1. Übungsblatt

Stefan Friedl

Wir erinnern uns an folgende Definition.

Definition. Wir sagen zwei Geraden g und h sind *parallel*, wenn sich diese nicht schneiden *oder*, wenn die beiden Geraden identisch sind. Wir schreiben dann $g \parallel h$.

Wir erinnern auch an folgenden Satz.

Satz 1.4. *Zu jeder Gerade g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade durch P, welche parallel zu g verläuft.*

Aufgabe 1. Wir wollen den Beweis von Satz 1.4 durchführen. Es sei g eine Gerade und es sei P ein Punkt. Wir wählen einen Punkt Q auf g und einen Richtungsvektor v, d.h. es ist $g = \{Q + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Wir setzen nun $h = \{P + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass h parallel zu g verläuft.

Lösung. Wir verwenden im Beweis folgende zwei Aussagen.

(a) Wenn zwei Geraden parallel und wenn sie sich schneiden, dann sind sie auch schon gleich.
(b) Wenn $k = \{R + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade ist, dann ist jeder Punkt auf der Gerade k ein Aufpunk, d.h. für jeden Punkt $S \in k$ gilt, dass $k = \{S + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Wir wollen zeigen, dass h parallel zu g verläuft. Nach (b) genügt es zu zeigen, wenn $g \cap h \neq \varnothing$, dann gilt schon $g = h$. Wir nehmen also an, dass $g \cap h \neq \varnothing$. Wir wählen einen Punkt $S \in g \cap h$. Es folgt aus (b), dass $g = \{Q + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{S + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ und es gilt $h = \{P + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{S + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Wir haben also gezeigt, dass $g = \{S + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\} = h$.

Aufgabe 2. Es seien g, h, k drei Geraden. Zeigen Sie: wenn $g \parallel h$ und $h \parallel k$, dann gilt auch $g \parallel k$. Hinweis: Versuchen Sie die Aufgabe geschickt auf Satz 1.4 zurückzuführen.

Lösung. Wir wollen zeigen, dass $g \parallel k$. Wenn $g \cap k = \varnothing$, dann gilt natürlich $g \parallel k$. Wir betrachten nun den Fall, dass $g \cap k \neq \varnothing$. Es sei $P \in g \cap k$. Nach Voraussetzung sind nun h und k zwei Geraden, welche jeweils parallel zu g sind, und welche beide durch P verlaufen. Aus Satz 1.4 folgt, dass $h = k$. Insbesondere ist $h \parallel k$.

Aufgabe 3. Es seien a, b, c paarweise verschiedene Geraden mit $a \parallel b$.

(1) Zeigen Sie: Wenn c die Gerade a schneidet, dann schneidet c auch die Gerade b.
(2) Ist die Voraussetzung, dass a, b und c paarweise verschieden sind notwendig?

Lösung.

(1) Nehmen wir an, c schneidet die Gerade b nicht. Dann ist $c \parallel b$. Da $a \parallel b$ folgt aus Aufgabe 2 dann auch, dass $a \parallel c$. Nachdem a und c sich schneiden, gilt $a = c$. Aber dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass a und c verschieden sind.
(2) Wenn $a = c$ und a parallel zu b, aber verschieden zu a, dann schneidet $c = a$ die Gerade a, aber $c = a$ schneidet nicht die Gerade b.

Aufgabe 4. Es sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Lemma 1.6 besagt, es gibt zwei Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^2 \setminus g$ mit folgenden vier Eigenschaften:

(1) es ist $\mathbb{R}^2 = U \cup V \cup g$,
(2) die Mengen U und V schneiden sich nicht,
(3) alle Punkte in U liegen auf der gleiche Seite von g, und
(4) alle Punkte in V liegen auf der gleiche Seite von g.

Wir bezeichnen U und V als die durch g definierten *Halbebenen*.
Nehmen wir nun an, dass $g = \{Q + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Wie könnte man U und V mit etwas linearer Algebra beschreiben, und vielleicht die Aussage sogar beweisen?

Lösung. Es sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Wir wählen einen Aufpunkt P und einen Richtungsvektor v, d.h. es ist $g = \{P + sv \,|\, s \in \mathbb{R}\}$. Es sei $w \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, welcher linear unabhängig zu v ist. Mit anderen Worten, w liegt nicht auf $\mathbb{R} \cdot v$. Dann haben

$$U \;=\; \{P + sv + tw \,\|, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{und} \quad V \;=\; \{P + sv + tw \,\|, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{<0}\}$$

die gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe 5. Es seien A, B zwei verschiedene Punkte in $E = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Gerade

$$g \;:=\; \{A + \lambda \cdot (B - A) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Es sei zudem

$$h \;=\; \{Q + \lambda \cdot w \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

noch eine weitere Gerade, welche durch A und B verläuft. Zeigen Sie, dass $h \subset g$.
Hinweis: Sie müssen also zeigen, dass ein beliebiger Punkt $Q + \lambda \cdot w \in h$ auch schon in g liegt.

Lösung. Im Beweis von Satz 1.1 hatten wir gezeigt, dass $g \subset h$. Der Beweis von $h \subset g$ verläuft ganz ähnlich.

Aufgabe 1. Es seien P und Q zwei Punkte auf einem Strahl S mit Anfangspunkt A. Zeigen Sie: wenn $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ})$, dann gilt $P = Q$.
Hinweis: Verwenden Sie die Beschreibung des Strahls, siehe Lemma 1.7, als Menge der Form $\{A + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

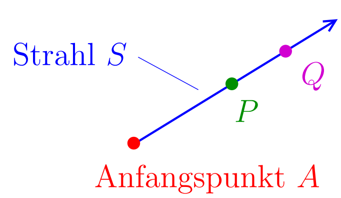


Abbildung 1. Skizze zu Lemma **??**.

Lösung. Nachdem P und Q auf dem Strahl liegen gibt es $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $P = A + sv$ und $Q = A_t v$. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir dessen Länge mit $\|v\|$. Es folgt nun, dass

$$s \cdot |v| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } s \geq 0}}{=} \|sv\| = \|(A + sv) - A\| = \|P - A\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per Definition von } \ell}}{=} \ell(\overline{AP}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Voraussetzung}}}{=} \ell(\overline{AQ}) = \|Q - A\| = \|(A + tv) - A\| = t \cdot \|v\|.$$

Da $v \neq 0$ ist $\|v\| \neq 0$, also erhalten wir aus $s \cdot \|v\| = t \cdot \|v\|$, dass $s = t$, also ist $P = Q$.

Aufgabe 2. Es seien A, B, C drei Punkte, welche auf einer Geraden liegen. Wir nehmen an, dass B zwischen A und C liegt. Zeigen Sie, dass

$$\ell(\overline{AC}) \;=\; \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC}).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beschreibung der Gerade mithilfe des Aufpunktes A.

Lösung. Wir schreiben die Gerade als $\{A + t \cdot v \,|\, v \in \mathbb{R}\}$. Wir können dabei den Richtungsvektor v so wählen, dass $C = A + \nu v$ mit $\nu \geq 0$. Da B zwischen A und C liegt, gilt, dass $B = A + \mu \cdot v$ mit $0 \leq \mu \leq \nu$. Nun ist

$$\underbrace{\|C-A\|}_{=\ell(\overline{AC})} = \|(A+\nu v)-A\| = \nu\|v\| = (\nu-\mu)\|v\| + \mu\|v\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \nu-\mu\geq 0}}{=} \|(\nu-\mu)v\|+\|\mu v\| = \underbrace{\|C-B\|}_{=\ell(\overline{BC})} + \underbrace{\|B-A\|}_{=\ell(\overline{AB})}.$$

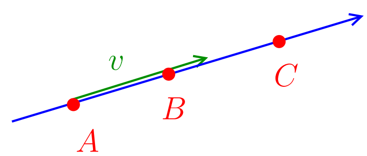


Abbildung 2.

Aufgabe 3. Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$. Vervollständigen Sie folgenden Satz: Es ist

$$\ell(\overline{AC}) \;=\; \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC})$$

genau dann, wenn ??????

Lösung. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn A, B, C auf einer Geraden liegen und zudem B zwischen A und C liegt.

Aufgabe 4. Wie würden Sie die Länge eines Kreises definieren?

Lösung. Da gibt es nun nicht die "eine" korrekte Antwort. Eine Möglichkeit wäre, Punkte auf dem Kreis zunehmen, die Länge des Streckenzuges zu bestimmen, und dann den "Grenzwert" der Längen mit immer mehr Punkten zu bilden.

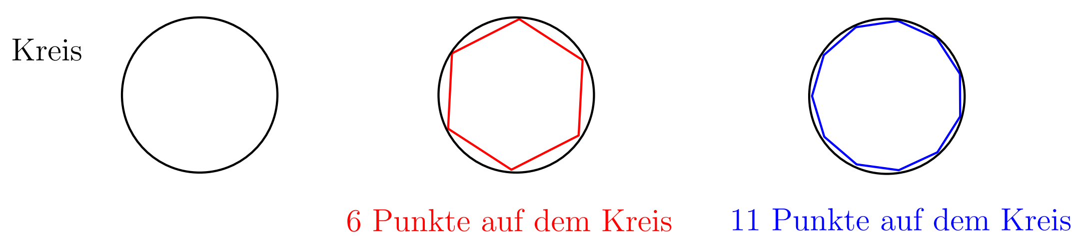


Abbildung 3.

Aufgabe 5. Es seien g und h zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P schneiden. Nach Satz 1.12 (1) wissen wir, dass Grössen von zwei Nebenwinkel zusammen π ergeben. Zeigen Sie, dass Scheitelwinkel gleich groß sind.
Hinweis: Versuchen Sie die Aussage mit möglichst wenig Aufwand zu beweisen, z.B. versuchen Sie Satz 1.12 (1) zu verwenden.

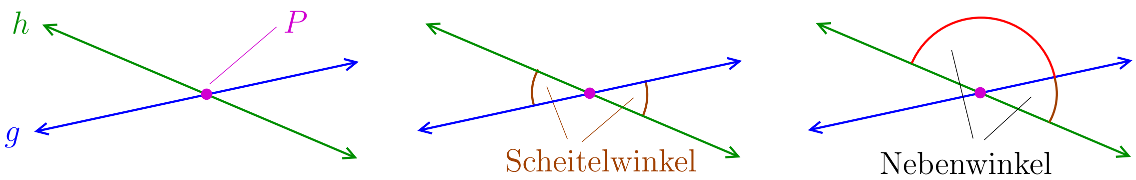


Abbildung 4.

Lösung. Wir betrachten Abbildung 5. Es ist

$$\alpha+\beta \underset{\uparrow}{=} \pi \underset{\uparrow}{=} \beta+\gamma.$$

da jeweils Nebenwinkel

Wenn wir β auf beiden Seiten abziehen erhalten wir, dass in der Tat $\alpha=\gamma$.

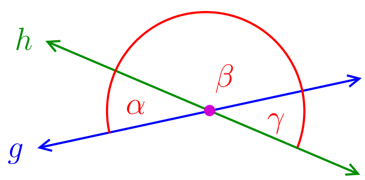


Abbildung 5.

Aufgabe 6. Es seien $\varphi, \psi \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ zwei längenerhaltende Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \varphi\circ\psi \colon \mathbb{E} &\to \mathbb{E} \\ P &\mapsto \varphi(\psi(P)) \end{aligned}$$

ebenfalls längenerhaltend ist.

Lösung. Zur Erinnerung, eine Abbildung $\chi \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ heißt *längenerhaltend*, wenn für alle $A, B \in \mathbb{E}$ gilt, dass

$$\ell\big(\overline{\chi(A)\chi(B)}\big) = \ell(\overline{AB}).$$

Es seien nun also $\varphi, \psi \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ längenerhaltende Abbildungen. Wir wollen zeigen, dass $\varphi\circ\psi$ längenerhaltend ist. Es seien also $P, Q \in \mathbb{E}$. Dann ist

$$\ell\big(\overline{\varphi(\psi(P))\varphi(\psi(Q))}\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \varphi \text{ längenerhaltend, angewandt} \\ \text{auf } A=\psi(P) \text{ und } B=\psi(Q)}}{=} \ell\big(\overline{\psi(P)\psi(Q)}\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \psi \text{ längenerhaltend}}}{=} \ell\big(\overline{PQ}\big).$$

Aufgabe 7. Satz 2.2 besagt, dass jede längenerhaltende Abbildung auch winkelerhaltend ist. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Lösung. Nein, denn eine Streckung um einen Faktor $\lambda \neq 1$ ist winkelerhaltend, aber nicht längenerhaltend.

Aufgabe 1.

(a) Es sei $g = \{P + t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit Richtungsvektor $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Was ist der Richtungsvektor einer Gerade, welche senkrecht auf g steht?

(b) Wir betrachten die Gerade

$$g \;:=\; \{(2,3) + t \cdot (1,1) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Was ist die Spiegelung von $P = (-1, 2)$ entlang von g?

Lösung.

(a) Ein möglicher Richtungsvektor ist $(-b, a)$, denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -ab + ab = 0$.

(b) Es folgt aus (a), dass die Gerade h durch $(-1, 2)$, welche senkrecht auf g steht, gegeben ist durch $\{(-1,2) + s \cdot (-1,1) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$. Der Schnittpunkt Q von g und h berechnet sich wie folgt:

$$\begin{array}{l} (1)\ 2 + t \cdot 1 = -1 + s \cdot (-1) \\ (2)\ 3 + t \cdot 1 = 2 + s \cdot 1 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} (1')\quad t = -3 - s \\ (2)\ 3 + t = 2 + s \end{array} \;\Rightarrow\; 3 + (-3 - s) = 2 + s \;\Rightarrow\; s = -1.$$

Wir erhalten nun $Q = (-1, 2) + 1 \cdot (-1, 1) = (0, 1)$. Das Spiegelbild ist jetzt gegeben durch den Punkt $Q + (Q - P) = (0, 1) + (1, -1) = (1, 0)$.

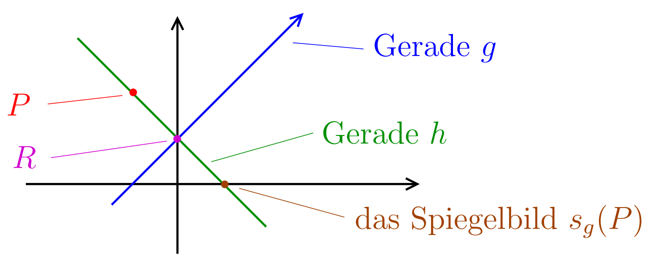


ABBILDUNG 6.

Aufgabe 2. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir sagen eine Abbildung $f\colon A \to A$ ist längenerhaltend, wenn für alle $P, Q \in A$ gilt, dass $\|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|$.

(a) Ist jede längenerhaltende Abbildung injektiv?

(b) Ist jede längenerhaltende Abbildung surjektiv?

Lösung.

(a) Ja! Es seien $P, Q \in A$ mit $P \neq Q$. Wir müssen zeigen, dass $f(P) \neq f(Q)$. In der Tat gilt

$$\|f(P) - f(Q)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } f \text{ längenerhaltend}}}{=} \|P - Q\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } P \neq Q}}{\neq} 0 \quad\Longrightarrow\quad f(P) \neq f(Q).$$

(b) Nein! Z.B. betrachten wir $A = [0, \infty)$ und $f\colon A \to A$, gegeben durch $f(x) = x + 1$. Die Abbildung ist längenerhaltend, aber nicht surjektiv, denn 0 liegt beispielsweise nicht im Bild von f.

Aufgabe 3.

(a) Geben Sie eine geometrische Definition der Spiegelung in einem Punkt $P \in \mathbb{E}$.
(b) Zeigen Sie, dass die Spiegelung im Ursprung $(0,0) \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ längenerhaltend ist.
(c) Wir kennen nun folgende Beispiele von längenerhaltende Abbildung:
   (i) Verschiebung,
   (ii) Spiegelung entlang einer Gerade,
   (iii) Drehung um einen Punkt.

   Wie passen da die Punktspiegelung rein? Genauer gesagt, kann man Punktspiegelungen durch Spiegelungen oder Drehungen beschreiben?

Lösung.

(a) Es sei $P \in \mathbb{E}$ und $Q \in \mathbb{E}$ ein anderer Punkt. Es sei $g = g(P,Q)$ die Gerade durch P und Q. Wir definieren wir die Punktspiegelung von Q als den Punkt R auf $g(P,Q)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:
   (1) Der Punkt R liegt auf der anderen Seite von P.
   (2) Es gilt $\ell(\overline{PR}) = \ell(\overline{PQ})$.
(b) Eine Punktspiegelung um P ist das gleiche wie eine Drehung um P um den Winkel π.

Aufgabe 4. Die Verknüpfung von zwei Verschiebungen ist natürlich wiederum eine Verschiebung.

(a) Ist die Verknüpfung von zwei Drehungen wiederum eine Drehung? Die Drehungen können dabei um zwei verschiedene Punkte erfolgen.
(b) Was kann man über die Verknüpfung von zwei Spiegelungen entlang von zwei Geraden g und h sagen? Ist dies wiederum eine Spiegelung? Oder eine andere Art von längenerhaltender Abbildung?

Lösung.

(a) Die Verknüpfung einer Drehung um den Punkt P mit Drehwinkel α und einer Drehung um den Punkt Q mit Drehwinkel β ist eine Drehung um einen (anderen) Punkt mit Drehwinkel $\alpha + \beta$, , außer, wenn beide Drehwinkel π sind, dan handelt es sich um eine Verschiebung. Wir werden das später noch genauer diskutieren.
(b) Es seien g und h zwei Geraden. Wir unterscheiden zwei Fälle
   (1) Wenn sich g und h in genau einem Punkt P schneiden, dann ist die Verknüpfung der zwei Spiegelungen eine Drehung um den Punkt P. Wir werden diese Aussage demnächst noch beweisen.
   (2) Wenn sich g und h nicht schneiden, dann ist die Verknüpfung der zwei Spiegelungen eine Verschiebung.

Aufgabe 5. Es sei g eine Gerade. Wir bezeichnen mit $s_g \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ die Spiegelung entlang von g.

(a) Es sei Q ein Punkt in $\mathbb{E}$. Vervollständigen Sie folgenden Satz: es gilt $s_g(Q) = Q$ genau dann, wenn ???????
(b) Es sei h eine Gerade, welche parallel zu g verläuft. Zeigen Sie, dass $s_g(h)$ ebenfalls parallel zu g verläuft.

Lösung.

(a) Es gilt $s_g(Q) = Q$ genau dann, wenn $Q \in g$.
(b) Nehmen wir an, dass $s_g(h)$ nicht parallel zu g verläuft. Dann besitzen $s_g(h)$ und g genau einen Schnittpunkt P. Da P auf g liegt folgt aus (a), dass $s_g(P) = P$. Wenn wir $s_g(h)$ also wieder zurückspiegeln, dann sehen wir, dass P ein Schnittpunkt von g und h ist. Also waren g und h nicht parallel.

Aufgabe 1. Es sei $P \in \mathbb{E}$ ein Punkt und es seien g und h zwei Geraden durch P, welche senkrecht aufeinander stehen. Was ist die geometrische Beschreibung der Verknüpfung der beiden Spiegelungen s_g und s_h?

Lösung. Die Verknüpfung der beiden Spiegelungen ist die Drehung um P um den Drehwinkel π, mit anderen Worten, die Verknüpfung ist die Spiegelung am Punkt P.

Aufgabe 2. Es sei P ein Punkt und es seien g und h zwei Geraden durch P, welche den Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ einschlagen. Die Spiegelung entlang von g, gefolgt von der Spiegelung um h ist eine Drehung um P. (Sie müssen das nicht beweisen.) Was ist der Drehwinkel dieser Drehung?

Lösung. Wir bezeichnen mit φ die Spiegelung entlang von g, gefolgt von der Spiegelung um h. Es handelt sich bei φ um eine Drehung um den Winkel 2α. Dies sieht man z.B. wenn man sich anschaut, was mit der Gerade g passiert.

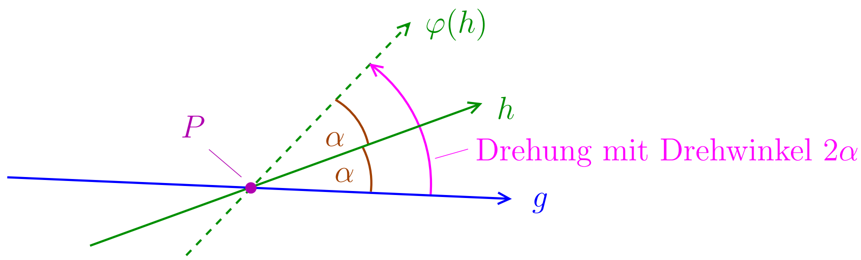


Abbildung 7. Skizze zu Aufgabe 2.

Aufgabe 3. Es sei P ein Punkt und h eine Gerade durch P. Zudem sei φ eine Drehung um P mit Drehwinkel β.

(1) Zeigen Sie, es gibt eine Gerade k durch P, so dass $\varphi = s_h \circ s_k$.
(2) Zeigen Sie, es gibt eine Gerade g durch P, so dass $\varphi = s_g \circ s_h$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 und überlegen Sie Sich, welche Winkel die Geraden jeweils einschlagen sollten. Wie äußert sich, ob φ im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn dreht?

Lösung.

(1) Es sei φ eine Drehung um P im Uhrzeigersinn mit Drehwinkel α. Wenn k die Gerade durch P ist, welche den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ mit h einschlägt und *gegen* den Uhrzeigersinn zu k gedreht ist, dann gilt $\varphi = s_h \circ s_k$.
(2) Es sei φ eine Drehung um P im Uhrzeigersinn mit Drehwinkel α. Wenn k die Gerade durch P ist, welche den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ mit h einschlägt und *im* den Uhrzeigersinn zu k gedreht ist, dann gilt $\varphi = s_h \circ s_k$.

Wir hatten für eine Drehung den Drehwinkel $\alpha \in [0, \pi]$ eingeführt. Wir definieren nun den

$$\textit{orientierten Drehwinkel} \quad := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn Drehung gegen den Uhrzeigersinn,} \\ -\alpha, & \text{wenn Drehung im Uhrzeigersinn.} \end{cases}$$

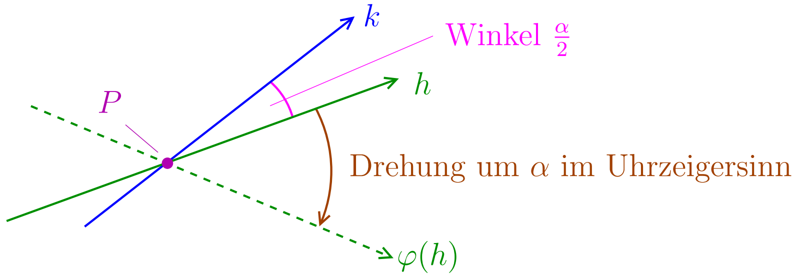


ABBILDUNG 8. Skizze zu Aufgabe 3 (1).

Aufgabe 4. Es sei φ eine Drehung mit orientiertem Drehwinkel α um einen Punkt P und es sei ψ eine Drehung mit orientiertem Drehwinkel β um einen Punkt Q mit $P \neq Q$. Zeigen Sie, die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ ist wiederum eine Drehung, außer ??? α ???? β ????
Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 3. mit $h = g(P, Q)$ an.

Lösung. Nach Aufgabe 3 (1) existiert eine Gerade k durch P, so dass $\varphi = s_h \circ s_k$ und nach Aufgabe 3 (1) existiert eine Gerade g durch Q, so dass $\psi = s_g \circ s_h$. Also ist $\psi \circ \varphi = (s_g \circ s_h) \circ (s_h \circ s_k) = s_g \circ s_k$. (Hier verwenden wir, dass die zweimalige Spiegelung entlang einer Gerade die Identität ist.).

Wir unterscheiden zwei Fälle. Wenn sich g und k nicht schneiden, d.h. wenn $\alpha = \beta$, dann erhalten wir eine Verschiebung. Andernfalls schneiden sich g und k, und wir erhalten eine Drehung um den Schnittpunkt.

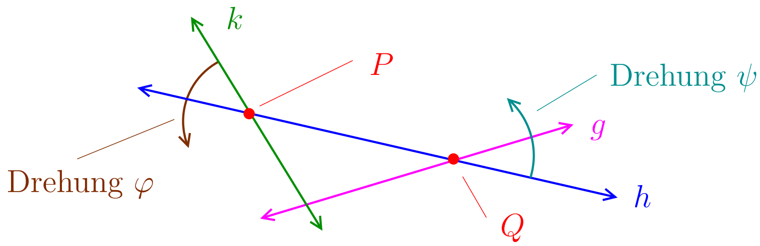


ABBILDUNG 9. Skizze zu Aufgabe 4.

Aufgabe 5. Es sei g eine Gerade und es sei φ eine Drehung um einen Punkt P. Dann gilt: Die Verknüpfung $s_g \circ \varphi$ ist eine Spiegelung genau dann, wenn ????? φ ???? P ????? g ??????.

Lösung. Es handelt sich um eine Spiegelung genau dann, wenn $P \in g$.

Aufgabe 1. Wir erinnern an folgende Aussagen aus Übungsblatt 4.

(1) Es seien g und h zwei Geraden. Wenn sich die Geraden in einem Punkt P schneiden, dann ist die Verknüpfung der Spiegelungen entlang von g und h eine Drehung um P.
(2) Es sei P ein Punkt und h eine Gerade durch P. Zudem sei φ eine Drehung um P.
  (a) Es gibt eine Gerade k durch P, so dass $\varphi = s_h \circ s_k$.
  (b) Es gibt eine Gerade g durch P, so dass $\varphi = s_g \circ s_h$.

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

(a) Es seien g und h zwei Geraden, welche sich nicht schneiden. Was können Sie über die Verknüpfung der Spiegelungen entlang von g und h sagen? Was passiert geometrisch?

(b) Begründen Sie warum jede Bewegung eine Verknüpfung von mehreren Spiegelungen entlang Geraden ist.
(c) Es seien a, b, c drei *parallele* Geraden. Was kann man über die Verknüpfung $s_c \circ s_b \circ s_a$ sagen? Was passiert geometrisch?
(d) Es seien a, b, c, d insgesamt vier Geraden. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a$ als Verknüpfung von zwei Spiegelungen geschrieben werden kann.
Unterscheiden Sie folgende Fälle:
   (i) a und b sind nicht parallel und c und d sind nicht parallel.
   (ii) a und b sind nicht parallel aber c und d sind parallel.
   (iii) a und b sind parallel jedoch und c und d sind nicht parallel.
   (iv) a und b sind parallel und c und d sind ebenfalls parallel.
Hinweis: Wenden Sie (2) geschickt an.
(e) Zeigen Sie, dass jede Bewegung als Verknüpfung von drei oder weniger Spiegelungen geschrieben werden kann.

Lösung.

(a) Eine Verknüpfung von zwei Spiegelungen entlang Geraden, welche sich nicht schneiden, ist eine Verschiebung.
(b) Eine Bewegung ist per Definition die Verknüpfung von einer oder mehrerer Abbildungen von folgender Art ist:
   (a) Verschiebung,
   (b) Spiegelung entlang einer Gerade,
   (c) Drehung um einen Punkt.
Jede dieser Abbildungen ist wiederum die Verknüpfung von ein oder zwei Spiegelungen, also ist jede Bewegung die Verknüpfung von Spiegelungen.
(c) Es seien a, b, c drei *parallele* Geraden. Die Verknüpfung $s_c \circ s_b \circ s_a$ ist eine einzige Spiegelung entlang einer Gerade, welche parallel zu a, b, c ist.
(d) Es seien a, b, c, d insgesamt vier Geraden. Wir unterscheiden vier Fälle.
   (i) a und b sind nicht parallel und c und d sind nicht parallel.
   In diesem Fall ist $s_b \circ s_a$ und $s_d \circ s_c$ eine Drehung. Aber in Übungsblatt 4 hatten wir schon gesehen, dass die Verknüpfung von zwei Drehungen eine Drehung oder eine Verschiebung ist. In beiden Fällen handelt es sich also um die Verknüpfung von zwei Spiegelungen.
   (ii) a und b sind nicht parallel aber c und d sind parallel.
   Es sei P der Schnittpunkt von c und d. Es sei h die Gerade durch P, welche parallel zu d ist. Da a und b nicht parallel sind ist $s_b \circ s_a$ eine Drehung. Nach (2) existiert eine Gerade k durch P, so dass $s_b \circ s_a = s_h \circ s_k$. Es folgt, dass

$$s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a = s_d \circ s_c \circ s_h \circ s_k = \underbrace{(s_d \circ s_c \circ s_h)}_{\substack{\text{Spiegelung entlang von} \\ \text{drei parallelen Geraden}}} \circ s_k$$

   Aus (c) wissen wir, dass $s_d \circ s_c \circ s_h$ die Spiegelung entlang einer Gerade l ist. Also haben wir gezeigt, dass $s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a = s_l \circ s_a$ die Spiegelung entlang von zwei Geraden ist.
   (iii) a und b sind parallel jedoch und c und d sind nicht parallel.
   Der Beweis in diesem Fall ist ganz ähnlich zum Argument in (ii).
   (iv) a und b sind parallel und c und d sind ebenfalls parallel.
   In diesem Fall sind sowohl $s_b \circ s_a$ also auch $s_d \circ s_c$ jeweils Verschiebungen. Also ist

$s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a = (s_d \circ s_c) \circ (s_b \circ s_a)$ die Verknüpfung von zwei Verschiebungen, also selber eine Verschiebung, also Verknüpfung von zwei Spiegelungen.

(e) Wir wollen zeigen, dass jede Bewegung als Verknüpfung von drei oder weniger Spiegelungen geschrieben werden kann. Aus (b) wissen wir, dass jede Bewegung als Verknüpfung von Spiegelungen beschrieben werden kann. Wir müssen also folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Für Geraden $g_1, \ldots, g_n$ können wir $s_{g_n} \circ \cdots \circ s_{g_1}$ als Verknüpfung von drei oder weniger Spiegelungen schreiben.

Wir beweisen nun die Aussage per Induktion nach n. Für $n \leq 3$ gibt es nichts zu beweisen. Nehmen wir nun an, dass die Aussage stimmt, für jede Bewegung, welche Spiegelung entlang von $\leq n$ Geraden ist. Wir betrachten nun eine Bewegung $\varphi = s_{g_{n+1}} \circ \cdots \circ s_{g_1}$ mit $n \geq 3$. Nach (d) wissen wir, dass wir die ersten vier Spiegelungen $s_{g_4} \circ s_{g_3} \circ s_{g_2} \circ s_{g_1}$ als Verknüpfung von zwei Spiegelungen $s_l \circ s_k$ schreiben können. Also ist

$$\varphi = s_{g_{n+1}} \circ \cdots \circ s_{g_5} \circ s_{g_4} \circ s_{g_3} \circ s_{g_2} \circ s_{g_1} \;=\; \underbrace{s_{g_{n+1}} \circ \cdots \circ s_{g_5} \circ s_l \circ s_k}_{n\text{-1 Spiegelungen}}.$$

Nach Induktionsvoraussetzungen können wir die Spiegelung entlang von $n-1$ Geraden als Verknüpfung von drei oder weniger Spiegelungen schreibne.

Wir erinnern an folgende Definition. Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen den maximalen Abstand zwischen zwei Punkten in X als *Durchmesser von X*. Mit anderen Worten, es ist

$$\text{Durchmesser von } X \;:=\; \max\{\ell(\overline{PQ}) \mid P, Q \in X\}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

$$\text{Durchmesser von einem Kreis von Radius } r \;=\; 2r.$$

Lösung. Es sei $K = K(P, r)$ ein Kreis von Radius r. Wir wollen zeigen, dass der maximale Abstand zwischen zwei Punkten auf K gerade $2r$ beträgt. Dieser Beweis teilt sich in zwei Teile auf:

(1) Wir müssen zeigen, dass es zwei Punkte auf K gibt, deren Abstand $2r$ beträgt, und
(2) wir müssen zeigen, dass für beliebige Punkte S und T auf K gilt, dass der Abstand höchstens $2r$ beträgt.

Im Folgenden bezeichnen wir für zwei Punkte P und Q mit $d(P, Q) := \|P - Q\|$ den Abstand. Wir führen nun die beiden Schritte durch.

(1) Wir schreiben $P = (x, y)$ und betrachten jetzt die Punkte $S = (x - r, y)$ und $T = (x + r, y)$. Dann rechnet man leicht nach, dass $d(S, P) = d((x - r, y), (x, y)) = r$ und $d(T, P) = d((x + r, y), (x, y)) = r$, d.h. beide Punkte liegen auf dem Kreis. Zudem gilt, dass $d(S, T) = d((x - r, y), (x + r, y)) = |(-2r, 0)| = 2r$.
(2) Es seien nun S und T zwei beliebige Punkte auf K. Dann gilt

$$d(S, T) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} d(S, P) + d(P, T) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } S \text{ und } T \text{ auf } K = K(P, r) \text{ liegen}}}{=} r + r \;=\; 2r.$$

Aufgabe 3. Die *Kreisscheibe mit Mittelpunkt* P *und Radius* $r \geq 0$ ist definiert als die Menge

$$S(P, r) \;:=\; \{Q \in \mathbb{R}^2 \,|\, \ell(\overline{PQ}) \leq r\}.$$

Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit Durchmesser d. Gibt es dann notwendigerweise eine Scheibe $S(P, \frac{d}{2})$ von Radius $\frac{d}{2}$, welche X enthält?

Lösung. Die Antwort ist "nein". Genauer gesagt, dass gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge $2r$ hat Durchmesser $2r$, aber es gibt keine Scheibe von Radius r, welche das Dreieck enthält.

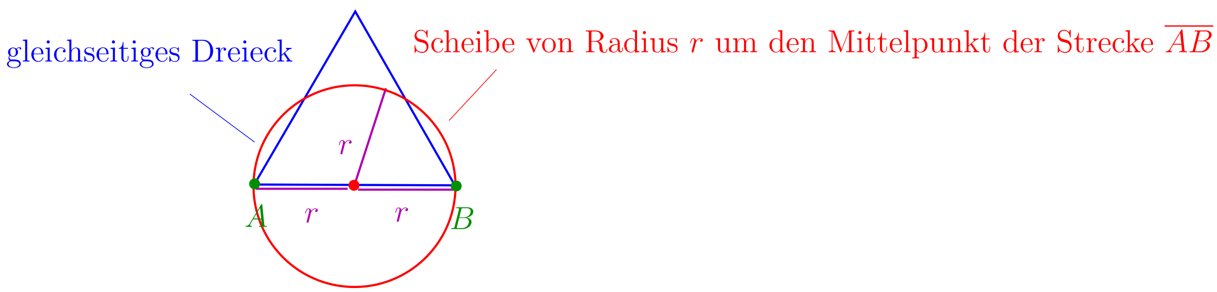


ABBILDUNG 10.

Aufgabe 4. Es sei K ein Kreis und g eine Gerade. Zeigen Sie, dass es genau drei Möglichkeiten gibt:

(1) der Kreis K und g schneiden sich nicht,
(2) der Kreis K und g schneiden sich in einem Punkt,
(3) der Kreis K und g schneiden sich in zwei Punkten.

Mit anderen Worten, zeigen Sie, dass sich ein Kreis und eine Gerade in höchstens zwei Punkten schneiden.

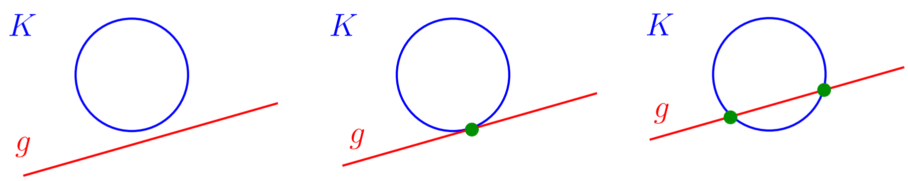


ABBILDUNG 11.

Aufgabe 1. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sphericalangle_{BAC} \;=\; \sphericalangle_{ABC} \quad\Longrightarrow\quad \ell(\overline{AC}) \;=\; \ell(\overline{BC}).$$

Hinweis: In der Vorlesung hatten wir die "$\Longrightarrow$"-Richtung bewiesen.

Lösung. Wir bezeichnen mit P den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und es sei h die Höhe auf P. Wir bezeichnen mit D den Schnittpunkt von h mit dem Strahl $\overline{AC}$ und wir bezeichnen mit Q den Schnittpunkt von h mit dem Strahl $\overline{BC}$. Wir betrachten nun die Dreiecke Δ_{ADP} und Δ_{BDQ}. Es folgt aus WSW, dass die Dreiecke Δ_{ADP} und Δ_{BDQ} kongruent sind.

Insbesondere ist $\overline{DP} = \overline{DQ}$. Dann folgt nun jedoch, dass $P = Q$. Mit anderen Worten, $P = Q$ ist der Schnittpunkt der Strahlen $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$, d.h. $P = Q = C$. Insbesondere sind also die

Dreiecke $\Delta_{ADP} = \Delta_{ADC}$ und $\Delta_{BDQ} = \Delta_{ADC}$ kongruent. Die impliziert nun, dass $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$.

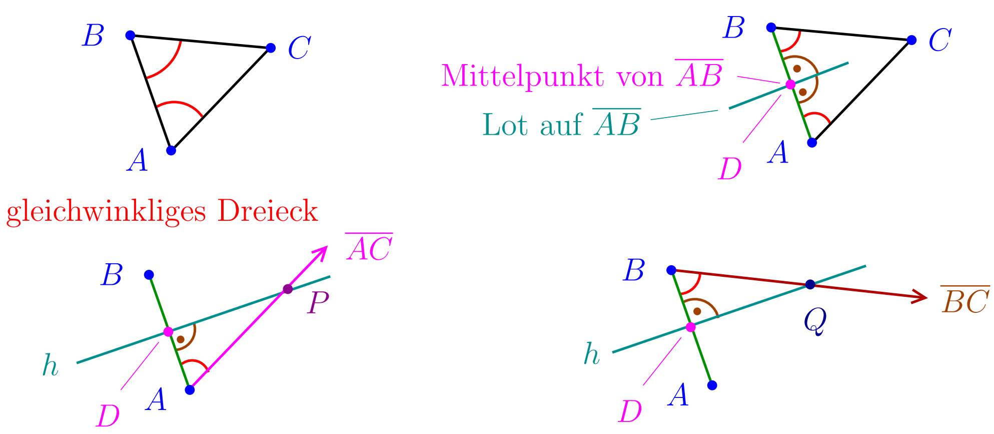


Abbildung 12.

Aufgabe 2. Eine Raute ist per Definition ein Viereck, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind. Zeigen Sie folgende Aussage: Die Diagonalen einer Raute halbieren sich gegenseitig und halbieren die Innenwinkel der Raute.

Lösung. Wir beweisen die Aussage implizit im Beweis von Lemma 4.7.

Aufgabe 3. Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene $\mathbb{E}^2$ und es sei $r > 0$ ein Radius. Zeigen Sie: wenn $r < \frac{1}{2}\ell(\overline{AB})$, dann schneiden sich die beiden Kreise $K(A, r)$ und $K(B, r)$ nicht.

Lösung. Wenn es einen Schnittpunkt Q gäbe, dann wäre

$$2r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Voraussetzung}}}{<} \ell(\overline{AB}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} \ell(\overline{AQ}) + \ell(\overline{QB}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Voraussetzung}}}{=} r + r = 2r.$$

Wir haben also einen Widerspruch zu $r > 0$ erhalten.

Aufgabe 4. Es seien zwei Strahlen S und T gegeben, welche von einem Punkt P ausgehen.

(a) Wie können Sie mit Zirkel und Lineal die zugehörige Winkelhalbierende konstruieren?
(b) Warum führt die Konstruktion (a) in der Tat zum Ziel?

Lösung. Wir werden das in der Vorlesung behandeln, siehe Kapitel 4.8 des Skripts.

Aufgabe 1. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck mit $\sphericalangle_{BAC} = \sphericalangle_{ABC}$. Zeigen Sie, dass $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$, ohne im Beweis einen weiteren Punkt einzuführen.

Lösung. Wir betrachten die Dreiecke Δ_{ABC} und Δ_{BAC}. Nach Voraussetzung sind die Innenwinkel am ersten und zweiten Eckpunkt jeweils gleich. Nachdem die Strecke vom ersten zum zweiten Eckpunkt gleich lang ist (es ist sogar haargenau die gleiche Strecke), folgt aus WSW, dass die Dreiecke kongruent sind. Also sind auch die Strecke vom ersten zum dritten Eckpunkt gleich lang. Aber dies bedeutet gerade, dass $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$.

Aufgabe 2. Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$. Zeigen Sie:

$$\{Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\} \subset \text{ Mittelsenkrechte zu } \overline{AB}.$$

Lösung. Es sei P der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Wir betrachten die Dreiecke Δ_{APQ} und Δ_{BPQ}. Diese sind nach SSS kongruent, also sind die Innenwinkel bei P gleich groß, also liegt Q auf der Mittelsenkrechte.

Abbildung 13.

Aufgabe 3. Es seien S und T zwei Strecken von gleicher Länge > 0. Wir nehmen an, dass S und T nicht auf einer Gerade liegen. Unter welchen geometrischen Voraussetzungen an S und T gibt es eine Gerade mit $s_g(S) = T$?

Lösung. Es seien $\overline{AB}$ und $T = \overline{CD}$ zwei Strecken. Wenn $ABCD$ ein symmetrisches Trapez ist, d.h. wenn $\overline{AD}||\overline{BC}$ und wenn die Mittelhalbierende von $\overline{AD}$ gleich der Mittelhalbierende von $\overline{BC}$ ist, dann führt die Spiegelung entlang dieser gemeinsamen Mittelhalbierende gerade A in D und B in C über. Also wird die Strecke $\overline{AB}$ in die Strecke $\overline{DC}$ übergeführt.

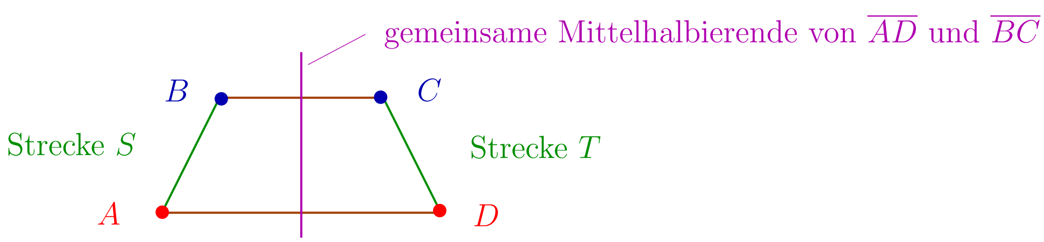


Abbildung 14.

Aufgabe 4. Wir hatten gesehen, dass wir jeden Winkel mit Zirkel und Lineal halbieren können. Gibt es auch eine Konstruktion, welches es erlaubt, jeden Winkel mit Zirkel und Lineal zu dritteln? Was glauben Sie?

Lösung. Nein, gibt es im Allgemeinen nicht. Das ist aber schwer zu beweisen, dies wird z.B. in der Vorlesung Algebra (LA Gy) bewiesen.

Aufgabe 5. Es sei g eine Gerade und P ein Punkt. Wie konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal das Lot von P auf g?

Lösung. Wir werden das im Skript besprechen.

Aufgabe 1. Es sei g eine Gerade und P ein Punkt, welcher nicht auf g liegt. Es sei h die eindeutig bestimmte Gerade durch P, welche parallel zu g verläuft. Sie wollen die Gerade mit Zirkel und Lineal mit möglichst wenig Aufwand konstruieren. Was ist die minimale Zahl von Kreisen, welche Sie verwenden müssen um h zu konstruieren?

Lösung. Ich schaffe es mit drei:

(1) Ein Kreis um P mit r größer als der Abstand von P zu g. Es seien A und B die Schnittpunkte.
(2) Wir ziehen den Kreis mit Radius r um A.
(3) Wir ziehen den Kreis mit Radius $\ell(\overline{AB})$ um P.
(4) Es sei Q der Schnittpunkt der Kreise aus (2) und (3). Wir erhalten ein Viereck mit gleich langen Seiten, dies ist ein Parallelogramm. D.h. die Gerade $g(P,Q)$ ist parallel zu $g = g(A,B)$.

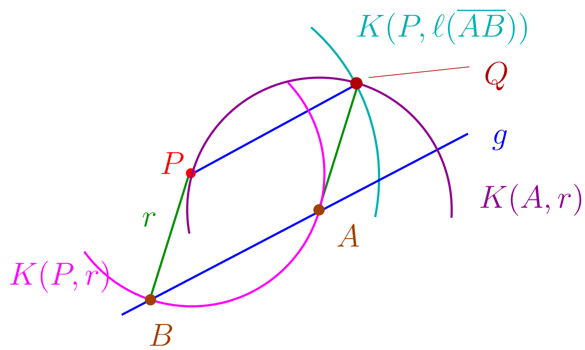


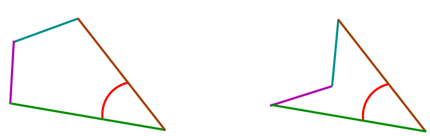
Abbildung 15.

Aufgabe 2.

(1) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSSS? D.h. wenn für gegebene Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ alle entsprechenden Seiten gleich lang sind und ein Innenwinkel gleich groß ist, folgt daraus schon, dass die Vierecke kongruent sind?
(2) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSWS?
(3) Was für Kongruenzsätze kennen Sie für Vierecke? Können Sie selber welche finden?

Lösung.

(1) Ein Gegenbeispiel zu (1) und ist in der Abbildung 2 skizziert.



erfüllen SWSSS, sind aber nicht kongruent

Abbildung 16.

(2) Die Aussage gilt. Durch SWS sind die ersten drei Eckpunkte schon festgelegt. Der vierte Eckpunkt schlägt einen festgelegten Winkel zur dritten Seite ein. Dadurch, dass ein Viereck vorliegt ist ist die Drehrichtung des Winkels eindeutig festgelegt. Durch Winkel, Drehrichtung und Abstand zum 3. Eckpunkt ist der 4. Eckpunkt eindeutig festgelegt.
(3) Es gilt z.B. WSWSW aber WSWWW gilt nicht.

Aufgabe 3. Es seien $P_1, \ldots, P_4$ Punkte in der Ebene, welche ein Viereck bilden. Wir nehmen an, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Genauer gesagt, wir nehmen an, dass folgende Aussagen gelten:

(1) die Seiten $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$ sind gleich lang,
(2) die Seiten $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{P_4P_1}$ sind gleich lang.

Folgt daraus schon, dass das Viereck ein Parallelogramm ist?

Lösung.

(1) Die Dreiecke $\Delta_{P_1P_2P_4}$ und $\Delta_{P_3P_4P_2}$ sind kongruent nach SSS.
(2) Also sind die Wechselwinkel $\sphericalangle_{P_1P_2P_4}$ und $\sphericalangle_{P_3P_4P_2}$ gleich großsind.
(3) Also folgt aus Satz 2.5, dass die Geraden $g(P_1, P_2)$ und $g(P_4, P_3)$ parallel sind.
(4) Analog zeigt man, dass die anderen beiden Seiten parallel sind.

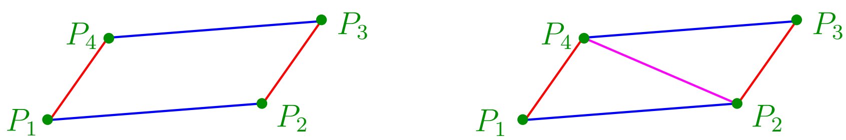


Abbildung 17.

Aufgabe 4. Es seien $P_1, \ldots, P_4$ Punkte in der Ebene, welche ein Viereck bilden. Wir nehmen an, dass gegenüberliegende Seiten parallel sind sind. Genauer gesagt, wir nehmen an, dass folgende Aussagen gelten:

(1) die Seiten $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$ sind parallel,
(2) die Seiten $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{P_4P_1}$ sind parallel.

Folgt daraus schon, dass das Viereck konvex ist?

Lösung. Ja!

Aufgabe 5. Es seien $P_1, \ldots, P_6$ Punkte in der Ebene, welche ein Sechseck bilden. Wir nehmen an, dass folgende Aussagen gelten:

(1) die Seiten $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_4P_5}$ sind parallel und gleich lang,
(2) die Seiten $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{P_5P_6}$ sind parallel und gleich lang,
(3) die Seiten $\overline{P_3P_4}$ und $\overline{P_6P_1}$ sind parallel und gleich lang.

Folgt daraus schon, dass das Sechseck konvex ist?

Lösung. Nein! Siehe Abbildung.

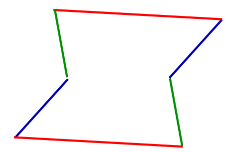


Abbildung 18.

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Skizze in der Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\sphericalangle_{AQB} \;=\; \frac{1}{2}\sphericalangle_{APB}.$$

(Diese Aussage ist der zweite Fall im Beweis des Peripheriewinkelsatzes.)

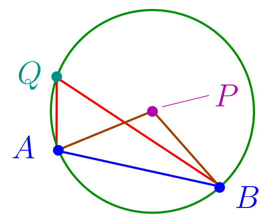


Abbildung 19.

Lösung. Der Beweis ist ganz ähnlich zum Fall, dass P innerhalb des Dreiecks liegt. Man muss nur mehrmals verwenden, dass gleichschenklige Dreiecke gleichwinklig sind und die Winkelsumme in jedem Dreieck π beträgt.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Skizze in der Abbildung. In diesem Fall liegen Q und P auf verschiedenen Seiten der Gerade $g(A, B)$. Was ist der Zusammenhang zwischen $\sphericalangle_{AQB}$ und $\sphericalangle_{APB}$?

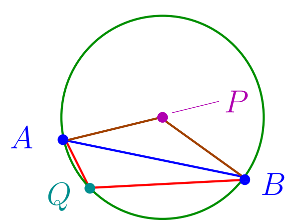


Abbildung 20.

Lösung. Wir betrachten Abbildung 21. Die Dreiecke Δ_{AQP} und Δ_{PQB} sind gleichschenklig, also auch gleichwinklig. Die gleich großen Winkel werden mit μ und ν bezeichnet. Nun gilt

$$2 \cdot \sphericalangle_{AQB} \;=\; 2\mu + 2\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Winkelsumme im Dreieck beträgt } \pi}}{=} \pi - \alpha + \pi - \beta \;=\; 2\pi - \sphericalangle_{APB}$$

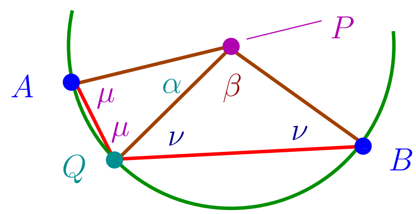


Abbildung 21.

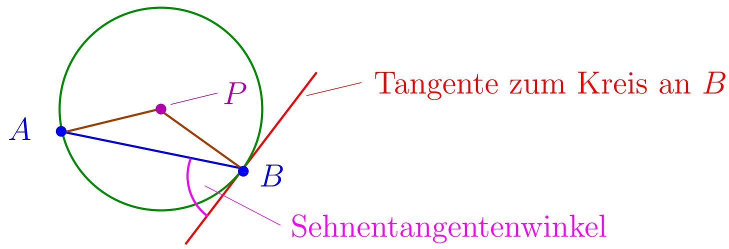


Abbildung 22.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Skizze in der Abbildung. Was ist der Zusammenhang zwischen dem Winkel $\sphericalangle_{APB}$ und dem Sehnentangentenwinkel bei B?
Lösung. Wir betrachten Abbildung 23. Es ist

$$2\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da Tangente bei } B}}{=} 2\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}-\mu\right) = \pi - 2\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da Dreieck } \Delta_{APB} \text{ gleichschenklig und Winkelsumme } = \pi}}{=} \pi - (\pi - \sphericalangle_{APB}) = \sphericalangle_{APB}.$$

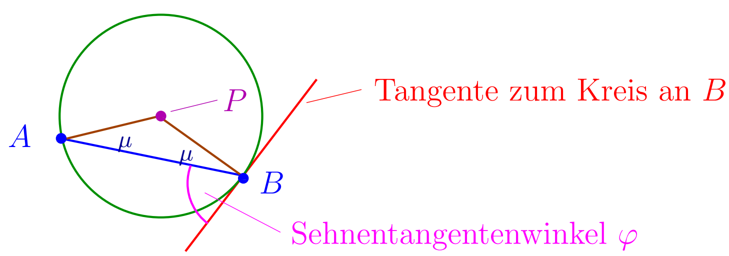


Abbildung 23.

Aufgabe 4. Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf einem Kreis. Gilt die Aussage immer, dass sich gegenüberliegende Innenwinkel zu π addieren?

Lösung. 1. Beweis: Wir betrachten Abbildung 24. Es ist

$$\sphericalangle_{ABC} + \sphericalangle_{ADC} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Peripheriewinkelsatz zusammen mit Aufgabe 2}}}{=} \tfrac{1}{2}\varphi + \left(\pi - \tfrac{1}{2}\varphi\right) = \pi.$$

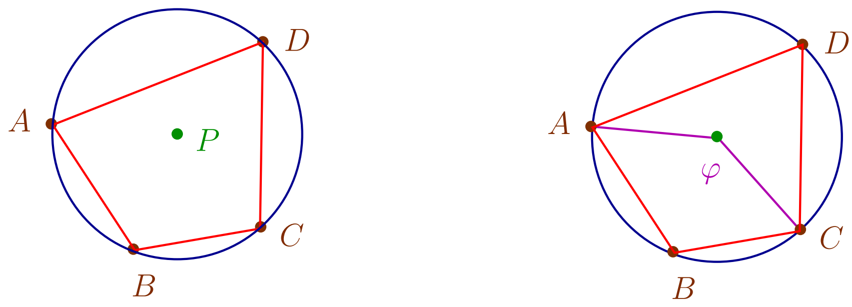


Abbildung 24.

2. Beweis: Es ist

$$\text{Winkel bei } A \text{ plus Winkel bei } C = (\alpha+\delta)+(\beta+\gamma) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nachdem insgesamt vier gleichseitige Dreiecke vorliegen}}}{=} \frac{1}{2}\cdot \text{Winkelsumme des Vierecks} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

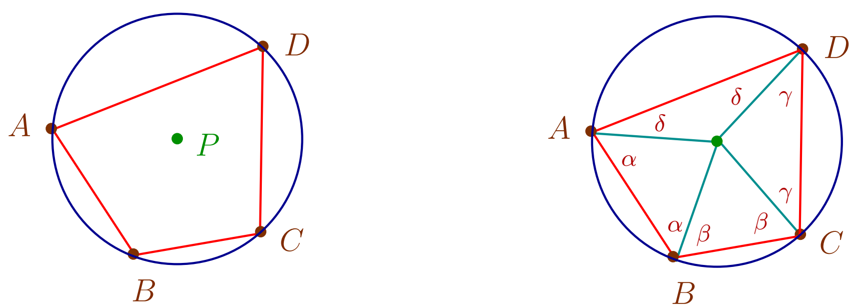


Abbildung 25.

Aufgabe 5. Für welche $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ist ein n-Eck schon durch seine Eckpunkte festgelegt?

Lösung. Schon ein nichtkonvexes Viereck ist nicht durch seine Eckpunkte bestimmt.

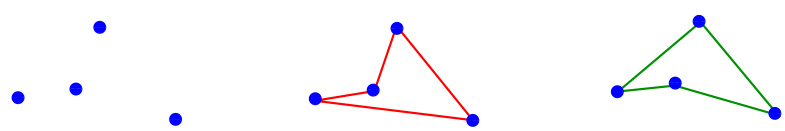


Abbildung 26.

Aufgabe 6. Es sei ein Parallelogramm mit Eckpunkten A, B, C, D gegeben. Wir verbinden die gegenüberliegenden Eckpunkte A und C. Ist die Strecke $\overline{AC}$ immer eine Winkelhalbierende von $\sphericalangle_{BAD}$?

Lösung. Nein. Das sieht man leicht, wenn man z.B. ein Rechteck mit sehr verschiedenen Kantenlängen betrachtet.

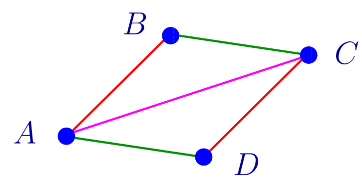


Abbildung 27.

Aufgabe 1. Es seien S, T zwei Strahlen, welche von einem gemeinsamen Punkt P ausgehen und es seien S', T' zwei Strahlen, welche von einem gemeinsamen Punkt P' ausgehen. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal einen Strahl U, welcher von P ausgeht, so dass $\sphericalangle(S,U) = \sphericalangle(S,T) + \sphericalangle(S',T')$. (Die Konstruktion nennt man manchmal "Abtragen eines Winkels".)
Bemerkung: Wir nehmen an, dass T im Uhrzeigersinn zu S verdreht ist, und dass T' im Uhrzeigersinn zu S' verdreht ist.

Abbildung 28.

Lösung.

(1) Wir ziehen einen Kreis $K(P', a)$ um P' mit beliebigem Radius a.
(2) Es sei Q' der Schnittpunkt von $K(P', a)$ mit S'. Zudem sei b der Abstand von Q' zum Schnittpunkt von $K(P', b)$ mit dem Strahl T'.
(3) Wir ziehen ebenfalls den Kreis mit Radius a um P. Es sei Q der Schnittpunkt von $K(P, a)$ mit dem Strahl T.
(4) Wir betrachten den Kreis $K(Q, b)$. Es sei R der Schnittpunkt von $K(Q, b)$ mit $K(P, r)$ im Uhrzeigersinn. Der Strahl $U := \overrightarrow{PR}$ ist der gesuchte Strahl.

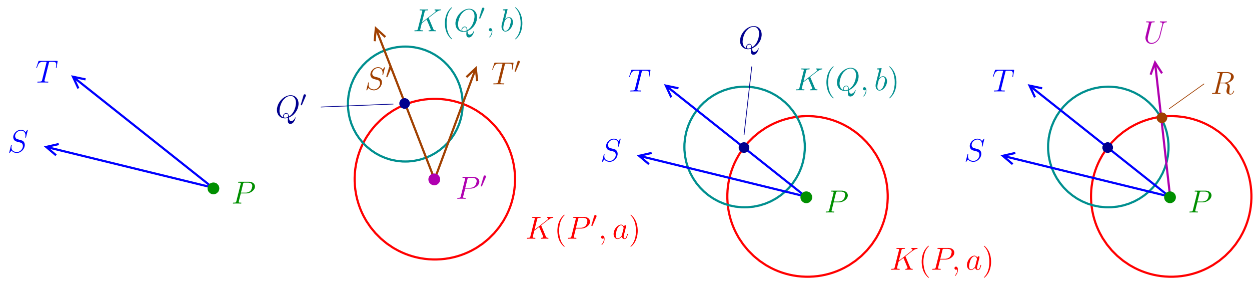


Abbildung 29.

Aufgabe 2.

(1) Wie können Sie ein reguläres Viereck (d.h. ein Quadrat) mit Zirkel und Lineal konstruieren?
(2) Warum liefert Ihre Konstruktion in der Tat ein reguläres Viereck?

(3) Was ist die minimale Zahl von Kreisen, welche Sie benötigen um ein Quadrat zu konstruieren?

Lösung. Es sei g eine Gerade und $P \in g$ ein Punkt. Wir errichten wie üblich mit drei Kreisen das Lot h auf g durch P. Wir nehmen dann einen beliebigen Kreis K durch P. Die vier Schnittpunkte des Kreises mit g und h bilden ein Viereck.

Wir müssen noch zeigen, dass diese ein Quadrat bilden. Dies sieht man wie folgt: alle vier Dreiecke sind gleichschenklig also auch gleichwinklig. Da ein Innenwinkel $\frac{\pi}{2}$ ist, ist jeder Innenwinkel der Dreiecke an den vier Eckpunkten des Vierecks gerade $\frac{\pi}{4}$. Also betragen alle Innenwinkel des Vierecks $\frac{\pi}{2}$. Zudem folgt aus SWS, dass alle vier Teildreiecke kongruent sind, also sind alle vier Seiten des Vierecks gleich lang.

Wir haben also ein Quadrat mithilfe von drei Kreisen konstruiert.

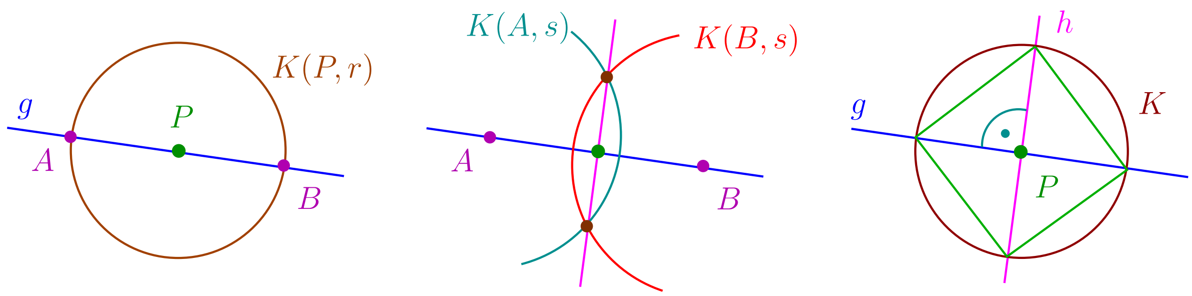


Abbildung 30.

Aufgabe 3. Es sei $K(P, r)$ ein Kreis mit $r > 0$. Es sei Q ein Punkt, welcher außerhalb der zugehörigen Kreisscheibe liegt.

(a) Wie konstruieren Sie eine Tangente zum Kreis $K(P, r)$ durch den Punkt Q mit Zirkel und Lineal?

(b) Wo haben Sie in der Konstruktion (a) verwendet, dass der Punkt Q außerhalb der Kreisscheibe liegt?

Hinweis: Aus Satz 3.4 wissen wir, dass eine Gerade g eine Tangente zum Kreis $K(P, r)$ im Punkt C ist, genau dann, wenn g senkrecht auf $\overline{PC}$ steht.

Abbildung 31. Illustration von Aufgabe 3.

Lösung.

(1) Es sei C der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ und es sei K der Kreis mit Mittelpunkt C, welcher durch P und Q verläuft. Es seien A und B die Schnittpunkte von K mit dem ursprünglichen Kreis $K(P, r)$.

(2) Es folgt aus dem Satz von Thales, dass $\sphericalangle_{PAQ} = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle_{PBQ}$. Aus dem Hinweis folgt also, dass die Geraden $g(P, A)$ und $g(P, B)$ Tangenten zum Kreis $K(P, r)$ sind.
(3) Wenn Q innerhalb der Kreisscheibe verläuft, dann schneidet der Kreis K den Kreis $K(P, r)$ nicht.

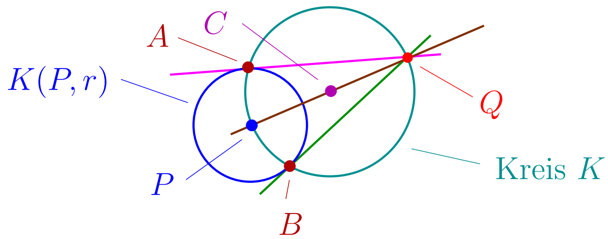


Abbildung 32. Illustration zur Lösung von Aufgabe 3.

Aufgabe 4. Wir erinnern an folgende Definition aus der Vorlesung: eine *Fermatsche Primzahl* ist definiert als eine Primzahl, welche man in der Form $2^{2^m} + 1$ schreiben kann. Beispielsweise sind $2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$ und $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ Fermatsche Primzahlen.

Der Satz von Gauß macht folgende Aussage:
Für $n \in \mathbb{N}$ ist ein reguläres n-Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^m \cdot p_1 \cdots p_k$ ist, wobei $p_1, \dots, p_k$ paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen sind und $m \in \mathbb{N}_0$.

Für welche $n \in \{3, \dots, 20\}$ kann man nun also ein reguläres n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren?

Lösung. Wir können ein reguläre n-Eck in folgenden Fällen konstruieren

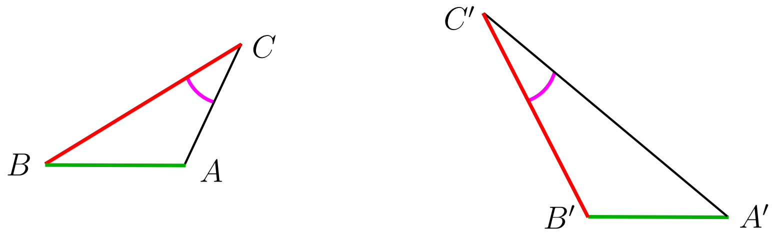
$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} 3 &=& 2^0 \cdot 3 & 10 &=& 2 \cdot 5 \\ 4 &=& 2^2 & 12 &=& 2^2 \cdot 3 \\ 5 &=& 2^0 \cdot 5 & 15 &=& 2^0 \cdot 3 \cdot 5 \\ 6 &=& 2 \cdot 3 & 16 &=& 2^4 \\ 8 &=& 2^3 & 17 &=& 2^0 \cdot 17 \end{array}$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass es keinen allgemeinen Kongruenzsatz der Form SSW für Dreiecke gibt.
Hinweis: Das Beispiel steht natürlich im Skript, versuchen die Aufgabe also ohne Skript zu beantworten.

Lösung.

Aufgabe 2. In Übungsblatt 8 hatten wir gesehen, dass es für Vierecke keinen allgemeinen Kongruenzsatz der Form SWSSS gibt. Wie schaut es aus mit sWsSS? Hier soll die Notation bedeuten, dass die mit “s” bezeichneten Seiten beide jeweils kleiner als die mit “S” bezeichneten Seiten sind.

Lösung. Dieses Mal gilt der Satz. Durch sWs sind schon drei Punkte festgelegt. Durch SS gibt es nur noch zwei Möglichkeiten für den vierten Punkt. Aber durch die Längeninformation gibt es nur eine Möglichkeit, dass der vierte Punkt im Inneren des vorgegeben Winkels liegt.



die beiden Dreiecke stimmen in SSW über ein, sind aber nicht kongruent

Abbildung 33.

Aufgabe 3. Es seien A und B zwei Punkte, welche auf der gleichen Seite einer Geraden g liegen. Wie konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal den kürzesten Weg von A nach B, welcher über die Bande geht, d.h. welcher die Gerade g berührt?

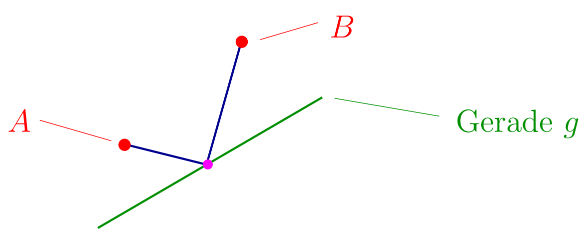


Abbildung 34.

Lösung. Wir spiegeln B entlang der Geraden g und verbinden nun A mit $s_g(B)$. Der Schnittpunkt dieser Strecke mit g ist gerade der Punkt, auf den wir zielen müssen.

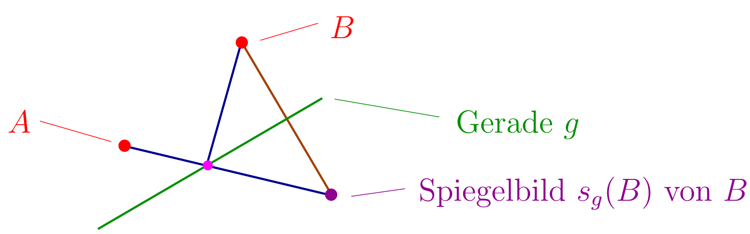


Abbildung 35.

Aufgabe 4.

(1) Es seien g und h zwei Geraden. Wie können Sie die Menge aller Punkte $P \in \mathbb{E}$ beschreiben, mit $d(g, P) = d(h, P)$?

(2) Wir wollen nun die Menge aller Punkte bestimmen, welche den gleichen Abstand zu einer Gerade und einem Punkt besitzen. Genauer gesagt, es sei $P = (0, 1)$ und $g = \{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ die x-Achse.
   (a) Versuchen Sie zuerst die Menge aller Punkte Q mit $d(P, Q) = d(g, Q)$ frei zu skizzieren.
   (b) Versuchen Sie nun die Menge in (a) explizit zu berechnen. D.h. Sie sollen alle Punkte $Q = (x, y)$ mit $d(P, Q) = d(g, Q)$ bestimmen.

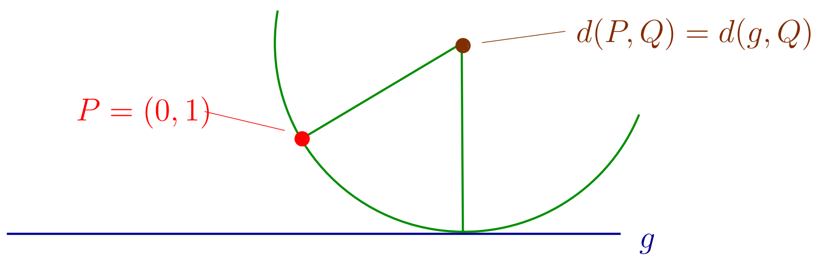


Abbildung 36.

Lösung.

(1) Es folgt leicht aus Satz 6.7, dass die Menge gerade gegeben ist durch die Vereinigung der verschiedenen Winkelhalbierenden.

(2) Wir führen die Rechnung in (2) aus. Es sei also $Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Es gilt $d(P, Q) = d((0, 1), (x, y)) = \|(0, 1) - (x, y)\| = \|(-x, 1 - y)\| = \sqrt{(x^2 + (1 - y)^2}$. Zudem gilt $d(g, (x, y)) = |y|$. Also gilt

$$d(P,Q) = d(g,P) \iff \sqrt{(x^2 + (1-y)^2} = |y| \iff x^2 + (1-y)^2 = y^2 \iff y = \tfrac{1}{2}(x^2+1).$$

Die Menge ist also eine Parabel.

Aufgabe 1. Es sei Δ ein Dreieck, so dass zwei Höhen gleich lang sind. Folgt daraus, dass das Dreieck gleichschenklig ist?

Lösung. Es folgt aus der Voraussetzung und dem Kongruenzsatz SS$\frac{\pi}{2}$, angewandt auf die Dreiecke Δ_{ABQ} und Δ_{BAP}, dass $\sphericalangle_{QAB} = \sphericalangle_{PBA}$. Also ist auch $\sphericalangle_{CAB} = \sphericalangle_{CBA}$, d.h. das Dreieck Δ_{ABC} ist gleichwinklig, also (nach Satz aus der Vorlesung), auch gleichschenklig.

Abbildung 37. Höhen sind gleich lang.

Aufgabe 2. Gibt es zu jedem konvexen Viereck einen Inkreis?

Abbildung 38.

Lösung. Nein, gibt es nicht. Den der Mittelpunkt des Inkreises müsste auf allen Winkelhalbierenden liegen, aber diese schneiden sich im Allgemeinen nicht in einem Punkt.

Aufgabe 3. Es sei Δ_{ABC} ein Dreieck. Der *Ankreis* zur Seite $\overline{AB}$ ist der Kreis, welcher tangential zur Seite $\overline{AB}$ und zu den Verlängerungen der anderen beiden Seiten ist. Wie können Sie den Ankreis mit Zirkel und Lineal konstruieren?

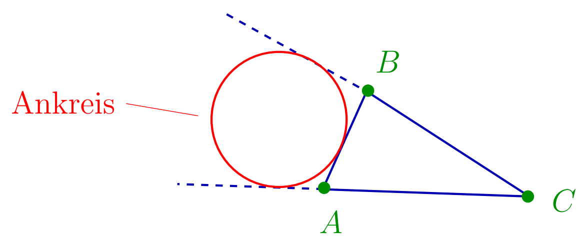


Abbildung 39.

Lösung. Wir konstruieren die Winkelhalbierende der Außenwinkel bei BA und B. Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des gewünschten Kreises.

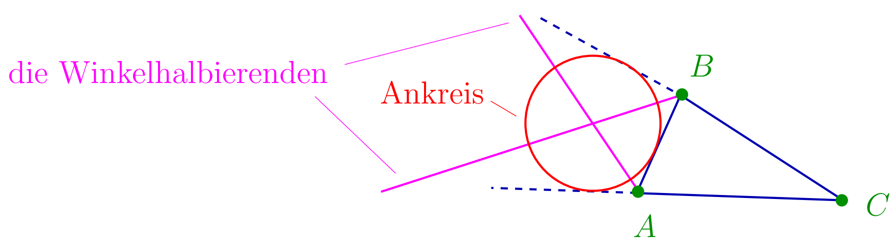
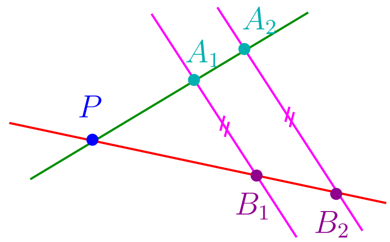


Abbildung 40.

Aufgabe 4. Es seien $g(A_1, A_2)$ und $g(B_1, B_2)$ zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P schneiden. Wir nehmen an, dass $g(A_1, B_1)$ parallel zu $g(A_2, B_2)$ ist. Der Strahlensatz 7.3 besagt, dass

$$(1) \quad \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PA_1})} = \frac{\ell(\overline{PB_2})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{A_2B_2})}{\ell(\overline{A_1B_1})} \quad \text{und} \quad (2) \quad \frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PB_2})} = \frac{\ell(\overline{A_1A_2})}{\ell(\overline{B_1B_2})}.$$

In der Vorlesung hatten wir schon (1) bewiesen. Beweisen Sie nun (2).



Lösung. Aus der Gleichheit

$$\frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PA_1})} = \frac{\ell(\overline{PB_2})}{\ell(\overline{PB_1})} \quad \text{folgt sofort, dass} \quad \frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PB_2})}.$$

Wir setzen nun $\lambda = \frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PB_2})}$. Dann gilt

$$\ell(\overline{A_1A_2}) = \ell(\overline{PA_2}) - \ell(\overline{PA_1}) = \lambda \cdot \ell(\overline{PB_2}) - \lambda \cdot \ell(\overline{PB_1}) = \lambda(\ell(\overline{PB_2}) - \ell(\overline{PB_1})) = \lambda \cdot \ell(\overline{B_1B_2}).$$

Aufgabe 5. Wir betrachten ein Dreieck Δ_{ABC}. Es sei h_A die Länge der Höhe bei A und es sei a die Länge der A gegenüberliegenden Seite. Ganz analog definieren wir h_B und b. Zeigen Sie, dass

$$\frac{h_B}{h_A} = \frac{a}{b}.$$

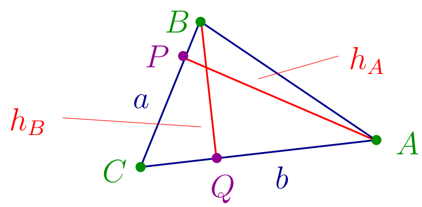


Abbildung 41.

Lösung. Wir betrachten die Dreiecke Δ_{APC} und Δ_{BQC}. Diese stimmen in zwei Winkeln überein (nämlich beim Höhenfußpunkt und beim C), also folgt aus der Winkelsumme, dass sie in allen drei Winkeln übereinstimmen, also sind die Dreiecke nach WWW ähnlich. Also ist das Längenverhältnis der ersten Seiten gerade das Längenverhältnis der dritten Seite, aber das ist gerade die gewünschte Aussage.

Aufgabe 1. Es sei Δ ein Dreieck, so dass zwei Seitenhalbierende gleich lang sind. Zeigen Sie, dass das Dreieck gleichschenklig ist.

Lösung. Nach Satz 7.7 zerteilt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2 : 1. Es folgt also aus der Voraussetzung, dass $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BQ})$, dass $\ell(\overline{AS}) = \ell(\overline{BS})$ und $\ell(\overline{SP}) = \ell(\overline{SQ})$. Aber dies bedeutet nach dem Kongruensatz SWS, dass die Dreiecke Δ_{ASQ} und Δ_{BSP} kongruent sind. Insbesondere ist also $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BP})$. Aber nachdem P und Q die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sind folgt nun, dass $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$.

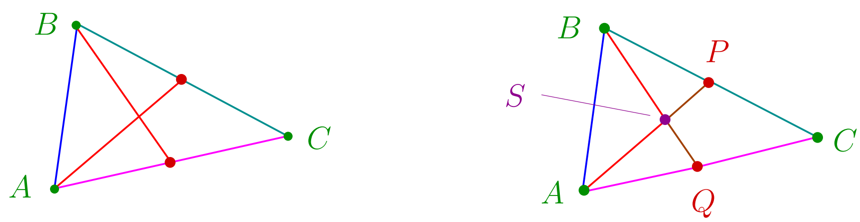


Abbildung 42. Seitenhalbierende sind gleich lang.

Aufgabe 2. Der *Schwerpunkt* einer dünnen ebenen zweidimensionalen Plastikform F ist der eindeutig bestimmte Punkt P, welchen man mit dem Finger so unterstützen kann, dass die Form nicht vom Finger fällt. Beispielsweise ist der Schwerpunkt eines Rechtecks gerade der Schnittpunkt der Diagonalen.

Es sei nun Δ ein Plastikdreieck. Wie kann man den Schwerpunkt bestimmen? Hinweis, der Schwerpunkt ist einer der folgenden vier Punkte:

(1) Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.
(2) Der Schnittpunkt der Höhen.
(3) Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.
(4) Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Lösung. Es ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Aufgabe 3. Es sei $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine Abbildung.

(1) Wenn φ längenerhaltend ist, ist dann φ auch Flächeninhalterhaltend?
(2) Wenn φ flächeninhalterhaltend, ist dann φ auch längenerhaltend?

Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

Lösung.

(1) Ja. Man kann sogar beweisen, dass jede längenerhaltende Abbildung von $\mathbb{E}$ eine Bewegung ist. Aber Bewegungen sind flächeninhalterhaltend.
(2) Nein. Beispielsweise sind Scherungen flächeninhalterhaltend aber nicht längenerhaltend.

Wir erinnern an folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 7.1. *Jedem durch endlich viele Strecken und Kreissegmente begrenzten Gebiet G in der Ebene $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ kann man auf eindeutige Weisen einen Flächeninhalt $\mathcal{A}(G)$ zuordnen, derart dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(1) *Es gilt*
$$\mathcal{A}(\textit{Rechteck mit Seitenlängen } a \textit{ und } b) \;=\; a \cdot b.$$
(2) *Bewegungen sind flächeninhalterhaltend, mit anderen Worten, kongruente Gebiete besitzen den gleichen Flächeninhalt.*
(3) *Der Flächeninhalt von Strecken ist null.*
(4) *Für zwei Gebiete X und Y gilt*
$$\mathcal{A}(X \cup Y) \;=\; \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y) - \mathcal{A}(X \cap Y).$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie: für jedes Dreieck gilt

$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks} = \frac{1}{2} \cdot \text{Seitenlänge} \cdot \text{Länge der zugehörigen Höhe.}$$

Lösung. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden, entweder verläuft die Höhe innerhalb oder außerhalb des Dreiecks. Wir schreiben nun $\mathcal{A}(X)$ für den Flächeninhalt einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass die Höhe innerhalb verläuft. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 \cdot \mathcal{A}(\Delta_{ABC}) &= 2 \cdot (\mathcal{A}(\Delta_{ADC}) + \mathcal{A}(\Delta_{DBC})) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \Delta_{ADC} \text{ kongruent zu } \Delta_{CPA} \text{ und } \Delta_{DBC} \text{ kongruent zu } \Delta_{CQB}}}{=} \mathcal{A}(\Delta_{ADC}) + \mathcal{A}(\Delta_{CPA}) + \mathcal{A}(\Delta_{DBC}) + \mathcal{A}(\Delta_{CQB}) \\ &= \mathcal{A}(\text{Rechteck } ABQP) = \ell(\overline{AB}) \cdot \ell(\overline{AP}) = \text{Seitenlänge} \cdot \text{Höhe.} \end{aligned}$$

Der Beweis ist auch gültig, wenn die Höhe gerade der Seite $\overline{BC}$ entspricht. Betrachten wir nun den Fall, dass die Höhe außerhalb verläuft. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 \cdot \mathcal{A}(\Delta_{ABC}) &= 2 \cdot (\mathcal{A}(\Delta_{AQC}) - \mathcal{A}(\Delta_{BQC})) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \Delta_{ADC} \text{ kongruent zu } \Delta_{CPA} \text{ und da wir den ersten Fall auf } \Delta_{BQC} \text{ anwenden können}}}{=} \mathcal{A}(\Delta_{AQC}) + \mathcal{A}(\Delta_{CPA}) - \ell(\overline{BQ}) \cdot \ell(\overline{QC}) \\ &= \mathcal{A}(\text{Rechteck } AQCP) - \ell(\overline{BQ}) \cdot \ell(\overline{QC}) = \ell(\overline{AQ}) \cdot \ell(\overline{QC}) - \ell(\overline{BQ}) \cdot \ell(\overline{QC}) \\ &= (\ell(\overline{AQ}) - \ell(\overline{BQ})) \cdot \ell(\overline{QC}) = \ell(\overline{AB}) \cdot \ell(\overline{QC}) = \text{Seitenlänge} \cdot \text{Höhe.} \end{aligned}$$

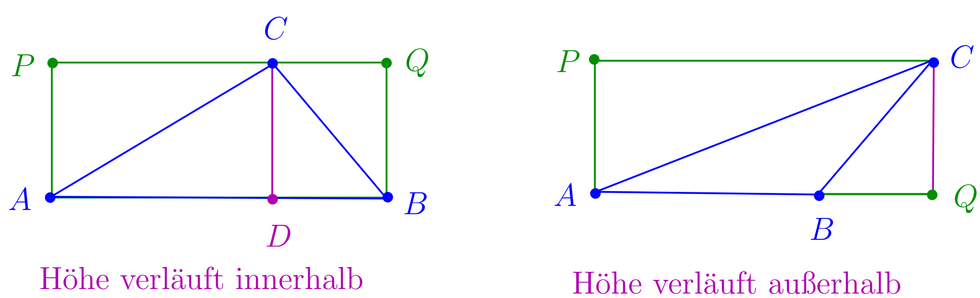


Abbildung 43.

Aufgabe 5. Es sei $\square$ ein Parallelogramm. Zeigen Sie, mit möglichst wenig Aufwand, dass:

$$\text{Flächeninhalt}(\square) = \text{Länge einer Seite} \cdot \text{Abstand zwischen den beiden parallelen Geraden.}$$

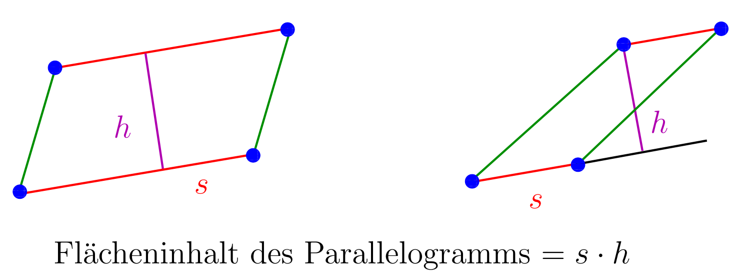


Abbildung 44. Illustration von Satz **??**.

Lösung. Wir ziehen die Diagonale in das Parallelogramm ein und wir erhalten folgende Gleichheiten:

$$\mathcal{A}(\text{Parallelogramm}) = \mathcal{A}(\Delta_{ABC}) + \mathcal{A}(\Delta_{CBD}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aufgabe 4}}}{=} \tfrac{1}{2} \cdot \ell(\overline{AB}) \cdot h + \tfrac{1}{2} \cdot \ell(\overline{CD}) \cdot h \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da gegenüberliegende Seiten gleich lang sind}}}{=} s \cdot h.$$

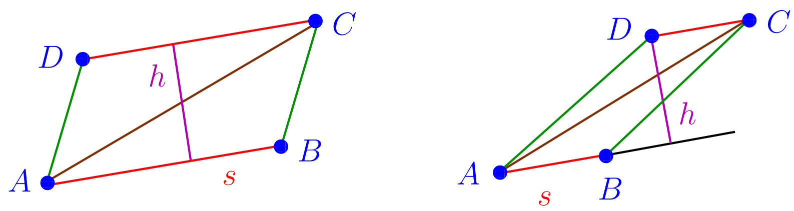


Abbildung 45.

Aufgabe 6. Ein quadratischer und ein kreisförmiger Tisch haben jeweils einen Flächeninhalt von einer Einheit.

(a) Welcher der beiden Tische hat den größeren Umfang? Versuchen Sie die Aufgabe erst einmal ohne Rechnung zu beantworten.
(b) Berechnen Sie nun die beiden Umfänge.

Welche geometrische Form hat das beste Verhältnis von Flächeninhalt zu Umfang?

Lösung. Der Tisch hat Seitenlänge 1, also Umfang $4 \cdot 1 = 4$. Wir berechnen den Radius r der Kreisscheibe mit $\pi \cdot r^2 = 1$, also $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Der Umfang ist nun $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\pi} \cong 3,55$. Es stellt sich raus, dass ganz allgemein die Kreischeibe das beste Verhältnis besitzt. Das ist allerdings etwas kniffelig zu beweisen.

Aufgabe 1. (Höhensatz) Es sei Δ_{ABC} ein rechtwinkliges Dreieck mit einem rechten Winkel bei C. Es sei h die Höhe bei C und es seien p und q die Längen der Hypotenusenabschnitte. Zeigen Sie, dass

$$h^2 = p \cdot q.$$

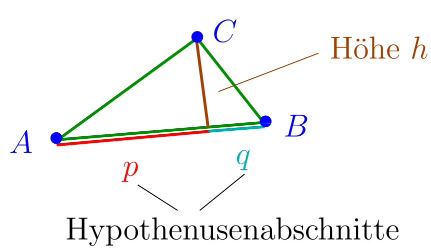


Abbildung 46. Illustration vom Höhensatz.

Lösung. Wir bezeichnen wie üblich die Längen der Seiten des Dreiecks Δ_{ABC} mit a, b und c. Zudem sei P der Fußpunkt der Höhe. Dann gilt

$$p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 = c^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz des Pythagoras}}}{=} a^2 + b^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz des Pythagoras angewandt auf } \Delta_{APC} \text{ und } \Delta_{CPB}}}{=} (p^2 + h^2) + (q^2 + h^2) = p^2 + q^2 + 2h^2.$$

Indem wir auf beiden Seiten p^2+q^2 abziehen erhalten wir $2pq = 2h^2$, also ist $pq = h^2$.

Aufgabe 2. Es sei Δ_{ABC} ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei C. Wir nehmen an, dass $\ell(\overline{BC}) = 2 \cdot \ell(\overline{AB})$. Zeigen Sie, dass $\sphericalangle_{ABC} = \frac{\pi}{6}$.

Lösung. Wenn wir das Dreieck entlang der Seite $\overline{AC}$ verdoppeln erhalten wir ein gleichseitiges Dreieck $\Delta_{ACB'}$, alle Innenwinkel betragen $\frac{\pi}{3}$. Nachdem $\sphericalangle_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle_{BAB'}$ erhalten wir also, dass $\sphericalangle_{ABC} = \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 3. Wir betrachten einen Quader mit Seitenlängen a, b und c. Was ist der Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden Eckpunkten?

Lösung. Zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras zeigt, dass der Abstand $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ beträgt.

Aufgabe 4. Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck Δ_{ABC}. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
Hinweis: Fällen Sie das Lot von P auf die Gerade $g(A, C)$.

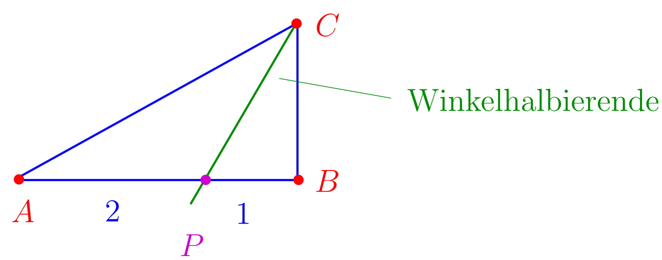


Abbildung 47.

Lösung. Es sei Q der Fußpunkt des Lots von P auf die Gerade $g(A, C)$. Die Dreiecke Δ_{CBP} und Δ_{CQP} sind kongruent nach dem Kongruenzsatz SWS (hierbei verwenden wir die Voraussetzung, dass $\overline{CP}$ die Winkelhalbierende bei C ist.) Also ist $\ell(\overline{QP}) = \ell(\overline{PB}) = 1$. Aus Aufgabe 2 wissen wir nun, dass $\sphericalangle_{QAP} = \frac{\pi}{6}$. Aus der Winkelsumme der Dreiecke folgt nun, dass auch $\sphericalangle_{ACP} = \sphericalangle_{BCP} = \frac{\pi}{6}$. Die Dreiecke Δ_{AQP} und Δ_{CBP} sind nun kongruent nach dem Kongruenzsatz SWS. Insbesondere ist $\ell(\overline{CP}) = \ell(\overline{AP}) = 2$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt nun, dass

$$\ell(\overline{CB}) = \sqrt{\ell(\overline{CP})^2 - \ell(\overline{BP})^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$.

Aufgabe 5. Gibt es rechtwinklige Dreiecke, so dass alle Seitenlängen ganzzahlig sind?

Lösung. Ja, z.B. ist $3^2+4^2=5^2$. Es gibt sogar unendlich viele solche Dreiecke, z.B. für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $2n+1$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist, gilt $(n+1)^2 = n^2+2n+1$, d.h. $(n+1)^2$ ist die Summe von zwei Quadraten von natürlichen Zahlen.

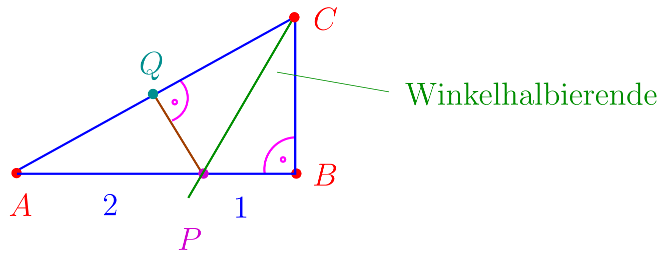


Abbildung 48.