Wir erinnern an folgenden Satz.

Satz 1.4. *Zu jeder Gerade g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade durch P , welche parallel zu g verläuft.*

Mit unseren bisherigen Konstruktionen ist es nun leicht, die Parallele zu einer Gerade g durch einen Punkt P mit Zirkel und Lineal zu bestimmen.

Konstruktion 5.1. *Es sei g eine Gerade und P ein Punkt, welcher nicht auf der Gerade liegt.*

- (1) *Mithilfe von Konstruktion 4.13 fällen wir das Lot von P auf g . Wir bezeichnen dieses Lot mit h .*
- (2) *Mithilfe von Konstruktion 4.12 errichten wir nun das Lot durch P zu h . Wir bezeichnen dieses Lot mit k .*
- (3) *Das Lot k steht senkrecht auf der Gerade g , welche wiederum senkrecht auf der ursprünglichen Gerade g steht. Es folgt nun aus Satz 2.5, dass k und g parallel sind.*

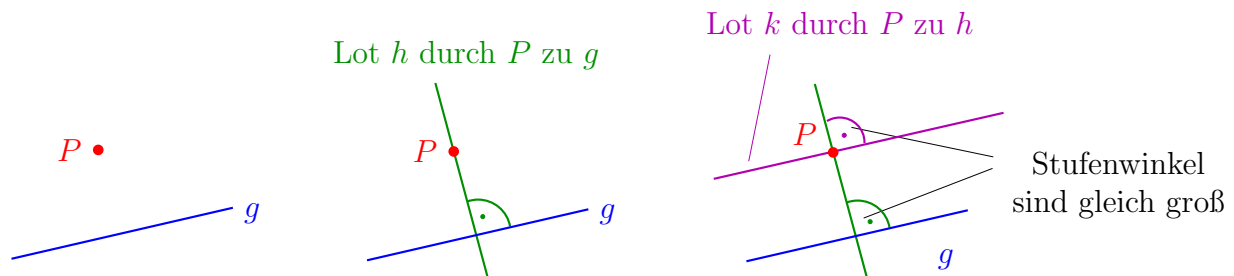


ABBILDUNG 61. Die Konstruktion der Parallelen durch einen Punkt P .

In Übungsblatt 8 werden wir uns auf die Suche nach einer effizienteren Konstruktionsmethode machen.

5.2. **Parallelogramme.**

Definition.

- (1) Wir sagen eine Teilmenge X in $\mathbb{E}$ ist *konvex*, wenn für alle Punkte $A, B \in X$ gilt, dass die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ ebenfalls in X enthalten ist.
- (2) Ein *Parallelogramm* ist ein konvexes Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Satz 5.2. *In jedem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Seiten gleich lang.*

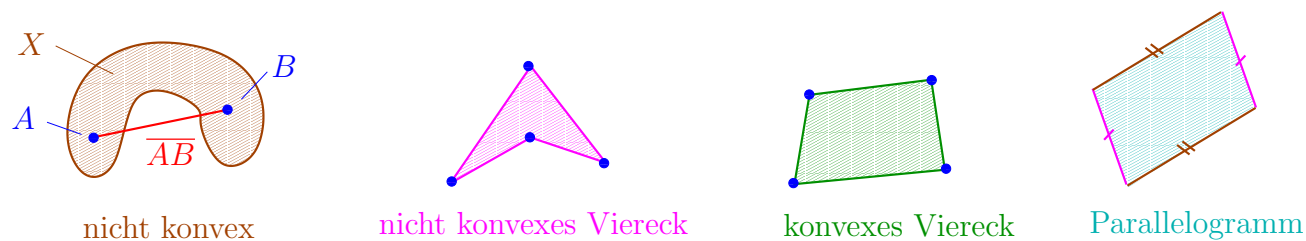


ABBILDUNG 62.

Beweis. Es sei also ein Parallelogramm mit Eckpunkten A, B, C und D gegeben. Wir wollen zeigen, dass $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{CD})$, und dass $\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{AD})$. Wir betrachten dazu die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{CDA}$. Es gilt:

- (1) aus Satz 2.4, angewandt auf die parallelen Geraden $g(A, B)$ und $g(C, D)$, folgt die Gleichheit der Wechselwinkel $\sphericalangle_{CAB} = \sphericalangle_{ACD}$,
- (2) aus Satz 2.4, angewandt auf die parallelen Geraden $g(A, D)$ und $g(B, C)$, folgt die Gleichheit der Wechselwinkel $\sphericalangle_{BCA} = \sphericalangle_{DAC}$,
- (3) offensichtlich ist $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{CA})$.

Es folgt also aus dem Kongruenzsatz WSW, dass die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{CDA}$ kongruent sind. Insbesondere gilt, dass $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{CD})$ und $\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{AD})$. $\square$

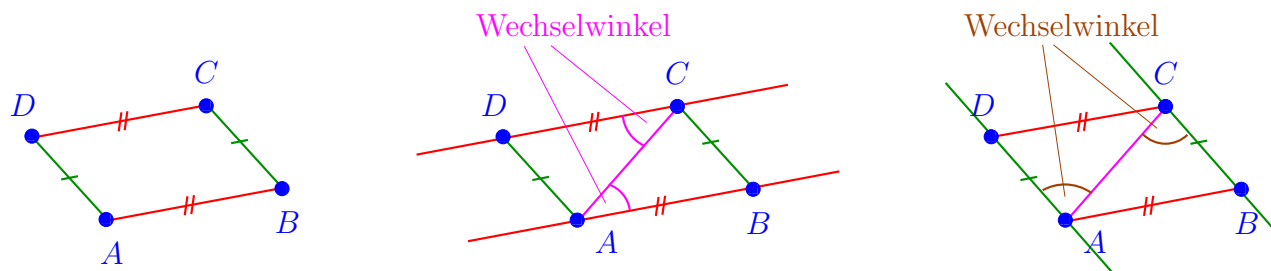


ABBILDUNG 63. Skizze zum Beweis von Satz 5.2.

Bemerkung.

- (1) Es ist vielleicht etwas verwunderlich, warum in der Definition von einem Parallelogramm gefordert wird, dass das Viereck konvex ist. (Die Definition ist wortwörtlich von Wikipedia übernommen.) Wenn man genau hinschaut, hatten wir die Konvexität im Beweis von Satz 4.7 verwendet, denn wir hatten verwendet, dass die Diagonale $\overline{AC}$ im Inneren des Parallelogramms verläuft, aber diese Aussage verwendet eben, dass Parallelogramme konvex sind.
- (2) Wir werden in Übungsblatt 8 folgende Fragen diskutieren:
 - (a) Wenn X ein Viereck ist, bei dem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, folgt daraus schon, dass das Viereck auch konvex ist?

- (b) Wir werden der Frage nachgehen, ob die Umkehrung von Satz 5.2 gilt, d.h. wenn in einem Viereck die gegenüber liegenden Seiten gleich lang sind, folgt daraus schon, dass das Viereck ein Parallelogramm ist?

5.3. Die Höhen eines Dreiecks.

Definition. In einem Dreieck bezeichnen wir für einen Eckpunkt P die Strecke von P zum Lotfußpunkt auf die Gerade durch die anderen beiden Eckpunkte als *Höhe des Dreiecks bezüglich P* .

Beispiel. Wie man in Abbildung 64 sieht, muss die Höhe nicht notwendigerweise in dem Dreieck selber verlaufen.



ABBILDUNG 64.

Satz 5.3. In jedem beliebigen Dreieck schneiden sich die drei Höhen in genau einem Punkt.



ABBILDUNG 65.

Beweis. Es sei als $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Wir führen folgende Geraden ein:

- (1) es sei f die Gerade durch A , welche parallel zur Gerade $g(B, C)$ verläuft,
- (2) es sei g die Gerade durch B , welche parallel zur Gerade $g(A, C)$ verläuft,
- (3) es sei h die Gerade durch C , welche parallel zur Gerade $g(A, B)$ verläuft.

Wie in Abbildung 66 in der Mitte skizziert erhalten wir aus diesen drei Geraden ein neues Dreieck $\triangle_{PQR}$. Wir machen folgende Beobachtungen:

- (1) Nachdem die Geraden $g(A, C)$ und $g(R, P)$ parallel sind, bilden die vier Punkte A, C, P, B ein Parallelogramm, also gilt nach Satz 5.2, dass $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BP})$. Ganz analog zeigt man, dass $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{RB})$. Wir sehen also, dass B der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PR}$ ist. Das Argument ist in Abbildung 66 rechts skizziert.

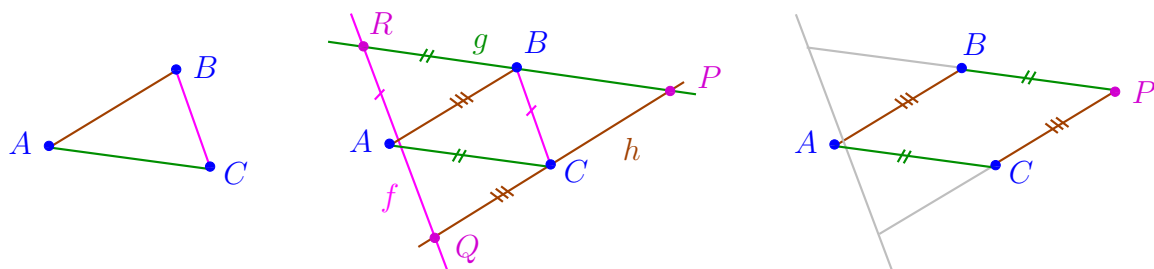


ABBILDUNG 66.

- (2) Das gleiche Argument wie in (1) zeigt, dass A der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$ ist, und dass C der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ ist.

Wir wenden uns nun der Abbildung 66 links zu.

- (3) Wir betrachten die Höhe am Eckpunkt B . Per Definition steht diese senkrecht auf der Gerade $g(A, C)$. Aber nachdem die Gerade $g(A, C)$ parallel zur Gerade $g(R, P)$ ist folgt aus Satz 2.4, dass die Höhe auch senkrecht auf der Gerade $g(R, P)$ steht.
- (4) Wir haben nun also in (1) und (3) gesehen, dass die Höhe durch B durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{RP}$ verläuft, und dass diese senkrecht auf der Strecke $\overline{RP}$ verläuft. Mit anderen Worten, *die Höhe am Eckpunkt P ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{RP}$.*
- (5) Das Argument von (4) zeigt natürlich, dass auch die anderen Höhen des Dreiecks $\triangle_{ABC}$ gerade die entsprechenden Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle_{PQR}$ sind.
- (6) Es folgt aus Satz 4.10, dass sich die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle_{PQR}$ in einem Punkt schneiden. Aus (5) folgt nun die gewünschte Aussage, dass sich die drei Höhen des Dreiecks $\triangle_{ABC}$ in genau einem Punkt schneiden. $\square$

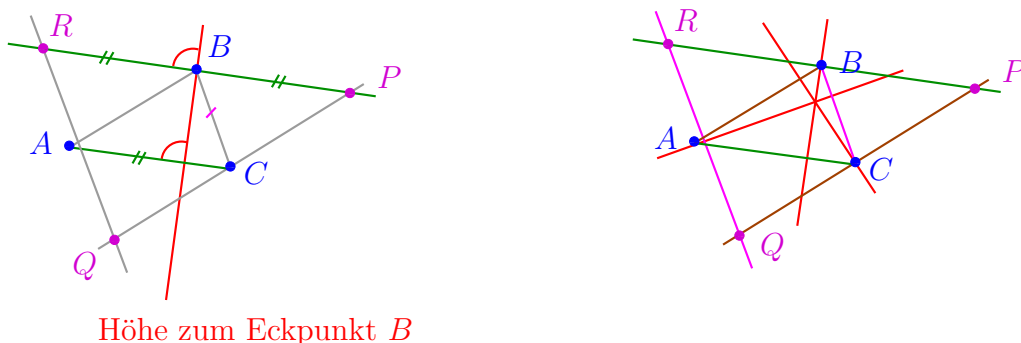


ABBILDUNG 67.

5.4. Die Winkelsumme eines Dreiecks.

Satz 5.4. *In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel π .*

Beweis. Es sei also $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Wir bezeichnen die Innenwinkel mit α, β und γ . Wir bezeichnen mit $g = g(A, B)$ die Gerade durch A und B . Nach Satz 1.4 existiert genau eine Gerade h , welche parallel zu g ist, und welche durch C verläuft.

Es folgt aus Satz 2.4, dass die Stufenwinkel, welche in Abbildung 68 skizziert sind, gleich sind. Diese drei Winkel am Punkt C summieren sich zu π auf, also gilt, dass $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. $\square$

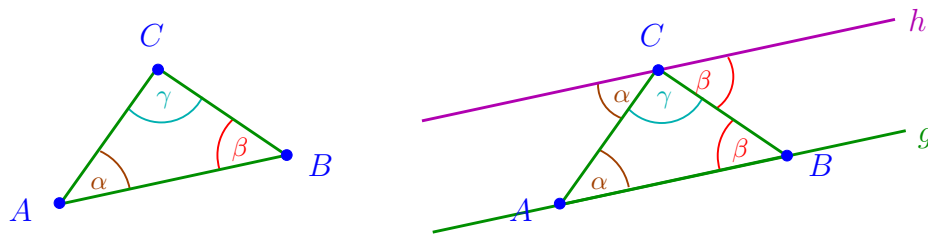


ABBILDUNG 68. Skizze zum Beweis von Satz 5.4.

Satz 5.5. *In jedem n -Eck beträgt die Summe der Innenwinkel $(n - 2) \cdot \pi$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz erst für einige Spezialfälle um die Idee für den allgemeinen Beweis zu finden.

Den Fall $n = 3$ haben wir gerade in Satz 5.4 bewiesen.

Wir betrachten nun den Fall $n = 4$. Wir betrachten dazu das Viereck, welches in Abbildung 69 links skizziert ist. In diesem Fall ziehen wir die Diagonale von A und C und

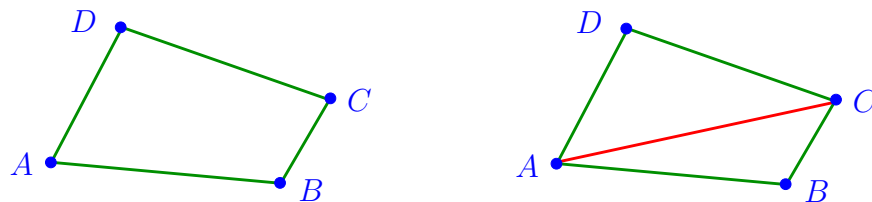


ABBILDUNG 69. Winkelsumme von einem konvexen Viereck.

unterteilen das Viereck in zwei Dreiecke, also gilt, dass:

$$\begin{aligned} \text{Winkelsumme des Vierecks } ABCD &= \text{Winkelsumme des Dreiecks } \triangle_{ABC} \\ &\quad + \text{Winkelsumme des Dreiecks } \triangle_{CDA} \\ &= \pi + \pi = 2\pi. \end{aligned}$$

Das Argument klingt natürlich ganz überzeugend, aber in der Skizze haben wir implizit angenommen, dass das Viereck konvex ist.

Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall. Wir betrachten also noch den Fall, dass das Viereck nicht konvex ist. Dieser Fall ist in Abbildung 70 links skizziert. In diesem Fall haben wir aber auch kein Problem, wir können das Viereck weiterhin in zwei Dreiecke unterteilen, siehe die Abbildung 70 rechts.

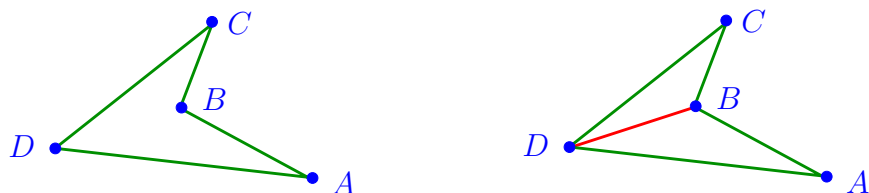


ABBILDUNG 70. Winkelsumme von einem nicht-konvexen Viereck.

Jetzt betrachten wir den Fall $n = 5$. Wenn das Fünfeck konvex ist, dann können wir, wie in Abbildung 71 skizziert, das Fünfeck in drei Dreiecke zerlegen. Wir erhalten dann, dass

$$\text{Winkelsumme des Fünfecks} = \text{Summe der Winkelsummen der 3 Dreiecke} = 3 \cdot \pi.$$

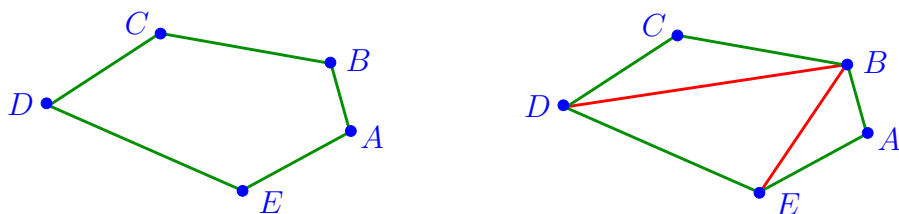


ABBILDUNG 71. Winkelsumme von einem konvexen Fünfeck.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Beweis des Satzes zu. Wir beweisen diesen durch Induktion nach der Anzahl der Ecken.

Induktionsanfang. $n = 3$, dieser Fall wurde schon in Satz 5.4 behandelt.

Induktionsschritt. Wir nehmen an, dass wir die Aussage schon für alle m -Ecke mit $m < n$ Ecken wissen. Wir müssen zeigen, dass wir die Aussage auch für ein beliebiges n -Eck gilt.

Wir betrachten nun noch den Fall eines beliebigen n -Ecks. Dieser Fall wird in Abbildung 72 skizziert. In diesem Fall können wir immer eine Strecke zwischen zwei Eckpunkten finden P und Q , welche ganz im n -Eck verläuft⁹. Diese Strecke unterteilt das n -Eck in zwei

⁹Wenn man ganz sauber argumentieren will, dann muss man begründen, warum es denn eigentlich immer eine solche Strecke gibt, aber wir unterlassen dies hier. Ein Beweis dieser Aussage wird z.B. in [Fr2] gegeben.

Vielecke mit k und l Ecken unterteilt, wobei $k + l = n + 2$. (Dies sieht man daran, dass die Eckpunkte P und Q nun zweimal mitgezählt werden.) Also gilt, dass

$$\begin{aligned}
 \text{Winkelsumme des } n\text{-Ecks} &= \text{Winkelsumme des } k\text{-Ecks} \\
 &= + \text{Winkelsumme des } l\text{-Ecks} \\
 &= (k - 2) \cdot \pi + (l - 2) \cdot \pi &= (n - 2) \cdot \pi.
 \end{aligned}$$

$\uparrow$ Induktionsvoraussetzung $\uparrow$ da $k + l = n + 2$

Wir haben damit den Induktionsschritt vollzogen. □

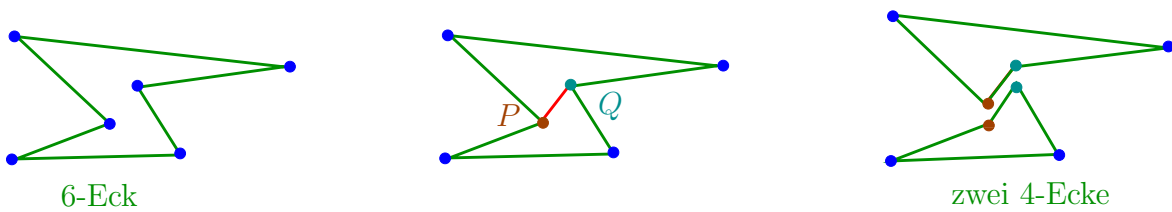


ABBILDUNG 72. Induktionsschritt im Beweis von Satz 5.5.

Satz 5.6. (Satz von Thales) *Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Es sei P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und es sei K der Kreis mit Mittelpunkt P und Radius $r := \frac{1}{2}\ell(\overline{AB})$. Für jeden Punkt C auf dem Kreis K mit $C \neq A$ und $C \neq B$ gilt, dass*

$$\sphericalangle_{ACB} = \frac{\pi}{2}.$$

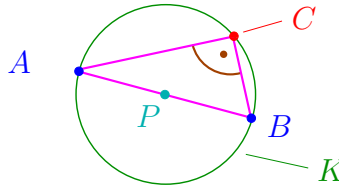


ABBILDUNG 73. Illustration des Satzes von Thales.

Beweis. Nachdem die Eckpunkte B und C auf dem Kreis durch P mit Radius r liegen folgt, dass $\ell(\overline{PC}) = r = \ell(\overline{PB})$. Das Dreieck PCB ist gleichschenkelig, es folgt aus Satz 4.2, dass es auch gleichwinklig ist, genauer gesagt es gilt, dass $\sphericalangle_{PCB} = \sphericalangle_{CBP}$. Wir bezeichnen diesen Winkel mit β .

Ganz analog zeigen wir auch, dass $\sphericalangle_{PCA} = \sphericalangle_{CAP}$. Wir bezeichnen diesen Winkel mit α . Nach Satz 5.4 beträgt die Winkelsumme im Dreieck gerade π , d.h. es ist

$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = \sphericalangle_{BAC} + \sphericalangle_{ACB} + \sphericalangle_{CBA} = \pi.$$

Es folgt also, dass $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. □

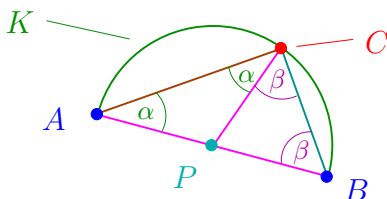


ABBILDUNG 74. Erster Beweis des Satzes von Thales.

Wir führen nun den Begriff der Sehne ein.

Definition. Eine *Sehne* in einem Kreis K ist eine Strecke $\overline{AB}$, wobei A und B auf dem Kreis K liegen.

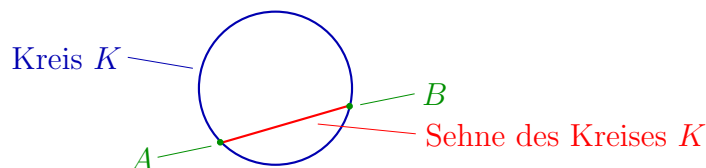


ABBILDUNG 75.

Folgender Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Thales.

Satz 5.7. (Peripheriewinkelsatz) *Es seien A und B zwei verschiedene Punkte, welche auf einem Kreis $K = K(P, r)$ liegen. Für jeden Punkt Q auf dem Kreis K , welcher auf der gleichen Seite wie P bezüglich $g(A, B)$ liegt, gilt*

$$\sphericalangle_{AQB} = \frac{1}{2} \sphericalangle_{APB}.$$

Insbesondere ist der "Peripheriewinkel" $\sphericalangle_{AQB}$ unabhängig von der Wahl von Q .

Bemerkung. Der Peripheriewinkelsatz wird manchmal auch als Umfangswinkelsatz bezeichnet.

Beweis. Wir betrachten die Dreiecke, welche in Abbildung 77 skizziert sind. Wir machen folgende Beobachtungen:

- (1) Nachdem B und Q auf dem Kreis um P liegen, gilt $\ell(\overline{BP}) = \ell(\overline{QP})$, also ist das Dreieck $\triangle_{BQP}$ gleichschenkelig. Es folgt nun aus Satz 4.2, dass das Dreieck auch gleichwinklig ist, d.h. die beiden Winkel ν , welche in Abbildung 77 eingezeichnet sind, sind gleich groß.
- (2) Genau das gleiche Argument wie in (1) zeigt, dass die beiden Winkel ν , welche in Abbildung 77 eingezeichnet sind, sind gleich groß.

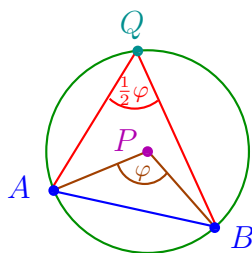


ABBILDUNG 76. Illustration des Peripheriewinkelsatzes.

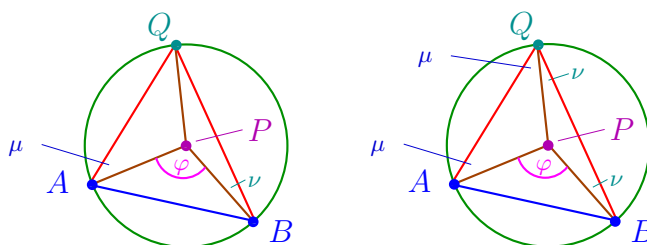


ABBILDUNG 77. Illustration zum Beweis des Peripheriewinkelsatzes.

Wir berechnen nun, dass

$$2 \cdot \sphericalangle_{AQP} = 2(\mu + \nu) = (\pi - \sphericalangle_{QPA}) + (\pi - \sphericalangle_{QPB}) = 2\pi - (\sphericalangle_{QPA} + \sphericalangle_{QPB}) = \varphi.$$

$\uparrow$
 nach Satz 5.4 angewandt auf $\triangle_{QAP}$ und $\triangle_{QBP}$

Es scheint so, als wären wir mit dem Beweis fertig. Wenn man sich die Skizze in Abbildung 77 anschaut, merkt man allerdings, dass in der Skizze der Mittelpunkt im Inneren des Dreiecks $\triangle_{ABQ}$ enthalten ist, und wir hatten diese Tatsache auch im Beweis verwendet.¹⁰ Dies muss allerdings nicht notwendigerweise der Fall sein, siehe beispielsweise Abbildung 78. Wir werden diesen zweiten Fall in Übung 9 behandeln. $\square$

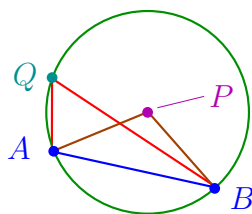


ABBILDUNG 78. Zweite Illustration zum Beweis des Peripheriewinkelsatzes.

¹⁰An welcher Stelle hatten wir dies implizit verwendet?

5.5. Reguläre n -Ecke.

Definition. Ein *reguläres n -Eck* ist ein n -Eck, so dass alle Seiten gleich lang sind und so dass alle Innenwinkel gleich groß sind.

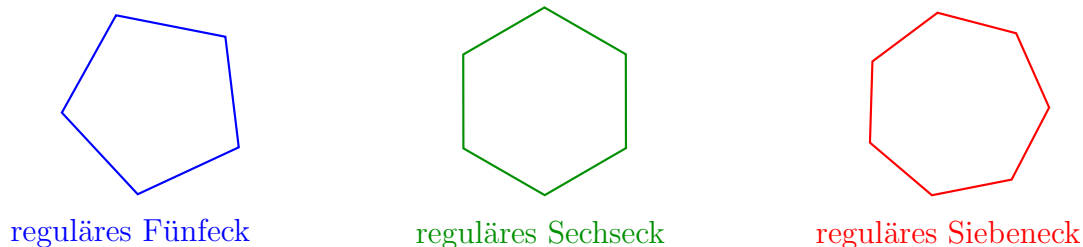


ABBILDUNG 79. Reguläre n -Ecke.

Bemerkung. In einem regulären n -Eck beträgt nach Satz 5.5 der Innenwinkel gerade $\frac{(n-2)\pi}{n}$.

Es folgt aus Satz 4.2, dass ein Dreieck ein reguläres Dreieck ist, genau dann, wenn es gleichseitig ist. Wir können natürlich leicht ein gleichseitiges Dreieck mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Konstruktion 5.8. (Reguläres Dreieck)

- (1) Es sei g eine Gerade und P ein Punkt auf der Gerade,
- (2) wir wählen einen Radius $r > 0$ und betrachten den Kreis $K(P, r)$,
- (3) es sei Q ein Schnittpunkt des Kreises mit der Gerade,
- (4) es sei R ein Schnittpunkt von $K(P, r)$ mit $K(Q, r)$ (die Kreise $K(P, r)$ und $K(Q, r)$ schneiden sich nach Satz 4.6),
- (5) dann ist $\triangle_{PQR}$ ein gleichseitiges Dreieck.

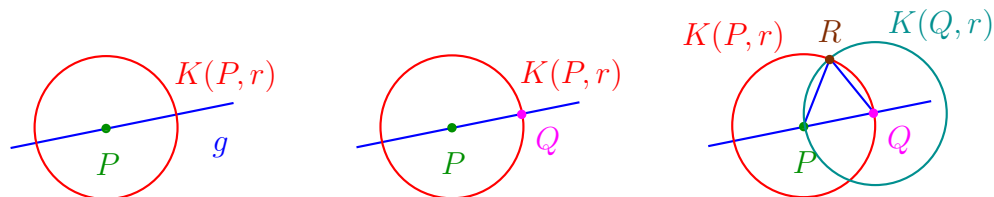


ABBILDUNG 80. Konstruktion von einem gleichseitigen Dreieck.

In Übungsblatt 10 werden wir die Frage behandeln, wie wir ein reguläres Viereck (mit möglichst wenig Aufwand) mit Zirkel und Lineal konstruieren können.

Es stellt sich nun folgende Frage:

Frage 5.9. Für welche n können wir ein reguläres n -Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren?

Diese Frage ist äquivalent zur folgenden Frage:

Frage 5.10. Für welche n können wir den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren?

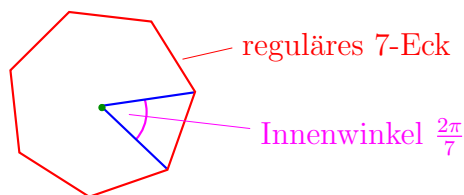


ABBILDUNG 81.

Wenn wir ein reguläres Sechseck konstruieren wollen, dann müssen wir also den Winkel $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ konstruieren. Aber dies ist gerade der Innenwinkel eines regulären Dreiecks. Wir erhalten also folgendes lemma.

Lemma 5.11. Wir können ein reguläres Sechseck mit Zirkel und Lineal konstruieren.

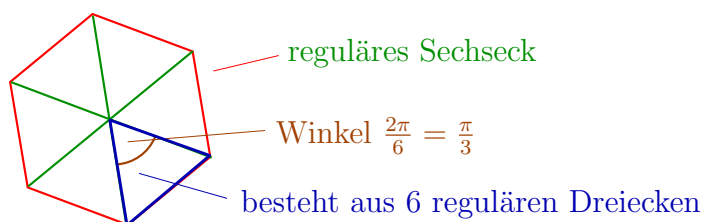


ABBILDUNG 82. Illustration von Lemma 5.11.

Die Konstruktion 4.8 der Winkelhalbierenden zeigt, dass wir jeden Winkel mit Zirkel und Lineal halbieren können. Insbesondere bedeutet das, dass wenn wir ein reguläres n -Eck konstruieren können, dann können wir auch ein reguläres $2n$ -Eck konstruieren. Wir können also beispielsweise auch das regelmäßige Achteck und das regelmäßige 12-Eck konstruieren.

Es stellt sich die Frage, wie schaut es den mit der Konstruktion des regulären Fünfecks aus?

Konstruktion 5.12. (Winkel $\frac{2\pi}{5}$ und damit von einem Regulären Fünfeck)

- (1) Es sei g eine Gerade und P ein Punkt auf g , mithilfe von Konstruktion 4.12 konstruieren wir eine Gerade h , welche senkrecht auf g steht und durch P verläuft,
- (2) wir wählen einen Radius $r > 0$ und betrachten den Kreis $K(P, r)$,
- (3) es sei A ein Schnittpunkt des Kreises mit der Gerade g und es sei B ein Schnittpunkt des Kreises mit der Gerade h ,
- (4) mithilfe von Konstruktion 4.5 bestimmen wir den Mittelpunkt Q der Strecke $\overline{PB}$,

- (5) wir betrachten den Kreis $K(Q, \frac{r}{2})$ und wir bezeichnen mit R den Schnittpunkt des Kreises mit der Strecke $\overline{QA}$,
- (6) wir betrachten den Kreis K' mit Mittelpunkt A , welcher durch den Punkt R verläuft,
- (7) wir bezeichnen mit X und Y die Schnittpunkte der Kreise $K(P, r)$ und K' ,
- (8) dann ist $\sphericalangle_{XPY} = \frac{2\pi}{5}$.

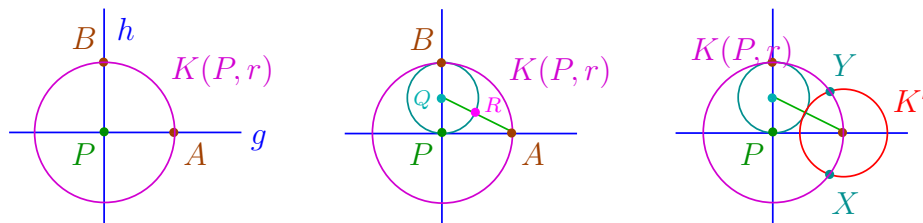


ABBILDUNG 83. Konstruktion des Winkels $\frac{2\pi}{5}$.

Es stellt sich natürlich die Frage, warum denn $\sphericalangle_{XPY} = \frac{2\pi}{5}$ gelten soll. Dies ist in der Tat nicht so offensichtlich und bedarf einer etwas längeren Rechnung, welche beispielsweise in Seite 13 von [Ku] gegeben wird.

Die obigen Konstruktionen und Ideen liefern uns also reguläre n -Ecke für

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20$$

Hier sind also noch viele Lücken. Eine Lücke welche man leicht schließen kann ist $n = 15$.

Satz 5.13. *Man kann den Winkel $\frac{2\pi}{15}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren.*

Beweis. Es ist

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{(5-3)\pi}{15} = \frac{2\pi}{15},$$

nachdem wir die ersten beiden Winkel konstruieren können und nachdem wir die Differenz von zwei Winkeln konstruieren können (wir werden dies in Übung 10 durchführen), können wir also auch den gewünschten Winkel $\frac{2\pi}{15}$ konstruieren. $\square$

Die Konstruktion der regulären n -Ecke für $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20$ waren den griechischen Mathematikern bekannt.

Die nächste Konstruktion eines regulären n -Ecks wurde 1797 von Gauß gegeben. Genauer gesagt, er zeigte folgenden Satz.

Satz 5.14. (Gauß 1797) *Man kann das reguläre 17-Eck mithilfe von Zirkel und Lineal konstruieren.*

Die Konstruktion ist natürlich aufwändiger als die obigen Konstruktionen, eine schöne Illustration wird hier gegeben:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Siebzehneck>

Etwas später hat Gauß sogar bestimmen können, welche regulären n -Ecke konstruiert werden können. Wir benötigen dazu folgende Definition.

Definition. Eine *Fermatsche Primzahl* ist eine Primzahl, welche man in der Form $2^{2^m} + 1$ schreiben kann.

Beispielsweise sind also $2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ und $2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$ Fermatsche Primzahlen.¹¹

Satz 5.15. (Gauß) Für $n \in \mathbb{N}$ ist das reguläre n -Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^m \cdot p_1 \cdots p_k$ ist, wobei $p_1, \dots, p_k$ paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen sind und $m \in \mathbb{N}_0$.

Beispielsweise ist $15 = 3 \cdot 5$ das Produkt von zwei verschiedenen Fermatschen Primzahlen, also bestätigt der Satz die obige Aussage, dass das reguläre 15-Eck konstruierbar ist.

Der Satz von Gauß besagt auch, dass das reguläre 257-Eck konstruiert werden kann, die Konstruktion wird beispielsweise auf

<https://de.wikipedia.org/wiki/257-Eck>

vorge stellt. Der Satz von Gauß besagt auch, dass das reguläre 65537-Eck konstruiert werden kann. Allerdings hat Gauß nie den Konstruktionsweg explizit aufgeschrieben. Der Konstruktionsweg wurde das erste (und vermutlich einzige Mal) in 1894 von dem deutschen Mathematiker Johann Gustav Hermes in einem Manuskript von mehr als 200 Seiten aufgeschrieben.

Andererseits ist 7 keine Fermatsche Primzahl und damit auch nicht von der Form im Satz von Gauß, also erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 5.16. Das reguläre 7-Eck kann nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Eine schöne Zusammenfassung der Geschichte der Konstruierbarkeit von regulären n -Ecken ist auch in dem folgenden Video gegeben:

<https://www.youtube.com/watch?v=1Ye9KLRgwxo>

Ein phantastisches Programm zum trainieren von effizienten Konstruktionsmethoden kann zudem hier gefunden werden:

<https://www.euclidea.xyz/>

¹¹Aber nicht jede Zahl der Form $2^{2^m} + 1$ ist eine Primzahl!

6. DIE KONGRUENZSÄTZE $SS_{\frac{\pi}{2}}$ UND SsW

Wir hatten im letzten Kapitel gesehen, dass die Kongruenzsätze SSS, SWS und WSW außerordentlich hilfreich sind. In diesem Kapitel lernen wir die Kongruenzsätze $SS_{\frac{\pi}{2}}$ und SsW kennen.

6.1. Der Kongruenzsatz $SS_{\frac{\pi}{2}}$. Wir erweitern jetzt unser Repertoire von Kongruenzsätzen um den Kongruenzsatz $SS_{\frac{\pi}{2}}$.

Satz 6.1. (Kongruenzsatz $SS_{\frac{\pi}{2}}$) Wenn für zwei Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ gilt

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}) \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle_{BCA} = \sphericalangle_{B'C'A'} = \frac{\pi}{2},$$

dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent. (Siehe dazu die Skizze in Abbildung 84).

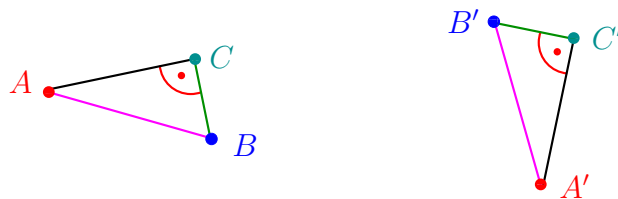
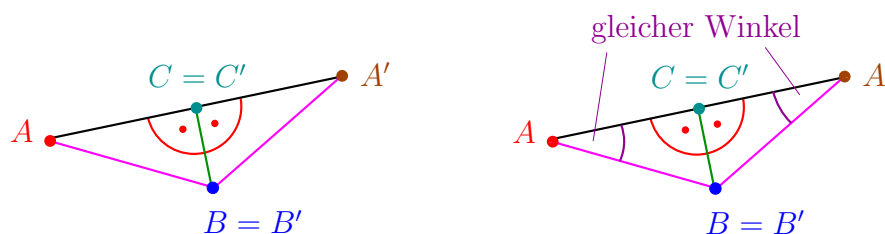


ABBILDUNG 84. Illustration des Kongruenzsatzes $SS_{\frac{\pi}{2}}$.

Beweis. Aus der Voraussetzung $\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'})$ folgt aus Lemma 2.14, dass wir, eventuell nach Anwendung einer Bewegung, annehmen können, dass $B = B'$ und $C = C'$. Nach einer etwaigen Spiegelung entlang der Gerade durch $B = B'$ und $C = C'$ können wir, nach Satz 2.7 (1), annehmen, dass A und A' auf *verschiedenen Seiten* dieser Gerade liegen. Diese Situation wird in Abbildung 85 skizziert.

Wir führen folgende Schritte durch:

- (1) Nachdem $\sphericalangle_{BCA} = \sphericalangle_{A'C'B'} = \frac{\pi}{2}$ liegen die Punkte $A, C = C', A'$ auf einer Geraden, d.h. es ist $\sphericalangle_{BAA'} = \sphericalangle_{BAC}$ und $\sphericalangle_{B'A'C'} = \sphericalangle_{BA'A}$.
- (2) Wir betrachten das Dreieck $\triangle_{BAA'}$. Nachdem $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$ ist dieses Dreieck gleichschenkelig, es folgt aus Satz 4.2, dass das Dreieck auch gleichwinklig ist, genauer gesagt, es folgt, dass $\sphericalangle_{BAA'} = \sphericalangle_{BA'A}$.
- (3) Es folgt aus der Voraussetzung $\sphericalangle_{BCA} = \sphericalangle_{A'C'B'} = \frac{\pi}{2}$, der Aussage (2) und dem Satz über die Winkelsumme, dass die beiden Dreiecke auch im dritten Innenwinkel übereinstimmen, d.h. es ist $\sphericalangle_{ABC} = \sphericalangle_{A'B'C'}$.
- (4) Es folgt nun aus dem Kongruenzsatz WSW, angewandt auf die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'} = \overline{A'B}$ (welche nach Voraussetzung gleich lang sind), dass die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind. $\square$

ABBILDUNG 85. Skizze zum Beweis des Kongruenzsatzes $SS_{\frac{\pi}{2}}$.

6.2. Winkel und Längen in einem Dreieck.

Definition. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Der *Außenwinkel* an einem Eckpunkt ist gegeben durch einen Schenkel des Dreiecks und die Verlängerung des anderen Schenkels in die entgegengesetzte Richtung, siehe Abbildung 86.



ABBILDUNG 86. .

Bemerkung.

- (1) Die Definition des Außenwinkels hängt nicht von der Wahl des Schenkels ab, denn die beiden Außenwinkel, welche man durch die beiden Schenkel erhält, sind Scheitelwinkel, also sind sie nach Satz 1.13 gleich groß, siehe Abbildung 87.

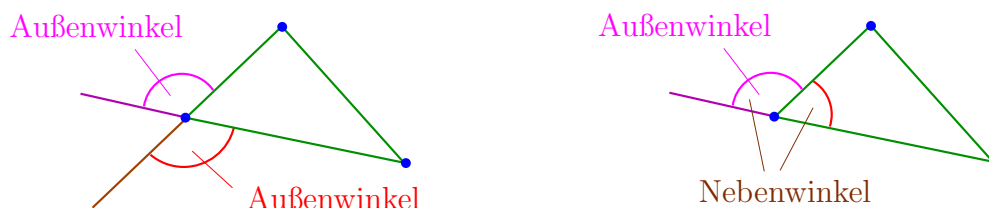


ABBILDUNG 87. Die beiden Außenwinkel sind Schenkelwinkel.

- (2) Der Außenwinkel und der zugehörige Innenwinkel eines Dreiecks sind Nebenwinkel.

Satz 6.2. (Außenwinkelsatz) *In jedem Dreieck gilt, dass der Außenwinkel an einem Eckpunkt größer ist als die Innenwinkel an den anderen beiden Eckpunkten.*

Beweis. Wir betrachten das Dreieck in Abbildung 88. Dann gilt

$$\begin{array}{c} \text{Außenwinkel bei } A = \pi - \alpha = (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha = \beta + \gamma. \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{Satz 5.4} \end{array}$$

Da $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ folgt nun, dass der Außenwinkel größer ist als β und auch größer ist als γ . $\square$

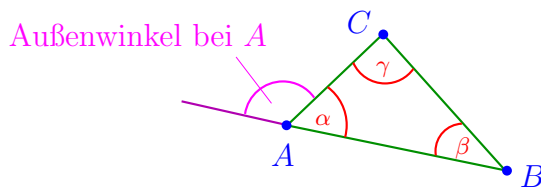


ABBILDUNG 88. Skizze zum Beweis von Satz 6.2.

Satz 6.3. In jedem Dreieck gilt

$$\begin{array}{l} \text{Innenwinkel am Eckpunkt } P < \text{Innenwinkel am Eckpunkt } Q \\ \iff \text{Länge der } P \text{ gegenüberliegenden Seite} < \text{Länge der } Q \text{ gegenüberliegenden Seite.} \end{array}$$

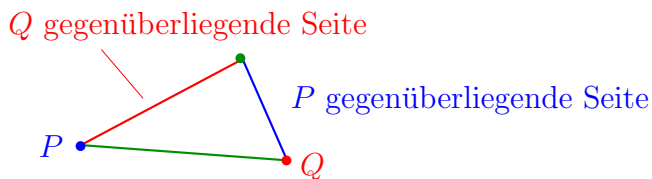
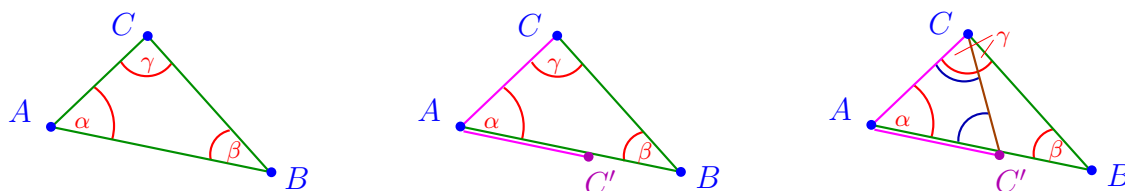


ABBILDUNG 89. Illustration von Satz 6.3.

Beweis. Wir betrachten also ein Dreieck $\triangle_{ABC}$. Aus Symmetriegründen genügt es die Eckpunkte B und C zu betrachten. Wir bezeichnen die Innenwinkel bei A, B und C mit α, β und γ , siehe Abbildung 90 links.

“ $\Leftarrow$ ” Wir setzen nun also voraus, dass $\ell(\overline{AC}) < \ell(\overline{AB})$. Wir wollen zeigen, dass $\beta < \gamma$. Wir bezeichnen hierzu mit C' den Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$ mit $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AC'})$. Es folgt nun, dass

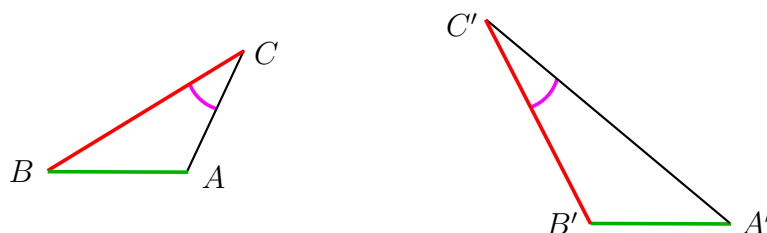
$$\begin{array}{ccccc} \gamma > \sphericalangle_{ACC'} & = & \sphericalangle_{AC'C} & > & \beta. \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{Satz 4.2 angewandt auf das} & & & & \text{Außenwinkelsatz 6.2} \\ \text{gleichschenklige Dreieck } \triangle_{ACC'} & & & & \text{angewandt auf } \triangle_{C'CB} \end{array}$$

ABBILDUNG 90. Skizze zum Beweis der “ $\Leftarrow$ ”-Richtung von Satz 6.3.

“ $\Rightarrow$ ” Wir setzen nun also voraus, dass $\beta < \gamma$. Wir wollen zeigen, dass $\ell(\overline{AC}) < \ell(\overline{AB})$. Wir beweisen die Aussage mit einem Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, dass $\ell(\overline{AC}) \geq \ell(\overline{AB})$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall Es sei $\ell(\overline{AC}) > \ell(\overline{AB})$. In diesem Fall besagt aber schon die oben bewiesene Richtung “ $\Leftarrow$ ”, dass $\beta > \gamma$ gelten muss.¹² Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\beta < \gamma$.
2. Fall Es sei nun $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB})$. In diesem Fall ist das Dreieck gleichschenkelig, also folgt aus Satz 4.2, dass das Dreieck auch gleichwinklig ist, genauer gesagt, dass $\beta = \gamma$. Dies ist wiederum ein Widerspruch zur Voraussetzung $\beta < \gamma$. $\square$

6.3. Der Kongruenzsatz SsW. Der naivste Gedanke wäre zu vermuten, dass ein Kongruenzsatz des Typs SSW ganz allgemein gilt. Aber wie wir in Abbildung 91 sehen, kann das so allgemein nicht stimmen.



die beiden Dreiecke stimmen in SSW über ein, sind aber nicht kongruent

ABBILDUNG 91.

Der nächste Satz besagt, dass unter einer gewissen Einschränkung ein Kongruenzsatz vom Typ SSW dennoch gilt.

Satz 6.4. (Kongruenzsatz SsW) *Es seien $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei Dreiecke. Wir nehmen an, dass*

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}) \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle_{BCA} = \sphericalangle_{B'C'A'}.$$

¹²Genauer gesagt, wir hatten schon bewiesen, dass in jedem Dreieck und für beliebige Eckpunkten gilt, dass für kürzere Seiten auch die Innenwinkel kürzer sind.

Wenn zudem gilt, dass $\ell(\overline{AB}) \geq \ell(\overline{BC})$, dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent.

Etwas vereinfacht gesagt besagt also der Kongruenzsatz SsW, dass wenn zwei Dreiecke in zwei Seitenlängen übereinstimmen und die Winkel gegenüber den längeren der beiden Seiten gleich groß sind, dann sind die Dreiecke kongruent.

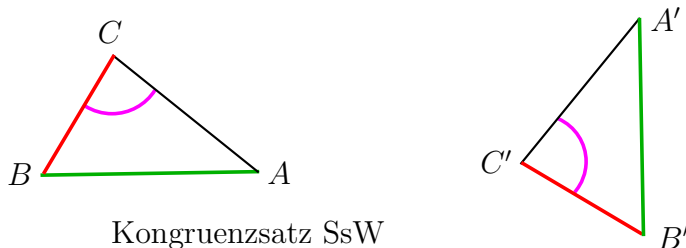


ABBILDUNG 92.

Beweis. Es seien $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei Dreiecke. Wir bezeichnen mit α, β, γ und α', β', γ' die Innenwinkel. Wir nehmen an, dass

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'}) \quad \text{und} \quad \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}) \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle_{BCA} = \sphericalangle_{B'C'A'}$$

und zudem nehmen wir an, dass $\ell(\overline{AB}) \geq \ell(\overline{BC})$. Wir wollen zeigen, dass die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind.

Behauptung. Es ist $\beta = \beta'$.

Wenn wir die Behauptung bewiesen haben, dann sind wir mit dem Beweis des Kongruenzsatzes auch schon fertig. In der Tat, denn aus $\beta = \beta'$ folgt mithilfe vom Kongruenzsatz WSW sofort, dass die Dreiecke kongruent sind.

Wir wenden uns nun dem Beweis der Behauptung zu. Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch. Wir nehmen also an, dass $\beta \neq \beta'$. O.B.d.A. ist dann $\beta < \beta'$. Die Ausgangslage ist in Abbildung 93 skizziert.



ABBILDUNG 93. Erste Skizze zum Beweis von Kongruenzsatz SsW.

Wir führen folgende Konstruktionen und Beobachtungen durch:

- (1) Wir bezeichnen mit A^* den Punkt auf der Strecke $\overline{A'C'}$ mit $\sphericalangle_{A^*B'C'} = \beta = \sphericalangle_{ABC}$. (Siehe Abbildung 94.)
- (2) Aus dem Kongruenzsatz WSW und aus unseren Voraussetzungen folgt, dass die Dreiecke $\triangle_{BCA}$ und $\triangle_{B'C'A^*}$ kongruent sind.
- (3) Es folgt aus (2), dass $\ell(\overline{B'A^*}) = \ell(\overline{BA})$, aber nach Voraussetzung gilt auch, dass $\ell(\overline{BA}) = \ell(\overline{B'A'})$, also erhalten wir, dass $\ell(\overline{B'A^*}) = \ell(\overline{B'A'})$.
- (4) In (3) hatten wir gezeigt, dass das Dreieck $\triangle_{A^*B'A'}$ gleichschenkelig ist. Aus Satz 4.2 folgt, dass das Dreieck $\triangle_{A^*B'A'}$ auch gleichwinklig ist, genauer gesagt, es folgt, dass $\sphericalangle_{B'A^*A'} = \sphericalangle_{B'A'A^*}$.

Zusammengefasst erhalten wir nun, dass

$$\begin{array}{ccccccc}
 \gamma' & < & \sphericalangle_{B'A^*A'} & = & \sphericalangle_{B'A'A^*} & = & \alpha' < \gamma' \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Außenwinkelsatz 6.2} & & \text{aus (4)} & & \text{folgt aus Satz 6.3 und der} & & \\
 \text{angewandt auf } \triangle_{B'C'A^*} & & & & \text{Voraussetzung, dass } \ell(\overline{A'B'}) > \ell(\overline{B'C'}) & &
 \end{array}$$

Wir erhalten damit, dass $\gamma' < \gamma'$. Aber dies ist absurd, d.h. wir haben einen Widerspruch erhalten. Wir haben damit die Behauptung bewiesen. $\square$

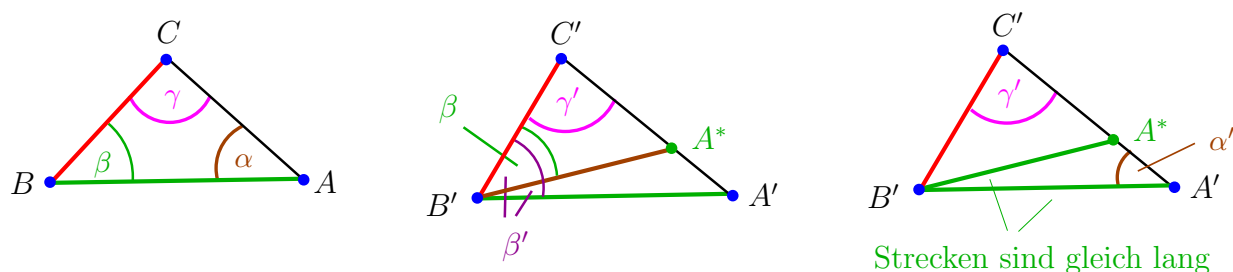


ABBILDUNG 94. Zweite Skizze zum Beweis von Kongruenzsatz SsW.

6.4. Der Abstand zwischen zwei Teilmengen der Ebene. Wir wollen nun den Abstand zwischen zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{E}$ einführen. Ein erster Versuch für eine Definition wäre den *Abstand zwischen A und B* wie folgt zu definieren

$$d(A, B) := \text{minimaler Abstand zwischen einem Punkt auf } A \text{ und einem Punkt auf } B.$$

Die Definition wird in Abbildung 95 illustriert.

Das Problem mit der obigen Definition ist jedoch, dass nicht so richtig klar ist, was denn nun “minimaler Abstand” heißen soll. Betrachten wir beispielsweise

$$A := x\text{-Achse} \quad \text{und} \quad B := \text{Graph von } f(x) = \frac{1}{x} \text{ mit } x \neq 0$$

Diese beiden Teilmengen kommen sich beliebig nahe, was soll also “minimaler Abstand” heißen?

Mithilfe der Analysis I haben wir aber kein Problem eine saubere Definition von “Abstand zwischen zwei Mengen” zu geben.

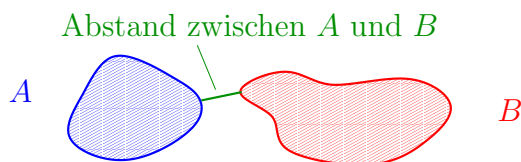


ABBILDUNG 95.

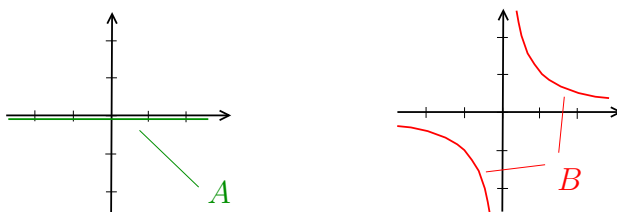


ABBILDUNG 96.

Definition. Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{E}$ bezeichnen wir

$$d(A, B) := \inf\{d(P, Q) = \ell(\overline{PQ}) \mid \text{wobei } P \text{ ein Punkt in } A \text{ und } Q \text{ ein Punkt in } B\}$$

als den *Abstand zwischen A und B*.

Beispiel. Für das Beispiel, welches in Abbildung 96 illustriert ist gilt $d(A, B) = 0$.

Zum Glück müssen wir allerdings in den meisten Fällen nicht mit dem Infimum arbeiten, denn in den meisten Fällen, welche uns interessieren, gibt es in der Tat Punkte von minimalen Abstand.

Satz 6.5. *Es sei g eine Gerade und P ein Punkt, welcher nicht auf der Gerade liegt. Wir fällen das Lot von P auf g und bezeichnen mit Q den Lotfußpunkt. Dann gelten folgende beiden Aussagen:*

- (1) *Es ist $d(P, Q) = d(P, g)$.*
- (2) *Für alle anderen Punkte R auf g gilt $d(P, R) > d(P, g)$.*

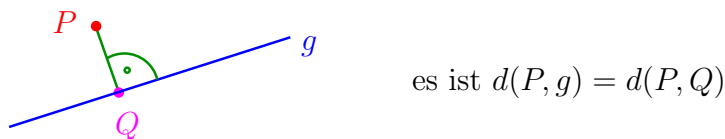


ABBILDUNG 97. Illustration von Satz 6.5.

Beweis. Es sei R ein beliebiger anderer Punkt auf der Gerade g . Wir müssen zeigen, dass $d(P, R) > d(P, Q)$. Aus dieser Aussage folgen schon die beiden gewünschten Aussagen (1) und (2). Wir betrachten dazu das Dreieck $\triangle_{PQR}$, welches in Abbildung 98 skizziert ist.

Es ist

$$\begin{array}{ccccccc} \sphericalangle QRP & = & \pi - \sphericalangle RPQ - \sphericalangle PQR & < & \pi - \sphericalangle PQR & = & \sphericalangle PQR. \\ \uparrow & & & & & \uparrow & \\ & \text{Satz 5.4} & & & & \text{da } \sphericalangle PQR = \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

Aber dann folgt auch schon aus Satz 6.3, dass $\ell(\overline{PQ}) < \ell(\overline{PR})$. □

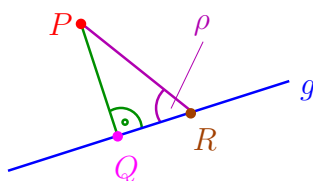


ABBILDUNG 98. Skizze zum Beweis von Satz 6.5.

Korollar 6.6. *Es sei g eine Gerade und P ein Punkt, welcher nicht auf der Gerade g liegt. Es sei $r = d(P, g)$. Dann gilt: der Kreis $K(P, r)$ ist tangential zur Gerade g , d.h. der Kreis $K(P, r)$ schneidet die Gerade g in genau einem Punkt.*

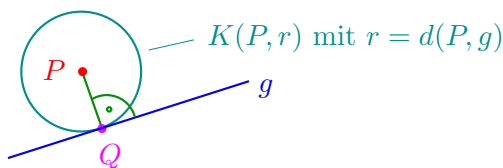


ABBILDUNG 99. Illustration von Korollar 6.6.

Beweis. Es sei g eine Gerade und P ein Punkt, welcher nicht auf der Gerade liegt. Wir fällen das Lot von P auf g und bezeichnen mit Q den Lotfußpunkt. In Satz 6.5 hatten wir bewiesen dass $d(P, Q) = d(P, g)$, und dass für alle anderen Punkte R auf g gilt, dass $d(P, R) > d(P, g)$. Mit anderen Worte, Q ist der einzige Punkt auf g , welcher auch auf $K(P, r)$ mit $r = d(P, g)$ liegt. □

6.5. Die Winkelhalbierenden in einem Dreieck und der Inkreis.

Definition. Es seien S und T zwei Strahlen, welche von einem Punkt P ausgehen. Die *Winkelhalbierende* von S und T ist der Strahl U , welcher von P ausgeht, mit

$$\sphericalangle(S, U) = \sphericalangle(T, U) = \frac{1}{2}\sphericalangle(S, T).$$

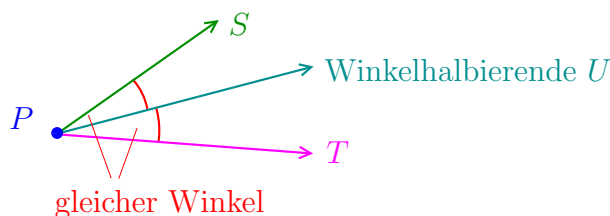


ABBILDUNG 100.

Lemma 6.7. *Es seien S und T zwei Strahlen, welche von einem Punkt P ausgehen. Die Winkelhalbierende von S und T ist die Menge aller Punkte, welche zu S und T den gleichen Abstand besitzen.*¹³

Bemerkung. Lemma 6.7 erinnert an Lemma 4.9. Dieses besagt, dass die Mittelsenkrechte zu einer Strecke $\overline{AB}$ gerade die Menge aller Punkte ist, welche zu A und B den gleichen Abstand besitzen.

Beweis. Es seien S und T zwei Strahlen, welche von einem Punkt P ausgehen.

- (1) Wir bezeichnen mit U die Winkelhalbierende von S und T . Es sei $Q \in U$. Wir müssen zeigen, dass $d(Q, S) = d(Q, T)$. Wir fällen dazu das Lot von P auf S beziehungsweise auf T . Wir bezeichnen die Lotfußpunkte mit A und B , siehe Abbildung 101 links. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle BPQ$ und $\triangle APQ$. Hierbei gilt:
 - (a) Es ist $\sphericalangle BPQ = \frac{1}{2}\sphericalangle(S, T) = \sphericalangle APQ$, da Q auf der Winkelhalbierenden liegt.
 - (b) Es ist $\sphericalangle QBP = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle QAP$, da A und B Lotfußpunkte sind.
 - (c) Es folgt aus Satz 5.4 und (1) und (2), dass die beiden Dreiecke in allen drei Winkeln übereinstimmen.
 - (d) Die beiden Dreiecke besitzen eine gemeinsame Kante, also folgt aus dem Kongruenzsatz WSW, dass die Dreiecke $\triangle BPQ$ und $\triangle APQ$ kongruent sind.
 - (e) Es folgt aus (4), dass $\overline{QB} = \overline{QA}$.
 - (f) Es folgt aus (5) und Satz 6.5, dass in der Tat $d(Q, S) = d(Q, T)$.
- (2) Es sei nun Q ein Punkt mit $d(Q, S) = d(Q, T)$, siehe Abbildung 101 rechts. Wir verfahren wie folgt:
 - (a) Wir fällen wieder das Lot auf S und T und erhalten die Lotfußpunkte A und B .
 - (b) Aus Satz 6.5 folgt, dass $d(Q, S) = \ell(\overline{QA})$ und $d(Q, T) = \ell(\overline{QB})$.
 - (c) Wir erhalten aus (2) und dem Kongruenzsatz SS $\frac{\pi}{2}$, dass die Dreiecke $\triangle BPQ$ und $\triangle APQ$ kongruent sind.
 - (d) Es folgt aus (3), dass $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle APQ$, d.h. Q liegt auf der Winkelhalbierenden. $\square$

Folgender Satz ist nun das Analogon zu Satz 4.10.

Satz 6.8. *Die drei Winkelhalbierenden eines beliebigen Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt.*

¹³Streng genommen betrachten wir hierbei nur die Punkte, welche sich im Inneren des von S und T aufgespannten Winkels befinden.

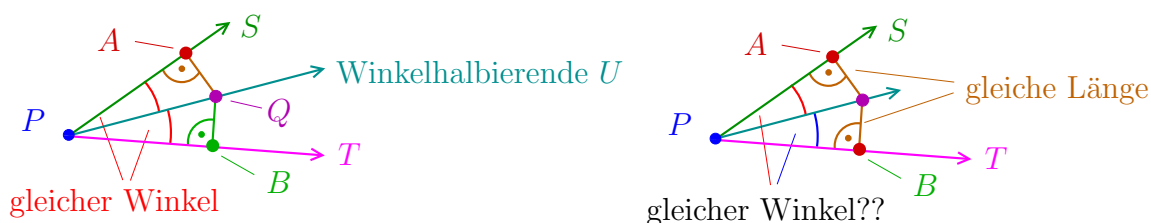


ABBILDUNG 101. Skizze zum Beweis von Lemma 6.7.

Beweis. Der Beweis von Satz 6.8 ist formal ganz ähnlich zum Beweis von Satz 4.10. Wir müssen nur Lemma 4.9 durch Lemma 6.7 ersetzen.

Wir führen das Argument noch durch. Wir bezeichnen mit a, b und c die Winkelhalbierenden bei A, B und C . Wir bezeichnen mit P den Schnittpunkt von a und b . Aus Lemma 6.7 folgt, dass $d(P, \overline{AB}) = d(P, \overline{AC})$ und auch, dass $d(P, \overline{BC}) = d(P, \overline{AC})$. Zusammengefasst folgt, dass $d(P, \overline{BC}) = d(P, \overline{AC})$, d.h. P liegt nach Lemma 6.7 auch auf der Winkelhalbierenden c . $\square$

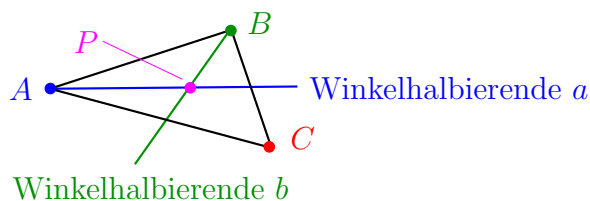


ABBILDUNG 102. Skizze zum Beweis von Satz 6.8.

Satz 6.9. *Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Dann existiert genau ein Kreis, welcher tangential zu allen drei Seiten ist.*

Der Kreis aus Satz 6.9 wird auch der *Inkreis* des Dreiecks $\triangle_{ABC}$ genannt.

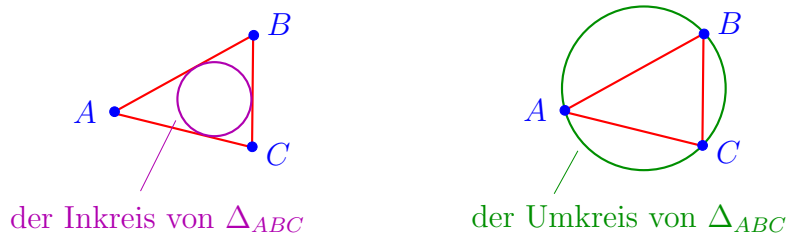


ABBILDUNG 103.

Beweis. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Nach Satz 6.8 schneiden sich die drei Winkelhalbierenden in genau einem Punkt P . Wir setzen $r = d(P, \overline{AB})$. Wie wir schon im Beweis von Satz 6.8 gesehen hatten gilt auch $r = d(P, \overline{AC})$ und $r = d(P, \overline{BC})$. Es folgt nun aus Korollar 6.6, dass $K(P, r)$ tangential zu allen drei Seiten des Dreiecks ist.

Die Eindeutigkeit des Inkreises folgt aus der Tatsache, dass der Mittelpunkt eines Kreises, welcher alle drei Seiten berührt nach Lemma 6.7 auf allen Winkelhalbierenden liegen muss. Aber diese schneiden sich in *genau* einem Punkt. $\square$

7. ÄHNLICHE DREIECKE UND DIE SEITENHALBIERENDEN EINES DREIECKS

7.1. Streckungen und ähnliche Dreiecke.

Definition. Es sei $P \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ ein Punkt und es sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir bezeichnen die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ Q &\mapsto P + \lambda \cdot (Q - P) \end{aligned}$$

als *Streckung* mit *Streckzentrum* P und *Streckungsfaktor* λ . Mit anderen Worten, ein Punkt der Form $P + v$ wird auf den Punkt $P + \lambda v$ geschickt.

Im folgenden Satz fassen wir die wichtigsten Eigenschaften von Streckungen zusammen. Im weiteren Verlauf werden wir nie mehr mit der obigen Definition einer Streckung arbeiten, sondern nur noch mit den Eigenschaften, welche in Satz 7.1 aufgeführt werden.

Satz 7.1. *Es sei $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ die Streckung mit Streckzentrum P und Streckungsfaktor λ . Es gelten folgende Aussagen:*

- (1) *Die Streckung erhält den Punkt P und alle Strahlen, welche von P ausgehen, werden auf den gleichen Strahl geschickt.*
- (2) *Die Streckung ist winkelerhaltend.*
- (3) *Die Streckung führt jede Gerade g in eine zu g parallele Gerade über.*
- (4) *Die Streckung multipliziert die Länge einer Strecke mit dem Faktor λ , mit anderen Worten, für alle $A \neq B$ gilt, dass*

$$\frac{\ell(\overline{\varphi(A)\varphi(B)})}{\ell(\overline{AB})} = \lambda.$$

Beweis. Die Aussagen folgen leicht aus elementaren Rechnungen, welche wir hier nicht ausführen wollen. $\square$

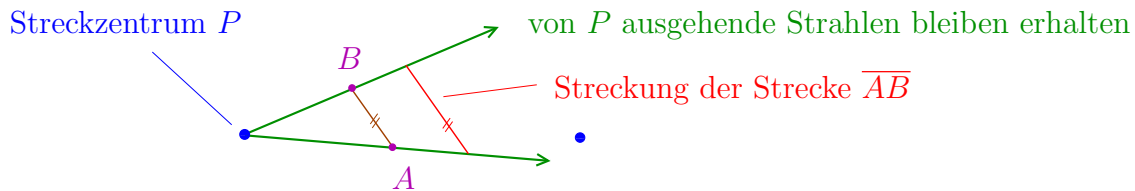


ABBILDUNG 104. Illustration von Satz 7.1.

Definition.

- (1) Eine *Ähnlichkeitsabbildung* ist die Verknüpfung einer Bewegung mit einer Streckung.
- (2) Wir sagen zwei Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ sind *ähnlich*, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ sowie $\varphi(C) = C'$ gibt.

Folgendes Lemma fasst zwei wichtige Eigenschaften von ähnlichen Dreiecken zusammen.

Lemma 7.2. Wenn $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei ähnliche Dreiecke sind, dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Die entsprechenden Innenwinkel sind gleich groß.
- (2) Je zwei entsprechenden Seiten haben das gleiche Längenverhältnis, beispielsweise gilt

$$\frac{\ell(\overline{AB})}{\ell(\overline{AC})} = \frac{\ell(\overline{A'B'})}{\ell(\overline{A'C'})}.$$

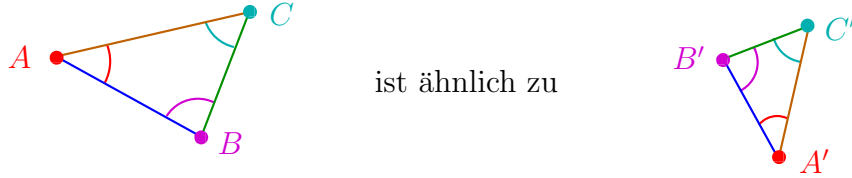


ABBILDUNG 105.

Beweis (*).

- (1) Die Aussage folgt aus der Tatsache, bewiesen in Lemma 2.12 und Satz 7.1, dass sowohl Bewegungen als auch Streckungen winkelerhaltend sind.
- (2) Die Aussage folgt aus der Tatsache, bewiesen in Lemma 2.12, dass sowohl längenerhaltend sind und das eine Streckung mit Streckungsfaktor λ alle Längen um den gleichen Faktor λ verzerrt, d.h. wenn $\triangle_{ABC}$ aus einer Streckung mit Streckungsfaktor λ auf $\triangle_{A'B'C'}$ hervorgeht, dann gilt

$$\frac{\ell(\overline{AB})}{\ell(\overline{AC})} = \frac{\lambda \cdot \ell(\overline{A'B'})}{\lambda \cdot \ell(\overline{A'C'})} = \frac{\ell(\overline{A'B'})}{\ell(\overline{A'C'})} \quad \square$$

Folgender Satz gibt uns die Umkehrung von Lemma 7.2 (1).

Satz 7.3. (Ähnlichkeitssatz WWW) Es seien $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei Dreiecke. Wenn deren Innenwinkel bei A, A' , sowie bei B, B' und C, C' übereinstimmen, dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ ähnlich.

Beweis. Nachdem $\sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{B'A'C'}$ können wir nach einer Bewegung schon annehmen, dass $A = A'$, und dass $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ sowie $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Es sei φ die Streckung mit Streckzentrum A , welche B auf B' schickt. Dann gilt $\varphi(A) = A = A'$ und $\varphi(B) = B'$. Wir müssen noch folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Es ist $\varphi(C) = C'$.

Wir machen folgende Beobachtungen:

- (1) Es ist

$$\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{A\varphi(C)} & = & \overrightarrow{AC'} & = & \overrightarrow{AC''} \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{Satz 7.1 (1)} & & \text{siehe oben} & \end{array}$$

(2) Zudem gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} \sphericalangle_{AB'\varphi(C)} & = & \sphericalangle_{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)} & = & \sphericalangle_{ABC} & = & \sphericalangle_{A'B'C'} = \sphericalangle_{AB'C'} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{denn } \varphi(A) = A \text{ und } \varphi(B) = B' & & \text{Satz 7.1 (1)} & & \text{nach Voraussetzung} & & \end{array}$$

Also gilt $\overrightarrow{B'\varphi(C)} = \overrightarrow{B'C'}$.

Es folgt also aus (1) und (2), dass sowohl C' als auch $\varphi(C)$ auf den gleichen zwei Strahlen liegen. Nachdem diese Strahlen nur einen Schnittpunkt besitzen, muss schon $C' = \varphi(C)$ gelten. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen. $\square$

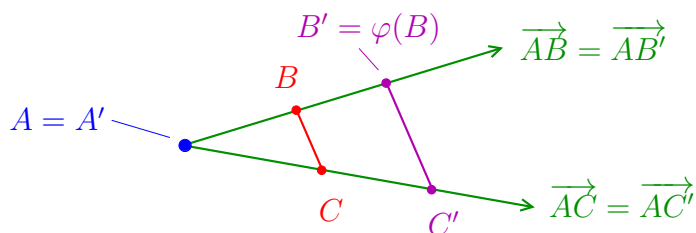


ABBILDUNG 106. Illustration zum Beweis vom Ähnlichkeitssatz WWW.

7.2. Der Strahlensatz.

Satz 7.4. (Strahlensatz) Es seien $g(A_1, A_2)$ und $g(B_1, B_2)$ zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P schneiden. Wenn $g(A_1, B_1)$ parallel zu $g(A_2, B_2)$ ist, dann gelten folgende Aussagen:

$$(1) \quad \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PA_1})} = \frac{\ell(\overline{PB_2})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{A_2B_2})}{\ell(\overline{A_1B_1})} \quad \text{und} \quad (2) \quad \frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PB_2})} = \frac{\ell(\overline{A_1A_2})}{\ell(\overline{B_1B_2})}.$$

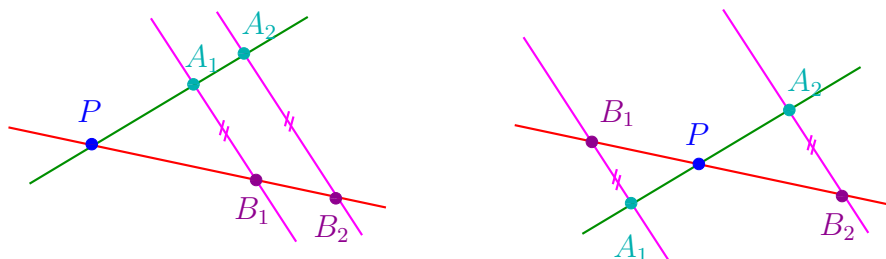


ABBILDUNG 107. Skizze des Strahlensatzes 7.4.

Beweis. Nach einer eventuellen Spiegelung am Punkt P können wir annehmen, dass wir im Fall von Abbildung 107 links sind, d.h. wir können annehmen, dass A_1, A_2 auf der gleichen Seite von P liegen, und dass auch B_1, B_2 auf der gleichen Seite von P liegen.

Wir machen zuerst folgende Beobachtung, es ist

$$\begin{array}{ccc} \sphericalangle_{PA_1B_1} & = & \sphericalangle_{PA_2B_2} \quad \text{und} \quad \sphericalangle_{PB_1A_1} = \sphericalangle_{PB_2A_2} \\ \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

folgt, da $g(A_1, B_1)$ parallel zu $g(A_2, B_2)$, und da die Winkel jeweils Stufenwinkel sind

Bei den Dreiecke $\Delta_{PA_1B_1}$ und $\Delta_{PA_2B_2}$ stimmen also die Innenwinkel überein. Es folgt aus dem Ähnlichkeitssatz WWW 7.3, dass die Dreiecke $\Delta_{PA_1B_1}$ und $\Delta_{PA_2B_2}$ ähnlich sind. Die gewünschte Aussage folgt also aus Lemma 7.2.

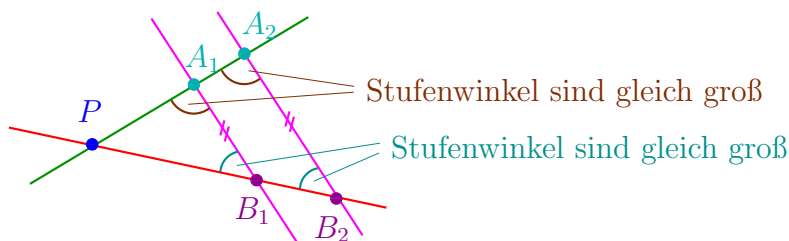


ABBILDUNG 108. Skizze zum Beweis des Strahlensatzes 7.4.

Wir werden die in (2) genannten Gleichheiten in Übungsblatt 12 herleiten. $\square$

Der folgende Satz besagt, dass die Umkehrung zur Aussage (1) vom Strahlensatz 7.4 gilt.

Satz 7.5. *Es seien g und h zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P schneiden. Zudem seien k_1 und k_2 zwei weitere Geraden, welche g und h in den Punkten A_1, A_2 beziehungsweise B_1, B_2 schneiden. Wir nehmen an, dass sowohl A_1, A_2 als auch B_1, B_2 auf der gleichen Seite von P liegen, siehe Abbildung 109. Wenn*

$$\frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PA_1})} = \frac{\ell(\overline{PB_2})}{\ell(\overline{PB_1})}$$

dann ist die Gerade $g(A_1, B_1)$ parallel zu $g(A_2, B_2)$.

Beweis ().* Wir setzen $\lambda = \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PA_1})}$. Wir bezeichnen mit φ die Streckung mit Streckungszentrum P und Streckungsfaktor λ . Nachdem die Punkte A_1, A_2 auf der gleichen Seite von P liegen, gilt, dass $\varphi(A_1) = A_2$. Ganz analog gilt auch, dass $\varphi(B_1) = B_2$. Nachdem eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt ist, folgt, dass $\varphi(g(A_2, B_2)) = g(A_1, B_1)$. Es folgt nun wiederum aus Satz 7.1 (3), dass die Geraden $g(A_2, B_2)$ und $g(A_1, B_1)$ parallel sind. $\square$

Als Anwendung des Strahlensatzes beweisen wir folgende Aussage.

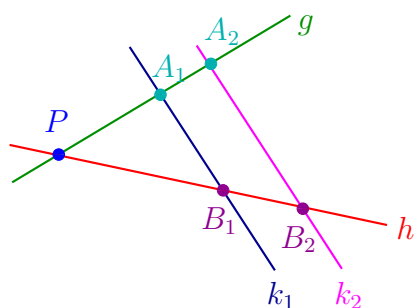


ABBILDUNG 109.

Satz 7.6. Jede Winkelhalbierende in einem Dreieck teilt die dem Winkel gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. Mit anderen Worten, in Abbildung 110 gilt

$$\frac{\ell(\overline{TC})}{\ell(\overline{TB})} = \frac{\ell(\overline{AC})}{\ell(\overline{AB})}.$$

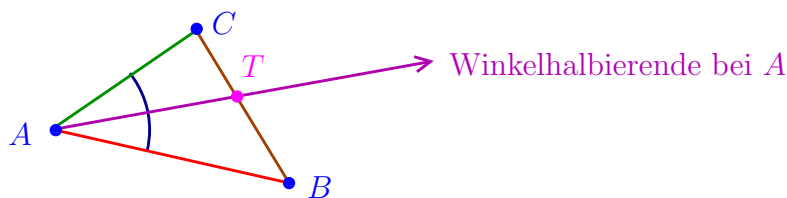


ABBILDUNG 110. Illustration von Satz 7.6.

Beweis. Der Beweis erfolgt in folgenden Schritten:

- (1) Wir betrachten die zu $g(A, B)$ parallele Gerade durch C . Diese schneidet die Winkelhalbierende in einem Punkt D .
- (2) Die Winkel $\sphericalangle_{TDC}$ und $\sphericalangle_{TAB}$ sind Wechselwinkel, also gleich groß. Nachdem $\overrightarrow{AD}$ die Winkelhalbierende ist, wissen wir auch noch, dass $\sphericalangle_{TAB} = \sphericalangle_{TAC}$. Zusammengefasst ist $\sphericalangle_{DAC} = \sphericalangle_{CAD}$.
- (3) Das Dreieck $\triangle_{ACD}$ ist nach (2) gleichwinklig. Es folgt nun aus Satz 4.2, dass das Dreieck $\triangle_{ACD}$ gleichschenkelig ist, genauer gesagt, es gilt, dass $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{DC})$.
- (4) Andererseits besagt der Strahlensatz 7.4 (2), angewandt auf die Strahlen, welche von T ausgehen, dass

$$\frac{\ell(\overline{TC})}{\ell(\overline{TB})} = \frac{\ell(\overline{DC})}{\ell(\overline{AB})}.$$

- (5) Zusammengenommen ergeben (3) und (4) die gewünschte Aussage. □

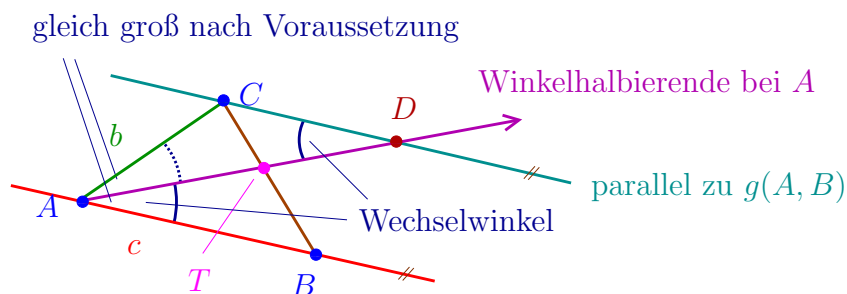
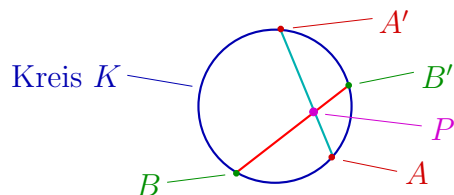


ABBILDUNG 111. Illustration für den Beweis von Satz 7.6.

Satz 7.7. (Sehnensatz) *Es sei P ein Punkt im Inneren eines Kreises K . Das Produkt der Längen der Sehnenabschnitte einer Sehne durch P hängt nicht von der Wahl der Sehne ab. Mit anderen Worten, für zwei beliebige Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ durch P gilt*

$$\ell(\overline{AP}) \cdot \ell(\overline{A'P}) = \ell(\overline{BP}) \cdot \ell(\overline{B'P}).$$



der Sehnensatz besagt, dass
 $\ell(\overline{AP}) \cdot \ell(\overline{A'P}) = \ell(\overline{BP}) \cdot \ell(\overline{B'P})$

ABBILDUNG 112. Illustration des Sehnensatzes 7.7.

Beweis. Wir betrachten nun die Skizze in Abbildung 113. Wir beginnen mit folgender Behauptung:

Behauptung. Die Dreiecke Δ_{APB} und $\Delta_{B'PA'}$ sind ähnlich.

- (1) Es folgt aus dem Peripheriewinkelsatz 5.7, angewandt auf die Sehne $\overline{BA'}$, dass $\sphericalangle_{BAA'} = \sphericalangle_{BB'A'}$.
- (2) Das gleiche Argument zeigt auch, dass $\sphericalangle_{ABB'} = \sphericalangle_{AA'B'}$.
- (3) Es folgt aus (1) und (2) zusammen mit dem Ähnlichkeitssatz WWW 7.3, dass die Dreiecke Δ_{APB} und $\Delta_{B'PA'}$ ähnlich sind.

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Aus der Behauptung zusammen mit Lemma 7.2 folgt nun, dass

$$\frac{\ell(\overline{AP})}{\ell(\overline{PB})} = \frac{\ell(\overline{B'P})}{\ell(\overline{PA'})}.$$

Daraus folgt sofort die gewünschte Aussage. □

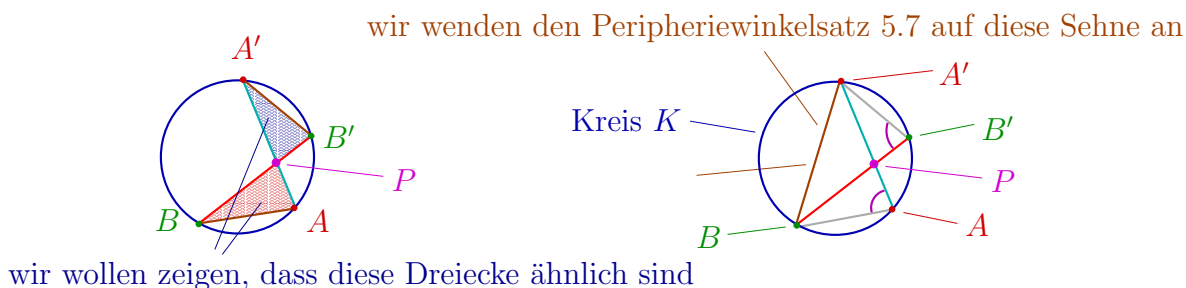


ABBILDUNG 113. Illustration zum Beweis des Sehnensatzes 7.7.

7.3. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks.

Definition. Es sei $\triangle$ ein Dreieck. Die *Seitenhalbierende* einer Seite ist die Gerade durch den Mittelpunkt der Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt. Diese Definition wird in Abbildung 114 skizziert.

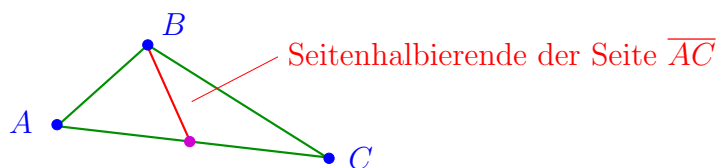
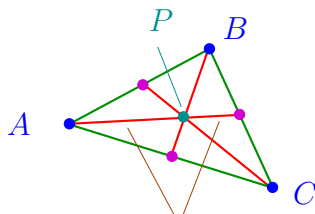


ABBILDUNG 114.

Satz 7.8. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt P . Dieser Punkt P zerteilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.



jede Seitenhalbierende wird unterteilt im Verhältnis 2 : 1

ABBILDUNG 115. Skizze zu Satz 7.8.

Beweis. Es sei also $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Wir bezeichnen mit M_a den Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und wir bezeichnen mit S_a die Seitenhalbierende der Seite $\overline{BC}$. Ganz analog definieren wir auch M_b, M_c sowie s_b und s_c , siehe auch Abbildung 116 links.

Wir beginnen den Beweis mit folgender Behauptung.

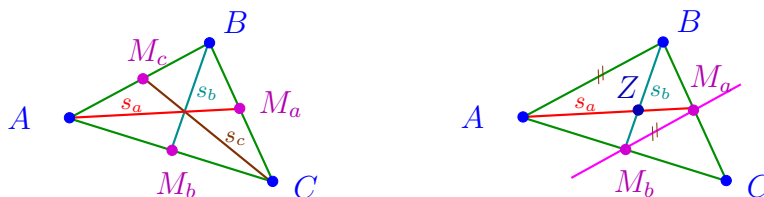


ABBILDUNG 116. Skizze zum Beweis von Satz 7.8.

Behauptung. Der Schnittpunkt Z der Seitenhalbierenden S_a und S_b teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$, wobei die längere Strecke den Eckpunkt enthält.

Wir wenden uns der Abbildung 116 rechts zu. Nachdem M_b und M_a die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ sind folgt sofort aus Satz 7.5, angewandt auf $P = C$ und $g = g(C, A)$ und $h = g(C, B)$, sowie $k_1 = g(M_b, M_a)$ und $k_2 = g(A, B)$, dass die Gerade $g(M_b, M_a)$ parallel zur Gerade $g(A, B)$ ist.

Es folgt nun aus dem Strahlensatz 7.4 (1), dass

$$\frac{\ell(\overline{ZM_a})}{\ell(\overline{ZA})} \underset{\substack{\text{Strahlensatz 7.4 (1)} \\ \text{angewandt auf } P = Z}}{=} \underset{\uparrow}{=} \frac{\ell(\overline{ZM_b})}{\ell(\overline{ZB})} \underset{\substack{\text{Strahlensatz 7.4 (2)} \\ \text{angewandt auf } P = Z}}{=} \underset{\uparrow}{=} \frac{\ell(\overline{M_a M_b})}{\ell(\overline{AB})} \underset{\substack{\text{Strahlensatz 7.4 (2)} \\ \text{angewandt auf } P = C}}{=} \frac{1}{2}.$$

Wir haben also gezeigt, dass Z die Seitenhalbierenden $\overline{AS_a}$ im Verhältnis $2 : 1$ teilt, wobei die längere Strecke den Eckpunkt enthält A . Das gleiche Argument, mit den Rollen von B und A vertauscht, zeigt die analoge Aussage für die Seitenhalbierende $\overline{BS_b}$. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Genau der gleiche Beweis zeigt natürlich auch folgende Behauptung.

Behauptung. Der Schnittpunkt Y der Seitenhalbierenden S_a und S_c teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$, wobei die längere Strecke den Eckpunkt enthält.

Nachdem Y und Z nun beide die Seitenhalbierende S_a im Verhältnis $2 : 1$ teilen, muss schon gelten, dass $Y = Z$. Nachdem $Y = Z$ auf allen drei Seitenhalbierenden liegt, ist $Y = Z$ der gewünschte Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden. $\square$

7.4. Die Eulersche Gerade (*).¹⁴ Es sei Δ_{ABC} ein Dreieck. Wir bezeichnen mit

- (1) m_a, m_b, m_c die Mittelsenkrechten,
- (2) h_a, h_b, h_c die Höhen,
- (3) s_a, s_b, s_c die Seitenhalbierenden.

Aus Satz 4.10, 5.3, 7.8 wissen wir, dass sich die drei Geraden jeweils in genau einem Punkt schneiden, wir bezeichnen die Schnittpunkte mit M, H und S .

¹⁴Wir haben dieses Kapitel in der Vorlesung nicht durchgenommen, es ist also nicht Teil des Stoffes.

Satz 7.9.

- (1) Für jedes Dreieck Δ_{ABC} liegen der Umkreismittelpunkt M , der Höhenschnittpunkt H und der Schwerpunkt S auf einer Geraden.
- (2) Wenn das Dreieck nicht gleichseitig ist, dann liegt S zwischen H und M und es gilt $\ell(\overline{HS}) = 2 \cdot \ell(\overline{SM})$. Insbesondere ist in diesem Fall die Gerade eindeutig bestimmt.

Die Gerade durch M , H und S wird die *Eulersche Gerade* genannt.

Bemerkung. Nach Satz 6.8 wissen wir, dass sich die Winkelhalbierenden ebenfalls in genau einem Punkt W schneiden. Es ist eine schöne Übungsaufgabe sich zu überlegen, ob eine Kombination von W mit zwei der anderen Punkte ebenfalls auf einer Geraden liegt.

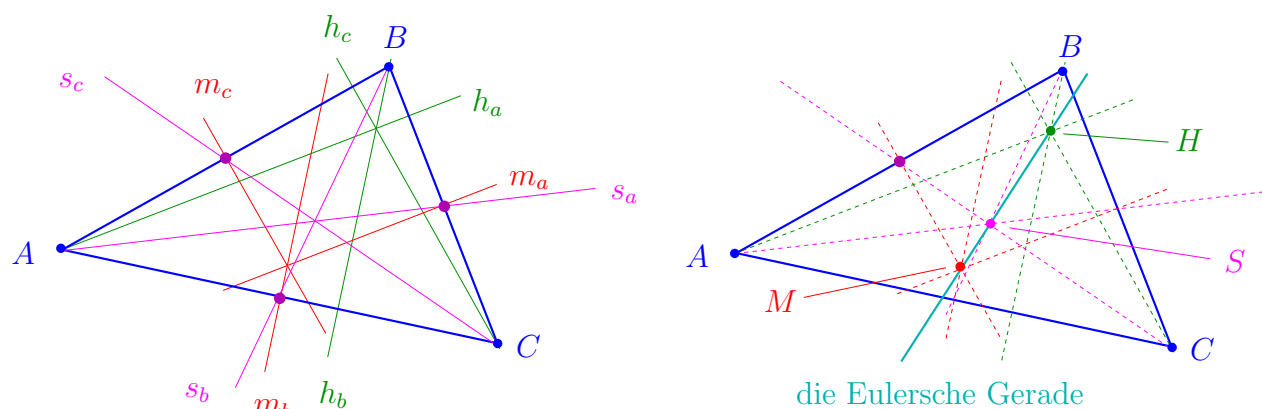


ABBILDUNG 117. Illustration von Satz 7.9.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass das Dreieck gleichseitig ist. In diesem Fall gilt offensichtlich, dass $m_a = h_a = s_a$ und ganz analog für die anderen Seiten. Also ist auch $M = H = S$.

Wir nehmen nun an, dass das Dreieck nicht gleichseitig ist. Dann gibt es nach Übungsblatt 13 zwei Seiten, bei denen die Seitenhalbierenden nicht den Mittelsenkrechten entsprechen. O.B.d.A. gilt also, dass $s_a \neq m_a$ und $s_c \neq m_c$.

Behauptung. Es ist $S \neq M$.

Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Es sei P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Per Definition verläuft m_a durch P und M und s_a verläuft durch P und S . Wenn $M = S$ wäre $s_a = m_a$. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Es sei T der Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{MS}$ mit $\ell(\overline{TS}) = 2 \cdot \ell(\overline{SM})$. Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Es ist $T = H$.

$$\frac{\ell(\overline{CS})}{\ell(\overline{SR})} \underset{\uparrow}{=} 2 \underset{\uparrow}{=} \frac{\ell(\overline{TS})}{\ell(\overline{SM})}.$$

Es folgt nun aus Satz 7.5, dass $g(C, T)$ parallel zu m_C ist. Dies bedeutet, dass $g(C, T)$ ebenfalls senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Da $g(C, T)$ den Punkt C enthält gilt also per Definition der Höhe, dass $g(C, T) = h_c$. Insbesondere gilt nun also $T \in h_C$. Genau das gleiche Argument zeigt auch, dass $T \in h_C$. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

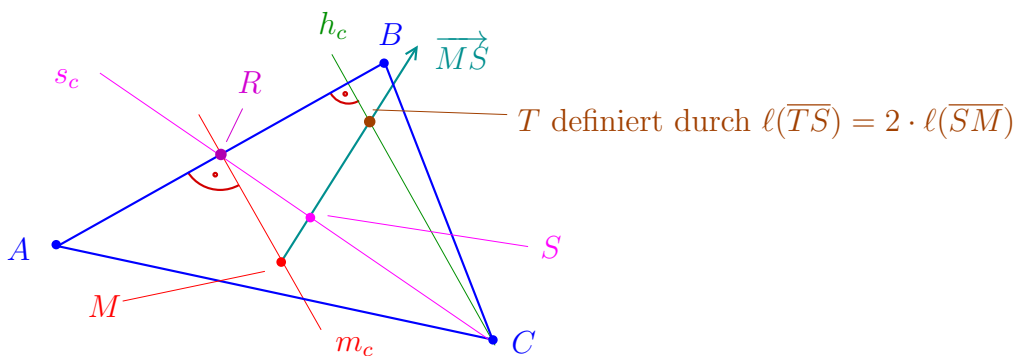


ABBILDUNG 118. Illustration zum Beweis von Satz 7.9.

9

8. FLÄCHENINHALTE UND DER SATZ VON PYTHAGORAS

8.1. **Flächeninhalte.** Die genaue mathematische Theorie von Flächeninhalten und Volumina kann erstaunlich komplex werden (Z.B. fragen Sie einen Kommilitonen, welcher gerade Analysis III hört.)

Wir werden folgenden Satz verwenden, ohne einen Beweis dafür zu geben.

Satz 8.1. *Jedem durch endlich viele Strecken und Kreissegmente begrenzten Gebiet G in der Ebene $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ kann man auf eindeutige Weisen einen Flächeninhalt $\mathcal{A}(G)$ zuordnen, derart dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(1) *Es gilt*

$$\mathcal{A}(\text{Rechteck mit Seitenlängen } a \text{ und } b) = a \cdot b.$$

(2) *Bewegungen sind flächeninhalterhaltend, mit anderen Worten, kongruente Gebiete besitzen den gleichen Flächeninhalt.*

(3) *Unter einer Streckung mit Streckungsfaktor λ multipliziert sich der Flächeninhalt mit λ^2 .*

(4) *Der Flächeninhalt von Strecken ist null.*

(5) *Für zwei Gebiete X und Y gilt*

$$\mathcal{A}(X \cup Y) = \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y) - \mathcal{A}(X \cap Y).$$

(6) *Für Gebiete X und Y gilt*

$$X \subset Y \implies \mathcal{A}(X) \leq \mathcal{A}(Y).$$

Mithilfe von Satz 8.1 werden wir in Übungsblatt 13 folgenden Satz beweisen.

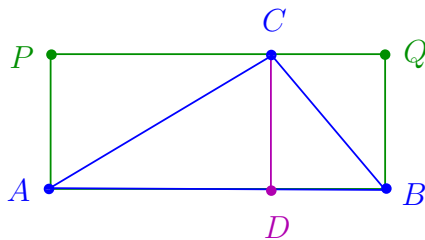
Satz 8.2.

(1) *Für jedes Dreieck gilt*

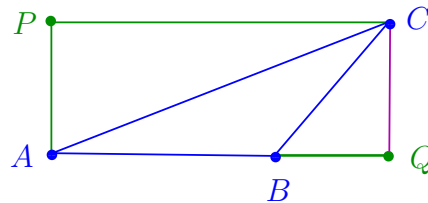
$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks} = \frac{1}{2} \cdot \text{Seitenlänge} \cdot \text{Länge der zugehörigen Höhe}.$$

(2) *Wenn $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck ist mit einem rechten Winkel bei C , dann gilt*

$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks} = \frac{1}{2} \cdot \ell(\overline{AC}) \cdot \ell(\overline{BC}).$$



Höhe verläuft innerhalb



Höhe verläuft außerhalb

ABBILDUNG 119. Illustration von Satz 8.2.

Satz 8.3. Wenn $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei ähnliche Dreiecke sind, dann gilt

$$\frac{\text{Flächeninhalt}(\triangle_{A'B'C'})}{\text{Flächeninhalt}(\triangle_{ABC})} = \left(\frac{\ell(A'B')}{\ell(AB)} \right)^2 = \left(\frac{\ell(B'C')}{\ell(BC)} \right)^2 = \left(\frac{\ell(A'C')}{\ell(AC)} \right)^2.$$

Beweis (*). Es seien also $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ zwei ähnliche Dreiecke. Dies bedeutet, dass es eine Ähnlichkeitsabbildung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ sowie $\varphi(C) = \varphi(C')$ gibt. Es sei λ der zugehörige Streckungsfaktor. Wir machen folgende Beobachtungen:

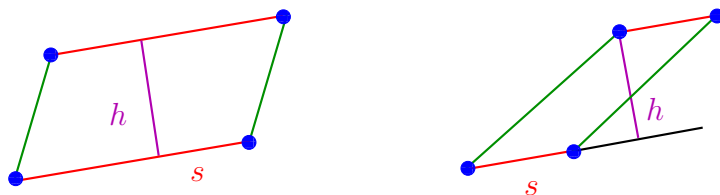
- (1) Nach Satz 8.1 (2) verändert sich der Flächeninhalt eines Dreiecks bei Anwendung der Streckung φ um den Faktor λ^2 .
- (2) Nach Satz 7.1 (4) verändert sich die Länge einer Strecke bei Anwendung der Streckung φ um den Faktor λ .

Mit anderen Worten, alle vier Brüche im Satz betragen gerade λ^2 . □

In Übungsblatt 13 werden wir auch noch den nächsten Satz beweisen.

Satz 8.4. Es sei $\square$ ein Parallelogramm. Dann gilt

$\text{Flächeninhalt}(\square) = \text{Länge einer Seite} \cdot \text{Abstand zwischen den beiden parallelen Geraden}.$



Flächeninhalt des Parallelogramms = $s \cdot h$

ABBILDUNG 120. Illustration von Satz 8.4.

Wir beschließen dieses Kapitel mit der Betrachtung von Kreisen und Kreisscheiben. Wir erinnern an die Definition von π , welche wir auf Seite 10 gegeben hatten:

$$\pi := \frac{1}{2} \cdot \text{Länge (=Umfang) eines Kreises von Radius 1.}$$

Zuerst wollen wir nun den Umfang eines beliebigen Kreises bestimmen:

Lemma 8.5. Es sei $K(P, r)$ der Kreis mit Mittelpunkt P und Radius $r > 0$. Es gilt

$$\text{Umfang von } K(P, r) = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Beweis (*). Wir erhalten den Kreis $K(P, r)$ von Radius r indem wir auf den Kreis $K(P, 1)$ mit Radius 1 die Streckung φ mit Streckzentrum P und Streckfaktor r anwenden. Also folgt:

$$\begin{array}{ccc} \text{Umfang von } K(P, r) = \varphi(\text{Umfang von } K(P, 1)) & = & r \cdot \text{Umfang von } K(P, 1) = r \cdot 2 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot r. \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Satz 7.1} & & \text{Definition von } \pi \end{array} \quad \square$$

Wir wenden uns jetzt dem Flächeninhalt von Kreisscheiben zu.

Satz 8.6. *Es sei $S(P, r)$ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt P und Radius $r > 0$. Es gilt*

$$\text{Flächeninhalt von } S(P, r) = \pi \cdot r^2.$$

Beweisskizze. Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ bezeichnen wir mit X_n ein reguläres n -Eck, welches in $K(P, r)$ eingeschrieben ist. Wir bezeichnen mit $A_1, \dots, A_n$ die Ecken von X_n . (Die Notation wird auch in Abbildung 121 skizziert.) Dann gilt¹⁵

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt von } S(P, r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Flächeninhalt von } X_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{Flächeninhalt des Dreieck } \triangle_{A_i P A_{i+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \text{Höhe des Dreieck } \triangle_{A_i P A_{i+1}} \cdot \text{Länge der Seite } \overline{A_i A_{i+1}}}_{\text{geht im Grenzwert gegen } r} \\ &\quad \uparrow \text{Satz 8.2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \text{Länge der Seite } \overline{A_i A_{i+1}}}_{\text{Umfang des } n\text{-Ecks } X_n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot \text{Umfang des Kreises } K(P, r) = r \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot r^2. \\ &\quad \uparrow \text{die } n\text{-Ecke "schmiegen" sich an den Kreis} \quad \uparrow \text{Satz 8.5} \quad \square \end{aligned}$$

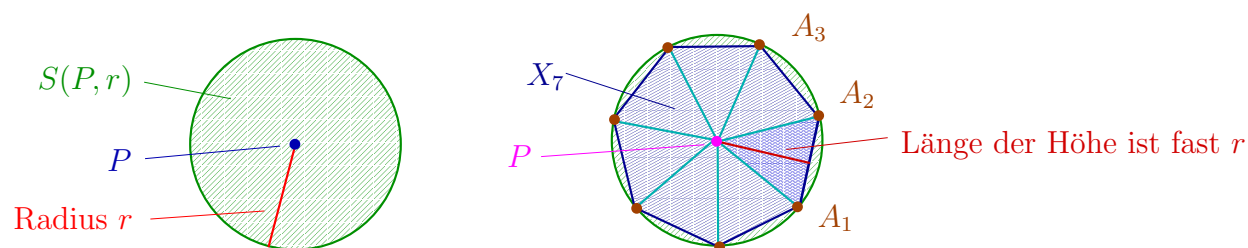


ABBILDUNG 121. Skizze zum Beweis von Satz 8.6.

8.2. Der Satz von Pythagoras. Jetzt können wir den wohl bekanntesten Satz der euklidischen Geometrie beweisen.

Satz 8.7. (Satz von Pythagoras)¹⁶ *Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei C . Wir bezeichnen die Längen der A, B, C gegenüberliegenden Seiten mit a, b und c . Dann gilt*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

¹⁵Dies ist streng genommen kein sauberer mathematischer Beweis, insbesondere wird etwas abenteuerlich mit Grenzwerten gearbeitet.

¹⁶Pythagoras war ein griechischer Mathematiker, welcher etwa 570-495 v. Chr. lebte.

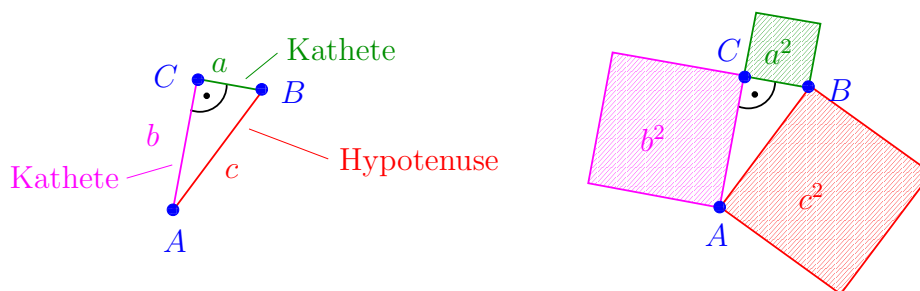


ABBILDUNG 122. Illustration vom Satz von Pythagoras.

Bemerkung. Die dem rechten Winkel anliegenden Seiten heißen *Katheten* und die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite heißt *Hypotenuse*. Wir können den Satz von Pythagoras also auch wie folgt formulieren:

Summe der Quadrate der Katheten = Quadrat der Hypotenuse.

Für den Satz von Pythagoras gibt es viele verschiedene Beweise. Wir stellen im Folgenden drei davon vor. Der erste Beweis wird dem indischen Mathematiker Bhaskara (1114-1185) zugeschrieben.

Beweis vom Satz von Pythagoras durch Bhaskara. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei C . Wir betrachten das Quadrat, dessen eine Kante die Seite $\overline{AB}$ ist, und welches das Dreieck beinhaltet, siehe Abbildung 123. In dieses Quadrat fügen wir noch drei zu $\triangle_{ABC}$ kongruente Dreiecke ein. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \text{Flächeninhalt von großem Quadrat} \\
 &= \text{Flächeninhalt von kleinem Quadrate} + \text{Summe der Flächeninhalte der vier Dreiecke} \\
 &= \underbrace{\text{Flächeninhalt von Quadrat mit Seitenlänge } |b-a|}_{=|b-a|^2} + 4 \cdot \underbrace{\text{Flächeninhalt von } \triangle_{ABC}}_{=\frac{1}{2}ab \text{ da } \triangle_{ABC} \text{ rechtwinklig}} \\
 &= |b-a|^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = (b-a)^2 + 2ab = b^2 - 2ab + a^2 + 2ab = a^2 + b^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

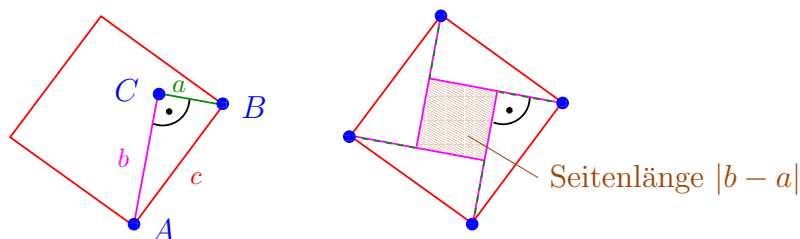
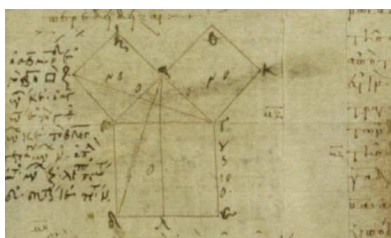
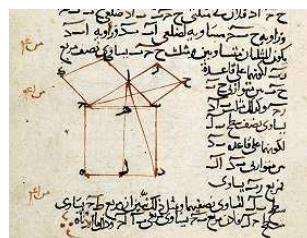


ABBILDUNG 123. Illustration vom ersten Beweis von Satz von Pythagoras.

Der zweite Beweis wird schon im Geometriebuch von Euklid (3. Jahrhundert v. Chr.) ausgeführt.



Euklid's Elemente



arabisches Geometriebuch

ABBILDUNG 124.

Beweis im Geometriebuch von Euklid. Der Beweis des Satzes von Pythagoras wird in Abbildungen 125 und 126 illustriert. Wir wollen den Beweis nur durch wenige Worte ergänzen und erläutern:

- (1) In den Abbildungen verfolgen wir ein Dreieck, dessen Spitze zweimal verschoben wird, ohne die Höhe zu ändern, und welches einmal um $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird. Alle diese Operationen sind flächeninhalt erhaltend, d.h. das Dreieck zu Beginn hat den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck am Ende der Konstruktion. Die Dreiecke W und W' besitzen also den gleichen Flächeninhalt.
- (2) Da X kongruent zu W und X' kongruent zu W' ist sehen wir, dass die Dreiecke X und X' auch den gleichen Flächeninhalt besitzen.
- (3) Ganz analog verfahren wir mit Y und Y' , sowie danach mit Z und Z' .

Insgesamt sehen wir also, dass

$$b^2 + a^2 = \mathcal{A}(W) + \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y) + \mathcal{A}(Z) = \mathcal{A}(W') + \mathcal{A}(X') + \mathcal{A}(Y') + \mathcal{A}(Z') = c^2. \square$$

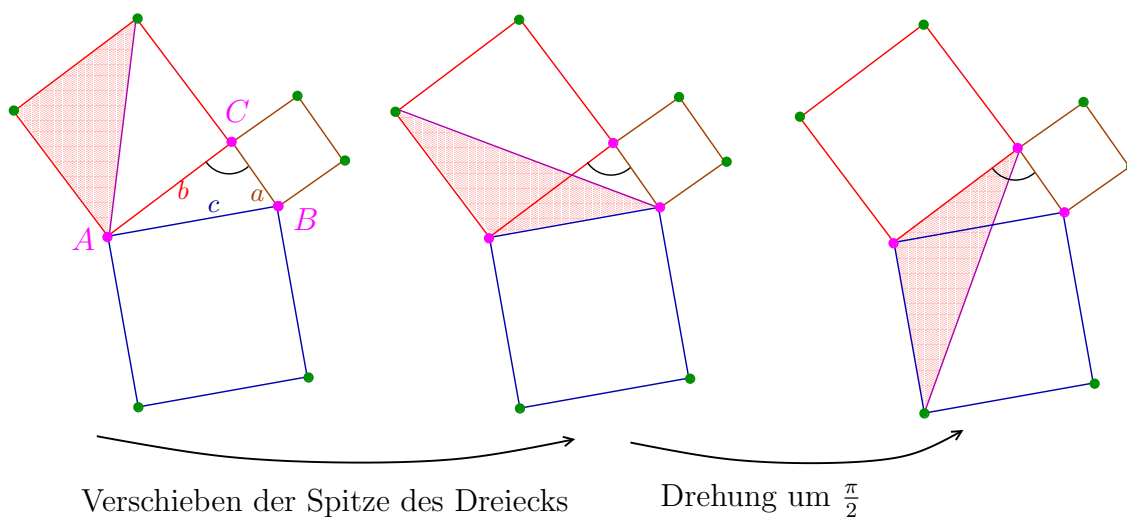


ABBILDUNG 125. Illustration vom Beweis vom Satz von Pythagoras durch Euklid

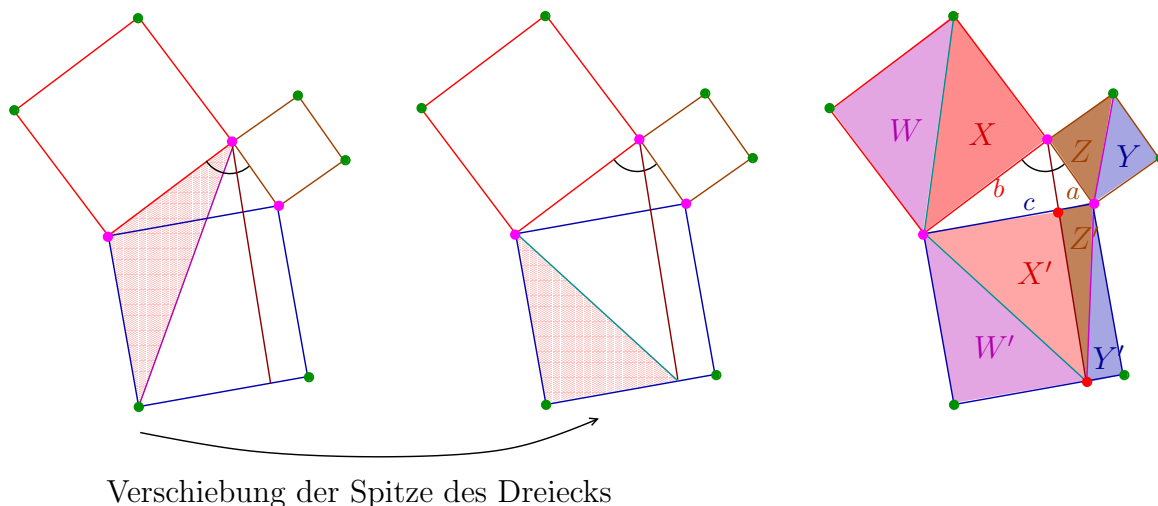


ABBILDUNG 126. Illustration vom Beweis vom Satz von Pythagoras durch Euklid

Beweis vom Satz von Pythagoras (gefunden vom zwölfjährigen Einstein). Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei C . Wir bezeichnen mit m den Flächeninhalt von $\triangle_{ABC}$. Wir fällen das Lot von C auf die Seite $\overline{AB}$ und bezeichnen den Lotfußpunkt mit Q . Wir machen folgende Beobachtungen:

- (1) es ist

$$\angle_{QCB} = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$$

$\uparrow$
 da Winkelsumme = π in $\triangle_{QCB}$ und $\triangle_{ACB}$ und
 beide Dreiecke einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ enthalten

$\uparrow$

da Winkelsumme = π in $\triangle_{QCB}$ und $\triangle_{ACB}$ und
beide Dreiecke einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ enthalten

- (2) ganz analog zu (1) zeigt man, dass $\angle_{QCA} = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$,
 (3) es folgt aus dem Ähnlichkeitssatz 7.3 WWW, dass die Dreiecke $\triangle_{CQB}$ und $\triangle_{ACB}$ ähnlich sind, es folgt aus Satz 8.3, dass

$$\frac{\text{Flächeninhalt von } \triangle_{CQB}}{m} = (\text{Verhältnis der Hypotenusen})^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2,$$

- (4) ganz analog zu (3) zeigt man, dass

$$\frac{\text{Flächeninhalt von } \triangle_{AQC}}{m} = (\text{Verhältnis der Hypotenusen})^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

- (5) aus Satz 8.1 wissen wir, dass

Flächeninhalt von $\triangle_{CQB}$ + Flächeninhalt von $\triangle_{AQC}$ = Flächeninhalt von $\triangle_{ACB}$,
 indem wir (3) und (4) einsetzen erhalten wir, dass

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 \cdot m + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \cdot m = m,$$

aus dieser Gleichheit folgt aber sofort, dass $a^2 + b^2 = c^2$. □

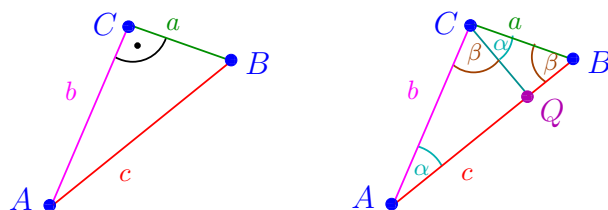


ABBILDUNG 127. Illustration vom Einsteinschen Beweis vom Satz von Pythagoras.

Bemerkung. Ein wichtiger Satz in der Mathematik besitzt oft nicht nur einen oder zwei Beweise, sondern sehr viele verschiedene. In dem folgendem Programm werden über 70 verschiedene Beweise ausführlich erläutert:

http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_I/friedl/programs/Pythagoras-2018.exe

Beispielsweise gibt es einen Beweis von James Garfield (1831-1881), dieser war 1881 amerikanischer Präsident. Die Sammlung enthält auch zwei Beweise des Regensburger Mathematikers Johann Reichenberger, welcher im 18. Jahrhundert lebte.

Satz 8.8. (Kathetensatz) Es sei $\triangle_{ABC}$ ein rechtwinkliges Dreieck. Mit der Notation von Abbildung 128 gilt

$$b^2 = p \cdot c \quad \text{und} \quad a^2 = q \cdot c.$$

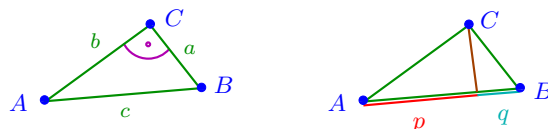


ABBILDUNG 128. Illustration des Kathetensatzes.

Beweis. Wenn man Abbildung 129 betrachtet, dann sieht man schon, dass der Kathetensatz eigentlich eine Verfeinerung des Satzes von Pythagoras ist. Wenn man zudem noch Abbildung 126 betrachtet, dann sieht man, dass Euklid nicht nur den Satz von Pythagoras bewiesen hat, sondern gleich noch eine stärkere Aussage, nämlich den Kathetensatz. Wir sind also schon fertig! $\square$

In Übungsblatt 14 werden wir den Höhensatz beweisen.

Satz 8.9. (Höhensatz) Es sei $\triangle_{ABC}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit einem rechten Winkel bei C. Es sei h die Höhe bei C und es seien p und q die Längen der Hypotenusenabschnitte. Dann gilt

$$h^2 = p \cdot q.$$

Bemerkung. Jeder der drei Sätze (Satz des Pythagoras, Kathetensatz und Höhensatz) impliziert schnell jeden der anderen zwei Sätze. Deshalb spricht man oft auch von der Satzgruppe des Pythagoras.

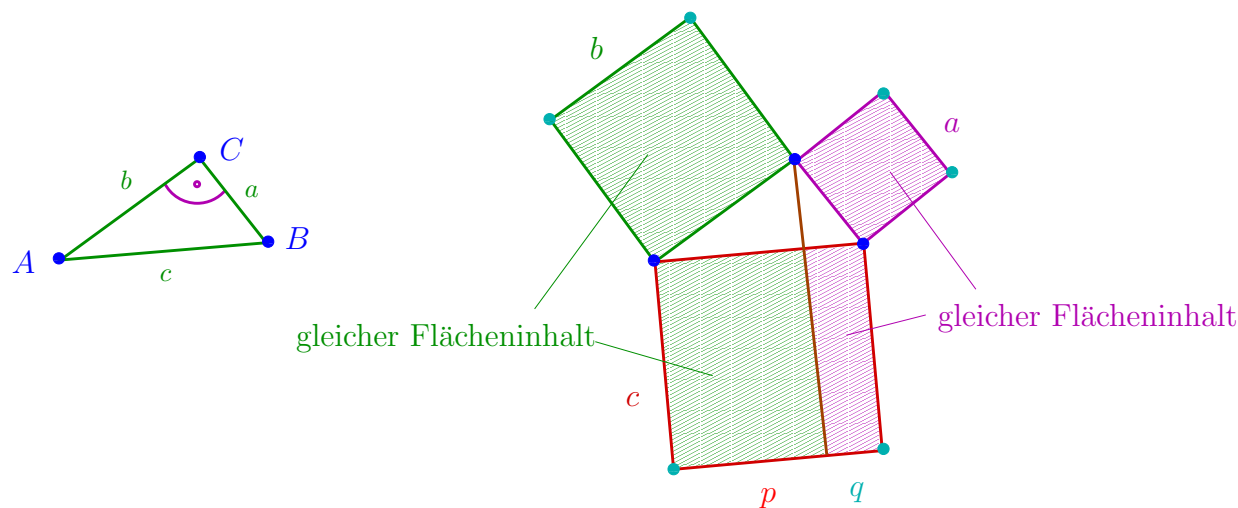


ABBILDUNG 129. Zweite Illustration des Kathetensatzes.

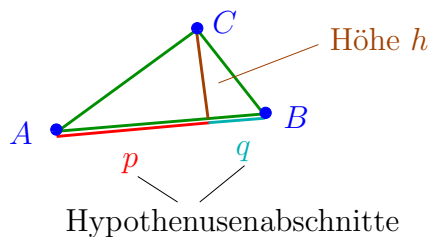


ABBILDUNG 130. Illustration vom Höhensatz.

8.3. **Ein warnendes Beispiel.** Wir wollen nun ein etwas längeres Beispiel besprechen. Wir betrachten dazu ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ wie in Abbildung 131 links. Wir führen folgende Konstruktion durch, welche in Abbildung 131 links skizziert wird.

- (1) Es sei F der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und es sei f die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.
- (2) es sei g die Winkelhalbierende vom Winkel $\sphericalangle_{ACB}$,
- (3) wir bezeichnen mit P den Schnittpunkt von f und g wie in Abbildung 132 skizziert.

Wir fahren nun wie folgt fort, wie in Abbildung 131 rechts skizziert:

- (5) wir fällen das Lot von P auf die Geraden $g(A, C)$ und $g(B, C)$,
- (6) wir bezeichnen die Lotfußpunkte mit E und D .

Wir machen nun folgende Beobachtungen:

- (1) Wir betrachten die Dreiecke $\triangle CEP$ und $\triangle CDP$. (Siehe im Folgenden weiterhin Abbildung 131 rechts.) Wir wollen zeigen, dass diese kongruent sind. Es gilt:
 - (a) nachdem g eine Winkelhalbierende ist gilt $\sphericalangle_{ECP} = \sphericalangle_{DCP}$,
 - (b) es ist $\sphericalangle_{CDP} = \sphericalangle_{CEP}$, nachdem beide gerade $\frac{\pi}{2}$ betragen,

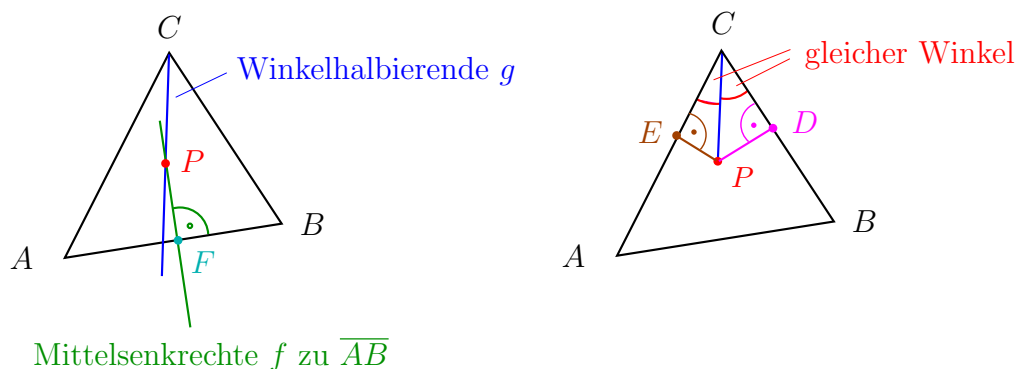


ABBILDUNG 131.

- (c) nachdem die Winkelsumme im Dreieck π beträgt (siehe Satz 5.4) folgt aus (a) und (b) auch, dass die dritten Winkel übereinstimmen,
 (d) es ist $\ell(CP) = \ell(CP)$.

Aus dem Kongruenzsatz WSW folgt, also dass die Dreiecke $\triangle_{CEP} \cong \triangle_{CDP}$ kongruent sind. Insbesondere gilt $\ell(\overline{CE}) = \ell(\overline{CD})$ und $\ell(\overline{EP}) = \ell(\overline{DP})$

- (2) Wir betrachten nun die Dreiecke $\triangle_{AFP}$ und $\triangle_{BFP}$. (Siehe im Folgenden Abbildung 132 links.) Wir wollen auch zeigen, dass diese kongruent sind. Wir machen folgende Beobachtungen:

- (a) Nachdem F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist, gilt $\ell(\overline{AF}) = \ell(\overline{BF})$,
 (b) es ist $\angle_{AFP} = \angle_{BFP}$, nachdem beide gerade $\frac{\pi}{2}$ betragen,
 (c) es ist $\ell(\overline{FP}) = \ell(\overline{FP})$.

Aus dem Kongruenzsatz WSW folgt, also dass die Dreiecke $\triangle_{AFP} \cong \triangle_{BFP}$ kongruent sind. Insbesondere folgt, dass $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP})$.

- (3) Wir betrachten nun noch die Dreiecke $\triangle_{APE}$ und $\triangle_{BPD}$. (Siehe dazu im Folgenden Abbildung 132 rechts.) Wir wollen zeigen, dass auch diese wiederum kongruent sind.

- (a) Wir hatten in (2) gezeigt, dass $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP})$,
 (b) wir hatten in (1) gezeigt, dass $\ell(\overline{PE}) = \ell(\overline{PD})$.
 (c) Es ist $\angle_{PEA} = \frac{\pi}{2}$ und $\angle_{PDB} = \frac{\pi}{2}$.

Es folgt also aus dem Kongruenzsatz SS $\frac{\pi}{2}$, dass die beiden Dreiecke $\triangle_{APE}$ und $\triangle_{BPD}$ in der Tat kongruent sind. Insbesondere gilt $\ell(\overline{AE}) = \ell(\overline{BD})$.

Wir fassen nun zusammen:

- (a) In (1) hatten wir gezeigt, dass $\ell(\overline{CE}) = \ell(\overline{CD})$, und
 (b) in (3) hatten wir gezeigt, dass $\ell(\overline{AE}) = \ell(\overline{BD})$.

Zusammenfassend erhalten wir also, dass

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ell(\overline{CA}) & = & \ell(\overline{CE}) + \ell(\overline{EA}) & = & \ell(\overline{CD}) + \ell(\overline{DB}) & = & \ell(\overline{CB}). \\
 \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{denn } E \text{ unterteilt } \overline{CA} & & & & \text{nach (a) und (b)} & & \text{denn } D \text{ unterteilt } \overline{CB}
 \end{array}$$

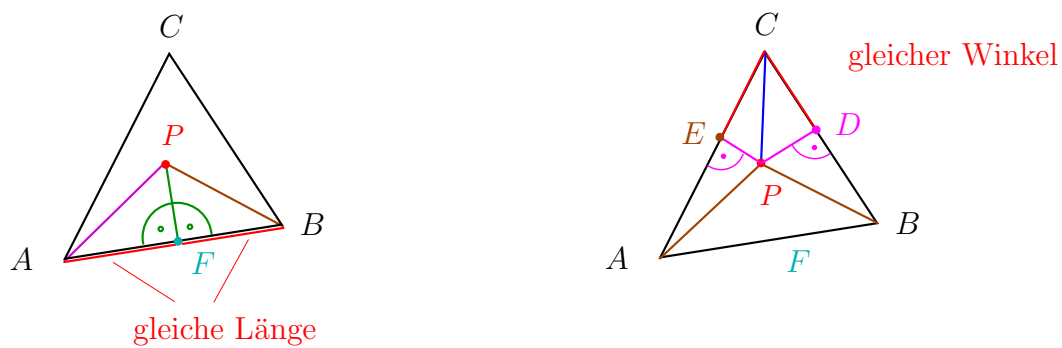


ABBILDUNG 132.

Wir haben also gezeigt, dass die beiden Seiten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ gleich lang sind.

Wir sind aber von einem beliebigen Dreieck ausgegangen, wie kann es dann sein, dass wir bewiesen haben, dass zwei Seitenlängen gleich lang sein müssen. Irgendwo ist im obigen Argument der Wurm drinnen. Aber wo?

9. SPHÄRISCHE GEOMETRIE (*)

9.1. **Geodäten.** Zum Abschluß der Vorlesung wollen wir noch etwas sphärische Geometrie studieren, d.h. wir wollen Geometrie auf einer Kugeloberfläche studieren. Im folgenden bezeichnet

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die Sphäre im 3-dimensionalen Raum.

Definition. Es seien P und Q zwei Punkte. Ein kürzester Weg von P nach Q heißt *Geodäte*.

Beispiel. Wenn P und Q zwei Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$ sind, dann gibt es genau eine Geodäte, nämlich die Strecke $\overline{PQ}$.

Es stellt sich nun folgende Frage:

Frage 9.1. Es seien P und Q zwei Punkte auf der Sphäre S^2 .

- (1) Was ist die Geodäte von P nach Q ?
- (2) Gibt es überhaupt eine eindeutig bestimmte Geodäte von P nach Q oder kann es mehrere geben?

In Abbildung 133 sehen wir die Route von einem Flug von Houston nach München. Genauer gesagt, wir sehen die Route auf einer Karte der Erdoberfläche. Der Pilot wählt natürlich auf der Sphäre die kürzeste Route, aber wie wir in Abbildung 133 sehen, entspricht die kürzeste Route auf der Karte nicht der “direkten” Route in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. In Abbildung 134

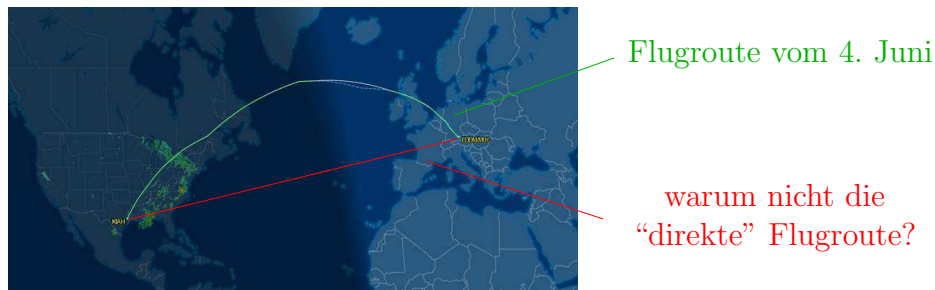


ABBILDUNG 133.

sehen wir noch einige weitere Flugrouten von Frankfurt nach Nordamerika.

Um diese Flugrouten erklären zu können benötigen wir folgende Definition.

Definition. Ein *Großkreis* auf S^2 ist der Schnitt von S^2 mit einer Ebene, welche den Ursprung enthält.

Bemerkung. Für zwei Punkte $P \neq \pm Q$ auf S^2 gibt es genau eine Ebene, welche den Ursprung sowie die Punkte P und Q enthält. Mit anderen Worten, für $P \neq \pm Q$ gibt es genau einen Großkreis durch P und Q .

Folgender Satz wird beispielsweise in [Fr] bewiesen:



Flugrouten von Frankfurt nach Nordamerika

ABBILDUNG 134.

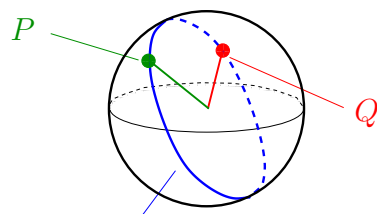
Großkreis, welcher von
 P und Q aufgespannt wird

ABBILDUNG 135.

Satz 9.2. *Es seien P und Q zwei Punkte auf S^2 . Jede Geodäte von P nach Q verläuft auf einem Großkreis durch P und Q .*

Für P und Q auf S^2 sei nun $\alpha(P, Q) \in [0, \pi]$ der Winkel, welcher von dem Ursprung und den Punkten P und Q aufgespannt wird. Etwas genauer, $\alpha = \alpha(P, Q)$ ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl α in $[0, \pi]$ mit

$$\langle P, Q \rangle = \cos(\alpha).$$

Folgender Satz stammt ebenfalls aus [Fr].

Satz 9.3. *Es seien P und Q zwei Punkte auf S^2 . Dann gilt*

- (1) *der Abstand von P und Q auf S^2 beträgt $\alpha(P, Q)$.*
- (2) *Wenn $P \neq \pm Q$, dann gibt es genau eine Geodäte von P nach Q , diese bewegt sich auf dem eindeutig bestimmten Großkreis durch P und Q .*
- (3) *Wenn $P = -Q$, dann gibt es unendlich viele Großkreise durch P und Q , und jeder Halbgroßkreis durch P und Q entspricht gerade einer Geodäte von P nach Q .*

9.2. Volumen und Oberfläche einer Kugel. In diesem Abschnitt wollen wir das Volumen und die Oberfläche einer Kugel mit beliebigem Radius $r > 0$ bestimmen.

Satz 9.4. *Es sei $r > 0$ und es sei*

$$K(r) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

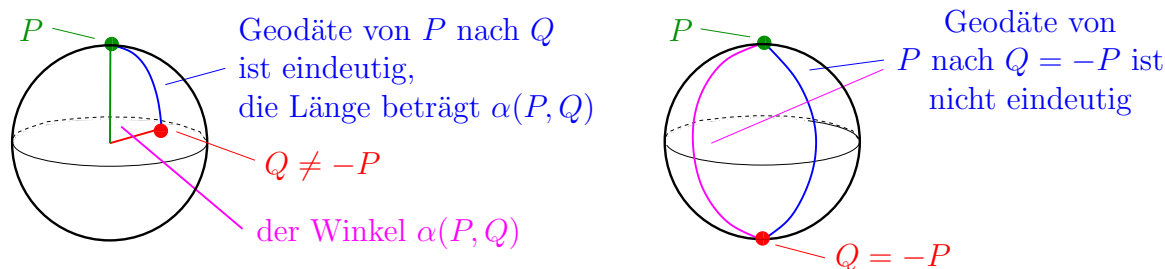


ABBILDUNG 136.

die Kugel mit Radius r . Dann gilt

$$\text{Volumen}(K(r)) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$H = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \text{ und } z \geq 0\}$$

die Halbkugel von Radius r . Zudem bezeichnen wir mit

$$Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ und } z \in [0, r]\}$$

den Zylinder mit Radius r und Höhe r und wir bezeichnen mit

$$P = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2 \text{ und } z \geq 0\}$$

den “umgedrehten” Kegel, dessen “Deckel” gegeben ist durch die Scheibe von Radius r in der $z = r$ -Ebene und dessen Spitze der Ursprung $(0, 0, 0)$ ist.

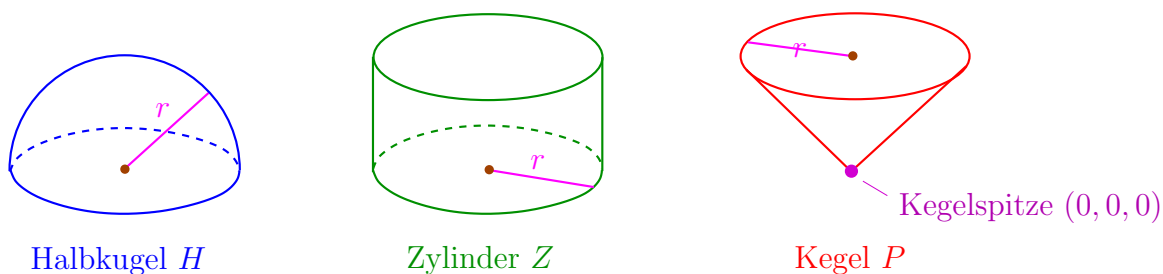


ABBILDUNG 137.

Für jedes $s \in [0, r]$ betrachten wir nun den Schnitt mit der Hyperebene $z = s$, d.h. mit der Hyperebene $E_s := \{(x, y, s) \mid x, y \in \mathbb{R}^2\}$. Es ist

denn $H \cap E_s$ ist eine Scheibe von Radius $\sqrt{r^2 - s^2}$, siehe Abbildung 138

↓

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt von } H \cap E_s &= \pi(r^2 - s^2) = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot s^2 \\ &= \text{Flächeninhalt von } Z \cap E_s - \text{Flächeninhalt von } P \cap E_s \end{aligned}$$

↑

denn $Z \cap E_s$ ist eine Scheibe von Radius r und $P \cap E_s$ ist eine Scheibe von Radius s

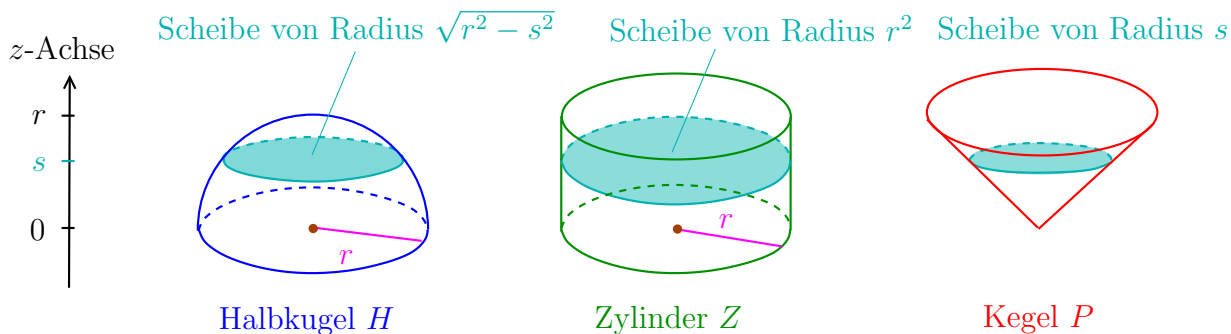


ABBILDUNG 138.

Nachdem dies für alle s gilt, folgt nach dem Cavalierischen Prinzip, dass

$$\text{Volumen von } H = \text{Volumen von } Z - \text{Volumen von } P = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3.$$

Für die Vollkugel K ist das Volumen natürlich das Doppelte, d.h. das Volumen beträgt $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. $\square$

Satz 9.5. Es sei $r > 0$ und es sei

$$K(r) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

die Kugel mit Radius r . Dann gilt

$$\text{Oberfläche von } K(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

Beweisskizze. Es sei also $r > 0$. Für kleine $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Volumen von } K(r+h) &= \text{Volumen}(K(r)) + \text{Volumen}(K(r+h) \setminus K(r)) \\ &\approx \text{Volumen}(K(r)) + \text{Oberfläche}(K(r)) \cdot h. \end{aligned}$$

$\uparrow$
 denn $K(r+h) \setminus K(r)$ ist ähnlich dem Produkt der Kugeloberfläche
 mit einem Intervall der Länge h , siehe Abbildung 139

Also folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{Oberfläche}(K(r)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Volumen}(K(r+h)) - \text{Volumen}(K(r))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{h} \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r+h)^3 - r^3}{h} = \frac{4}{3}\pi \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3}{h} \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (3r^2 + 3rh + h^2) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi \cdot r^2. \end{aligned} \quad \square$$

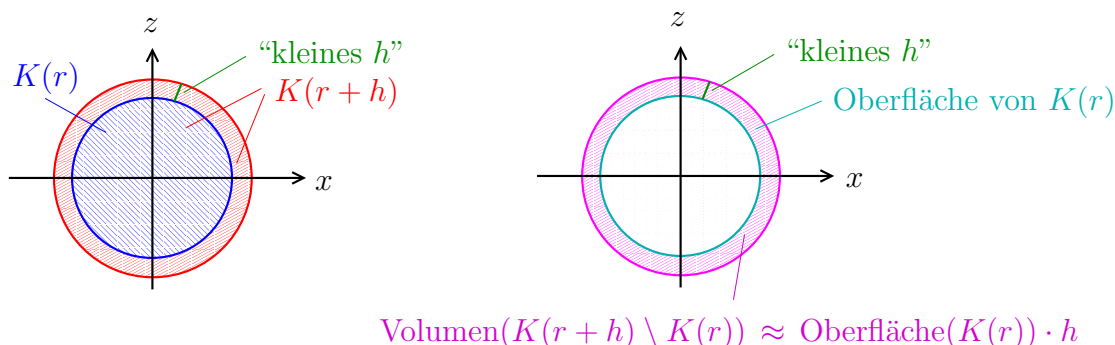


ABBILDUNG 139.

9.3. Sphärische Dreiecke.

Definition. Ein *sphärisches Dreieck* ist eine Teilmenge der Sphäre, welche von drei Großkreisen begrenzt ist, siehe Abbildung 140.



ABBILDUNG 140.

Wir wollen nun die Innenwinkel von einem sphärischen Dreieck betrachten. Dazu müssen wir uns zuerst überlegen, was denn nun “Winkel” heißen soll. In Kapitel 1.3 hatten wir den Winkel zwischen zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert. Aus der linearen Algebra ist hoffentlich bekannt, dass gilt

$$\langle v, w \rangle = |v| \cdot |w| \cdot \cos(\angle(v, w))$$

oder mit anderen Worten

$$\angle(v, w) := \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{|v| \cdot |w|}\right) \in [0, \pi],$$

wobei $\langle v, w \rangle$ das Skalarprodukt bezeichnet. Diese Beschreibung des Winkels, hat den großen Vorteil, dass sie sich problemlos auf den 3-dimensionalen Fall verallgemeinert. Genauer gesagt, wir haben folgende Definition, welche wort-wörtlich die obige Beschreibung des Winkels übernimmt.

Definition.

- (1) Es seien v und w zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$, welche von null verschieden sind. Wir definieren den Winkel zwischen v und w als

$$\angle(v, w) := \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{|v| \cdot |w|}\right) \in [0, \pi],$$

wobei $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ die Arkuskosinusfunktion ist.

- (2) Wenn sich (Abschnitte) von zwei Großkreise in einem Punkt P schneiden, dann definieren wir den Winkel bei P als den (kleineren) Winkel zwischen den Richtungsvektoren, siehe Abbildung 141.

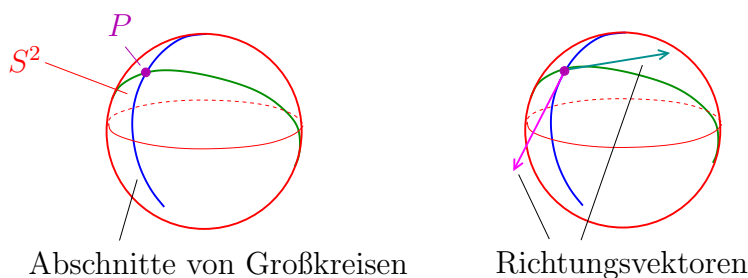


ABBILDUNG 141.

Satz 9.6. *Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck auf S^2 , welches sich in einer offenen Halbsphäre befindet. Dann gilt*

$$\text{Flächeninhalt von } \triangle_{ABC} = \text{Summe der Innenwinkel} - \pi.$$

Etwas allgemeiner, für ein Dreieck $\triangle_{ABC}$ auf einer Sphäre von Radius r gilt

$$\text{Flächeninhalt von } \triangle_{ABC} = r^2 \cdot \text{Summe der Innenwinkel} - \pi.$$

Bemerkung.

- (1) Satz 9.6 besagt also, dass der Flächeninhalt von einem Dreieck auf S^2 durch seine Innenwinkel festgelegt ist, oder mit anderen Worten, aus seinen Innenwinkeln bestimmt werden kann.
- (2) Der Satz gilt insbesondere auch für Dreiecke auf der Erdoberfläche, insbesondere also auch für alle Dreiecke, welche man in der Schule gezeichnet und abgemessen hat. Diese Dreiecke sind jedoch im Vergleich zur Erdoberfläche so klein, dass man den Unterschied zwischen der Summe der Innenwinkel und π nicht messen kann.

Beispiel. Wir betrachten ein Dreieck, welches aufgespannt wird durch den “Nordpol” $(0, 0, 1)$ und zwei Punkte auf dem “Äquator” $\{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\}$, siehe Abbildung 142. Es sei α der Innenwinkel am Nordpol. Die Innenwinkel an den Punkten auf dem Äquator sind gerade $\frac{\pi}{2}$. Wir sehen also, dass der Flächeninhalt des Dreiecks gegeben ist durch

$$\text{Summe der Innenwinkel} - \pi = \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = \alpha.$$

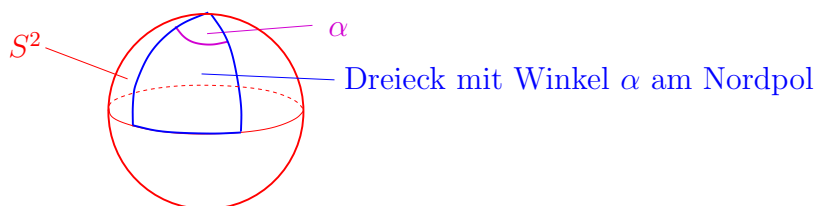
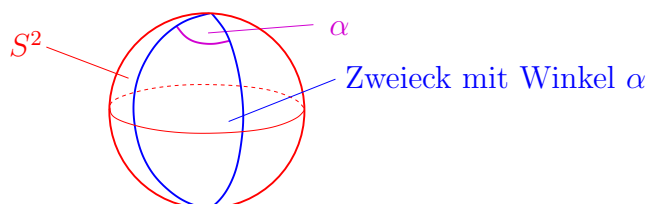


ABBILDUNG 142.

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit einer einfachen Vorbemerkung. Ein *Zweieck mit Winkel $\alpha \in (0, \pi)$* ist eine Teilmenge von S^2 , welche durch zwei Großkreise begrenzt wird, welche den Winkel α einschlagen. Diese Definition wird in Abbildung 143 illustriert. Es gilt

ABBILDUNG 143. Ein Zweieck mit Innenwinkel α auf S^2 .

$$\text{Flächeninhalt von Zweieck mit Winkel } \alpha = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \underbrace{\text{Flächeninhalt von } S^2}_{=4\pi} = 2\alpha.$$

Wir beginnen nun mit dem eigentlichen Beweis von Satz 9.6. Es sei also $\Delta = \triangle_{ABC}$ ein Dreieck auf S^2 . Die drei Großkreise, welche durch die Seiten des Dreiecks gebildet werden, zerteilen S^2 in folgende acht Dreiecke:¹⁷

- (1) das ursprüngliche Dreieck Δ ,
- (2) das Dreieck X , welches auf der anderen Seite der Strecke BC liegt,¹⁸
- (3) das Dreieck Y , welches auf der anderen Seite der Strecke AC liegt,
- (4) das Dreieck Z , welches auf der anderen Seite der Strecke AB liegt,
- (5) die Spiegelungen Δ', X', Y', Z' der Dreiecke Δ, X, Y, Z im Ursprung.

Diese acht Dreiecke sind in Abbildung 144 skizziert. Wir bezeichnen mit $x, y, z, \delta, x', y', z', \delta'$ die Flächeninhalte von $X, Y, Z, \Delta, X', Y', Z', \Delta'$. Offensichtlich ist $\Delta \cup X$ ein Zweieck mit Winkel α . Damit folgt aus der Vorbemerkung, dass $x + \delta = 2\alpha$. Analog gilt $x + \delta = 2\beta$ und

¹⁷Zwei Großkreise zerlegen S^2 in vier Zweiecke, der dritte Großkreis zerteilt nun jedes Zweieck in zwei Dreiecke, wir erhalten also insgesamt acht Dreiecke.

¹⁸Etwas genauer, X ist das Dreieck, welches von B, C und vom Spiegelbild $-A$ aufgespannt wird.

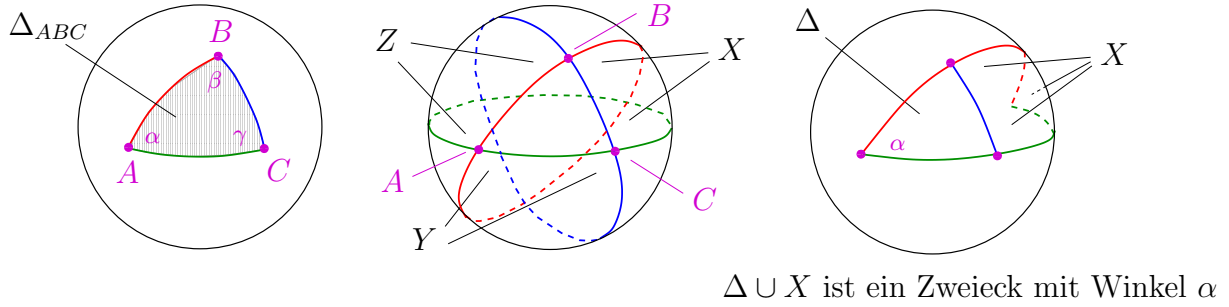


ABBILDUNG 144.

$y + \delta = 2\gamma$. Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
 4\pi = \text{Flächeninhalt von } S^2 &= \delta + \delta' + x + x' + y + y' + z + z' &&= 2\delta + 2x + 2y + 2z \\
 &\quad \uparrow &&\quad \uparrow \\
 &\text{Zerlegung von } S^2 \text{ in die 8 Dreiecke} && \Delta \text{ und } \Delta' \text{ sind Spiegelbilder, also ist } \delta = \delta', \\
 &&& \text{ganz analog gilt } x = x', y = y', z = z' \\
 &= 2(\underbrace{\delta + x}_{=2\alpha}) + 2(\underbrace{\delta + y}_{=2\beta}) + 2(\underbrace{\delta + z}_{=2\gamma}) - 4\delta &&= 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4\delta.
 \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach δ erhalten wir jetzt die gewünschte Aussage. □