

ANALYSIS II - SOMMERSEMESTER 2015

STEFAN FRIEDL

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	4
1. Metrische Räume	5
1.1. Definition von metrischen Räumen	5
1.2. Normierte Vektorräume	6
1.3. Vektorräume von Abbildungen	7
1.4. Offene und abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen	9
1.5. Der Rand einer Teilmenge eines metrischen Raums (*)	13
1.6. Topologische Räume	15
2. Konvergente Folgen und stetige Abbildungen	18
2.1. Konvergenz von Folgen	18
2.2. Stetige Abbildungen	21
2.3. Stetigkeit von linearen Abbildungen (*)	26
3. Kompakte Mengen	27
3.1. Definition von kompakten Mengen	28
3.2. Der Satz von Heine–Borel	29
3.3. Eigenschaften von kompakten Mengen	34
3.4. Gleichmäßige Stetigkeit von Abbildungen (*)	38
4. Kurven in $\mathbb{R}^n$	38
4.1. Definitionen und Beispiele	38
4.2. Rektifizierbare Kurven	40
4.3. Parametertransformationen (*)	47
5. Partielle Ableitungen	48
6. Differenzierbarkeit	54
6.1. Grenzwerte von Abbildungen	54
6.2. Das Landau–Symbol o	54
6.3. Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen	55
6.4. Norm von Matrizen	61
6.5. Die Kettenregel	63
6.6. Der Gradient	66
6.7. Richtungsableitungen	69
6.8. Gradienten und Niveaulinien	70
7. Die Taylorformel und lokale Extrema	72

7.1.	Die Taylorformel aus der Analysis I	72
7.2.	Die Taylorformel im $\mathbb{R}^n$	73
7.3.	Beweis von Satz 7.3	75
7.4.	Eine alternative Definition der Taylorpolynome (*)	77
7.5.	Das zweite Taylorpolynom und die Hessesche Matrix	79
7.6.	Lokale Extrema I	82
7.7.	Definite Matrizen und Eigenwerte	84
7.8.	Lokale Extrema II	91
7.9.	Globale Extrema	92
8.	Die Norm von Matrizen und Abschätzungen von Integralen	95
9.	Der Satz über die Umkehrfunktion und implizite Funktionen	99
9.1.	Der Banachsche Fixpunktsatz	99
9.2.	Der Satz über die Umkehrabbildung	104
9.3.	Polarkoordinaten als Beispiel für eine lokale Umkehrabbildung	109
9.4.	Umkehrabbildungen von C^k -Abbildungen (*)	110
9.5.	Satz über implizite Funktionen	112
10.	Untermannigfaltigkeiten	117
10.1.	Polarkoordinaten, zylindrische Koordinaten und sphärische Koordinaten	117
10.2.	Immersionen und Einbettungen	121
10.3.	Untermannigfaltigkeiten	125
10.4.	Extrema für Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten	128
11.	Der Satz vom regulären Wert und lokale Extrema mit Nebenbedingungen	131
11.1.	Eine alternative Definition von Untermannigfaltigkeiten	131
11.2.	Der Satz vom regulären Wert	133
11.3.	Tangentialvektoren zu Untermannigfaltigkeiten	139
11.4.	Die Methode der Lagrangemultiplikatoren	146
12.	Differentialgleichungen: Definition und Beispiele	148
12.1.	Definition von Differentialgleichungen	148
12.2.	Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	150
12.3.	Homogene lineare Differentialgleichungen	152
12.4.	Inhomogene lineare Differentialgleichungen	153
13.	Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz	155
13.1.	Lipschitz-stetige Abbildungen	155
13.2.	Der Existenzsatz von Picard-Lindelöf	156
13.3.	Das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren	161
13.4.	Der Eindeutigkeitssatz	162
14.	Differentialgleichungen höherer Ordnung	165
15.	Lineare Differentialgleichungen	169
15.1.	Beweis von Satz 15.1 (*)	170
15.2.	Homogene lineare Differentialgleichungen	173
15.3.	Inhomogene lineare Differentialgleichungen	175
16.	Differentialgleichungen in Abhängigkeit vom Anfangspunkt	178

16.1.	Volumen und Matrizen	180
16.2.	Die Wronski-Determinante	181
16.3.	Der Fluss eines autonomen Differentialgleichungssystems	186
16.4.	Der Fluss eines autonomen Differentialgleichungssystems II (*)	189
17.	Homogene lineare autonome Differentialgleichungen	191
18.	Homogene lineare autonome Differentialgleichungen in Dimension 2	195
18.1.	Reelle 2×2 -Matrizen	195
18.2.	Koordinatentransformationen	198
18.3.	Der reell-diagonalisierbare Fall	199
18.4.	Der komplex-diagonalisierbare Fall	201
18.5.	Der nicht diagonalisierbare Fall	204
19.	Homogene lineare autonome Differentialgleichungen in höheren Dimensionen (*)	206

LITERATUR

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skript.
Das Skript der Vorlesung orientiert sich zumeist an

Forster: Analysis II

Bröcker: Analysis II.

Es kann also hilfreich sein, diese beiden Bücher begleitend zu studieren.

1. METRISCHE RÄUME

In diesem Semester wollen wir uns hauptsächlich mit Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ beschäftigen. Wir beginnen mit dem Studium der Stetigkeit von solchen Abbildungen.

Wir werden die Stetigkeit nicht nur für solche Abbildungen betrachten, sondern etwas allgemeiner für Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Diese Verallgemeinerung wird uns im weiteren Verlauf noch von Nutzen sein.

1.1. Definition von metrischen Räumen.

Definition. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer *Metrik* d auf X , d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \\ (x, y) &\mapsto d(x, y), \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (2) für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie})$$

- (3) für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Wir nennen $d(x, y)$ manchmal den *Abstand von x zu y* .

Beispiel. Wir betrachten zuerst die Menge $X = \mathbb{R}^n$. Wie man leicht nachrechnen kann, ist die *euklidische Metrik*

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

in der Tat eine Metrik. Allerdings kann man auf $X = \mathbb{R}^n$ auch noch viele andere Metriken betrachten. Beispielsweise definiert auch

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

eine Metrik. Diese wird manchmal die *Manhattan-Metrik*¹ genannt. Es gibt aber auch noch ausgefallener Metriken, beispielsweise ist

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \min \left\{ 1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \right\}$$

ebenfalls eine Metrik auf $X = \mathbb{R}^n$.

¹Warum? Wenn Sie zu Fuss von der Ecke ‘25th Street 6th Avenue’ zu ‘59th Street, 3rd Avenue’ gehen wollen, wie messen Sie die Distanz bezüglich der Koordinaten (25, 6) und (59, 3)?

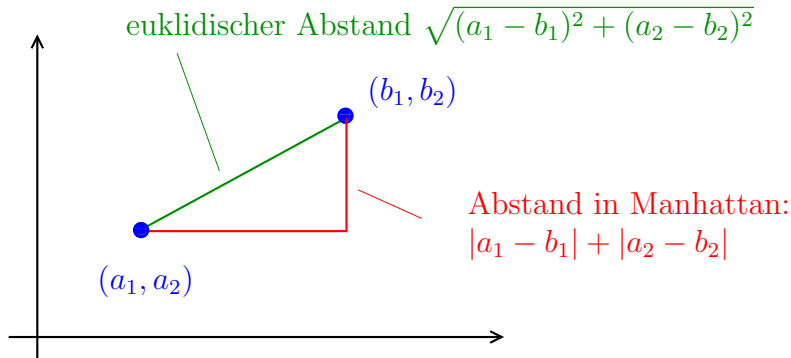


ABBILDUNG 1. Die euklidische Metrik und die Manhattanmetrik auf $\mathbb{R}^2$.

Beispiel. Es sei X eine beliebige Menge, beispielsweise $X = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \mathbb{C}$. Dann kann man leicht überprüfen, dass

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert.

1.2. Normierte Vektorräume. In diesem Kapitel führen wir die normierten Vektorräume ein. Diese werden uns besonders wichtige Beispiele von metrischen Räumen liefern.

Definition. Ein *normierter Vektorraum* ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ und einer *Norm auf V* , d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$ (Homogenität)
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$ (Dreiecksungleichung).

Beispiel. Wir betrachten zuerst den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Auf diesem Vektorraum gibt es insbesondere folgende Normen

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_{\text{eukl}} &= \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} && \text{(Euklidische Norm), und} \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_{\text{max}} &= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} && \text{(Maximumsnorm)} \end{aligned}$$

In Übungsblatt 1 werden Sie folgendes Lemma beweisen.

Lemma 1.1. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$|x_i| \leq \|x\|_{\text{max}} \leq \|x\|_{\text{eukl}} \leq \sqrt{n} \|x\|_{\text{max}}.$$

Beispiel. Wir können auch Normen auf anderen reellen Vektorräumen betrachten. Beispielsweise bildet

$$M(n \times m, \mathbb{R}) = \text{Vektorraum der } m \times n\text{-Matrizen}$$

zusammen mit

$$\|(a_{ij})\| = \max \left\{ |a_{ij}| \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

einen normierten Vektorraum.²

Folgender Satz folgt sofort aus den Definitionen:

Satz 1.2. *Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann ist*

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

eine Metrik auf V .

Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{R}^n$ durchgehend als normierten Vektorraum bezüglich der Euklidischen Norm, außer wir sagen explizit etwas anderes. Insbesondere betrachten wir $\mathbb{R}^n$ als metrischen Raum bezüglich der Euklidischen Metrik. Dies wiederum bedeutet, dass wir $\mathbb{R}^n$ durchgehend mit der Metrik $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$ betrachten.

1.3. Vektorräume von Abbildungen. Es sei X eine Menge, beispielsweise eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$F(X, \mathbb{R}^m) := \text{alle Abbildungen } X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ein Vektorraum,³ denn je zwei Abbildungen⁴ kann man addieren, und jede Abbildung kann man mit einem Skalar multiplizieren. Man kann zudem leicht verifizieren, dass mit diesen Verknüpfungen alle Axiome eines reellen Vektorraums erfüllt sind. Das Nullelement im Vektorraum $F(X, \mathbb{R}^m)$ ist hierbei die Abbildung, welche jedem Punkt $x \in X$ den Nullvektor in $\mathbb{R}^m$ zuordnet.

Beispiel. Wir erinnern an die Definition von linearer Unabhängigkeit in einem Vektorraum. Vektoren $v_1, \dots, v_k$ in einem reellen Vektorraum V heißen *linear unabhängig*, wenn für

²Wenn man sich's recht überlegt, dann sieht man, dass dieser normierte Vektorraum isomorph ist zum normierten Vektorraum $(\mathbb{R}^{nm}, \|\cdot\|_{\max})$.

³Wie schaut's aus mit dem Fall, dass X die leere Menge ist? Um diese Frage zu beantworten hilft es sich genau zu überlegen, was eigentlich eine Abbildung ist. Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ zwischen zwei Mengen ist per Definition eine Teilmenge $D \subset A \times B$, mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, so dass $(a, b) \in D$. (In der naiven Definition einer Abbildung ist also $f(a) \in B$ das eindeutig bestimmte Element mit $(a, f(a)) \in D$.) Wenn $A = \emptyset$, dann ist auch $A \times B = \emptyset$, und die (einzige) Teilmenge $D = \emptyset$ besitzt die obige Eigenschaft. Wir haben also gezeigt, dass für $A = \emptyset$ und einer beliebigen Menge B die Menge der Abbildungen $A \rightarrow B$ aus genau einem Element besteht. Insbesondere ist dies ein Vektorraum.

⁴Genauer gesagt, wenn $\varphi, \psi: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ Abbildungen sind, dann definieren wir $\varphi + \psi$ als die Abbildung, welche für $x \in X$ den Wert $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$ annimmt.

beliebige $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Eine Abbildung ist genau dann null im Vektorraum der Abbildungen, wenn sie an allen Punkten den Wert null annimmt. Es folgt also, dass Abbildungen $f_1, \dots, f_k: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann linear unabhängig sind, wenn gilt:

$$\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_k f_k(x) = 0 \text{ für alle } x \in X \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Dies bedeutet nicht, dass für jedes einzelne x die Vektoren $f_1(x), \dots, f_k(x)$ linear unabhängig sind. Beispielsweise werden wir in Übungsblatt 1 sehen, dass die Funktionen $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 1 + x^2$ und $h(x) = 2 - x$ auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, obwohl für jedes einzelne x die Vektoren $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ linear abhängig sind.

Im folgenden Beispiel sehen wir auch, dass wir manchmal solche Vektorräume von Abbildungen als normierte Vektorräume auffassen können.

Beispiel. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Dann bildet ⁵

$$V = \text{alle beschränkten Funktionen } D \rightarrow \mathbb{R},$$

zusammen mit der *Supremumsnorm*

$$\|f\| = \sup \left\{ |f(x)| \mid x \in D \right\}.$$

einen normierten Vektorraum.⁶

Beispiel. Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, dann bilden

$$C([a, b]) := \text{Menge aller stetigen Funktionen } [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

und die sogenannte *L^2 -Norm*

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

einen normierten Vektorraum. Der Nachweis, dass dies ein normierter Vektorraum ist, ist allerdings nicht ganz trivial. Die Aussage wird beispielsweise in Kapitel 18 von Forster: Analysis I bewiesen.

⁵Eine Abbildung, welche Werte in $\mathbb{R}$ annimmt, wird normalerweise als Funktion bezeichnet.

⁶Wir haben diesen normierten Vektorraum schon am Ende von Analysis I kennengelernt. Es ist offensichtlich, dass $\| - \|$ die ersten beiden Eigenschaften einer Norm erfüllt. Wir müssen noch zeigen, dass $\| - \|$ die Dreiecksungleichung erfüllt. Es seien also $f, g \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup \left\{ |f(x) + g(x)| \mid x \in D \right\} \\ &\leq \sup \left\{ |f(x)| + |g(x)| \mid x \in D \right\} \\ &\leq \sup \left\{ |f(x)| \mid x \in D \right\} + \sup \left\{ |g(x)| \mid x \in D \right\} = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

1.4. Offene und abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (1) Es sei $x \in X$ und $r > 0$, dann heißt

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

die *offene Kugel* um x mit Radius r .

- (2) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $a \in A$ ein $r > 0$ gibt, so dass

$$B_r(a) \subset A.$$

Wir wollen zuerst ausführlich den metrischen Raum $X = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ betrachten. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ gilt dann $B_r(x) = (x - r, x + r)$. Das folgende Lemma besagt, dass die Intervalle, welche wir in Analysis I als ‘offene Intervalle’ bezeichnet hatten, auch offen im obigen Sinne sind.

Lemma 1.3. *Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dann ist das Intervall (a, b) eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass a und b reelle Zahlen sind. Es sei nun $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $r = \min\{x - a, b - x\}$, dass $B_r(x) \subset (a, b)$. Die anderen Fälle des Lemmas werden ganz ähnlich bewiesen. $\square$

Andererseits ist ein Intervall von der Form $[a, b)$ nicht offen, weil es für $x = a$ kein geeignetes $r > 0$ gibt. Ganz analog sind auch Intervalle von der Form $(a, b]$ und $[a, b]$ nicht offen. Die Intervalle, welche offen im obigen Sinne sind, sind also genau die Intervalle, welche wir in Analysis I als offen bezeichnet hatten.

Folgendes Lemma folgt sofort aus den Definitionen.

Lemma 1.4. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist X eine offene Menge und die leere Menge ist ebenfalls eine offene Menge.*

Beweis. Die Teilmenge $A := X$ ist offen, weil für jedes $x \in A = X$ der Radius $r = 1$ die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Die leere Menge besitzt per Definition kein einziges Element, also gibt es bei der Offenheit auch nichts zu überprüfen, d.h. die leere Menge ist offen. $\square$

Wir hatten $B_r(x)$ als ‘offene Kugel’ bezeichnet. Das folgende Lemma besagt, dass dies in der Tat eine korrekte Verwendung vom Adjektiv ‘offen’ ist.

Lemma 1.5. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$. Dann ist $B_r(x) \subset X$ eine offene Teilmenge.*

Beweis. Es sei $y \in B_r(x)$. Wir setzen $s := d(x, y)$. Per Definition von $B_r(x)$ gilt $s < r$. Wir setzen nun $t := r - s$. Nachdem $t > 0$ genügt es folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung.

$$B_t(y) \subset B_r(x).$$

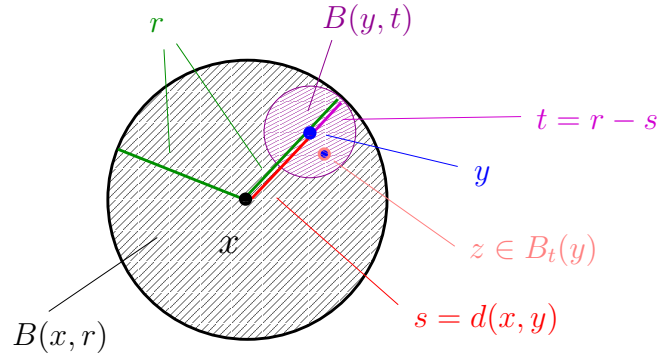


ABBILDUNG 2. Skizze für den Beweis von Lemma 1.5

Es sei also $z \in B_t(y)$. Mithilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < s + t = r.$$

Wir haben also gezeigt, dass wie gewünscht, $z \in B_r(x)$. $\square$

Satz 1.6. *Es sei X ein metrischer Raum.*⁷

- (1) *Wenn $U_1, \dots, U_k$ offene Teilmengen von X sind, dann ist auch die Schnittmenge $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ offen.*
- (2) *Es sei $U_i, i \in I$ eine Familie*⁸ *von offenen Teilmengen, dann ist die Vereinigungsmenge $\cup_{i \in I} U_i$ ebenfalls offen.*

Bemerkung.

- (1) Anders ausgedrückt, der Satz besagt, dass die Schnittmenge von *endlich* vielen offenen Mengen wiederum offen ist, und dass die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen wieder offen ist.
- (2) Die Schnittmenge von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen *nicht* offen. Beispielsweise sind die Mengen $U_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ offen, aber die Schnittmenge $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ besteht nur aus $\{0\}$, aber $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht offen.

Beweis.

- (1) Es sei $x \in U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$. Nach Voraussetzung existiert für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ ein $\epsilon_i > 0$, so dass $B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$. Wir setzen $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$. Dann gilt für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$, dass $B_{\epsilon}(x) \subset B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$. Also folgt, dass

$$B_{\min(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)}(x) \subset U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k.$$

⁷Wenn nichts anderes angegeben ist, dann wird die Metrik immer mit d bezeichnet, d.h. ‘sei X ein metrischer Raum’ ist kurz für ‘sei (X, d) ein metrischer Raum’.

⁸Auf gut Deutsch heißt das Folgendes: I ist eine Menge (z.B. $\{1, \dots, k\}$ oder $\mathbb{N}$, aber I kann auch z.B. überabzählbar sein), und jedem Element $i \in I$ ist eine Menge U_i zugeordnet. Siehe auch:

[http://de.wikipedia.org/wiki/Familie_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Familie_(Mathematik))

- (2) Es sei $x \in \cup_{i \in I} U_i$. Dann existiert insbesondere ein $i \in I$, so dass $x \in U_i$. Nach Voraussetzung existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \subset U_i$. Dann gilt aber auch, dass

$$B_\epsilon(x) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

□

Definition. Es sei X ein metrischer Raum. Wir nennen eine Teilmenge U von X *abgeschlossen*, wenn $X \setminus U$ offen ist.

Beispiele.

- (1) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, dann ist $[a, b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, denn das Komplement

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(b, \infty)}_{\text{offen}}$$

ist die Vereinigung zweier offener Mengen, also nach Satz 1.7 ebenfalls offen. Ganz analog zeigt man auch, dass Intervalle der Form $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ abgeschlossen sind. Andererseits kann man nun auch leicht sehen, dass diese drei Typen von Intervallen die einzigen Intervalle sind, welche abgeschlossen sind. Die Intervalle, welche im obigen Sinne abgeschlossen sind, sind also genau die Intervalle, welche wir in Kapitel 7 von Analysis I als abgeschlossen bezeichnet hatten.

- (2) Es gibt auch Mengen, welche weder offen noch abgeschlossen sind. Beispielsweise ist für reelle Zahlen $a < b$ das halb-offene Intervall $(a, b]$ weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- (3) Es sei X ein metrischer Raum, dann sind nach Lemma 1.4 die ganze Menge X und die leere Menge offen. Ihre Komplemente sind per Definition abgeschlossen, also sind die leere Menge und X auch abgeschlossen.
- (4) Das vorherige Beispiel besagt insbesondere, dass die leere Menge und die ganze Menge X sowohl abgeschlossen als auch offen sind. Man kann nun zeigen, dass bezüglich der üblichen euklidischen Metrik dies auch die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind, welche sowohl offen als auch abgeschlossen sind.⁹
- (5) Es sei X ein metrischer Raum und $x \in X$. In Übungsblatt 1 werden wir sehen, dass $\{x\} \subset X$ abgeschlossen ist.

Das folgende Lemma ist das Analogon von Satz 1.6 für abgeschlossene Teilmengen.

Lemma 1.7. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

- (1) *die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen ist abgeschlossen,*
- (2) *der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Teilmengen ist wiederum abgeschlossen.*

⁹Für $n = 1$ ist dies eine schöne Übungsaufgabe, für $n \geq 2$ ist das auch schön, aber etwas schwieriger.

Im Beweis von Lemma 1.7 werden wir folgende elementare Aussage verwenden: für beliebige Teilmengen A, B von einer Menge M gilt

$$M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$$

und

$$M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B).$$

Dies folgt sofort aus den Definition und elementarer Logik. Man kann dies auch mithilfe von Abbildung 3 verifizieren.

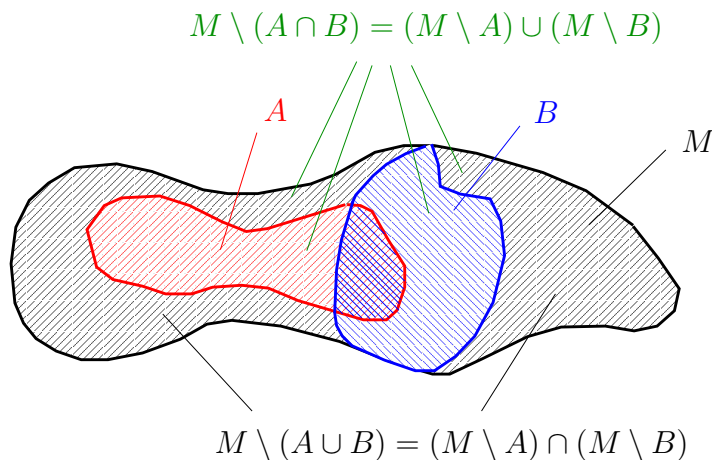


ABBILDUNG 3.

Beweis. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (1) Es seien also $A_1, \dots, A_k \subset X$ abgeschlossene Mengen von (X, d) . Dann gilt, wie wir oben gesehen haben, dass

$$X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k) = \bigcap_{i=1}^k X \setminus A_i,$$

aber nach Voraussetzung sind die Mengen $X \setminus A_i$ offen, und nach Satz 1.6 (2) ist die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen wieder offen.

- (2) Der Beweis der zweiten Aussage des Lemmas verläuft nach dem gleichen Schema wie der Beweis der ersten Aussage. Es sei also $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von X . Dann gilt

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i),$$

aber dies ist nach Satz 1.6 (1) eine offene Menge.

□

Bemerkung. Die Vereinigung von unendlich vielen abgeschlossenen Teilmengen ist nicht notwendigerweise abgeschlossen. Ein Beispiel dafür ist gegeben durch

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\text{abgeschlossen}} = \underbrace{(-1, 1)}_{\text{offen}}$$

oder alternativ durch

$$\bigcup_{x \in (-1, 1)} \underbrace{\{x\}}_{\text{abgeschlossen}} = \underbrace{(-1, 1)}_{\text{offen}}$$

Für die Formulierung vom letzten Satz des Kapitels benötigen wir noch folgende Definition.

Definition. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Eine *Umgebung von x* ist eine Teilmenge von X , wenn es eine offene Teilmenge V^{10} von X gibt, mit der Eigenschaft, dass $x \in V$ und $V \subset U$.

Beispiel.

- (1) Wenn U eine offene Teilmenge von X ist, welche x enthält, dann folgt sofort aus den Definitionen, dass U eine Umgebung von x ist. Nachdem U offen und eine Umgebung von x ist, nennen wir U manchmal auch eine *offene Umgebung von x* .
- (2) Es sei $x = 1 \in \mathbb{R}$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$, dass Intervall $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ eine offene Umgebung von 1. Weitere Beispiele von Umgebungen von $1 \in \mathbb{R}$ sind gegeben durch $[0, 2)$, $(-\infty, 3]$ und $\mathbb{R}$.

Satz 1.8. (Hausdorffsches Trennungsaxiom) *Es sei X ein metrischer Raum und es seien $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Dann existieren offene Umgebungen U von x und V von y , welche disjunkt sind, d.h. $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis. Es sei X ein metrischer Raum und es seien $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Wir setzen $\epsilon := \frac{1}{2}d(x, y)$. Dann folgt aus Lemma 1.5, dass $U := B_\epsilon(x)$ und $V := B_\epsilon(y)$ Umgebungen von x bzw. y . Wir müssen nun noch zeigen, dass diese disjunkt sind.

Nehmen wir an, es gibt einen Punkt $z \in U \cap V$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$2\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Zusammengefasst folgt, dass $2\epsilon < 2\epsilon$. Wir erhalten also einen Widerspruch. $\square$

1.5. Der Rand einer Teilmenge eines metrischen Raums (*). Dieses Kapitel ist nicht offizieller Teil der Vorlesung.

Definition. Es sei Y eine Teilmenge eines metrischen Raumes X . Wir sagen $x \in X$ ist *Randpunkt von Y* , falls jede Umgebung von x sowohl einen Punkt von Y als auch einen Punkt von $X \setminus Y$ enthält. Die Menge aller Randpunkte von Y heißt der *Rand* von Y und wird mit ∂Y bezeichnet.

¹⁰Beispielsweise eine offene Kugel $B_r(x)$ mit $r > 0$.

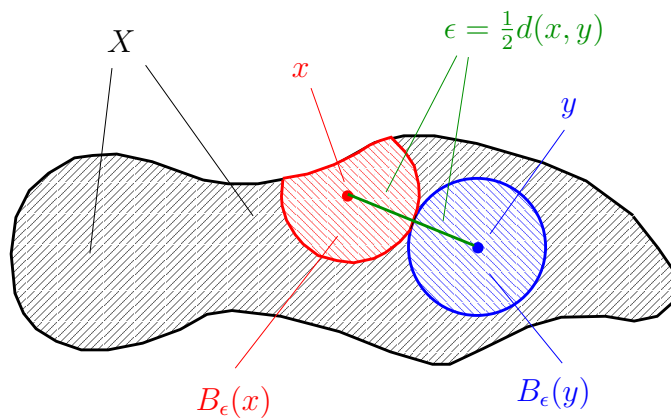


ABBILDUNG 4. Skizze zum Beweis von Satz 1.8.

Bemerkung. Wie in der Bemerkung vor Lemma 1.5 kann man Folgendes zeigen: Ein Punkt $x \in X$ ist ein Randpunkt von Y , genau dann, wenn jede Kugel $B_r(x)$ um x sowohl einen Punkt von Y als auch einen Punkt von $X \setminus Y$ enthält.

Beispiel.

- (1) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Randpunkte der Intervalle

$$(a, b), (a, b] \text{ und } [a, b) \subset \mathbb{R}$$

sind a und b .¹¹

- (2) Der Rand der n -dimensionalen Kugel

$$D^n := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1 \right\},$$

ist die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre

$$S^{n-1} := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1 \right\}.$$

Satz 1.9. Es sei X ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann gilt:

- (1) $Y \setminus \partial Y$ ist offen,
- (2) $Y \cup \partial Y$ ist abgeschlossen,
- (3) ∂Y ist abgeschlossen.

Beweis. Es sei X ein metrischer Raum und $Y \subset X$.

- (1) Es sei also $y \in Y \setminus \partial Y$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(y) \subset Y \setminus \partial Y$.

¹¹In der Tat, jedes Intervall $(a-r, a+r)$ enthält einen Punkt von (a, b) und einen Punkt außerhalb von (a, b) , also ist a ein Randpunkt von (a, b) . Genauso zeigt man, dass b ein Randpunkt von (a, b) . Wenn $x \in (a, b)$, dann gibt es ein $r > 0$, so dass $(x-r, x+r) \subset (a, b)$, also ist $x \in (a, b)$ kein Randpunkt von (a, b) , und genauso zeigt man, dass ein Punkt $x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ kein Randpunkt von (a, b) ist.

Nachdem jede Umgebung von y insbesondere y enthält, und nachdem $y \notin \partial Y$ existiert eine Umgebung U von y , welche keinen Punkt von $X \setminus Y$ enthält. Per Definition von Umgebung gibt es nun ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(y) \subset U \subset Y$.

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass $B_\epsilon(y) \cap \partial Y = \emptyset$. Sei $z \in B_\epsilon(y)$. Nach Lemma 1.5 ist $B_\epsilon(y)$ eine offene Teilmenge, insbesondere ist $B_\epsilon(y)$ eine offene Umgebung von z . Aber die Umgebung $B_\epsilon(y)$ von z enthält keinen Punkt von $X \setminus Y$, also kann z kein Randpunkt sein.

- (2) Wir setzen $Y' := X \setminus Y$. Aus der Definition folgt sofort, dass $\partial Y = \partial Y'$. Es folgt, dass

$$Y \cup \partial Y = (X \setminus Y') \cup \partial Y' = X \setminus \underbrace{(Y' \setminus \partial Y')}_{\text{offen nach (a)}}$$

abgeschlossen ist.

- (3) Wir setzen $Y' := X \setminus Y$. Aus (a) folgt, dass

$$X \setminus \partial Y = (Y \cup Y') \setminus \partial Y = (Y \setminus \partial Y) \cup (Y' \setminus \partial Y')$$

offen ist, insbesondere ist $\partial Y \subset X$ abgeschlossen. □

1.6. Topologische Räume. Wir betrachten jetzt die sogenannten topologischen Räume. Diese kann man als eine Verallgemeinerung des Begriffes des metrischen Raumes auffassen. Topologische Räume werden in dieser Vorlesung eine eher untergeordnete Rolle spielen, aber für die meisten höheren Vorlesungen in der reinen Mathematik (z.B. Funktionalanalysis, Topologie, algebraische Geometrie, Zahlentheorie) ist dies ein sehr wichtiger Begriff.

Definition. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$, wobei X eine Menge ist und $\mathcal{T}$ eine *Topologie auf X* , d.h. $\mathcal{T}$ ist eine Menge von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- (1) die leere Menge und die ganze Menge X sind in $\mathcal{T}$ enthalten,
- (2) der Durchschnitt von *endlich vielen* Mengen in $\mathcal{T}$ ist wiederum eine Menge in $\mathcal{T}$,
- (3) die Vereinigung von *beliebig vielen* Mengen in $\mathcal{T}$ ist wiederum eine Menge in $\mathcal{T}$.

Beispiel.

- (A) Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann folgt aus Lemma 1.4 und Satz 1.6, dass

$$\mathcal{T} := \text{alle offenen Teilmengen von } (X, d)$$

eine Topologie auf X ist.

- (B) Sei X eine Menge, dann ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X . Diese Topologie wird manchmal die *triviale Topologie auf X* genannt.
- (C) Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ die Menge aller Untermengen von X . Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X . Die Topologie wird oft auch als die *diskrete Topologie auf X* bezeichnet.
- (D) Sei $X = \mathbb{R}$ und es sei $\mathcal{T}$ wie folgt definiert:

$$U \in \mathcal{T} \iff \begin{array}{l} \text{entweder ist } U = \emptyset, \text{ oder} \\ U \text{ ist das Komplement von endlich vielen Punkten in } \mathbb{R}. \end{array}$$

Beispielsweise liegen $\emptyset, \mathbb{R} \setminus \{\pi\}, \mathbb{R} \setminus \{-1, \sqrt{2}\}$ aber auch $\mathbb{R}$ (als Komplement von null Punkten) in $\mathcal{T}$. Es folgt nun leicht aus den ‘Rechenregeln’ für die Mengenlehre nach Lemma 1.7, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $X = \mathbb{R}$ ist.¹²

Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- (1) Die Mengen in $\mathcal{T}$ werden *offen* genannt.
- (2) Eine Teilmenge U von X heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus U$ offen ist.
- (3) Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von x* , falls es eine offene Menge V gibt, so dass $x \in V \subset U$. Wir sagen U ist eine *offene Umgebung von x* , wenn U zudem offen ist.

Definition. Ein topologischer Raum heißt *Hausdorff*, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ disjunkte offene Umgebungen U von x und V von y gibt.

Beispiel. Wir überprüfen, ob die obigen Beispiele Hausdorff sind:

- (A) Es folgt aus Satz 1.8, dass der einem metrischen Raum zugeordnete topologische Raum Hausdorff ist.
- (B) Wenn X mindestens zwei Elemente hat, dann ist $(X, \mathcal{T})$ nicht Hausdorff.
- (C) Diese Topologie ist Hausdorff, denn, für gegebene $x \neq y$ können wir $U = \{x\}$ und $V = \{y\}$ wählen.
- (D) Diese Topologie ist nicht Hausdorff, denn die Schnittmenge von zwei nichtleeren offenen Mengen in $(X, \mathcal{T})$ ist nichtleer, es gibt also keine disjunkten nichtleeren offene Teilmengen in $(X, \mathcal{T})$.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma.

Lemma 1.10. *Eine Menge in $\mathbb{R}^n$ ist offen bezüglich der euklidischen Norm, genau dann, wenn sie offen ist bezüglich der Maximumsnorm.*

Anders ausgedrückt, die euklidische Norm und die Maximumsnorm definieren die gleiche Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Es gilt sogar eine stärkere Aussage: alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ definieren die gleiche Topologie. Nachdem wir diese Aussage nicht benötigen werden wir diese auch nicht beweisen.¹³

¹²Dieses Beispiel von einem topologischen Raum ähnelt etwas der Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$, siehe

<http://de.wikipedia.org/wiki/Zariski-Topologie>

¹³Diese Aussage gilt ganz allgemeiner für Normen auf endlich dimensionalen Vektorräumen (nachdem diese alle isomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ sind), aber die Aussage ist falsch für Normen auf unendlich dimensional Vektorräumen.

Beweis. Zur Erinnerung, für $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{eukl} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad (\text{euklidische Norm})$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{max} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad (\text{Maximumsnorm}).$$

Zudem bezeichnen wir für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ mit

$$B_\epsilon^{eukl}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\|_{eukl} < \epsilon \right\}$$

den euklidischen ϵ -Ball um x und wir betrachten außerdem

$$B_\epsilon^{max}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\|_{max} < \epsilon \right\}.$$

Es folgt sofort aus der Definition von offenen Mengen in normierten Vektorräumen, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.¹⁴

Behauptung. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\epsilon' > 0$, so dass $B_{\epsilon'}^{max}(x) \subset B_\epsilon^{eukl}(x)$, und
- (2) für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\epsilon' > 0$, so dass $B_{\epsilon'}^{eukl}(x) \subset B_\epsilon^{max}(x)$.

In Übungsblatt 1 werden Sie diese Behauptung beweisen. Genauer gesagt, Sie werden mithilfe von Lemma 1.1 zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ gilt, dass

$$B_{\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon}^{eukl}(x) \subset B_{\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon}^{max}(x) \subset B_\epsilon^{eukl}(x).$$

Die Aussage wird für $n = 2$ in Abbildung 5 skizziert. □

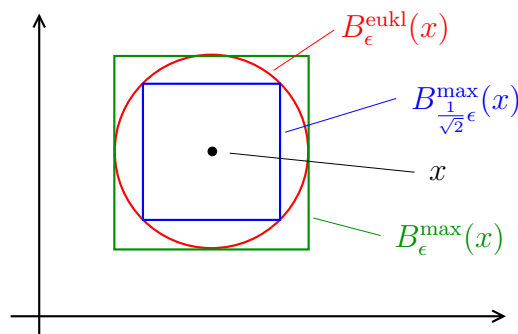


ABBILDUNG 5. Skizze zum Beweis von Lemma 1.10

¹⁴In der Tat, nehmen wir an wir haben diese Behauptung bewiesen. Es sei U eine Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, welche offen ist bezüglich der euklidischen Norm. Wir müssen zeigen, dass U auch offen ist bezüglich der Maximumsnorm. Sei also $x \in U$. Nach Voraussetzung existiert also ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon^{eukl}(x) \subset U$. Die Behauptung besagt dann, dass es ein $\epsilon' > 0$ gibt, so dass $B_{\epsilon'}^{max}(x) \subset B_\epsilon^{eukl}(x)$. Insbesondere ist also $B_{\epsilon'}^{max}(x) \subset U$ enthalten. Wir haben also gezeigt, dass U offen ist bezüglich der Maximumsnorm.

2. KONVERGENTE FOLGEN UND STETIGE ABBILDUNGEN

2.1. Konvergenz von Folgen.

Definition. Es sei X ein metrischer Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X . Wir sagen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gegen den Grenzpunkt* $x \in X$, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad d(x_k, x) < \epsilon.$$

Wie üblich schreiben wir in diesem Fall $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

Die Definition ist wort-wörtlich die gleiche wie die Konvergenz von reellen Folgen, der einzige Unterschied ist, dass wir den Absolutbetrag $|x_k - x|$ durch den Abstand $d(x_k, x)$ ersetzt haben. Nachdem der Abstand die gleichen Eigenschaften wie der Absolutbetrag erfüllt erhalten wir die gleichen Aussagen. Beispielsweise beweist man wort-wörtlich wie im Beweis von Satz 3.1 in Analysis I, dass der Grenzpunkt, wenn er existiert, eindeutig ist.

Der Beweis des folgenden Lemmas ist eine Übungsaufgabe im 1. Übungsblatt.

Lemma 2.1. *Es sei X ein metrischer Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X . Dann gilt für $x \in X$, dass*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{\substack{\text{Umgebungen} \\ U \text{ von } x}} \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad x_k \in U.$$

Bemerkung.

- (1) Das Lemma besagt unter anderem, dass es bei der Konvergenz von Folgen nicht auf die Metrik ankommt, sondern auf die offenen Mengen. Beispielsweise hatten wir gesehen, dass auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ die euklidische Norm und die Maximumsnorm die gleichen offenen Mengen definieren. Es folgt also aus Lemma 2.1, dass eine Folge von Punkten in $\mathbb{R}^n$ genau dann bezüglich der euklidischen Norm konvergiert, wenn sie bezüglich der Maximumsnorm konvergiert.
- (2) Die Formulierung für Konvergenz, welche in Lemma 2.1 gegeben ist, hat zudem den Vorteil, dass sie auch Sinn für topologische Räume macht.¹⁵

Folgendes Lemma wird im 2. Übungsblatt bewiesen.

Lemma 2.2. *Es sei X ein metrischer Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge. Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in A . Wenn die Folge in X konvergiert, dann liegt der Grenzwert ebenfalls in A .*

Beispiel. Es sei $X = \mathbb{R}$ und $A = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Lemma 2.2 besagt, dass wenn (x_k) eine Folge von Zahlen in $[a, b]$ ist, welche in $\mathbb{R}$ konvergiert, dann liegt auch der Grenzwert in $[a, b]$. Diese Aussage folgt beispielsweise auch aus Satz 3.4 in der Analysis I.

In dieser Vorlesung werden wir durchgehend folgende Konvention verwenden.

¹⁵Aber gilt dann bei topologischen Räumen noch die Eindeutigkeit vom Grenzpunkt?

Konvention. Wenn x ein Punkt in $\mathbb{R}^n$ ist, dann bezeichnen wir für $i \in \{1, \dots, n\}$ mit x_i die i -te Koordinate von x . Insbesondere ist also $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Satz 2.3. Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in $\mathbb{R}^n$ und es sei $y \in \mathbb{R}^n$.¹⁶ Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n.$$

Bemerkung.

- (1) Dieser Satz erlaubt es uns die Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$ auf das Studium der Konvergenz von Folgen von reellen Zahlen zurückzuführen. Insbesondere können wir die Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$ mithilfe der Methoden aus der Analysis I studieren.
- (2) Der Satz ist ganz ähnlich dem Satz 9.6 aus der Analysis I, dieser besagt, dass eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen konvergiert, genau dann, wenn die Realteile und Imaginärteile von den Folgengliedern konvergieren. Der Beweis von Satz 2.3 ist dementsprechend fast der gleiche wie der Beweis von Satz 9.6 in der Analysis I.

Beweis. Wir erinnern zuerst daran, dass wir in Lemma 1.1 gezeigt hatten, dass für einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$(2.1) \quad |x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Der Satz folgt nun leicht aus diesen beiden Ungleichungen und aus Standard-Argumenten. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument noch ausführlich aus. Nehmen wir zuerst an, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$. Es gilt also:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad \|x_k - y\| < \epsilon.$$

Es sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir müssen zeigen:

$$\forall \eta > 0 \quad \exists L \in \mathbb{N} \quad \forall l \geq L \quad |x_{li} - y_i| < \eta.$$

Sei also $\eta > 0$. Wenn wir $\epsilon = \eta$ setzen, erhalten wir ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ gilt, $\|x_k - y\| < \epsilon$. Dann folgt aber aus (2.1), dass für alle $l \geq L := K$ gilt

$$|x_{li} - y_i| \leq \|x_l - y\| < \epsilon = \eta.$$

Nehmen wir nun an, dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$, d.h. wir wollen zeigen, dass

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad \|x_k - y\| < \epsilon.$$

Sei also $\epsilon > 0$. Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$. Nachdem $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i$ existiert insbesondere ein $L_i \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq L_i$ gilt: $|x_{ki} - y_i| < \eta = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. Wenn wir nun $K := \max\{L_1, \dots, L_n\}$

¹⁶Wie oben erwähnt, wenn nichts anderes angegeben ist, dann betrachten wir $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm.

setzen, dann gilt für alle $k \geq K$, dass

$$\|x_k - y\| \leq \sqrt{n} \max \left\{ \underbrace{|x_{k1} - y_1|}_{< \eta = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}}, \dots, \underbrace{|x_{kn} - y_n|}_{< \eta = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}} \right\} < \epsilon.$$

□

Definition. Es sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k, l \geq K \quad d(x_k, x_l) < \epsilon.$$

Auch diese Definition ist fast wort-wörtlich die gleiche wie die Definition einer Cauchy-Folge von reellen Folgen. Genau wie in Analysis I, Satz 4.1, kann man zeigen, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist.

Definition. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Beispiel.

- (1) Aus Analysis I wissen wir, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist.
- (2) In Satz 9.8 aus der Analysis I hatten wir schon gesehen, dass der reelle Vektorraum $\mathbb{C}$ mit $d(w, z) = |z - w|$ vollständig ist.
- (3) Es folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^n$ und aus Satz 2.3, dass $\mathbb{R}^n$ ebenfalls vollständig ist.¹⁷
- (4) Die Menge $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, ist nicht vollständig, denn $x_k = \frac{1}{k}$ ist eine Cauchyfolge, welche in X nicht konvergiert.
- (5) Die Menge $X = \mathbb{Q}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ist ebenfalls nicht vollständig, nachdem es beispielsweise eine Folge von rationalen Zahlen gibt, welche gegen die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ konvergiert.
- (6) Wir betrachten den Vektorraum

$$C([-1, 1]) = \{\text{alle stetigen Funktionen } [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}\},$$

Auf dieser Menge betrachten wir die Metriken d und e , welche definiert sind durch¹⁸

$$d(f, g) = \max \left\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in [-1, 1] \right\}$$

beziehungsweise

$$e(f, g) = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Satz 16.3 aus der Analysis I besagt, dass die Menge $C([-1, 1])$ zusammen mit der Metrik d vollständig ist.

¹⁷Genauer gesagt: Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$, dann kann man ähnlich wie in Satz 2.3 zeigen, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Folge von reellen Zahlen $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Nachdem $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $y_i \in \mathbb{R}$, so dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = y_i$. Dann folgt aber aus Satz 2.3, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (y_1, \dots, y_n)$.

¹⁸Diese Definition macht Sinn, denn die stetige Funktion $|f(x) - g(x)|$ nimmt ein Maximum an.

Wir werden im Folgenden sehen, dass hingegen die Menge $C([-1, 1])$ zusammen mit der Metrik e nicht vollständig ist. Wir betrachten dazu die Folge von Funktionen

$$f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in [-1, 0), \\ nx, & \text{wenn } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 1, & \text{wenn } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Die Graphen der Funktionen f_n mit $n = 1, 2, 3$ werden in Abbildung 6 skizziert. Dann gilt für $n \geq m$, dass¹⁹

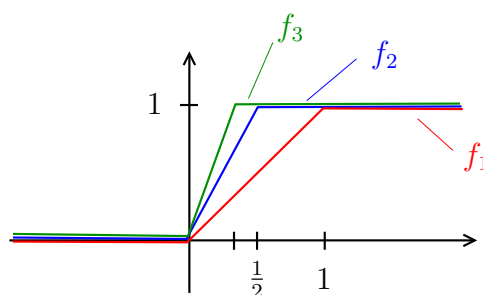


ABBILDUNG 6.

$$e(f_n, f_m) = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \frac{1}{m}.$$

Es folgt, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Metrik e ist.²⁰

Andererseits konvergiert die Folge nicht in dem metrischen Raum $(C([-1, 1]), d)$. In der Tat, wenn es einen Grenzpunkt f der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(C([-1, 1]), d)$ gäbe, dann müsste gelten $f(x) = 0$ für $x \in [-1, 0)$ und $f(x) = 1$ für $x \in (0, 1]$. Aber es gibt keine stetige Funktion auf $[-1, 1]$ mit solchen Eigenschaften.

2.2. Stetige Abbildungen. Die folgende Definition der Stetigkeit von Abbildungen zwischen zwei metrischen Räumen ist wort-wörtlich die gleiche wie für die Stetigkeit einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

¹⁹Diese Ungleichung beweist man wie folgt: die Funktionen f_n und f_m besitzen die gleichen Werte außerhalb vom Intervall $[0, \frac{1}{m}]$ haben, und auf dem Intervall $[0, \frac{1}{m}]$ gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$. Also gilt

$$d(f_n, f_m) = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{m}} \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\leq 1} dx \leq \frac{1}{m}.$$

²⁰Andererseits ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge bezüglich der Metrik d . Warum?

Definition. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Für $x_0 \in X$ definieren wir

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x \in B_\delta(x_0)} \quad d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Wir sagen f ist *stetig*, wenn f in jedem Punkt stetig ist.

Beispiele.

- (1) Für Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist dies genau der gleiche Stetigkeitsbegriff wie in der Analysis I.
- (2) Wie in Analysis I, Lemma 6.1 zeigt man, dass die Identitätsabbildung $f(x) = x$ auf einem metrischen Raum stetig ist. Zudem ist auch jede konstante Abbildung zwischen metrischen Räumen stetig.
- (3) In Übungsblatt 2 werden wir zeigen, dass für jedes j die Projektion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto v_j \end{aligned}$$

von $\mathbb{R}^n$ auf die j -te Koordinate stetig ist.

- (4) Es sei X eine Menge und d die Metrik

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Es sei (Y, e) ein weiterer metrischer Raum, dann ist jede Abbildung $X \rightarrow Y$ stetig. In der Tat, für jedes $\epsilon > 0$ hat $\delta = \frac{1}{2}$ die gewünschte Eigenschaft.

Der Beweis von Satz 6.3 aus der Analysis I überträgt sich auch wort-wörtlich und liefert uns folgendes Lemma.

Lemma 2.4. *Es sei X ein metrischer Raum und es seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen²¹, zudem sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen*

$$\begin{aligned} f + g: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x) \\ f \cdot g: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

stetig. Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann ist auch die Funktion

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

stetig.

²¹Wir verwenden normalerweise das Wort ‘Funktion’ für Abbildungen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$.

Das folgende Lemma wird ganz analog zu Satz 2.3 bewiesen.

Lemma 2.5. *Es sei X ein metrischer Raum und es sei*

$$\begin{aligned} f = (f_1, \dots, f_n): X &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

eine Abbildung. Dann gilt:

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig $\iff$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die Funktion $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Lemma 2.6. *Es sei A eine reelle $m \times n$ -Matrix. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

stetig.

Beweis. Sei also $A = (a_{ij})$ eine reelle $m \times n$ -Matrix. Aus Lemma 2.5 folgt, dass es genügt zu zeigen, dass für jedes i die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n, \end{aligned}$$

stetig ist. Auf Seite 22 hatten wir schon erwähnt, dass für jedes j die Projektion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto v_j \end{aligned}$$

stetig ist. Es folgt nun aus Lemma 2.4, dass die Funktionen

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n$$

wie gewünscht stetig sind. □

Der nächste Satz besagt, dass wir bei stetigen Abbildungen ‘die Abbildung und den Grenzwert vertauschen können’. Der Satz wird genau wie Satz 6.8 in Analysis I bewiesen.

Satz 2.7. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Dann gilt für jede konvergente Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X , dass*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right).$$

Der folgende Satz gibt drei verschiedene äquivalente Definitionen von Stetigkeit. Der Beweis des Satzes ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 2.

Satz 2.8. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) f ist stetig,
- (2) für jede offene Menge U in Y ist auch das Urbild $f^{-1}(U)$ offen,
- (3) für jede abgeschlossene Menge A in Y ist auch das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Bemerkung.

- (1) Der Satz besagt also, dass es bei der Stetigkeit nur auf die offenen Mengen ankommt. Insbesondere folgt aus dem Satz und aus Lemma 1.10, dass bei einer Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ der Begriff der Stetigkeit nicht davon abhängt, ob wir mit der euklidischen Norm oder der Maximumsnorm arbeiten.
- (2) Die Definition der Stetigkeit über die offenen Mengen macht auch Sinn für Abbildungen zwischen beliebigen topologischen Räumen.

Satz 2.9. *Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f: X \rightarrow Z$ ebenfalls stetig.*

Beweis. Aus Satz 2.8 folgt, dass es genügt zu zeigen, dass für jede offene Teilmenge $U \subset Z$ auch das Urbild $(g \circ f)^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Es sei also $U \subset Z$ offen. Dann gilt ²²

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Aber $g^{-1}(U) \subset Y$ ist offen, weil g stetig und U offen. Dann ist aber auch $f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen, weil f stetig und $g^{-1}(U)$ offen ist. $\square$

Man kann den Satz auch genau wie in Analysis I, Satz 6.7 zeigen, man muss nur in dem Beweis von Satz 6.7 die Absolutbeträge durch die Metriken auf X, Y und Z ersetzen. Allerdings ist der obige Beweis von Satz 2.9 deutlich einfacher als der ursprüngliche Beweis in Analysis I. Dies ist ein Beispiel dafür, dass die Formulierung der Stetigkeit über offene Mengen viele Beweise vereinfacht.

Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{aligned} M(n, \mathbb{R}) &= \text{alle reellen } n \times n\text{-Matrizen,} \\ GL(n, \mathbb{R}) &= \text{alle invertierbaren } n \times n\text{-Matrizen.} \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \det: M(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

ist stetig. ^{23 24} Nachdem die Funktion $\det$ stetig ist, und nachdem $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ offen ist, folgt aus Satz 2.8, dass

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

²²Hierbei verwenden wir folgende ganz allgemeine Aussage, wenn $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen zwischen Mengen sind, dann gilt ganz allgemein für $S \subset Z$, dass

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Diese Aussage folgt sofort aus der Definition von Verknüpfung von Abbildungen und der Definition vom Urbild einer Teilmenge.

²³Wir betrachten dabei $M(n, \mathbb{R})$ als metrischen Raum mit $\|(a_{ij})\| = \max\{|a_{ij}| \mid i, j \in \{1, \dots, n\}\}$.

²⁴Dies folgt aus Lemma 2.4 und aus der Leibniz-Formel, welche insbesondere besagt, dass die Determinante ein Polynom in den Einträgen der Matrix ist.

eine offene Teilmenge von $M(n, \mathbb{R})$ ist.²⁵

Definition. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Wir sagen f ist ein *Homöomorphismus*, wenn gilt:

- (1) f ist stetig,
- (2) f ist bijektiv,
- (3) die Umkehrabbildung f^{-1} ist stetig.

Wenn es einen solchen Homöomorphismus zwischen X und Y gibt, dann sagen wir, dass X und Y *homöomorph* sind.

Beispiel.

- (1) Die metrischen Räume $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$ sind homöomorph. In der Tat, die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow (-1, 1) \\ x &\mapsto \frac{2}{\pi} \arctan(x) \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, und die Umkehrabbildung $x \mapsto \tan(\frac{\pi}{2}x)$ ist ebenfalls stetig.

- (2) Auf Seite 96 in Analysis I hatten wir schon gesehen, dass es stetige, bijektive Abbildungen gibt, deren Umkehrfunktion nicht stetig ist. Wir geben hier noch ein weiteres Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: X := [0, 2\pi) &\rightarrow Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, aber die Umkehrabbildung f^{-1} ist im Punkt $(1, 0)$ nicht stetig.^{26 27}

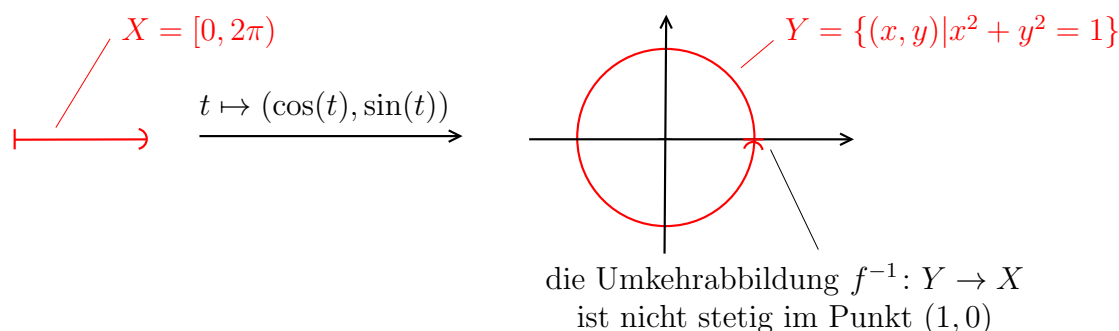


ABBILDUNG 7. Eine stetige, bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung nicht stetig ist.

²⁵Das besagt beispielsweise Folgendes: wenn A eine invertierbare $n \times n$ -Matrix ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass jede $n \times n$ -Matrix B , deren Einträge von A um höchstens ϵ abweichen, ebenfalls invertierbar ist.

²⁶Wir betrachten dazu die Folge $x_n = f(2\pi - \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ von Punkten in Y . Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1, 0)$. Es folgt, dass $f^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f^{-1}(1, 0) = 0$. Andererseits ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi - \frac{1}{n}) = 2\pi$. Es folgt also aus Satz 2.7, dass die Umkehrabbildung f^{-1} nicht stetig ist.

Bemerkung. Die obige Abbildung

$$X := [0, 2\pi) \xrightarrow{f} Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

ist also kein Homöomorphismus. In der Tat kann man zeigen, dass es keinen Homöomorphismus zwischen diesen beiden metrischen Räumen geben kann.²⁸ Im Allgemeinen ist es jedoch eine schwierige Aufgabe zu zeigen, dass gewisse Räume nicht homöomorph sind. Beispielsweise gibt es für jedes n eine stetige surjektive Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, siehe

http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve

Aber man benötigt die Methoden der ‘algebraischen Topologie’ um zu zeigen, dass für $n \neq m$ die metrischen Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph sind.

2.3. Stetigkeit von linearen Abbildungen (*). In Lemma 2.6 hatten wir gesehen, dass alle linearen Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig sind. Im Anschluß an Lemma 1.10 hatten wir erwähnt, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ die gleiche Topologie erzeugen. Es folgt, dass jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen ebenfalls stetig ist. Wir werden nun sehen, dass lineare Abbildungen zwischen unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen nicht notwendigerweise stetig sind.

Satz 2.10. *Es sei $\phi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) ϕ ist stetig,
- (2) ϕ ist stetig im Nullpunkt,
- (3) es existiert ein $C \geq 0$, so dass $\|\phi(x)\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in V$.

Beweis.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Die Aussage ist trivialerweise richtig.
- (2) $\Rightarrow$ (3) Nehmen wir an ϕ ist stetig im Nullpunkt. Wir werden die Stetigkeit auf $\epsilon = 1$ an und erhalten ein $\delta > 0$, so dass

$$(*) \quad \|\phi(z)\| < 1 \text{ für alle } z \in V \text{ mit } \|z\| < \delta.$$

²⁷Wenn nichts anderes angegeben ist, dann betrachten wir $\mathbb{R}^n$ immer mit dem euklidischen Abstand, und jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit der induzierten Metrik. Dies bedeutet, dass wir für eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ wiederum die euklidische Metrik verwenden. Beispielsweise gilt für $X = [0, 2\pi)$, dass

$$B_{r=2}(a=1) = \{x \in X \mid |x - a| < r\} = \{x \in [0, 2\pi) \mid |x - 1| < 2\} = [0, 3).$$

²⁸Die Idee ist hierbei wie folgt: wenn es einen Homöomorphismus $g: X \rightarrow Y$ gäbe, dann wären auch $X \setminus \{\pi\}$ und $Y \setminus \{f(\pi)\}$ homöomorph. Aber $X \setminus \{\pi\}$ ist nicht mehr zusammenhängend, während die Menge $Y \setminus \{f(\pi)\}$ weiterhin zusammenhängend ist. Eine saubere Ausarbeitung dieses Beweises erfolgt in der Vorlesung Algebraische Topologie.

Einen anderer Beweis, dass X und Y nicht homöomorph sind, liefern wir im nächsten Kapitel. Wir werden sehen, dass X nicht ‘kompakt’ ist, aber Y ist ‘kompakt’. Aber es folgt aus den Definitionen und aus Satz 2.8, dass wenn zwei metrische Räume homöomorph sind, dann ist der eine ‘kompakt’ genau dann, wenn der andere Raum ‘kompakt’ ist.

Wir behaupten, dass $C := \frac{2}{\delta}$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Für $x = 0$ gilt die Ungleichung trivialerweise. Sei also $x \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\phi(x)\| &= \left\| \phi\left(\frac{2\|x\|}{\delta} \cdot \underbrace{\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2}}_{\text{Norm}=\frac{\delta}{2}}\right) \right\| && \text{skalieren von } x \text{ auf Länge } \frac{\delta}{2} \\ &= \frac{2\|x\|}{\delta} \cdot \underbrace{\left\| \phi\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2}\right) \right\|}_{\substack{\text{Norm}=\frac{\delta}{2} \\ < 1 \text{ nach Wahl von } \delta}} && \text{Linearität von } \phi \text{ und Homogenität von } \|\cdot\| \\ &< \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $C := \frac{2}{\delta}$ in der Tat die gewünschte Eigenschaft besitzt.

(3) $\Rightarrow$ (1) Es sei $x_0 \in V$. Wir wollen zeigen, dass ϕ im Punkt x_0 stetig ist. Es gilt für alle $x \in V$, dass

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(x_0)\| &= \|\phi(x - x_0)\| && \text{da } \phi \text{ linear ist} \\ &\leq C\|x - x_0\| && \text{nach Voraussetzung (3).} \end{aligned}$$

Nun kann man leicht zeigen, dass ϕ im Punkt x_0 stetig ist.²⁹

□

Wir betrachten nun den normierten Vektorraum, welcher gegeben ist durch

$$V := C^\infty([0, 1]) := \text{Vektorraum aller } C^\infty\text{-Funktionen } [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup \left\{ |f(x)| \mid x \in [0, 1] \right\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi: V &\rightarrow V \\ f &\mapsto f' = \frac{df}{dx} \end{aligned}$$

ist eine lineare Abbildung. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für die Funktion $f(x) := x^n$ gilt $\|f\| = 1$, aber andererseits gilt $\|f'\| = \|nx^{n-1}\| = n$. Insbesondere gibt es kein $C \geq 0$, so dass $\|f'\| \leq C\|f\|$ für alle $f \in V$. Es folgt aus dem vorherigen Satz, dass $\phi: V \rightarrow V$ nicht stetig ist.

3. KOMPAKTE MENGEN

In Analysis I hatten wir Intervalle vom Typ $[a, b]$, also Intervalle bei denen die Endpunkte enthalten sind, als *kompakt* bezeichnet. Wir hatten gesehen, dass kompakte Intervalle mehrere wichtige Eigenschaften besitzen. Beispielsweise folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß und aus Satz 3.4 von Analysis I, dass gilt:

- (1) Jede Folge von Punkten in einem kompakten Intervall I besitzt eine konvergente Teilfolge, welche gegen einen Punkt in I konvergiert.

²⁹In der Tat, denn für gegebenes ϵ hat $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ die gewünschte Eigenschaft.

Zudem hatten wir mithilfe von (1) gezeigt, dass wenn I ein kompaktes Intervall ist, und wenn $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gelten folgende Aussagen:³⁰

- (2) die Funktion f ist beschränkt, d.h. es existiert ein $C \geq 0$, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in I$,
- (3) f nimmt ihr Maximum und ihr Minimum ein, d.h. es existieren $x_0, x_1 \in I$, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ für alle } x \in I.$$

Wenn X nun ein beliebiger metrischer Raum ist, dann werden wir im Folgenden sogenannte ‘kompakte Teilmengen’ einführen. Wenn $A \subset X$ kompakt ist, dann gilt eine zu (1) analoge Aussage, und wenn $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann werden wir sehen, dass f ebenfalls Eigenschaften (2) und (3) besitzt.

3.1. Definition von kompakten Mengen.

Definition. Es sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Eine *offene Überdeckung* von A ist eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Teilmengen von X , so dass

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Beispiel. Wir betrachten $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ und für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir zudem

$$U_n := \left(\frac{1}{n}, 2\right).$$

Dann ist $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A .

Definition. Es sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von A endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ gibt, so dass

$$A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Anders ausgedrückt, A heißt kompakt, wenn man für *jede* offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von A endlich viele Mengen aus den U_i ’s finden kann, so dass diese schon A überdecken.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass die Menge $(0, 1]$ *nicht* kompakt ist. Wir betrachten dazu wiederum die obige offene Überdeckung, welche gegeben ist durch $U_n := \left(\frac{1}{n}, 2\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Wenn $(0, 1]$ kompakt wäre, dann gäbe es endliche viele $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$(0, 1] \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k},$$

aber es ist leicht zu sehen, dass

$$\frac{1}{\max\{i_1, \dots, i_k\}} \notin U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Wir haben also einen Widerspruch erhalten. Wir haben damit bewiesen, dass $(0, 1]$ nicht kompakt ist.

³⁰Die drei Aussagen sind Satz 7.1, 7.2 und 7.5 aus der Analysis I-Vorlesung.

Beispiel. Wir betrachten

$$A := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Wir behaupten, dass A kompakt ist. Sei also $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A .

- (1) Nachdem $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A ist, existiert insbesondere ein $i \in I$, so dass $0 \in U_i$.
- (2) Nachdem U_i offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $(-\epsilon, \epsilon) \subset U_i$.
- (3) Nachdem $\epsilon > 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N} \in (0, \epsilon)$.
- (4) Dann gilt aber auch, dass $\frac{1}{n} \in (0, \epsilon)$ für alle $n \geq N$. Insbesondere enthält U_i alle Punkte $\frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \dots$.
- (5) Nachdem $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung ist, existiert zu jedem $n \in \{1, \dots, N-1\}$ ein $i_n \in I$, so dass $\frac{1}{n} \in U_{i_n}$.

Es folgt nun, dass $A \subset U_i \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{N-1}}$.

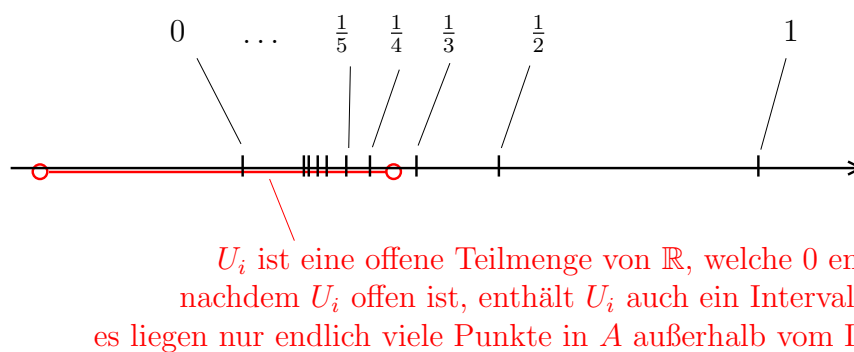


ABBILDUNG 8. Skizze für den Beweis, dass $A := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ kompakt ist.

3.2. Der Satz von Heine–Borel. Das folgende Lemma besagt nun, dass ‘kompakte Intervalle’ aus der Analysis I in der Tat kompakt im obigen Sinne sind.

Satz 3.1. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dann ist $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt.*

Ganz analog zum Beispiel auf Seite 3.1 kann man zeigen, dass alle Intervalle, welche nicht von der Form $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind, auch nicht kompakt sind. Anders ausgedrückt, ein Intervall ist genau dann kompakt, wenn es von der Form $[a, b]$ ist. Dies sind genau die Intervalle, welche wir auch in Analysis I als kompakt bezeichnet hatten.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Spezialfall, dass $a = 0$ und $b = 1$. Wir schreiben $I := [0, 1]$. Wir nehmen nun an, dass I nicht kompakt ist. Dann existiert eine offene Überdeckung $\{U_j\}_{j \in J}$, so dass I nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann.

Behauptung. Es gibt eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

so dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- (1) I_m kann nicht durch endlich viele der U_j 's überdeckt werden,
- (2) die Länge von I_m ist 2^{-m} .

Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion. Wir setzen $I_0 := I$. Nehmen wir an, dass wir $I_0, I_1, \dots, I_m$ schon gefunden haben. Wir teilen I_m in zwei abgeschlossene Intervalle I' und I'' der halben Länge. Da I_m nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden kann, kann zumindest eines der Intervalle I' oder I'' nicht durch endlich viele U_j überdeckt werden. Dieses Intervall wählen wir als I_{m+1} .

Behauptung. Es gibt ein $x \in I$ mit der Eigenschaft, $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m$.

Für jedes m wählen wir ein $a_m \in I_m$. Wenn $m \geq n$ gegeben sind, liegen a_m und a_n in I_n , insbesondere gilt

$$|a_m - a_n| \leq \text{Länge}(I_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Es folgt, dass $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.³¹ Wir setzen $x := \lim_{m \rightarrow \infty} a_m$.³²

Wir müssen noch zeigen, dass $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m$. Anders ausgedrückt, wir müssen zeigen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: $x \in I_m$. Sei also $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \geq m$, dass $a_n \in I_n \subset I_m$. Insbesondere ist $(a_n)_{n \geq m}$ eine konvergente Folge von Punkten in I_m . Nachdem I_m ein abgeschlossenes Intervall ist, folgt aus Lemma 2.2, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I_m$. Wir haben also damit die Behauptung bewiesen.

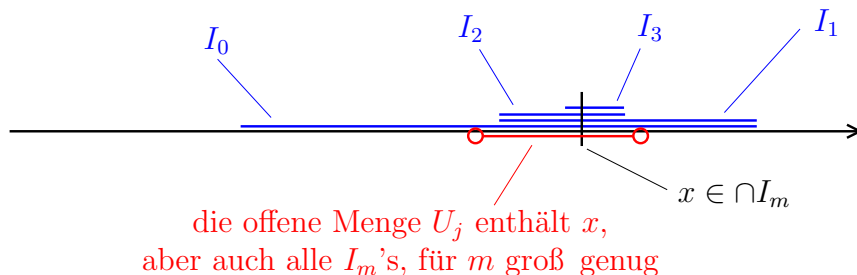


ABBILDUNG 9. Skizze für den Beweis, dass $[0, 1]$ kompakt ist.

Nachdem $\{U_j\}_{j \in J}$ eine Überdeckung von I ist, existiert ein $j \in J$, so dass $x \in U_j$. Wegen der Offenheit von U_j existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U_j$. Wir wählen nun ein

³¹Dies sieht man wie folgt: Sei also $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2^N} < \epsilon$, dann folgt aber, dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon$.

³²Bis zu diesem Schritt ist der Beweis sehr ähnlich dem Beweis vom Satz von Bolzano–Weierstraß.

$m \in \mathbb{N}$, so dass $2^{-m} < \epsilon$. Nachdem $x \in I_m$ und nachdem die Länge von I_m genau 2^{-m} ist, folgt, dass

$$I_m \subset [x - 2^{-m}, x + 2^{-m}].$$

Dann folgt aber, dass

$$I_m \subset [x - 2^{-m}, x + 2^{-m}] \subset (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U_j,$$

d.h. I_m ist in einem einzigen U_j enthalten, im Widerspruch zur Eigenschaft (1) der Intervalle I_m . $\square$

Ganz ähnlich, allerdings mit etwas aufwendigerer Notation, beweist man auch folgenden Satz. Der Satz wird beispielsweise auf Seite 26 von Forster: Analysis II bewiesen.

Satz 3.2. Für jedes $a \geq 0$ ist der Würfel

$$[-a, a]^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [-a, a]\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt.

Mithilfe des folgenden Satzes erhalten wir weitere Beispiele von kompakten Mengen:

Satz 3.3. Es sei X ein metrischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und $A \subset K$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist auch A kompakt.

Betrachten wir beispielsweise noch einmal die Menge $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Diese ist enthalten in der kompakten Menge $K = [0, 1]$. Zudem ist A offen, denn

$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \cup (1, \infty)$$

ist die Vereinigung von offenen Intervallen, also offen. Wir erhalten nun mithilfe von Satz 3.3 einen neuen Beweis dafür, dass A kompakt ist.

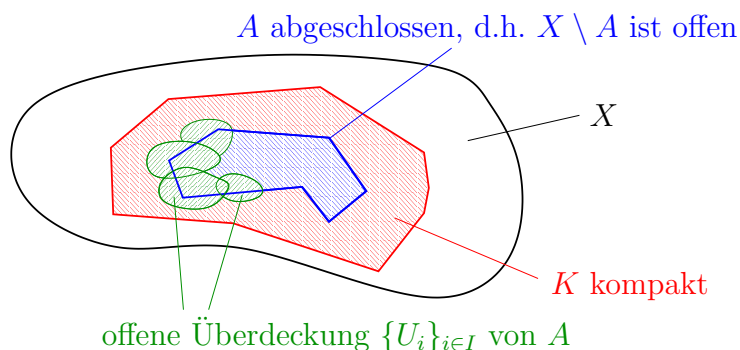


ABBILDUNG 10. Skizze für den Beweis von Satz 3.3.

Beweis. Es sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Nachdem A abgeschlossen ist, folgt, dass $X \setminus A$ offen ist. Also ist

$$(X \setminus A) \cup \{U_i\}_{i \in I}$$

eine offene Überdeckung von X , insbesondere eine offene Überdeckung von K . Nachdem K kompakt ist, können wir K durch endlich viele dieser Mengen $X \setminus A$ und $U_i, i \in I$ überdecken. Es gibt also $i_1, \dots, i_k$, so dass

$$K \subset (X \setminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Nachdem $A \subset K$ folgt, dass

$$A \subset (X \setminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Aber nachdem $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ erhalten wir, dass

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Wir haben also gezeigt, dass A durch endlich viele der U_i 's überdeckt wird, d.h. A ist in der Tat kompakt. $\square$

Im Folgenden nennen wir eine Teilmenge A eines metrischen Raumes *beschränkt*, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass

$$d(x, y) \leq C \text{ für alle } x, y \in A.$$

Lemma 3.4. *Es sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) A ist beschränkt,
- (2) für alle $x \in X$ gibt es ein $D \geq 0$, so dass $A \subset B_D(x)$.
- (3) es gibt ein $x \in X$ und ein $D \geq 0$, so dass $A \subset B_D(x)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2). Es sei also A beschränkt, d.h. es gibt ein $C \geq 0$ gibt, so dass $d(a, b) \leq C$ für alle $a, b \in A$. Es sei $x \in X$ beliebig. Wir wählen zudem $a \in A$ beliebig. Wir setzen $D = d(a, x) + C$. Dann gilt für alle $b \in A$, dass

$$d(x, b) \leq d(a, x) + d(a, b) \leq d(a, x) + C = D.$$

Wir haben also gezeigt, dass $A \subset B_D(x)$.

Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) ist trivial. Wir müssen also noch die Implikation (3) $\Rightarrow$ (1) zeigen. Nehmen wir nun also an es gibt ein $x \in X$ und ein $D \geq 0$, so dass $A \subset B_D(x)$. Dann gilt für alle $a, b \in A$, dass

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < D + D =: C.$$

Wir haben also gezeigt, dass A beschränkt ist. $\square$

Satz 3.5. *Es sei X ein metrischer Raum. Wenn $A \subset X$ kompakt ist, dann ist A beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass A beschränkt ist. Wir wählen ein beliebiges $a \in A$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$U_n := B_n(a).$$

Nach Lemma 1.5 ist U_n offen. Nachdem jeder Punkt einen endlichen Abstand von a hat, folgt, dass $\cup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$. Insbesondere ist $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A . Nachdem A kompakt ist, existieren $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, so dass

$$A \subset U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k},$$

insbesondere gilt, dass $d(a, x) < n_k$ für alle $x \in A$. Es folgt aus Lemma 3.4, dass A beschränkt ist.

Wir wollen nun zeigen, dass A abgeschlossen ist, d.h. wir wollen zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Sei also $x \in X \setminus A$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset X \setminus A$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die offene Teilmenge³³

$$U_n := \{y \in X \mid d(y, x) > \frac{1}{n}\}.$$

Wie in Lemma 1.5 zeigt man, dass U_n offen ist. Offensichtlich gilt $\cup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \setminus \{x\}$. Nachdem $x \in X \setminus A$ folgt, dass $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A ist. Nachdem A kompakt ist, existieren $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, so dass

$$A \subset U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} = U_{n_k},$$

insbesondere gilt, dass $d(a, x) \geq \frac{1}{n_k}$ für alle $a \in A$. Es folgt, dass

$$B_{\frac{1}{n_k}}(a) \subset X \setminus A.$$

Wir haben also gezeigt, dass $X \setminus A$ offen ist. □

Satz 3.6. Satz von Heine–Borel *Es sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.³⁴ Dann gilt:*

$$A \text{ ist kompakt} \iff A \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis. Wenn A kompakt ist, dann besagt Satz 3.5, dass A auch beschränkt und abgeschlossen ist.

Nun nehmen wir an, dass A beschränkt und abgeschlossen ist. Nachdem A beschränkt ist, folgt aus Lemma 3.4, dass es ein $a > 0$ gibt, so dass $A \subset B_a(O)$.³⁵ Dann ist A insbesondere

³³Warum ist in einem metrischen Raum X für jedes $x \in X$ und $r > 0$ die Menge $\{y \in X \mid d(y, x) > r\}$ offen?

³⁴Zur Erinnerung, hier betrachten wir $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik. Die Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig, wenn wir $\mathbb{R}^n$ mit einer anderen Metrik betrachten. Beispielsweise werden wir in Übungsblatt 3 sehen, dass wenn wir auf $\mathbb{R}$ die Metrik

$$d(x, y) := \min\{1, |x - y|\}$$

betrachten, dann gibt es Teilmengen, welche abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt sind.

³⁵Hier, und im weiteren Verlauf der Vorlesung bezeichnen wir mit O den Nullpunkt oder Ursprung von $\mathbb{R}^n$.

eine Teilmenge des Würfels $[-a, a]^n \subset \mathbb{R}^n$. Der Würfel ist nach Satz 3.2 kompakt. Nachdem A abgeschlossen ist, folgt dann aus Satz 3.3, dass auch A kompakt ist. $\square$

Beispiele.

- (1) Wir betrachten die n -dimensionale Sphäre

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, O) = 1\}.$$

Wir wollen zeigen, dass S^n kompakt ist. Nach dem Satz von Heine–Borel genügt es zu zeigen, dass S^n beschränkt und abgeschlossen ist. Es folgt sofort aus der Definition und aus Lemma 3.4, dass S^n beschränkt ist. Wir zeigen nun noch, dass S^n abgeschlossen ist. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Die Funktion ist stetig und es gilt $S^n = f^{-1}(\{1\})$. Nachdem $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz 2.8, dass auch S^n abgeschlossen ist. ³⁶

- (2) Ganz analog kann man auch zeigen, dass die n -dimensionale Scheibe

$$D^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

kompakt ist.

3.3. Eigenschaften von kompakten Mengen. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass kompakte Mengen in der Tat die drei Eigenschaften besitzen, welche wir zu Beginn von Kapitel 3 erwähnt hatten.

Satz 3.7. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Wenn $K \subset X$ kompakt ist, dann ist auch $f(K)$ kompakt.*

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 3.7 zuwenden erinnern wir an einige elementare Aussagen der Mengentheorie. Es sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen A und B . Dann gilt

- (1) für alle $U \subset Y$ ist $f(f^{-1}(U)) \subset U$ ³⁷
- (2) für alle $U \subset X$ ist $U \subset f^{-1}(f(U))$ ³⁸
- (3) für alle $U, V \subset X$ ist $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ³⁹
- (4) für alle $U, V \subset Y$ ist $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

³⁶Man könnte natürlich auch versuchen ‘per Hand’ mithilfe der ϵ -Definition zu zeigen, dass $\mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$ offen ist. Aber dies ist gelinde gesagt umständlich. In vielen Fällen kann man die Offenheit bzw. Abgeschlossenheit einer Menge durch geschicktes anwenden von Satz 2.8 zeigen.

³⁷Es gilt $f(f^{-1}(U)) = U$ wenn f surjektiv ist, aber wenn f nicht surjektiv ist, dann gilt im Allgemeinen, dass $f(f^{-1}(U)) \subsetneq U$.

³⁸Es gilt $U = f(f^{-1}(U))$ wenn f injektiv ist, aber wenn f nicht injektiv ist, dann gilt im Allgemeinen, dass $U \subsetneq f(f^{-1}(U))$. Betrachten wir z.B. die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, dann ist $f^{-1}(f(2)) = \pm 2$.

³⁹Gilt auch die analoge Aussage für Durchschnitte? D.h. gilt immer, dass $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$?

Beweis von Satz 3.7. Sei also $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Wir müssen zeigen, dass $f(K)$ in der Vereinigung von endlich vielen U_i 's enthalten ist.

Es folgt aus den obigen Aussagen über Abbildungen von Mengen, dass

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

Nachdem f stetig ist folgt aus Satz 2.8, dass die Urbilder von den U_i ebenfalls offen sind. Insbesondere ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K . Nachdem K kompakt ist, existieren Indizes $i_1, \dots, i_k$, so dass

$$K \subset f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k}).$$

Dann folgt aus den obigen Aussagen über Abbildungen von Mengen, dass

$$\begin{aligned} f(K) &\subset f(f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k})) \\ &= f(f^{-1}(U_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_{i_k})) \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}. \end{aligned}$$

□

Das folgende Korollar ist eine Verallgemeinerung von Satz 7.2 aus Analysis I.

Korollar 3.8. *Es sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X .⁴⁰ Es sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann nimmt f ein globales Minimum und ein globales Maximum an, d.h. es existieren $x_0, x_1 \in K$, so dass*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

für alle $x \in K$. Insbesondere ist f beschränkt.

Es folgt also beispielsweise aus Korollar 3.8 und dem vorherigen Beispiel, dass jede stetige Funktion auf der Kugeloberfläche S^2 sein Maximum und Minimum annimmt.

Beweis. Nachdem K kompakt und f stetig ist, folgt aus Satz 3.7, dass das Bild $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt ist. Aus Satz 3.5 folgt, dass $f(K) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen ist. Da $f(K)$ beschränkt ist, existiert insbesondere $y_1 := \sup(f(K))$. Nachdem $f(K)$ abgeschlossen ist, gilt $y_1 \in f(K)$.⁴¹ Es existiert also ein $x_1 \in K$, so dass $f(x_1) = y_1 = \sup(f(K))$. Dann gilt aber für alle $x \in K$, dass

$$f(x_1) = \sup(f(K)) \geq f(x).$$

⁴⁰Hier, und in den anderen Sätzen ist natürlich der Fall $K = X$ zugelassen, wenn X schon selber kompakt ist.

⁴¹Zur Erinnerung, das Supremum $y_0 := \sup(f(K)) \in \mathbb{R}$ ist durch die folgenden zwei Eigenschaften eindeutig charakterisiert:

- (1) für alle $a \in f(K)$ gilt $y_0 \geq a$,
- (2) für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $a \in A$, so dass $a > y_0 - \epsilon$.

Wir wollen nun zeigen, dass $y_0 \in f(K)$. Nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall, dann ist $y_0 \in \mathbb{R} \setminus f(K)$. Nachdem $f(K)$ abgeschlossen ist, ist $\mathbb{R} \setminus f(K)$ offen, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ ebenfalls in $\mathbb{R} \setminus f(K)$ liegt. Aber dies ist ein Widerspruch zu (2).

Alternativ kann man auch folgendes Argument verwenden: das Supremum $\sup(f(K))$ ist der Grenzwert einer Folge von Punkten in $f(K)$, nachdem $f(K)$ abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert in $f(K)$.

Die Existenz von x_0 zeigt man ganz analog. $\square$

Beispiel. Betrachten wir $X := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|v\| \leq 1\}$. Dann ist X beschränkt aber nicht abgeschlossen. In diesem Fall existiert eine unbeschränkte stetige Funktion auf X , beispielsweise

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Betrachten wir hingegen die stetige Funktion

$$\begin{aligned} g: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

dann ist diese zwar beschränkt, aber es gibt kein $x_0 \in X$, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in X$. In Übungsblatt 3 werden wir sehen, dass es für eine nicht-kompakte Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ immer eine stetige Funktion $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, welche unbeschränkt ist.

Auf Seite 26 hatten wir gesehen, dass eine stetige, bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ nicht notwendigerweise auch ein Homöomorphismus ist. Der folgende Satz besagt nun, dass dies doch der Fall ist, wenn wir zudem wissen, dass X kompakt ist.

Satz 3.9. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Wenn X kompakt ist, dann ist f sogar ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass die Umkehrabbildung $g := f^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig ist. Nach Satz 2.8 genügt es zu zeigen, dass für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$ auch das Urbild $g^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

Es sei also $A \subset X$ eine abgeschlossene Menge. Nachdem X kompakt ist, ist nach Satz 3.3 auch A kompakt. Es folgt aus Satz 3.7, dass $g^{-1}(A) = f(A)$ eine kompakte Teilmenge von Y ist. Dann ist nach Satz 3.5 die Menge $g^{-1}(A) = f(A)$ auch eine abgeschlossene Teilmenge von Y . $\square$

Satz 3.10. (Bolzano–Weierstraß) *Es sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X . Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in K . Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, welche in K konvergiert.*

Beweis. Nehmen wir an, es existiert keine Teilfolge, welche in K konvergiert. Wir wollen diese Annahme zu einem Widerspruch führen. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung.

Behauptung. Es sei $a \in K$ beliebig. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $B_{\frac{1}{m}}(a)$ höchstens endlich viele Folgenglieder enthält.

Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. Dann würden zu jedem $m \in \mathbb{N}$ unendlich viele Folgenglieder existieren, welche sich in $B_{\frac{1}{m}}(a)$ befinden. Insbesondere könnte man dann

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

finden, so dass $x_{n_m} \in B_{\frac{1}{m}}(a)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.⁴² Dann hätten wir aber eine Teilfolge konstruiert, welche gegen $a \in K$ konvergiert. Wir hatten aber angenommen, dass es solche Teilfolgen nicht gibt. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir setzen nun $U_a := B_{\frac{1}{m}}(a)$. Wir haben nun also für jedes $a \in K$ eine offene Menge U_a mit folgenden Eigenschaften gefunden:

- (1) U_a enthält den Punkt a ,
- (2) U_a enthält höchstens endlich viele Folgenglieder.

Aus (1) folgt, dass

$$K \subset \bigcup_{a \in K} U_a.$$

Nachdem jedes U_a offen ist, ist $\{U_a\}_{a \in K}$ eine offene Überdeckung von K . Nachdem K kompakt ist, gibt es nun aber $a_1, \dots, a_n$, so dass

$$K \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}.$$

Nachdem jedes U_{a_i} nach (2) aber höchstens endlich viele Folgenglieder enthält, enthält K höchstens endlich viele Folgenglieder. Das kann aber nicht sein, weil K alle Folgenglieder enthält. $\square$

Wir erhalten nun folgende Verallgemeinerung von Satz 4.20 aus Analysis I.

Korollar 3.11. *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $\|x_k\| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in

$$K := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq C \right\},$$

aber dies ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, welche abgeschlossen und beschränkt ist, also kompakt nach dem Satz 3.6 von Heine-Borel. Aus dem Satz 3.10 von Bolzano-Weierstrass folgt nun, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.⁴³ $\square$

⁴²In der Tat, denn nehmen wir an, dass wir schon $n_1, \dots, n_{m-1}$ gefunden haben. Nach Voraussetzung gibt es unendlich viele Folgenglieder, welche nicht in $B_{\frac{1}{m}}(a)$ liegen. Insbesondere gibt es ein $n_m > n_{m-1}$, so dass $x_{n_m} \in B_{\frac{1}{m}}(a)$.

⁴³Man könnte das Korollar auch auf den Satz von Bolzano-Weierstraß aus der Analysis I zurückführen. In der Tat, es sei (x_k) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$. Dann ist auch die Folge der ersten Koordinaten (x_{k1}) beschränkt, es gibt also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge, für welche die ersten Koordinaten konvergieren. Jetzt betrachten wir die zweiten Koordinaten dieser Teilfolge, und finden davon wiederum eine Teilfolge, so dass nun auch die zweiten Koordinaten konvergieren. Indem wir dieses Verfahren insgesamt n -Mal durchführen erhalten wir eine Teilfolge, in der alle Koordinaten konvergieren, also konvergiert nach Satz 2.3 auch die Teilfolge von Punkten in $\mathbb{R}^n$.

3.4. Gleichmäßige Stetigkeit von Abbildungen (*). Dieses kurze Kapitel ist nicht Teil der Vorlesung.

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y . Wir hatten definiert:

$$f \text{ ist stetig} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall_{x \in X} \quad \forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{y \in B_\delta(x)} \quad d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Wir definieren nun

$$f \text{ ist gleichmäßig stetig} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x \in X} \quad \forall_{y \in B_\delta(x)} \quad d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Diese Definition von gleichmäßiger Stetigkeit verallgemeinert den Begriff der gleichmäßig stetigen Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$.

Satz 8.4 aus Analysis I besagt, dass jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auch gleichmäßig stetig ist. Der folgende Satz ist nun eine Verallgemeinerung:

Satz 3.12. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Wenn X kompakt ist, dann ist f auch gleichmäßig stetig.*

Der Satz wird in Forster: Analysis II auf Seite 34 bewiesen.

4. KURVEN IN $\mathbb{R}^n$

4.1. Definitionen und Beispiele. Wir wenden uns in diesem Kapitel wieder deutlich ‘konkreteren’ Objekten zu.

Definition.

- (1) Eine *Kurve* in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$f = (f_1, \dots, f_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

- (2) Wir sagen eine Kurve $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist (*stetig*) *differenzierbar*, wenn die n Koordinatenfunktionen $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ (*stetig*) differenzierbar sind.⁴⁴

Beispiel.

⁴⁴Zur Erinnerung, eine Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall heißt *stetig differenzierbar*, wenn die Funktion auf den inneren Punkten von I stetig differenzierbar ist, und wenn sich die Ableitungsfunktion auf die Randpunkte vom Intervall I stetig fortsetzt. Diese Fortsetzung wird dann ebenfalls mit g' bezeichnet. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

nicht stetig differenzierbar, nachdem sich die Ableitungsfunktion $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ nicht stetig von $(0, 1)$ auf $[0, 1]$ fortsetzen läßt.

(1) Die Kurve

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto (\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

ist stetig differenzierbar, und die Bildmenge ist der Einheitskreis um den Ursprung. Die Kurve

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto (\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

besitzt die gleiche Bildmenge. Die beiden Kurven sind aber unterschiedlich, weil sie verschiedene Definitionsbereiche besitzen. Eine Kurve in unserem Sinne ist also wirklich eine Abbildung, und nicht nur eine ‘ein-dimensionale’ Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(2) Es seien $r > 0$ und $c \neq 0$ gegeben. Die Kurve

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (ct, r \cos(t), r \sin(t)) \end{aligned}$$

beschreibt eine unendliche Helix, welche in Abbildung 11 skizziert wird.

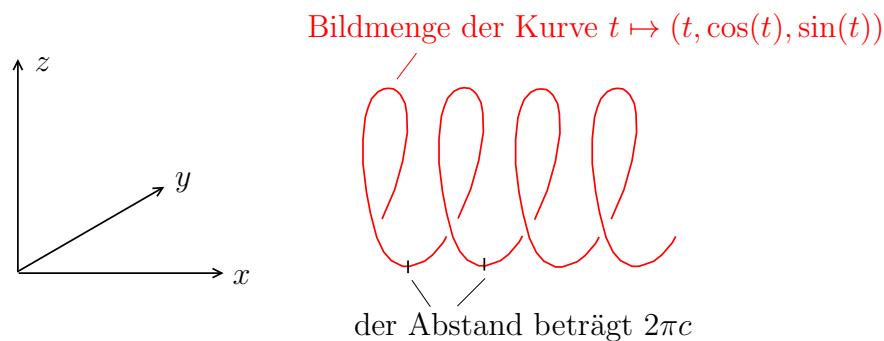


ABBILDUNG 11.

Definition. Es sei I ein offenes Intervall und

$$\begin{aligned} f: I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{aligned}$$

eine differenzierbare Kurve. Für $t \in I$ nennen wir

$$f'(t) := (f'_1(t), \dots, f'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

den *Tangentialvektor* der Kurve f zum Parameterwert t .

Anschaulich gesprochen zeigt der Tangentialvektor in die ‘Durchlaufrichtung’ und die Länge des Tangentialvektors misst die ‘Geschwindigkeit’ zum Zeitpunkt t . Diese Aussage wird in Abbildung 12 illustriert.

Definition. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve.

(1) $t \in I$ heißt *singulär*, wenn $f'(t) = 0$,

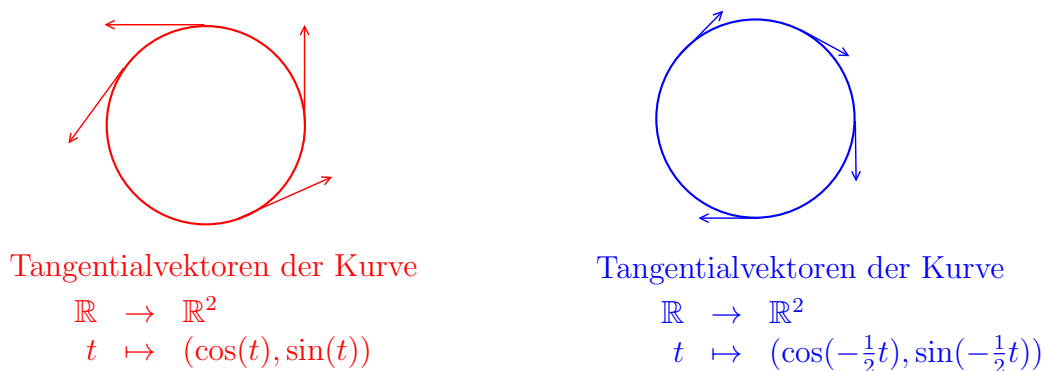


ABBILDUNG 12.

(2) wenn f keine singulären Punkte besitzt, dann heißt die Kurve f *regulär*.

Beispiel. Die Kurve

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

heißt Neilsche Parabel. Es gilt $f'(t) = (2t, 3t^2)$, insbesondere ist $t = 0$ der einzige singuläre Punkt der Neilschen Parabel.

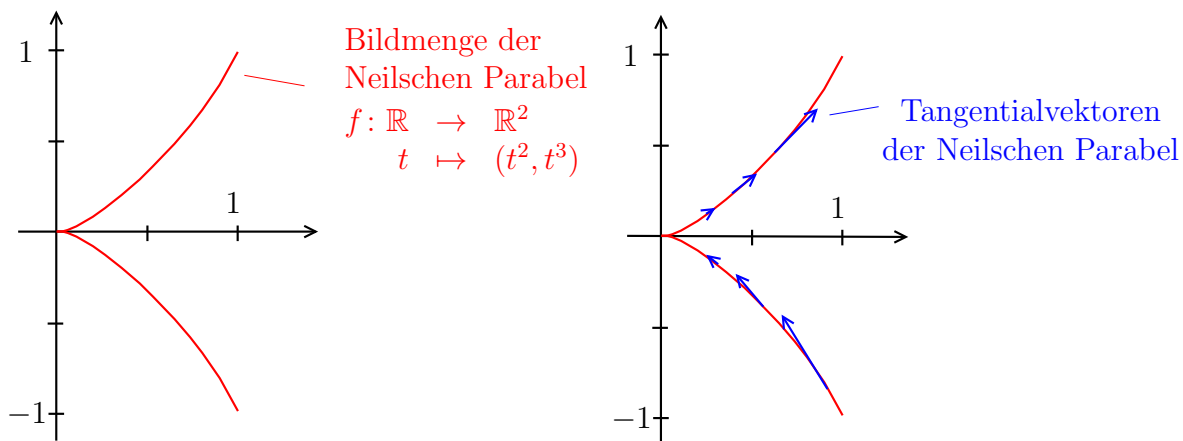


ABBILDUNG 13. Die Neilsche Parabel.

4.2. Rektifizierbare Kurven.

Definition. Eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Polygonzug*, wenn es Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ und eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$$

des Intervalls $[a, b]$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für jedes $i \in \{0, \dots, k-1\}$ und jedes $t \in [t_i, t_{i+1}]$ gilt:

$$f(t) = P_i \cdot \underbrace{\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}}_{\substack{= 1, \text{ für } t = t_i \\ = 0, \text{ für } t = t_{i+1}}} + P_{i+1} \cdot \underbrace{\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}}_{\substack{= 0, \text{ für } t = t_i \\ = 1, \text{ für } t = t_{i+1}}}.$$

Bildlich ausgedrückt, ein Polygonzug bewegt sich für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt P_i zum Punkt P_{i+1} . Ein Beispiel für einen Polygonzug in $\mathbb{R}^2$ ist in Abbildung 14 zu sehen. Wenn f ein Polygonzug wie oben ist, dann definieren wir die

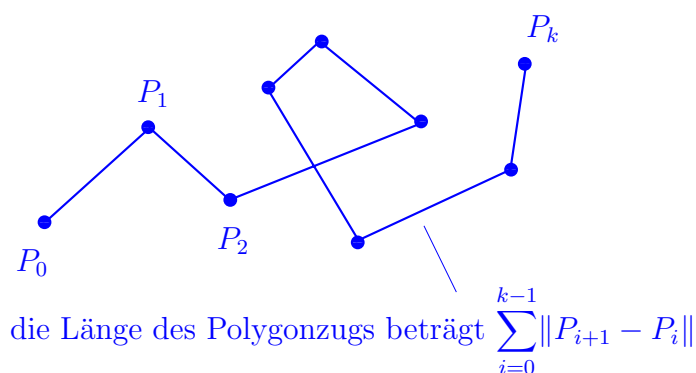


ABBILDUNG 14. Ein Polygonzug.

Länge des Polygonzugs f als

$$L(f) := \sum_{i=0}^{k-1} \|P_{i+1} - P_i\|.$$

Wenn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige Kurve ist, dann wollen wir auch einen Längenbegriff einführen. Die Idee ist zu sagen, dass f eine Länge L hat, wenn man f durch Polygonzüge annähern kann, deren Länge gegen L konvergiert. Wenn man versucht diese Idee mathematisch sauber zu formulieren, muss man etwas arbeiten:

Definition.

- (1) Eine *Zerlegung* Z vom Intervall $[a, b]$ besteht aus reellen Zahlen

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b.$$

Wir sagen die Zerlegung hat *Feinheit* δ , wenn $t_{i+1} - t_i < \delta$ für alle i . Für eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$L(f, Z) := \sum_{i=0}^{k-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|.$$

Dies ist also die Länge des Polygonzugs, welcher festgelegt ist durch die Punkte $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)$.

- (2) Wir sagen eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist *rektifizierbar*, wenn es ein L gibt mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \begin{array}{c} \text{Zerlegung } Z \\ \text{der Feinheit } \delta \end{array} \quad |L(f, Z) - L| < \epsilon.$$

Wenn f rektifizierbar ist, dann nennen wir L die *Länge* von f .

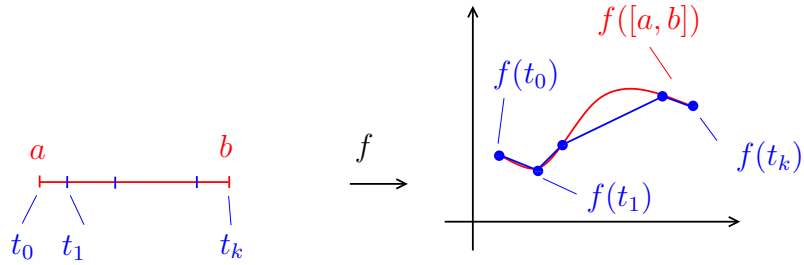


ABBILDUNG 15. Approximation einer Kurve durch einen Polygonzug.

Beispiel. Es seien $P, v \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das Geradenstück

$$\begin{aligned} f: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto P + tv. \end{aligned}$$

Dann gilt für jede Zerlegung Z der Form $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$, dass

$$\begin{aligned} L(f, Z) &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \underbrace{f(t_{i+1}) - f(t_i)}_{\substack{= (P + t_{i+1}v) - (P + t_i v) \\ = (t_{i+1} - t_i)v}} \right\| = \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i) \|v\| = (b - a) \|v\|. \end{aligned}$$

Es folgt, dass f rektifizierbar ist mit Länge $(b - a) \|v\|$.

Es folgt aus dem vorherigen Beispiel und dem folgenden Satz, dass Polygonzüge rektifizierbar sind, und dass die beiden Definitionen von Längen von Polygonzügen (die Definition nur für Polygonzüge, und dann allgemein für alle rektifizierbaren Kurven), das gleiche Ergebnis liefern.

Satz 4.1. *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und es sei $a < c < b$. Wir bezeichnen mit $f_{[a, c]}$ und $f_{[c, b]}$ die Einschränkungen von f auf die Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$. Dann gilt*

$$f \text{ ist rektifizierbar} \iff f_{[a, c]} \text{ und } f_{[c, b]} \text{ sind rektifizierbar.}$$

Zudem, wenn die Kurven rektifizierbar sind, dann gilt

$$\text{Länge}(f) = \text{Länge}(f_{[a, c]}) + \text{Länge}(f_{[c, b]}).$$

Die ‘ $\Leftarrow$ ’-Richtung ist eine Übungsaufgabe in Übungsblatt 4. Die ‘ $\Rightarrow$ ’-Richtung wird ähnlich bewiesen und verbleibt eine freiwillige Übungsaufgabe.

Beispiel. Wir werden nun sehen, dass es Kurven gibt, welche nicht rektifizierbar sind. Für reelle Zahlen $a < b$ und $y \geq 0$ sowie $m \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $f(a, b|y, m)$ die Kurve, welche in Abbildung 16 links abgebildet ist. Hierbei ist ⁴⁵

$$\text{Länge}\left(f(a, b|y, m)\right) = \sqrt{(b-a)^2 + (4ym)^2} \geq 4ym.$$

Wir betrachten die Kurve

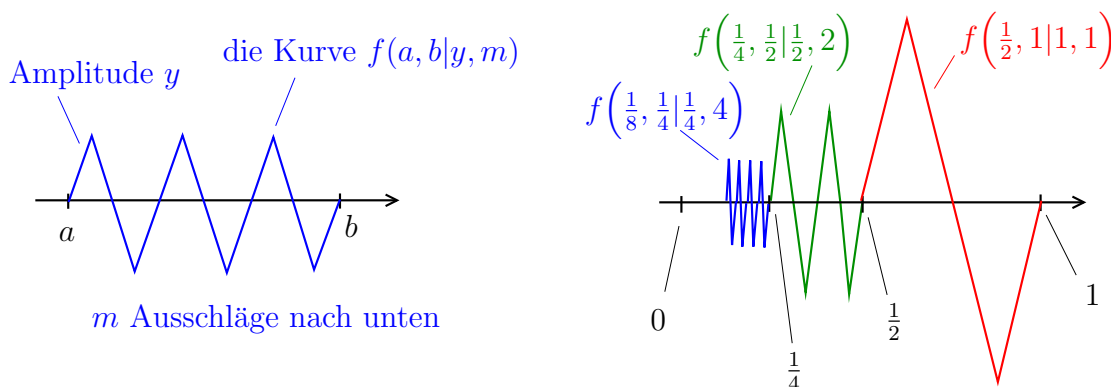


ABBILDUNG 16. Eine nicht rektifizierbare Kurve.

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{cases} (0, 0), & \text{wenn } t = 0, \\ f\left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \middle| \frac{1}{2^k}, 2^k\right), & \text{wenn } t \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right] \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

welche in Abbildung 16 auf der rechten Seite skizziert wird. ⁴⁶ Wir wollen nun zeigen, dass diese Kurve nicht rektifizierbar ist. Nehmen wir also an, die Kurve f wäre rektifizierbar mit Länge L . Für $[a, b] \subset [0, 1]$ bezeichnen wir, wie oben, mit $f_{[a, b]}$ die Einschränkung der Kurve f auf das Intervall $[a, b]$. Es folgt aus Satz 4.1, dass die Kurve $f_{[a, b]}$ ebenfalls rektifizierbar ist, wobei $\text{Länge}(f_{[a, b]}) \leq \text{Länge}(f) = L$. Insbesondere sind also die Längen der Kurven $f_{[a, b]}$ alle durch L nach oben beschränkt. Für jedes n folgt aus Satz 4.1, dass

$$\text{Länge}\left(f_{\left[\frac{1}{2^n}, 1\right]}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Länge}\left(f_{\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\text{Länge}\left(f\left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \middle| \frac{1}{2^k}, 2^k\right)\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = 4} \geq 4n.$$

Insbesondere sind die Längen nicht nach oben beschränkt. Wir haben also gezeigt, dass die ursprüngliche Kurve f nicht rektifizierbar war.

⁴⁵Man sieht dies, in dem man die $4m$ Geradenstücke umlegt zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Länge $(b-a)$ und $4my$.

⁴⁶Die Abbildung f ist in der Tat auch für $t = 0$ stetig.

Beispiel. Ein weiteres Beispiel einer nicht-rektifizierbaren Kurve ist durch die Peano-Kurve gegeben:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve>

Diese Kurve ist eine stetige Abbildung $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass die Bildmenge aus dem Quadrat $[0, 1]^2$ besteht. Die Peano-Kurve ist nicht rektifizierbar.

Der folgende Satz zeigt, dass stetige differenzierbare Kurven rektifizierbar sind, und erlaubt es uns deren Längen zu bestimmen.

Satz 4.2. *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist f rektifizierbar, und es gilt*

$$\text{Länge}(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beispiele.

(1) Betrachten wir zuerst ein Geradenstück, d.h. eine Kurve vom Typ

$$\begin{aligned} f: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto P + tv, \end{aligned}$$

wobei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt ist und $v \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor. Dann ist dies insbesondere ein Polygonzug mit den Eckpunkten $f(a)$ und $f(b)$, d.h. die Länge ist

$$\|f(b) - f(a)\| = \|(b - a)v\| = (b - a)\|v\|.$$

Andererseits gilt $f'(t) = v$, d.h.

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt = (b - a)\|v\|.$$

Die Aussage des Satzes gilt also in diesem Fall.

(2) Wir betrachten die Kurve

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)), \end{aligned}$$

dann folgt aus Satz 4.2, dass

$$\begin{aligned} \text{Länge}(f) &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(-\sin(t), \cos(t))\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2}}_{=1} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Wir erhalten also das wenig überraschende Ergebnis, dass die Länge des Kreises von Durchmesser 1 gerade 2π beträgt.⁴⁷

⁴⁷Wir haben jetzt also gezeigt, dass die auf den ersten Blick eigenwillige Definition von π aus der Analysis I der Definition aus der Schule entspricht. Insbesondere haben wir jetzt die Definition aus der Schule ‘ 2π ist der Umfang von einem Kreis von Radius 1’ präzise gemacht, denn jetzt wissen wir, was ‘Länge von einem Kreis’ wirklich heißen soll.

(3) Es seien $r > 0$ und $c \neq 0$ gegeben. Wir betrachten wiederum die Helix

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (ct, r \cos(t), r \sin(t)), \end{aligned}$$

welche wir in Abbildung 11 skizziert hatten. Es folgt aus Satz 4.2, dass

$$\begin{aligned} \text{Länge}(f) &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(c, -r \sin(t), r \cos(t))\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 + (-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2} dt = 2\pi \sqrt{c^2 + r^2}. \end{aligned}$$

48

Für den Beweis von Satz 4.2 werden wir folgendes Lemma benötigen.

Lemma 4.3. *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt*

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{\substack{t \neq t' \text{ mit} \\ |t - t'| \leq \delta}} \left\| \underbrace{\frac{f(t) - f(t')}{t - t'}}_{\substack{\text{für } n = 1 \text{ ist dies die} \\ \text{durchschnittliche} \\ \text{Steigung auf dem} \\ \text{Intervall } [t, t']}} - f'(t) \right\| < \epsilon.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Es sei also $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und es sei $\epsilon > 0$. Die Ableitung $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Voraussetzung stetig. Nach Satz 7.5 aus der Analysis I ist die Funktion f' sogar gleichmäßig stetig. Dies bedeutet

$$\exists_{\delta > 0} \forall_{\substack{s, t \text{ mit} \\ |t - s| \leq \delta}} |f'(t) - f'(s)| \leq \epsilon.$$

Es seien nun $t \neq t' \in [a, b]$ mit $|t - t'| \leq \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \underbrace{\frac{f(t) - f(t')}{t - t'}}_{\substack{= f'(s) \text{ für } s \text{ zwischen } t \text{ und } t' \\ \text{nach dem Mittelwertsatz} \\ \text{der Differentialrechnung}}} - f'(t) \right| &= |f'(s) - f'(t)| \\ &\leq \epsilon \quad \text{da } |s - t| \leq |t - t'| \leq \delta \end{aligned}$$

Wir haben damit also die Aussage für $n = 1$ bewiesen.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall. Es sei also $f = (f_1, \dots, f_n): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es folgt aus Lemma 1.1, dass

$$\left\| \frac{f(t) - f(t')}{t - t'} - f'(t) \right\| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} \left\| \frac{f_i(t) - f_i(t')}{t - t'} - f'_i(t) \right\|.$$

⁴⁸Wie kann man sich dieses Ergebnis anschaulich vorstellen? Stellen wir uns die Helix vor als Kurve auf einem Zylinder. Wenn wir den Zylinder entrollen, wie schaut dann die Kurve aus?

Wir erhalten nun die gewünschte Aussage in dem wir den Fall $n = 1$ auf die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_n$ und $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ anwenden. Wir erhalten dann $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$, und $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Wir können jetzt zum eigentlichen Beweis von Satz 4.2 übergehen.

Beweis von Satz 4.2. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Wir wollen zeigen, dass f rektifizierbar ist mit Länge $\int_a^b \|f'(t)\| dt$. Es sei also $\epsilon > 0$.

Wir betrachten erst einmal folgende Abschätzung für eine beliebige Zerlegung der Form $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \\
& \leq \underbrace{\left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right|}_{\substack{\text{Differenz zwischen einer Riemannsumme} \\ \text{und dem Riemann-Integral}}} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right|}_{\substack{\text{Differenz zwischen einer Riemannsumme} \\ \text{und dem Riemann-Integral}}} \\
& = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \cdot \left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(t_i) \right\| \\
& \leq \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(t_i) \right\|^{49} \\
& \leq (b-a) \max_{i=1, \dots, k} \underbrace{\left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(t_i) \right\|}_{\text{Ausdruck von Lemma 4.3}}
\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt also ein $\delta_1 > 0$ finden, so dass für jede Zerlegung der Feinheit δ_1 , der erste Summand kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$ ist, und ganz analog wollen wir ein $\delta_2 > 0$ finden, so dass für jede Zerlegung der Feinheit δ_2 , der zweite Summand kleiner gleich $\frac{\epsilon}{2}$ ist. Dann hat $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ die gewünschte Eigenschaft.

Wir beginnen mit dem ersten Summanden. Nach Lemma 4.3 existiert ein $\delta_1 > 0$ so dass für alle t, t' in $[a, b]$ mit $|t - t'| \leq \delta_1$ gilt, dass

$$\left\| \frac{f(t) - f(t')}{t - t'} - f'(t) \right\| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Dann gilt für jede Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ der Feinheit δ_1 , dass

$$\begin{aligned}
\text{erster Summand} & \leq (b-a) \max_{i=1, \dots, k} \underbrace{\left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(t_i) \right\|}_{< \frac{\epsilon}{2(b-a)}} < \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Wir wenden uns dem zweiten Summanden in der obigen Abschätzung zu. Die Funktion $t \mapsto \|f'(t)\|$ ist stetig⁵⁰. Nach Satz 7.5 aus der Analysis I ist die Funktion auch gleichmäßig

⁴⁹Hier haben wir verwendet, dass für alle v, w gilt, dass $\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$.

⁵⁰Nach Voraussetzung ist die Abbildung $t \mapsto f'(t)$ stetig, aber die Abbildung $v \mapsto \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ ist ebenfalls stetig. Also ist nach Satz 2.9 auch die Funktion $t \mapsto \|f'(t)\|$ stetig.

stetig. Insbesondere gilt

$$\exists_{\delta_2 > 0} \quad \forall_{\substack{s, t \text{ mit} \\ |t - s| \leq \delta_2}} \quad \left| \|f'(t)\| - \|f'(s)\| \right| \leq \frac{\epsilon}{2|b - a|}.$$

Der Beweis von Satz 13.9 aus der Analysis I⁵¹ zeigt nun, dass für jede Zerlegung der Form $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ der Feinheit δ_2 gilt

$$\text{zweiter Summand} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir haben also gezeigt, dass δ_2 die gewünschte Eigenschaft besitzt. $\square$

4.3. Parametertransformationen (*). Dieses kurze und leichte Kapitel ist nicht offizieller Teil der Vorlesung.

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetige bijektive Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} f \circ \varphi: [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto f(\varphi(t)) \end{aligned}$$

ebenfalls eine Kurve, welche genau die gleichen Punkte annimmt wie f . Wir sagen, diese Kurve geht aus der Kurve f durch *Parametertransformation* φ hervor.

Lemma 4.4. *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve ist und es sei zudem $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare, bijektive Funktion. Dann gilt*

$$\text{Länge}(f) = \text{Länge}(f \circ \varphi).$$

Etwas vereinfacht gesagt besagt das Lemma, dass sich die Länge einer Kurve nicht verändert, wenn man die Bildpunkte mit einer anderen Geschwindigkeit ‘durchfährt’.

Beweis. Nachdem φ stetig und bijektiv ist, folgt, dass entweder φ streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist. Wir betrachten zuerst den Fall, dass φ streng monoton steigend ist, d.h. es ist $\varphi'(s) \geq 0$ für alle $s \in (c, d)$. Insbesondere ist $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Länge}(f \circ \varphi) &= \int_c^d \|(f \circ \varphi)'(s)\| ds && \text{nach Satz 4.2} \\ &= \int_c^d \|f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\| ds && \text{Kettenregel koordinatenweise angewandt} \\ &= \int_c^d \|f'(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s) ds && \text{nachdem } \varphi'(s) \geq 0 \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|f'(u)\| du && \text{nach der Substitutionsregel mit } u = \varphi(s) \\ &= \int_a^b \|f'(u)\| du = \text{Länge}(f). \end{aligned}$$

⁵¹Dieser Satz besagt, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ integrierbar ist.

Jetzt betrachten wir den Fall, dass φ streng monoton fallend ist. Es folgt, dass $\varphi'(s) \leq 0$ für alle s . Zudem ist $\varphi(c) = b$ und $\varphi(d) = a$. Wir wenden das obige Argument noch einmal an, allerdings mit zwei kleinen Modifikationen:

$$\begin{aligned}
\text{Länge}(f \circ \varphi) &= \int_c^d \|(f \circ \varphi)'(s)\| ds && \text{nach Satz 4.2} \\
&= \int_c^d \|f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\| ds && \text{Kettenregel koordinatenweise angewandt} \\
&= \int_c^d \|f'(\varphi(s))\| \cdot |\varphi'(s)| ds \\
&= \int_c^d \|f'(\varphi(s))\| \cdot (-\varphi'(s)) ds && \text{nachdem } \varphi'(s) \leq 0 \\
&= - \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|f'(u)\| du && \text{nach der Substitutionsregel mit } u = \varphi(s) \\
&= - \int_b^a \|f'(u)\| du && \text{da } \varphi(c) = b \text{ und } \varphi(d) = a \\
&= \int_a^b \|f'(u)\| du && \text{da allgemein } \int_b^a g(u) du = - \int_a^b g(u) du \\
&= \text{Länge}(f).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Man kann das Lemma auch direkt über die Definition von der Länge einer Kurve zeigen. In der Tat, sei L die Länge von f und es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es sei $\delta > 0$ so gewählt wie in der Definition von der Länge von f . Wir setzen

$$C := \sup \left\{ |\varphi'(t)| \mid t \in [a, b] \right\}.$$

Dann kann man leicht sehen, dass für das gleiche vorgegebene L und $\epsilon > 0$ jetzt $\delta' := \frac{1}{C}\delta$ die gewünschte Eigenschaft für $f \circ \varphi$ besitzt.

5. PARTIELLE ABLEITUNGEN

Im Folgenden bezeichnen wir für $i \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\begin{aligned}
e_i &:= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \\
&\quad \uparrow \\
&\quad i\text{-te Koordinate}
\end{aligned}$$

den i -ten Einheitsvektor. Die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ werden oft die *Standardbasis* oder auch die *kanonische Basis* des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ genannt.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (1) Es sei $x \in U$. Wenn der Grenzwert ⁵² ⁵³

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

existiert, dann heißt f *partiell am Punkt x in der i -ten Koordinate differenzierbar* und wir nennen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ die *i -te partielle Ableitung von f am Punkt x* .

- (2) Wir sagen f *ist in x partiell differenzierbar*, wenn f in allen Koordinaten partiell differenzierbar ist.
- (3) Die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *partiell differenzierbar*, wenn f in allen Punkten $x \in U$ partiell differenzierbar ist.

Bemerkung. Sei nun $(x_1, \dots, x_n) \in U$ ein fest gewählter Punkt. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

nichts anderes als die Ableitung der Funktion

$$x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

nach der Variable x_i , wir betrachten dabei die anderen Symbole $x_1, \dots, x_{i-1}$ und $x_{i+1}, \dots, x_n$ als Konstanten. Wir können deswegen partielle Ableitungen wie gewöhnliche Ableitungen von Funktionen einer Variablen bestimmen.

Beispiel.

- (1) Für die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2 + x_2^5 + \sin(x_1x_3)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f &= 6x_1x_2 + x_3 \cos(x_1x_3), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f &= 3x_1^2 + 5x_2^4, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f &= x_1 \cos(x_1x_3). \end{aligned}$$

Wir bilden also ganz normal die Ableitungen bezüglich der vorgegebenen Variable, alle anderen Variablen sind Konstanten.

- (2) Für Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet man oft auch x und y anstatt x_1 und x_2 . Beispielsweise gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{x^2+y^2} = 2ye^{x^2+y^2}.$$

⁵²Nachdem U offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $x + he_i \in U$ für alle $h \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wir bestimmen hier dann den Grenzwert der Funktion

$$\begin{aligned} (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}, \end{aligned}$$

d.h. wir bestimmen den Grenzwert einer reellwertigen Funktion in einer Variablen, diesen hatten wir schon in Analysis I definiert.

⁵³Das Symbol ∂ wird als ‘Del’ ausgesprochen. Es ist kein griechischer Buchstabe, und insbesondere nicht mit dem griechischen Delta δ zu verwechseln. In Latex wird es als `\partial` geschrieben.

Wir hatten oben festgestellt, dass partielle Ableitungen nichts anderes sind, als gewöhnliche Ableitungen von Funktionen einer Variablen. Insbesondere erhalten wir die üblichen Rechenregeln. Genauer gesagt, es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ zwei partiell differenzierbare Funktionen, dann gilt für alle i

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f + g) = \frac{\partial}{\partial x_i}f + \frac{\partial}{\partial x_i}g \quad (\text{Summenregel})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}g + \frac{\partial}{\partial x_i}f \cdot g \quad (\text{Produktregel}).$$

Zudem, wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}f - \frac{\partial}{\partial x_i}g \cdot f}{g^2} \quad (\text{Quotientenregel}).$$

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion.

- (1) Wir sagen, f ist *stetig partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und zudem stetig sind.⁵⁴
- (2) Wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}f: U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ wieder partiell differenzierbar sind, dann heißt f *zweimal partiell differenzierbar*. Analog definieren wir *k-mal partiell differenzierbar*.
- (3) Wir sagen f ist *k-mal stetig partiell differenzierbar*, wenn die Funktion f k -mal partiell differenzierbar ist, und alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

von Grad $l \leq k$ stetig sind.

Betrachten wir die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2 + x_2^5 + \sin(x_1x_3)$. In diesem Fall gilt beispielsweise, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} f = \frac{\partial}{\partial x_3} (6x_1x_2 + x_3 \cos(x_1x_3)) = 1 \cdot \cos(x_1x_3) - x_3 \cdot x_1 \sin(x_1x_3),$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} f = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \cos(x_1x_3)) = 1 \cdot \cos(x_1x_3) - x_1 \cdot x_3 \sin(x_1x_3).$$

Wir sehen also, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} f = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} f.$$

In diesem Beispiel erhalten wir also die gleichen zweifachen partiellen Ableitungen, egal, in welcher Reihenfolge wir die Ableitungen durchführen.

Der nächste Satz besagt, dass dies kein Zufall ist, sondern dass diese Aussage allgemein für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen Funktionen gilt.

⁵⁴Die partiellen Ableitungen sind wiederum Funktionen $\frac{\partial}{\partial x_i}f: U \rightarrow \mathbb{R}$, welche wir also auch auf Stetigkeit überprüfen können.

Satz 5.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $p \in U$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dass*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(p).$$

Im Übungsblatt 4 werden wir sehen, dass die Aussage im Allgemeinen nicht für Funktionen gilt, welche zwar zweimal partiell differenzierbar sind, aber nicht zweimal stetig partiell differenzierbar sind.

Im Beweis von Satz 5.1 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 5.2. *Es seien $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Wir nehmen an, für alle $a > 0$ und $b > 0$, existieren $(\xi, \eta), (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ in $[0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, so dass*

$$A(\xi, \eta) = B(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Dann gilt

$$A(0, 0) = B(0, 0).$$

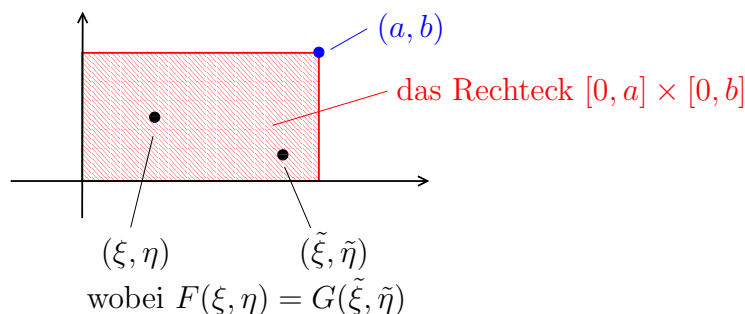


ABBILDUNG 17. Skizze zu Lemma 5.2.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für alle $\kappa > 0$ gilt: $|F(0, 0) - G(0, 0)| < \kappa$. Es sei also $\kappa > 0$. Nachdem F und G stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $\sqrt{a^2 + b^2} < \delta$ gilt, dass $|F(0, 0) - F(a, b)| < \frac{\kappa}{2}$ und $|G(0, 0) - G(a, b)| < \frac{\kappa}{2}$.

Wir wählen nun $a > 0$ und $b > 0$, so dass $\sqrt{a^2 + b^2} < \delta$. Nach Voraussetzung gibt es $\xi, \tilde{\xi} \in [0, a]$ und $\eta, \tilde{\eta} \in [0, b]$, so dass $F(\xi, \eta) = G(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |F(0, 0) - G(0, 0)| &= |F(0, 0) - F(\xi, \eta) + G(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - G(0, 0)| \\ &\leq |F(0, 0) - F(\xi, \eta)| + |G(0, 0) - G(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})| = (*) \end{aligned}$$

Nachdem $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} < \delta$ und $\sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} < \delta$ folgt, dass

$$(*) < \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} = \kappa.$$

□

Wir werden auch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus der Analysis I verwenden. Dieser kann wie folgt formuliert werden.

Theorem 5.3. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es sei $h(s)$ eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ und $c > 0$. Dann gibt es eine reelle Zahl $\nu \in (0, c)$, so dass*

$$h'(\nu) = \frac{1}{c}(h(c) - h(0)).$$

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 5.1 zu.

Beweis von Satz 5.1. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir nur den Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^2$, $i = 1$, $j = 2$ und $p = (0, 0)$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen.

Es sei also $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Wir wollen mithilfe von Lemma 5.2 zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0).$$

Behauptung. Es seien $a > 0$ und $b > 0$, dann existieren $\xi \in (0, a)$ und $\eta \in (0, b)$, so dass

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, \eta) = \frac{1}{ab} \left(f(a, b) - f(a, 0) - f(0, b) + f(0, 0) \right).$$

und es existieren $\tilde{\xi} \in (0, a)$ und $\tilde{\eta} \in (0, b)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \frac{1}{ab} \left(f(a, b) - f(a, 0) - f(0, b) + f(0, 0) \right).$$

Die Behauptung impliziert also insbesondere folgende Aussage: für beliebige $a > 0$ und $b > 0$, existieren $\xi \in (0, a)$ und $\eta \in (0, b)$ sowie $\tilde{\xi} \in (0, a)$ und $\tilde{\eta} \in (0, b)$, so dass

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Nach Voraussetzung ist f zweimal stetig partiell differenzierbar, d.h. die Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f \text{ und } \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$$

sind stetig. Der Satz folgt nun also aus der Behauptung und aus Lemma 5.2.

Wir wenden uns nun dem Beweis der Behauptung zu. Die Idee für den Beweis ist, dass wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung zweimal geschickt auf die rechte Seite der Behauptung anwenden wollen, nämlich einmal auf eine ‘Funktion in der x -Variable’ und

dann auf eine ‘Funktion in der y -Variable’. Genauer gesagt, es ist

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{ab} (f(a, b) - f(a, 0) - f(0, b) + f(0, 0)) \\
 = & \frac{1}{b} \frac{1}{a} (h(a) - h(0)) && \text{wobei } h(x) := f(x, b) - f(x, 0) \\
 = & \frac{1}{b} \underbrace{\frac{1}{a} (h(a) - h(0))}_{= h'(\xi) \text{ für ein } \xi \in (0, a) \text{ nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf } h(x) \text{ und } c = a} \\
 = & \frac{1}{b} h'(\xi) \\
 = & \frac{1}{b} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\xi, b) - \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, 0) \right) && \text{nachdem } h(x) = f(x, y) - f(x, 0) \\
 = & \frac{1}{b} (h(b) - h(0)) && \text{wobei nun } h(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y) \\
 = & \frac{1}{b} \underbrace{(h(b) - h(0))}_{= h'(\eta) \text{ für ein } \eta \in (0, b), \text{ nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf } h(y) \text{ und } c = b} \\
 = & h'(\eta) \\
 = & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, \eta) && \text{nachdem nun } h(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y).
 \end{aligned}$$

Wir haben damit also die erste Behauptung bewiesen. Wenn man die Rollen von x und y im obigen Beweis vertauscht (d.h. wir betrachten zuerst $G_x(t) := f(x, t) - f(0, t)$ etc.) dann erhalten wir den Beweis für die zweite Behauptung. □

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal partiell differenzierbare Funktion. Es seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dann schreiben wir

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f \\
 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f.
 \end{aligned}$$

Wir verwenden zudem die ganz analogen Notationen für die höheren partiellen Ableitungen.

Der folgende Satz besagt nun, dass es bei k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen völlig egal ist, stetig, in welcher Reihenfolge wir die ersten k partiellen Ableitungen bilden.

Satz 5.4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Es seien $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und es sei $\sigma \in S_k$ eine Permutation⁵⁵. Dann gilt

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \partial x_{i_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(k)}}} f = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} f.$$

Beweis. Es folgt aus Satz 5.1, dass man je zwei nebeneinanderstehende partielle Ableitungen vertauschen kann. Der Satz folgt nun aus der Tatsache, welche in der Linearen Algebra bewiesen wurde, dass jedes Element in der Permutationsgruppe ein Produkt von Transpositionen ist. $\square$

6. DIFFERENZIERBARKEIT

6.1. Grenzwerte von Abbildungen. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei

$$\begin{aligned} g: V &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto g(v) \end{aligned}$$

eine Abbildung. Zudem sei $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren, wie in Analysis I:

$$\lim_{v \rightarrow v_0} g(v) = w \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{v \neq v_0 \in B_\delta(v_0) \cap V} \|g(v) - w\| < \epsilon.$$

Wenn $v_0 \in V$, dann folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$g \text{ stetig im Punkt } v_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{v \rightarrow v_0} g(v) = g(v_0).$$

6.2. Das Landau-Symbol o . Wir führen jetzt das Landau-Symbole o ein. Diese Schreibweise wird im weiteren Verlauf der Vorlesung die Notation bei mehreren Gelegenheiten deutlich vereinfachen.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0 und es seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Wir definieren⁵⁶

$$f(x) = o(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x \in B_\delta(0) \cap U} |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|.$$

Für Funktionen $f, g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir auch

$$f(x) = g(x) + o(h(x)), \text{ wenn } f(x) - g(x) = o(h(x)).$$

Sehr vereinfacht gilt $f(x) = o(g(x))$, wenn $|f(x)|$ beliebig viel kleiner als $|g(x)|$ ist in kleinen Umgebungen vom Ursprung.

Beispiel. Auf $U = \mathbb{R}$ gilt beispielsweise, dass

$$x^3 = o(x^2),$$

denn für jedes $\epsilon > 0$ setzen wir $\delta = \epsilon$, und dann gilt für $x \in (-\delta, \delta)$, dass

$$|x^3| = |x^2| \cdot |x| < |x^2| \cdot \delta = |x^2| \cdot \epsilon.$$

⁵⁵Zur Erinnerung, S_k bezeichnet die k -te Permutationsgruppe, d.h. die Gruppe aller bijektiven Abbildungen $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

⁵⁶Gesprochen wird das wie folgt: ‘ $f(x)$ ist klein-O von $g(x)$ ’.

In Übungsblatt 4 werden wir folgendes Lemma beweisen:

Lemma 6.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0 und es seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $f(0) = 0$ und so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Dann gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) = o(g(x)).$$

6.3. Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen. Wir führen nun den Begriff der differenzierbaren Abbildung ein.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Es sei $x_0 \in U$. Wir sagen f ist im Punkt x_0 differenzierbar⁵⁷, wenn es eine $m \times n$ -Matrix A gibt, so dass⁵⁸

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0) - Av}{\|v\|} = 0.$$

Wir nennen dann die Matrix A das *Differential* $Df(x_0)$ von f am Punkt x_0 .⁵⁹ Wir sagen f ist differenzierbar, wenn f in allen Punkten des Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Bemerkung.

- (1) Wenn $m = n = 1$, dann erhalten wir die gleiche Definition von Differenzierbarkeit wie in Analysis I. In diesem Fall ist dann A die 1×1 -Matrix, welche durch $f'(x)$ gegeben ist.⁶⁰
- (2) Es sei B eine $m \times n$ -Matrix es sei $C \in \mathbb{R}^m$. Wir nennen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto Bx + C \end{aligned}$$

⁵⁷In der Literatur wird dies manchmal auch als *total differenzierbar* bezeichnet.

⁵⁸Nachdem U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x_0) \subset U$. Wir betrachten dann also den Grenzwert der Abbildung

$$\begin{aligned} B_\epsilon(0) \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto \frac{f(x_0+v) - f(x_0) - Av}{\|v\|} \end{aligned}$$

am Punkt $v_0 = 0$.

⁵⁹Das Differential wird manchmal auch *Funktional-Matrix* oder *Jacobi-Matrix* genannt.

⁶⁰Genauer gesagt, wenn $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist, dann hatten wir in Analysis I definiert, dass f im Punkt x differenzierbar heißt, wenn der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Wenn nun also f diese Definition aus Analysis I erfüllt, dann gilt auch, dass

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0, \end{aligned}$$

d.h. f erfüllt die obige Definition der Differenzierbarkeit, wenn wir $A = (f'(x))$ setzen. Umgekehrt kann man leicht zeigen, dass wenn f differenzierbar im Sinne der obigen Definition ist mit Differential $A = (a)$, dann ist f auch differenzierbar im Sinne von Analysis I mit Ableitung a .

eine *affine Abbildung*.⁶¹ Diese affine Abbildung ist an jedem Punkt differenzierbar mit Differential B . In der Tat, denn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x) - Bv}{\|v\|} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(B(x+v) + C) - (Bx + C) - Bv}{\|v\|} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(Bx + Bv + C) - (Bx + C) - Bv}{\|v\|} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{0}{\|v\|} = 0. \end{aligned}$$

- (3) Dank Lemma 6.1 können wir Differenzierbarkeit auch mithilfe vom Landau-Symbol o formulieren. Genauer gesagt, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist im Punkt x_0 differenzierbar, genau dann, wenn es eine $m \times n$ -Matrix A gibt, so dass

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Av + o(\|v\|).$$

- (4) Für Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hatten wir in der Analysis I Vorlesung gesehen, dass f differenzierbar ist im Punkt x_0 , wenn f durch die Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approximiert werden kann, in dem Sinne, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0.$$

Im jetzigen Fall ist die Intuition ganz analog. Eine Funktion f ist differenzierbar im Punkt x_0 mit Differential $Df(x_0)$, wenn man f im Punkt x_0 durch die affine Abbildung $x \mapsto f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$ ‘approximieren’ kann, indem Sinne, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0))}{\|x - x_0\|} = 0.$$

In Analysis I hatten wir gesehen, dass die Ableitung viele Eigenschaften einer Funktion bestimmt. Das weitere Ziel der Vorlesung ist zu zeigen, dass das Differential auch viele Eigenschaften einer Funktion bestimmt.

- (5) Es sei U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ kann man dann mithilfe des Graphen

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

bildlich darstellen. Wenn f in einem Punkt $v_0 = (x_0, y_0)$ in U differenzierbar ist mit Differential D , dann kann der Graph in der Umgebung von x_0 durch die affine Ebene

$$\{(v, f(v) + D(v - v_0)) \mid v \in \mathbb{R}^2\}$$

approximiert werden. Dies wird in Abbildung 18 illustriert.

Satz 6.2. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei*

$$f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

⁶¹Die Abbildung ist eine lineare Abbildung genau dann, wenn $C = 0$.

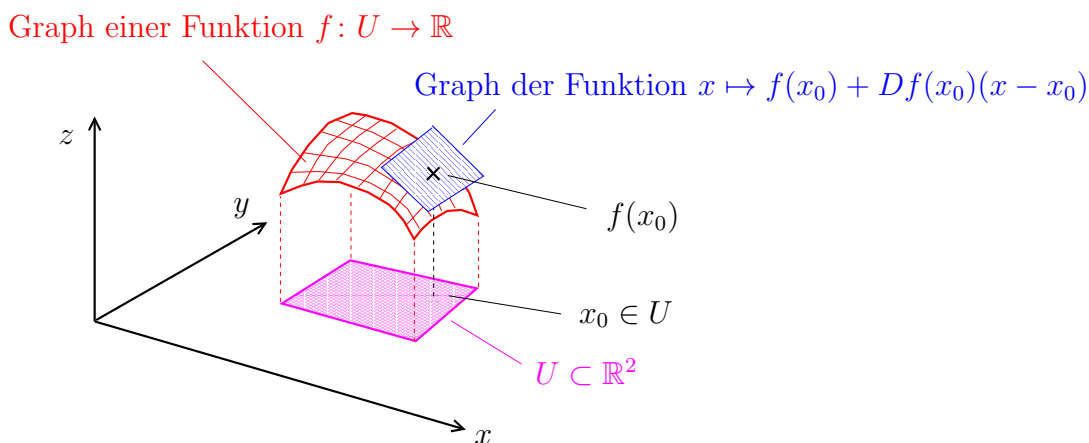


ABBILDUNG 18.

eine Abbildung, welche im Punkt $x \in U$ differenzierbar mit Differential $A = (a_{ij})$ ist. Dann gilt:

- (1) f ist stetig im Punkt x ,
- (2) für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ und es gilt

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

Bemerkung. Der Satz besagt insbesondere, dass wenn f im Punkt x differenzierbar ist, dann kann das Differential durch die partiellen Ableitungen bestimmt werden, insbesondere ist das Differential eindeutig bestimmt.

Andererseits werden wir in Übungsblatt 5 sehen, dass es Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, welche am Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar sind, welche aber am Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar sind.

Beweis von Satz 6.2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, welche im Punkt $x \in U$ differenzierbar mit Differential $A = (a_{ij})$ ist.

- (1) Aus der Voraussetzung

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x) - Av}{\|v\|} = 0,$$

folgt insbesondere, dass

$$\lim_{v \rightarrow 0} (f(x+v) - f(x) - Av) = 0,$$

daraus folgt dann, dass

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(x + v) = \lim_{v \rightarrow 0} (f(x) + Av) = f(x) + \underbrace{\lim_{v \rightarrow 0} Av}_{= 0 \text{ nach Lemma 2.6}} = f(x).$$

Wir haben also bewiesen, dass die Abbildung f im Punkt x stetig ist.

(2) Es seien $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x + v) - f(x) - Av}{\|v\|} = 0.$$

Dann gilt insbesondere, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_j) - f(x) - Ahe_j}{\|he_j\|} = 0.$$

Es folgt, wie in Satz 2.3, dass dann auch die Grenzwerte für die m Koordinaten gegen 0 konvergieren. Die i -te Koordinate von $A \cdot he_j$ ist ha_{ij} , es folgt also, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x) - ha_{ij}}{\|he_j\|} = 0.$$

Nachdem $\|he_j\| = h$, folgt nun, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x) - ha_{ij}}{\|h\|} = 0.$$

Nachdem der Grenzwert Null ist, ist der Absolutbetrag im Nenner irrelevant, und es folgt, dass sogar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x) - ha_{ij}}{h} = 0,$$

also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x)}{h} = a_{ij},$$

aber die linke Seite ist gerade die Definition der partiellen Ableitung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

□

Der vorherige Satz besagt, dass wenn f an einem Punkt differenzierbar ist, dann ist f auch an diesem Punkt partiell differenzierbar. Der folgende Satz ist in gewisser Weise die Umkehrung, wenn f stetig partiell differenzierbar ist, dann ist f auch differenzierbar. Genauer gesagt, wir haben folgenden Satz.

Satz 6.3. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann ist f differenzierbar.*

Der Satz besagt also, dass eine stetig partiell differenzierbare Funktion insbesondere differenzierbar ist. Wir führen nun folgende Sprechweisen ein.

(1) Wir sagen f ist stetig differenzierbar, wenn f stetig partiell differenzierbar ist.

- (2) Für $k \geq 2$ sagen wir, f ist k -mal stetig differenzierbar, wenn die Funktion k -mal stetig partiell differenzierbar ist.

Im Beweis von Satz 6.3 werden wir folgende Formulierung des Mittelwertsatzes verwenden.

Theorem 6.4. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es sei $h(t)$ eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine reelle Zahl t zwischen 0 und c , so dass⁶²*

$$c \cdot h'(t) = h(c) - h(0).$$

Beweis von Satz 6.3. Wir müssen also zeigen, dass f in jedem Punkt x differenzierbar ist. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^n$ und $x = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen.

Wir setzen

$$D := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(0) \right).$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v) - f(0) - Dv}{\|v\|} = 0.$$

Wir beweisen zuerst einmal folgende Behauptung.

Behauptung. Für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existieren $u_1, \dots, u_n$ mit $\|u_i\| \leq \|v\|$, $i = 1, \dots, n$, so dass

$$\left| \frac{f(v) - f(0) - Dv}{\|v\|} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right|.$$

Es sei also $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir wollen auch diese Behauptung mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung beweisen. Wir müssen dazu den Ausdruck $f(v) - f(0) - Dv$ durch Funktionen in einer Variablen beschreiben. Wir schreiben

$$\begin{aligned} w_0 &:= (0, \dots, 0), \\ w_1 &:= (v_1, 0, \dots, 0), \\ w_2 &:= (v_1, v_2, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ w_n &:= (v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

⁶²Für $v > 0$ ist dies gerade der übliche Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Die Aussage ist aber auch trivialerweise wahr für $c = 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& f(v) - f(0) - Dv \\
&= \sum_{i=1}^n (f(w_i) - f(w_{i-1})) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot v_i \\
&= \sum_{i=1}^n \underbrace{f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, 0, \dots, 0) - f(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, 0, \dots, 0)}_{=h(v_i)-h(v) \text{ für } h(s)=f(v_1, \dots, v_{i-1}, s, 0, \dots, 0)} - \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ wenden wir Satz 6.4 an auf

$$h(s) = f(v_1, \dots, v_{i-1}, s, 0, \dots, 0) \text{ und } c = v_i.$$

Wir erhalten ein t_i zwischen 0 und v_i mit

$$v_i h'(t_i) = h(v_i) - h(0)$$

Aber durch Rückübersetzen in die Funktion f erhalten, wir dass

$$h'(t_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(v_1, \dots, v_{i-1}, t_i, 0, \dots, 0)$$

und

$$h(v_i) - h(0) = f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, 0, \dots, 0) - f(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, 0, \dots, 0)$$

Für jedes i setzen wir nun $u_i = (v_1, \dots, v_{i-1}, t_i, 0, 0)$ und erhalten, dass

$$(*) = \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(u_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right).$$

Es folgt aus dieser Gleichung und der Dreiecksungleichung, dass

$$\left| \frac{1}{\|v\|} (f(v) - f(0) - Dv) \right| \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{|v_i|}{\|v\|}}_{\in [0,1]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right|.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Beobachtung, dass die Normen der Punkte $u_1, \dots, u_n$ kleiner gleich der Norm von v sind. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass in der Tat

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v) - f(0) - Dv}{\|v\|} = 0.$$

Sei also $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen stetig, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$u \in B_\delta(0) \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right| < \frac{\epsilon}{n}$$

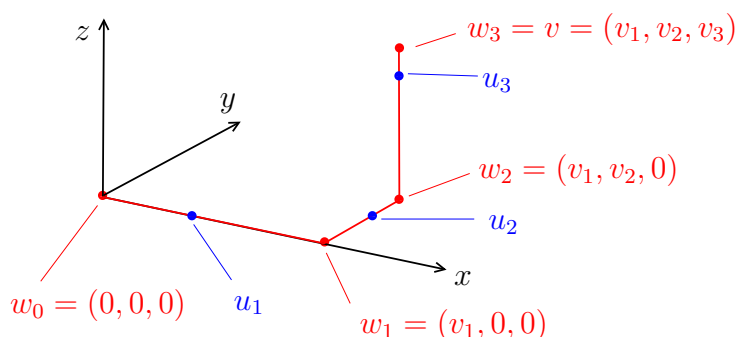


ABBILDUNG 19. Skizze für den Beweis von Satz 6.3

Es sei nun also $v \in B_\delta(0)$. Wir wählen $u_1, \dots, u_n$ wie in der Behauptung. Dann ist

$$\left| \frac{f(v) - f(0) - Dv}{\|v\|} \right| \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right|}_{< \frac{\epsilon}{n} \text{ da } \|u_i\| \leq \|v\| < \delta} < \epsilon.$$

Wir haben damit also gezeigt, dass der Grenzwert in der Tat 0 ist. $\square$

Satz 6.5. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so dass alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ definiert und stetig sind. Dann ist f differenzierbar, und an jedem Punkt x ist das Differential die $m \times n$ -Matrix*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Satz 2.3, Satz 6.2 und aus Satz 6.3 angewandt auf die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$. $\square$

Bemerkung. Ein Ziel der Analysis ist es das Studium von Funktionen möglichst auf Lineare Algebra zurückzuführen, denn lineare (oder affine) Abbildungen sind deutlich leichter zu verstehen, als ganz allgemeine Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Wenn eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einem Punkt x differenzierbar ist, dann können wir die Abbildung in der Nähe von x durch die affine Abbildung $v \mapsto f(x) + Df(x) \cdot (v - x)$ ‘approximieren’. Unser Interesse besteht daher darin, das Differential Df zu bestimmen. Satz 6.3 besagt nun, dass man das Differential mithilfe der partiellen Ableitungen von den Koordinatenfunktionen f_i bestimmen kann.

6.4. Norm von Matrizen. In diesem kurzen Kapitel führen wir die Norm einer Matrix ein. Wir werden diese im nächsten Kapitel für den Beweis der Kettenregel benötigen. Die

Norm einer Matrix wird aber auch im weiteren Verlauf der Vorlesung immer wieder auftauchen.

Für eine $m \times n$ -Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ definieren wir die Norm von A als⁶³

$$\|A\| := \max \left\{ \|Av\| \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \right\}.$$

Beispiel.

- (1) Für die Matrix $A = \lambda \text{id}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|A\| = |\lambda|$.
- (2) Für eine orthogonale $n \times n$ -Matrix A gilt per Definition, dass es das Skalarprodukt $v \cdot w = \langle v, w \rangle$ erhält. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt insbesondere

$$\|Av\| = \sqrt{\langle Av, Av \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|.$$

Also ist $\|A\| = 1$.

Wir fassen einige Eigenschaften von $\|A\|$ in folgendem Lemma zusammen.

Lemma 6.6.

- (1) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} M(m \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ A &\mapsto \|A\| \end{aligned}$$

ist eine Norm auf dem Vektorraum $M(m \times n, \mathbb{R})$.

- (2) *Für alle $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $w \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|Aw\| \leq \|A\| \cdot \|w\|.$$

- (3) *Für jede $n \times m$ -Matrix $A = (a_{ij})$ gilt*⁶⁴

$$\|A\| \leq nm \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Die Norm $\|A\|$ ist im Allgemeinen schwierig zu berechnen. Die Abschätzung in Lemma 6.6 (3) erlaubt es uns später die Norm $\|A\|$ relativ einfach nach oben abzuschätzen.

Beweis.

- (1) Die Homogenität von $\| \cdot \|$ folgt leicht aus den Definitionen. Das Argument von Fußnote 6 zeigt zudem, dass $\| \cdot \|$ die Dreiecksungleichung erfüllt. Wir müssen noch zeigen, dass $\|A\| = 0$ genau dann, wenn $A = 0$.⁶⁵ Es ist offensichtlich, dass $\|0\| = 0$.

⁶³Hier ist $\|v\|$ die euklidische Norm von $v \in \mathbb{R}^n$ und $\|Av\|$ ist die euklidische Norm von $Av \in \mathbb{R}^m$. Nachdem S^{n-1} kompakt ist und die Funktion $v \mapsto \|v\|$ stetig ist, wird das Maximum in der Tat angenommen, d.h. die Definition

$$\|A\| := \max \left\{ \|Av\| \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \right\}$$

macht Sinn.

⁶⁴Es gilt sogar $\|A\| \leq \sqrt{nm} \max |a_{ij}|$, aber für unsere Zwecke genügt die schwächere Abschätzung.

⁶⁵Die Bedeutung von 0 hängt vom Kontext ab. In diesem Fall ist '0' die $m \times n$ -Matrix deren Einträge alle 0 sind.

Es verbleibt also zu beweisen, dass $\|A\| \neq 0$, wenn $A \neq 0$. Es sei also $A = (a_{ij}) \neq 0$. Dann gibt es zumindest ein $a_{ij} \neq 0$. Es folgt, dass

$$\|A\| \geq \|Ae_j\| = \left\| \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \right\| \geq |a_{ij}| > 0.$$

- (2) Es sei also $w \in \mathbb{R}^n$. Wenn $w = 0$, dann ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Nehmen wir nun an, dass $w \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \|Aw\| &= \left\| A \underbrace{\|w\| \frac{1}{\|w\|} w}_{=w} \right\| = \|w\| \cdot \left\| A \underbrace{\frac{1}{\|w\|} w}_{\| \cdot \| = 1} \right\| \\ &\leq \|w\| \cdot \|A\| \quad \text{per Definition von } \|A\|. \end{aligned}$$

- (3) Es sei also $A = (a_{ij})$ eine $n \times m$ -Matrix. Wir wählen k, l , so dass $|a_{ij}| \leq |a_{kl}|$ für alle i, j . Es sei nun $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\| = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Av\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} v_j \right|^2 && \text{denn } \|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \underbrace{|a_{ij}|}_{\leq |a_{kl}|} \cdot \underbrace{|v_j|}_{\leq \|v\|=1} \right)^2}_{\leq n|a_{kl}|} && \text{Dreiecksungleichung} \\ &\leq \sum_{i=1}^m (n|a_{kl}|)^2 \\ &= mn^2|a_{kl}|^2 \leq m^2n^2|a_{kl}|^2. \end{aligned}$$

Die gewünschte Ungleichung erfolgt nun durch Wurzelziehen auf beiden Seiten.

□

6.5. Die Kettenregel. In diesem Kapitel formulieren und beweisen wir die Kettenregel für die Verknüpfung von zwei differenzierbaren Abbildungen. Zur Erinnerung, wenn $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, dann besagt die Kettenregel, dass $g \circ f$ ebenfalls differenzierbar ist, und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Das heißt also, dass

$$\begin{aligned} \text{Ableitung von } g \circ f \text{ am Punkt } x &= \text{Ableitung von } g \text{ am Punkt } f(x) \\ &\quad \text{mal Ableitung von } f \text{ am Punkt } x. \end{aligned}$$

Für differenzierbare Abbildungen zwischen Abbildungen in mehreren Variablen gilt eine ganz analoge Kettenregel:

Satz 6.7. (Kettenregel) *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und es seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbare Abbildungen, so dass $f(U) \subset V$. Dann ist die Abbildung $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ebenfalls differenzierbar, und für jeden Punkt $x \in U$ gilt:*

$$D(g \circ f)(x) = (Dg)(f(x)) \cdot Df(x).$$

Die Kettenregel besagt also, dass

$$\begin{aligned} \text{Differential von } g \circ f \text{ am Punkt } x &= \text{Differential von } g \text{ am Punkt } f(x) \\ &\quad \text{mal Differential von } f \text{ am Punkt } x. \end{aligned}$$

Hierbei ist $(Dg)(f(x))$ eine $k \times m$ -Matrix und $Df(x)$ ist eine $m \times n$ -Matrix. Das Matrixprodukt $(Dg)(f(x)) \cdot Df(x)$ ist also dann, wie gewünscht, eine $k \times n$ -Matrix.

Beweis. In der Formulierung der Differenzierbarkeit auf Seite 56 müssen wir zeigen, dass

$$(g \circ f)(x + \xi) = (g \circ f)(x) + Dg(f(x))Df(x)\xi + o(\|\xi\|).$$

Nach Voraussetzung gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + Df(x)\xi + \varphi(\xi) \quad \text{wobei } \varphi(\xi) = o(\|\xi\|),$$

sowie

$$g(f(x) + \eta) = g(f(x)) + Dg(f(x))\eta + \psi(\eta) \quad \text{wobei } \psi(\eta) = o(\|\eta\|).$$

Mit dieser Notation erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + \xi) &= g(f(x + \xi)) \\ &= g\left(f(x) + \underbrace{Df(x)\xi + \varphi(\xi)}_{=: \eta}\right) \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x))\eta + \psi(\eta) \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x))Df(x)\xi + \underbrace{Dg(f(x))\varphi(\xi)}_{=(1)} + \underbrace{\psi(Df(x)\xi + \varphi(\xi))}_{=(2)}. \end{aligned}$$

Es genügt nun also zu zeigen, dass die Terme (1) und (2) vom Typ $o(\|\xi\|)$ sind.⁶⁶ Genauer gesagt, es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Es ist

$$(1) \quad Dg(f(x))\varphi(\xi) = o(\|\xi\|).$$

sowie

$$(2) \quad \psi(Df(x)\xi + \varphi(\xi)) = o(\|\xi\|).$$

⁶⁶Hierbei benützen wir die elementare Aussage, dass wenn $p(\xi) = o(\|\xi\|)$ und $q(\xi) = o(\|\xi\|)$, dann ist auch $(p + q)(\xi) = o(\|\xi\|)$.

Wir beweisen zuerst die erste Aussage. Wir setzen $A := Dg(f(x))$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{A\varphi(\xi)}{\|\xi\|} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(A \frac{1}{\|\xi\|} \varphi(\xi) \right) \quad \text{da die Matrix-Multiplikation linear ist} \\ &= A \left(\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} \varphi(\xi) \right) \quad \text{da Multiplikation mit } A \text{ nach Lemma 2.6 stetig ist} \\ &= A \cdot 0 \quad \text{da } \varphi(\xi) = o(\|\xi\|) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun der zweiten Aussage zu. Wir setzen $B := Df(x)$. Wir wollen also zeigen, dass

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\psi(B\xi + \varphi(\xi))}{\|\xi\|} = 0.$$

Um diesen Grenzwert zu bestimmen, wollen wir zuerst den Ausdruck $B\xi + \varphi(\xi)$ besser verstehen. Nachdem $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|)$ gibt es insbesondere eine offene Umgebung U von 0, so dass $\|\varphi(\xi)\| \leq \|\xi\|$ für alle $\xi \in U$. Wir bezeichnen nun mit $\|B\|$ die Norm der Matrix B , welche wir im vorherigen Kapitel eingeführt hatten. Für alle $\xi \in U$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|B\xi + \varphi(\xi)\| &\leq \|B\xi\| + \|\varphi(\xi)\| \\ &\leq (\|B\| + 1)\|\xi\| \quad \text{nach Lemma 6.6 (2)} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} (B\xi + \varphi(\xi)) = 0.$$

Es folgt, dass

$$\frac{\psi(B\xi + \varphi(\xi))}{\|\xi\|} = \underbrace{\frac{\psi(B\xi + \varphi(\xi))}{\|B\xi + \varphi(\xi)\|}}_{\substack{\lim_{\xi \rightarrow 0} = 0, \text{ da } \lim_{\xi \rightarrow 0} (B\xi + \varphi(\xi)) = 0 \\ \text{und } \psi(\nu) = o(\|\nu\|)}} \cdot \underbrace{\frac{\|B\xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\substack{\text{beschränkt durch} \\ \|B\| + 1}}.$$

Es folgt nun auch, dass die Funktion auf der linken Seite mit $\xi \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert.⁶⁷

□

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Korollar.

Korollar 6.8. *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und es sei $f: U \rightarrow V$ eine bijektive differenzierbare Abbildung, welche zudem eine differenzierbare Umkehrabbildung $f^{-1}: V \rightarrow U$ besitzt. Dann gilt für jeden Punkt $y \in V$, dass*

$$Df^{-1}(y) = \text{Inverses der Matrix } Df(f^{-1}(y)).$$

⁶⁷Hierbei verwenden wir die Aussage, dass wenn $\lim_{\xi \rightarrow 0} p(\xi) = 0$ und $q(\xi)$ beschränkt ist, dann gilt auch $\lim_{\xi \rightarrow 0} p(\xi)q(\xi) = 0$.

Beweis. Es sei also $y \in V$. Nachdem sowohl f als auch f^{-1} differenzierbar sind folgt aus der Kettenregel, dass

$$\text{id} = D \text{id}(y) = D(f \circ f^{-1})(y) = Df(f^{-1}(y)) \cdot Df^{-1}(y)$$

Durch Auflösen nach $Df^{-1}(y)$ erhalten wir

$$Df^{-1}(y) = \text{Inverses der Matrix } Df(f^{-1}(y)).$$

□

6.6. Der Gradient.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Es sei $x \in U$. Dann heißt der Vektor

$$\nabla f(x) := \text{Grad } f(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right)$$

der *Gradient* von f am Punkt x .^{68 69}

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ auf $\mathbb{R}^2$. Der Gradient am Punkt (x, y) gegeben durch

$$\text{Grad } f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y \right).$$

In Skizzen zeichnet man normalerweise $\text{Grad } f(x, y)$ als Vektor, welcher am Punkt (x, y) beginnt. Einige der Gradienten der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ sind in Abbildung 20 skizziert.

Bevor wir fortfahren erinnern wir nun kurz an das Skalarprodukt von zwei Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_n)$ in $\mathbb{R}^n$, welches wie folgt definiert ist:

$$\langle v, w \rangle := v \cdot w := \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i.$$

Folgendes Lemma gibt eine geometrische Interpretation vom Skalarprodukt.

⁶⁸Das Symbol ∇ wird als ‘Nabla’ ausgesprochen. Das Wort ‘Nabla’ ist der hebräische Name für einen Harfentyp, welcher in etwa die Form von ∇ besitzt.

⁶⁹Wir schreiben Vektoren in $\mathbb{R}^n$ manchmal in Zeilenform (z.B. wenn der Platz beschränkt ist) und manchmal in Spaltenform (z.B. wenn wir die Multiplikation mit einer Matrix verdeutlichen wollen).

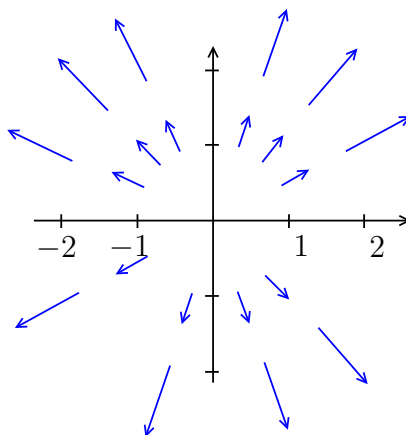


ABBILDUNG 20. Gradienten der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$.

Lemma 6.9. *Es sei φ der Winkel zwischen zwei Vektoren v und w in $\mathbb{R}^n$, dann gilt ⁷⁰*

$$\langle v, w \rangle = \cos(\varphi) \cdot \|v\| \cdot \|w\|.$$

Wir können nun folgenden wichtigen Spezialfall der Kettenregel formulieren.

Satz 6.10. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es sei $p \in U$ und es sei zudem $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $p + tv \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt*

$$\frac{d}{dt}f(p + tv) = \underbrace{Df(p + tv)}_{1 \times n\text{-Matrix}} \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^n} = \left\langle \underbrace{\text{Grad } f(p + tv)}_{\in \mathbb{R}^n}, \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^n} \right\rangle.$$

Insbesondere erhalten wir am Punkt $t = 0$, dass

$$\left. \frac{d}{dt}f(p + tv) \right|_{t=0} = Df(p)v = \langle \text{Grad } f(p), v \rangle.$$

Die Aussage des Lemmas wird in Abbildung 21 illustriert.

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zudem sei $p \in U$ und es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Aus der Offenheit von U folgt leicht, dass es ein $\epsilon > 0$

⁷⁰Es stellt sich natürlich die Frage, wie den der Winkel zwischen v und w definiert ist. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- (1) Man kann die Gleichung im Lemma als Definition des Winkels zwischen den Vektoren v und w auffassen. Dann ist die Aussage des Lemmas eine Tautologie.
- (2) Für zwei Vektoren v und w in $\mathbb{R}^n$ gibt es eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$, so dass Av und Aw in $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ liegen. Wir definieren dann den Winkel zwischen v und w als den Winkel zwischen Av und Aw . Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von A .

gibt, so dass $p + tv \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Die erste Gleichheit des Satzes folgt sofort aus der Kettenregel angewandt auf die Verknüpfung $f \circ h$ der Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} f: U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & f(s) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} h: (-\epsilon, \epsilon) & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & p + tv \end{array}$$

und der Beobachtung, dass $Dh(t) = v$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Die zweite Gleichheit folgt nun ebenfalls leicht aus den Definitionen und den bisherigen Ergebnissen. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument dazu noch aus. Wir schreiben $v = (v_1, \dots, v_n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Df(p + tv)v &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p + tv) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p + tv) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} && \text{Berechnung von } Df \text{ mit Satz 6.3} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + tv) \cdot v_i \\ &= \langle \text{Grad } f(p + tv), v \rangle && \text{Definition vom Skalarprodukt.} \end{aligned}$$

□

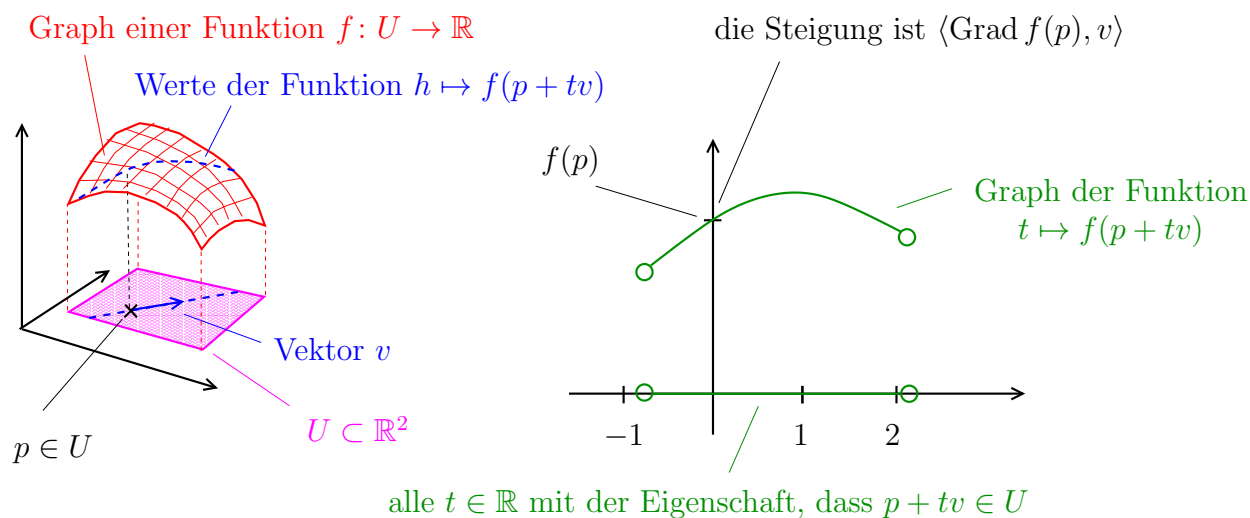


ABBILDUNG 21. Skizze zu Satz 6.10.

Durch zweifaches Anwenden von Satz 6.10 erhalten wir auch folgende Aussage, welche in Übungsblatt 5 bewiesen wird. Wir werden diesen Satz später benötigen, wenn wir lokale Maxima und Minima von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ bestimmen wollen.

Satz 6.11. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es sei $p \in U$ und es sei zudem $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Es sei $\epsilon > 0$, so dass $p + tv \in U$*

für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} g: (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(p + tv) \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, dass⁷¹

$$g^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(p + tv) \cdot v_i v_j.$$

6.7. Richtungsableitungen.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$. Falls der Grenzwert

$$\left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

existiert, dann bezeichnen wir den Grenzwert als die *Richtungsableitung* $D_v f(x)$ von f im Punkt x in Richtung v .

Beispiel. Wenn $v = e_i$, d.h. wenn v der i -te Einheitsvektor ist, dann folgt direkt aus den Definitionen, dass

$$D_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Folgender Satz folgt sofort aus Satz 6.10 und Lemma 6.9.

Satz 6.12. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$. Dann gilt

$$D_v f(x) = \langle v, \text{Grad } f(x) \rangle.$$

Insbesondere, wenn $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen v und $\text{Grad } f(x)$ ist, dann gilt

$$D_v f(x) = \cos(\varphi) \cdot \|\text{Grad } f(x)\|.$$

Satz 6.12 besagt insbesondere, dass die Richtungsableitung maximal ist, wenn $\varphi = 0$, d.h. wenn v und $\text{Grad } f(x)$ in die gleiche Richtung zeigen. Wir erhalten also folgendes Korollar:

Korollar 6.13. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $x \in U$ ein Punkt, so dass $\text{Grad } f(x) \neq 0$. Dann ist⁷²

$$v := \frac{\text{Grad } f(x)}{\|\text{Grad } f(x)\|}$$

die Richtung mit maximaler Richtungsableitung.

Anders ausgedrückt, ‘der Gradient zeigt in die Richtung in welche f am schnellsten ansteigt’.

⁷¹Was ist eigentlich die Aussage des Satzes für $n = 1$?

⁷²Eine ‘Richtung’ ist immer ein Vektor mit Länge 1, wir müssen deswegen den Gradienten auf die Länge 1 normieren.

6.8. Gradienten und Niveaulinien. In diesem Kapitel betrachten wir nur Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$. Wir haben schon gesehen, dass man sich solche Funktionen durch den Graphen

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

veranschaulichen kann. In Abbildung 22 sind beispielsweise die Graphen der Funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $g(x, y) = x^2 + y^2$ skizziert. Eine alternative Methode um Funktion

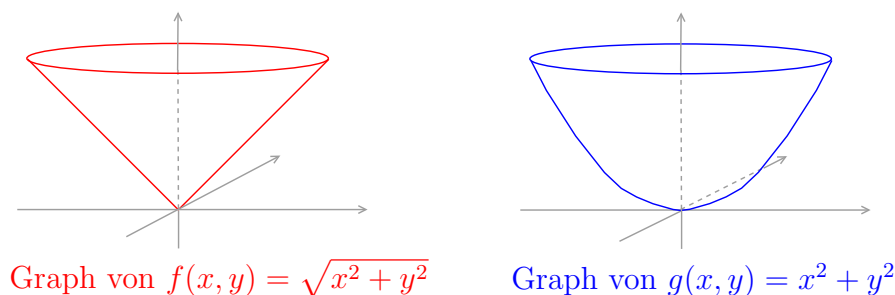


ABBILDUNG 22.

zu veranschaulichen ist wie folgt gegeben: für verschiedene Werte $C \in \mathbb{R}$ betrachten wir die *Niveaulinie*⁷³

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\}.$$

Beispielsweise werden in Abbildung 23 die Niveaulinien für die Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{mit } C = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$$

sowie für die Funktion

$$g(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{mit } C = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, 4$$

skizziert. Für diese beiden Funktionen ist der Gradient gegeben durch

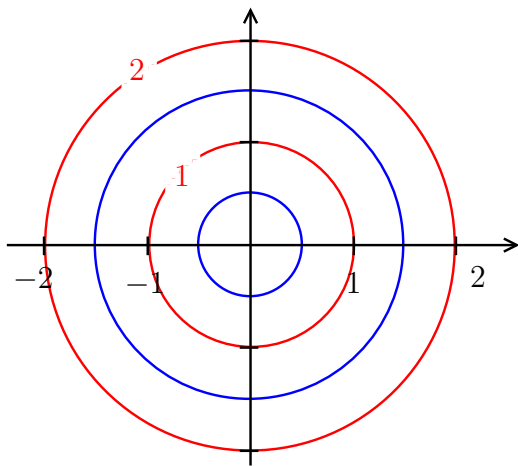
$$\text{Grad } f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad \text{wobei } (x, y) \neq (0, 0)$$

sowie durch

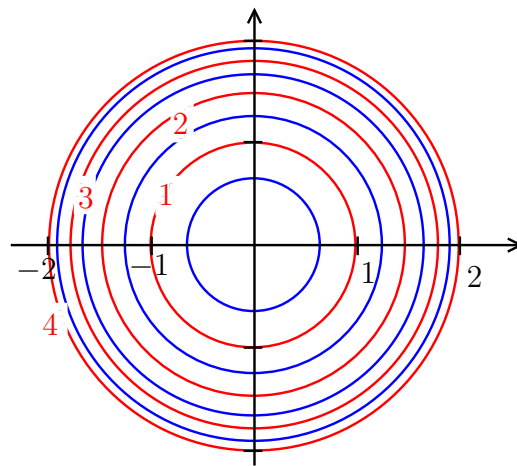
$$\text{Grad } g(x, y) = (2x, 2y).$$

In beiden Fällen zeigt also der Gradient ‘weg vom Ursprung’. Im ersten Fall besitzt der Gradient immer die Länge 1, d.h. der Anstieg ist konstant. Im zweiten Fall besitzt der Gradient die Länge $2\sqrt{x^2 + y^2}$, er wird also länger, wenn man sich vom Ursprung fortbewegt. Die Gradienten für beide Funktionen werden in Abbildung 24 skizziert. Damit die Skizzen übersichtlich bleiben, sind in beiden Fällen die Gradienten auf $\frac{1}{4}$ der Länge gestaucht.

⁷³Auf Wanderkarten wird die Höhe, als Funktion $(x, y) \mapsto h(x, y)$ durch Niveaulinien illustriert, diese werden dabei normalerweise Höhenlinien genannt.

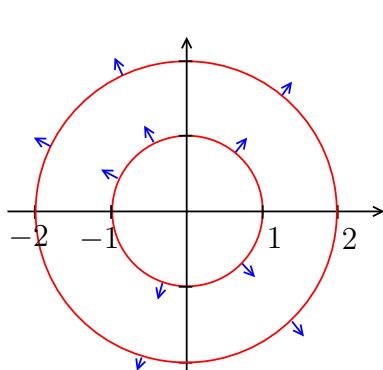


Niveaulinien für die Funktion
 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

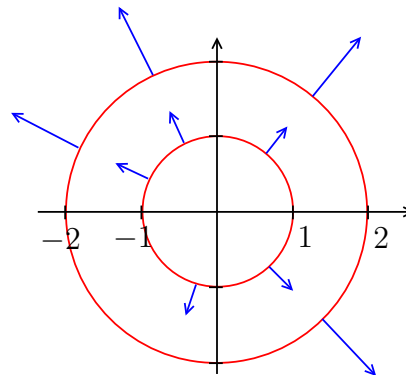


Niveaulinien für die Funktion
 $g(x, y) = x^2 + y^2$

ABBILDUNG 23. Beispiele von Niveaulinien.



Gradienten für die Funktion
 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



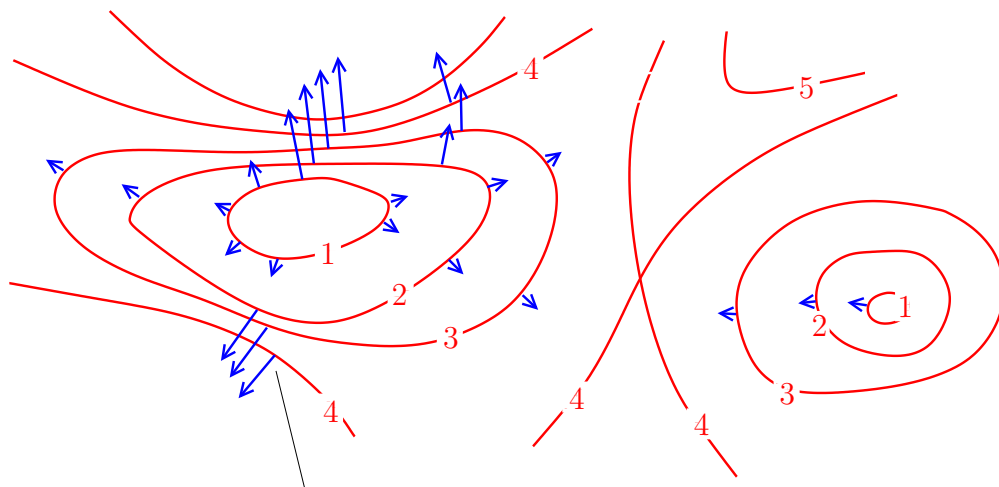
Gradienten für die Funktion
 $g(x, y) = x^2 + y^2$

ABBILDUNG 24. Beispiele von Gradienten.

In den Bildern sehen wir, dass der Gradient senkrecht auf den Niveaulinien steht. Wir werden später sehen, dass dies kein Zufall ist, sondern dass dies unter geeigneten Voraussetzungen immer der Fall ist.⁷⁴ In Abbildung 25 zeigen wir das typische Bild für eine Funktion

⁷⁴Insbesondere müssen wir noch präzise machen, was es heißen soll, dass ein Vektor an einem Punkt senkrecht zu einer Kurve ist.

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die Gradienten stehen senkrecht auf den Niveaulinien und zeigen in die Richtung, in der die Funktion ansteigt. Desto enger die Niveaulinien aneinander liegen, desto größer ist die ‘Steigung’, und desto länger sind die Gradienten.



eng liegende Niveaulinien bedeutet starker Anstieg und lange Gradienten

ABBILDUNG 25. Niveaulinien und Gradienten für eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

75

7. DIE TAYLORFORMEL UND LOKALE EXTREMA

In Analysis I hatten wir gesehen, dass wir Funktionen auf $\mathbb{R}$ in der Umgebung von einem Punkt durch die Taylorpolynome approximieren können. Ganz analog wollen wir jetzt Taylorpolynome in mehreren Variablen⁷⁶ einführen, um Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ zu approximieren. Zudem wollen wir in diesem Kapitel Methoden finden um mithilfe von partiellen Ableitungen lokale Maxima und Minima von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen.

7.1. Die Taylorformel aus der Analysis I. Bevor wir Taylorpolynome für Funktionen $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ einführen, erinnern wir an das Taylorpolynom aus der Analysis I. Es sei also

⁷⁵Wie schaut der zugehörige Graph dieser Funktion aus?

⁷⁶Ein Polynom in den Variablen $\xi_1, \dots, \xi_n$ ist eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$ von der Form

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = -5\xi_1\xi_2^3 + \xi_1\xi_3\xi_n^7 + \frac{2}{3}\xi_3\xi_4^2.$$

$g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^k -Funktion⁷⁷ und $c \in (a, b)$. Dann heißt

$$p_k(t) := p_{k,c}(t) := \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} g^{(m)}(c) (t-c)^m$$

das k -te Taylorpolynom von g bei c . Zur Erinnerung, das Polynom p_k zeichnet sich dadurch aus, dass für alle $m = 0, \dots, k$ gilt:

$$p_k^{(m)}(c) = g^{(m)}(c),$$

d.h. die ersten k Ableitungen von p_k und g stimmen am Punkt c überein. Der folgende Satz ist nun Satz 15.4 aus der Analysis I:

Satz 7.1. *Es sei $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^k -Funktion und $c \in (a, b)$, dann gilt*

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{g(t) - p_{k,c}(t)}{(t-c)^k} = 0.$$

Oder anders ausgedrückt, es ist

$$g(c + \xi) = p_k(c + \xi) + o(\xi^m).$$

Eine etwas genauere Formulierung ist durch Satz 15.6 aus der Analysis I gegeben:⁷⁸

Satz 7.2. (Restgliedformel von Lagrange) *Es sei $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^k -Funktion, $c \in (a, b)$ und $t \in (a, b)$. Dann existiert ein θ zwischen c und t , so dass*

$$g(t) = p_{k-1,c}(t) + \frac{1}{k!} g^{(k)}(\theta) \cdot (t-c)^k.$$

7.2. Die Taylorformel im $\mathbb{R}^n$. Die Idee ist nun eine Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch ein Polynom in n Variablen zu approximieren. Wir führen dazu zuerst die Taylorpolynome von Funktionen in n Variablen ein, und danach zeigen wir, dass diese in der Tat die ursprüngliche Funktion approximieren.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x \in U$. Wir bezeichnen⁷⁹

$$p_k(\xi_1, \dots, \xi_n) := \underbrace{\sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} f(x) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}}_{=: q_m(\xi_1, \dots, \xi_n)}$$

als das k -te Taylorpolynom von f im Punkt x .

⁷⁷Zur Erinnerung, wir sagen eine Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine C^k -Funktion, wenn f k -mal stetig differenzierbar ist.

⁷⁸Warum folgt aus Satz 7.2 auch Satz 7.1?

⁷⁹Selbst wenn es die Notation etwas verheimlicht, der Ausdruck auf der rechten Seite ist ein Polynom in den Variablen $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Diese Definition wirkt am Anfang etwas einschüchternd, aber wie für das k -te Taylorpolynom in Analysis I betrachten wir wieder für $m = 0, \dots, k$ die (partiellen) Ableitungen von Grad m . Nachdem es viele solche partiellen Ableitungen gibt, müssen wir notgedrungen auch alle partiellen Ableitungen von Grad m berücksichtigen.

Bemerkung.

- (1) Wenn $n = 1$, dann ist gibt es für jedes m genau die Möglichkeit $i_1 = \dots = i_m = 1$ zu berücksichtigen, d.h. wir bilden genau die m -te Ableitung von f . Es folgt, dass

$$p_k(\xi) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} f^{(m)}(x) \xi^m.$$

Wenn $x = 0$, dann ist dies gerade das übliche Taylorpolynom aus der Analysis I. Wenn $x \neq 0$, dann erhalten wir das Taylorpolynom aus der Analysis I um ‘ x auf der x -Achse verschoben’.

- (2) Das k -te Taylorpolynom ist so gewählt, dass die partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k am Punkt x den partiellen Ableitungen von p_k am Punkt 0 entsprechen. Diese Aussage wird für den Spezialfall $k = 2$ im 6. Übungsblatt bewiesen. Der allgemeine Fall ist ebenfalls nicht schwierig zu beweisen, aber die Notation wird etwas unübersichtlich.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir fast durchgehend nur die Taylorpolynome p_0, p_1, p_2 betrachten. Wir wollen daher im Folgenden explizite Formeln für die Polynome q_0, q_1 und q_2 und damit auch für die Taylorpolynome p_0, p_1 und p_2 geben.

Es sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zudem sei $x \in U$. Wir betrachten zuerst das Polynom q_0 . In diesem Fall ist $m = 0$, d.h. $\frac{1}{m!} = \frac{1}{0!} = 1$. Zudem leiten wir f nicht ab. Es folgt also, dass

$$q_0(\xi) = f(x).$$

Anders ausgedrückt, $q_0(\xi)$ ist das konstante Polynom $f(x)$. Wir wenden uns dem Polynom q_1 zu. Dann ist $m = 1$, d.h. $\frac{1}{m!} = \frac{1}{1!} = 1$. Es folgt dann sofort aus der Definition von $q_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$, dass

$$q_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(x) \xi_i.$$

Für $m = 2$ erhalten wir zudem, dass

$$q_2(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \cdot \xi_i \xi_j.$$

Wir können jetzt den wichtigsten Satz dieses Kapitels formulieren: ⁸⁰

⁸⁰Im Spezialfall $n = 1$ ist die Aussage von Satz 7.3 genau die Aussage von Satz 7.1, allerdings mit einer etwas anderen Notation.

Satz 7.3. (Satz von Taylor) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x \in U$. Wir bezeichnen mit $p_k(\xi)$ das k -te Taylorpolynom von f im Punkt x . Dann gilt*

$$f(x + \xi) = p_k(\xi) + o(\|\xi\|^k).$$

Es sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Zudem sei $x \in U$. Das Ziel ist also zu zeigen, dass man für ‘kurze’ Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^n$ den Funktionswert $f(x + \xi)$ durch $p_k(\xi)$ annähern kann.

Der Beweis von Satz 7.3 besteht grob gesprochen aus den folgenden drei Schritten.

- (1) Für jedes ‘kurze’ ξ wollen wir $f(x + \xi)$ annähern, dazu betrachten wir für jedes ξ die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto f(x + t\xi). \end{aligned}$$

Wir können nun Satz 7.2 auf diese Funktion und mit $t = 1$ anwenden.

- (2) Um das Ergebnis aus (1) mit Satz 7.3 in Verbindung zu bringen, müssen wir die Ableitungen von $t \mapsto f(x + t\xi)$ durch die partiellen Ableitungen von f ausdrücken. Für $k = 1$ und $k = 2$ hatten wir solche Formeln schon in den Sätzen 6.10 und 6.11 formuliert und bewiesen.
- (3) Wir müssen dann noch zeigen, dass die Aussagen für jedes einzelne ξ dann auch in der Tat die gewünschte Aussage liefern. Hierbei verwenden wir, dass f k -mal stetig differenzierbar ist, d.h. wir können den Fehlerterm in Satz 7.2 in der Nähe von 0 kontrollieren.

7.3. Beweis von Satz 7.3. In diesem Kapitel werden wir die obigen drei Schritte für den Beweis von Satz 7.3 ausführen. Wir beginnen dieses Kapitel mit folgendem Satz, welcher dem 2. Schritt entspricht.

Satz 7.4. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und zudem sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} g: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x + t\xi) \end{aligned}$$

*k -mal stetig differenzierbar, und es gilt*⁸¹

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Für $k = 1$ entspricht dieser Satz gerade der Aussage von Satz 6.10 und für $k = 2$ ist dies Satz 6.11. Wir hatten beide Sätze dadurch bewiesen, dass wir die Kettenregel einmal, beziehungsweise zweimal angewandt hatten. Satz 7.4 wird nun, nicht überraschend, dadurch bewiesen, dass wir die Kettenregel insgesamt k -Mal anwenden.

⁸¹Die Notation $\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n$ ist eine Abkürzung von $\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach k . Für $k = 1$ folgt aus der Kettenregel, genauer gesagt aus Satz 6.10, dass

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x + t\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + t\xi) \xi_i.$$

Wir führen nun den Induktionsschritt $k - 1 \rightarrow k$ durch. Wir nehmen also an, dass die Aussage für $k - 1$ gilt. Dann folgt, dass

$$\begin{aligned} g^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} g^{(k-1)}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}} \right) && \text{Induktionsannahme} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x + t\xi) \right) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x + t\xi) \right) \xi_j \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}} && \begin{array}{l} \text{Satz 6.10 angewandt} \\ \text{auf } \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f \end{array} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} && \text{wir ersetzen } j \text{ durch } i_k. \end{aligned}$$

Wir haben damit den Induktionsschritt vollzogen, insbesondere haben wir jetzt den Satz bewiesen. $\square$

Der folgende Hilfssatz entspricht gerade den oben genannten ersten beiden Schritten im obigen Programm für den Beweis von Satz 7.3.

Satz 7.5. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Zudem sei $x \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit p_{k-1} das k -te Taylorpolynom von f am Punkt 0. Für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $\theta \in [0, 1]$, so dass*

$$f(\xi) = p_{k-1}(\xi) + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(\theta\xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Beweis. Wir wenden Satz 7.2 an auf die Funktion

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) := f(t\xi), \end{aligned}$$

mit $c = 0$ und $t = 1$. Der Satz folgt dann sofort aus Satz 7.4 und der Definition von p_{k-1} . $\square$

Wir können nun Satz 7.3 beweisen.

Beweis von Satz 7.3. Wir beweisen Satz 7.3 im Spezialfall, dass $U = \mathbb{R}^n$ und $x = 0$. Der allgemeine Fall wird fast genauso bewiesen.

Es sei also $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Wir wollen zeigen, dass

$$f(\xi) = p_k(\xi) + o(\|\xi\|^k).$$

Sei also $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(\xi) - p_k(\xi)| \leq \epsilon \|\xi\|^k \quad \text{für alle } \xi \in B_\delta(0).$$

Nach Satz 7.5 existiert zu jedem $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein $\theta \in [0, 1]$, so dass

$$f(\xi) = p_{k-1}(\xi) + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(\theta \xi) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}.$$

Es folgt aus der Definition von $p_k(\xi)$, dass

$$\begin{aligned} & |f(\xi) - p_k(\xi)| \\ &= |f(\xi) - p_{k-1}(\xi) - q_k(\xi)| \\ &= \left| \underbrace{\frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(\theta \xi) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}}_{=f(\xi)-p_{k-1}(\xi)} - \underbrace{\frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(0) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}}_{=q_k(\xi)} \right| \\ &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \underbrace{\left| \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(\theta \xi) - \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(0) \right|}_{n^k \text{ Summanden}} \cdot \underbrace{|\xi_{i_1}| \dots |\xi_{i_k}|}_{\leq \|\xi\|^k} \\ &\leq \|\xi\|^k \cdot \frac{1}{k!} k^n \cdot \max_{i_1, \dots, i_k} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(\theta \xi) - \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(0) \right|. \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $\|\theta \xi\| \leq \|\xi\|$

Aus der Stetigkeit der k -fachen partiellen Ableitungen folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und $y \in B_\delta(0)$ gilt:

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(y) - \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f(0) \right\| < \epsilon \cdot \frac{k!}{n^k}.$$

Es folgt sofort aus der obigen Abschätzung, dass dieses δ die gewünschte Eigenschaft besitzt. $\square$

7.4. Eine alternative Definition der Taylorpolynome (*). Dieses Kapitel ist nicht Teil der offiziellen Vorlesung.

Die Definition des Taylorpolynoms in mehreren Variablen hat zwei Nachteile:

- (1) die Definition ist lang und optisch nicht besonders ansprechend,
- (2) die Berechnung ist umständlich, weil wir alle partiellen Ableitungen hinschreiben müssen, ohne auszunützen, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge wir diese bestimmen.

In diesem Kapitel werden wir eine alternative Definition der Taylorpolynome kennenlernen, welche beide Problem behebt.

Allerdings müssen wir dazu zuerst einige Notationen einführen.

Notation. Für ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \end{aligned}$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Wenn f eine $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion ist, so setzen wir

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 7.6. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x \in U$. Dann gilt*⁸²

$$p_k(x) = \sum_{m=0}^k \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) \xi^\alpha.$$

Diese Schreibweise des Taylorpolynoms ist deutlich kompakter als die ursprüngliche Definition und ähnelt auch deutlich mehr der Definition im ein-dimensionalen Fall. Zudem besitzt die Formel in Satz 7.6 für jedes m deutlich weniger Summanden als in der ursprünglichen Definition von $q_m(\xi)$.⁸³

Beweis. Es folgt sofort aus den Definitionen, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $m = 0, \dots, k$ gilt

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x) \cdot \xi^\alpha.$$

Es seien $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$. Wenn unter den Indizes $i_1, \dots, i_m$ der Index 1 genau α_1 -mal, der Index 2 genau α_2 -mal etc. vorkommt, so folgt aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} = D^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha.$$

⁸²Wir nehmen also die Summe über alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so dass $|\alpha| = m$.

⁸³Wieviele Summanden gibt es jeweils für $m = 2$ und ein beliebiges n ?

Für gegebenes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| = m$ gibt es genau

$$\frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} = \frac{m!}{\alpha!}$$

m -Tupel $(i_1, \dots, i_m)$, bei denen jede Zahl s genau α_s Mal vorkommt.⁸⁴ Es folgt, dass für gegebenes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = m$, in dem Ausdruck

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}$$

die partielle Ableitung $D^\alpha f(x)$ genau $\frac{m!}{\alpha!}$ Mal erscheint. Es folgt die Behauptung. $\square$

7.5. Das zweite Taylorpolynom und die Hessesche Matrix. Wir erinnern zuerst an den Satz von Taylor, welchen wir gerade bewiesen hatten. Der Satz lautet wie folgt:

Satz 7.7. (Satz von Taylor) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x \in U$. Dann gilt*

$$f(x + \xi) = p_k(\xi) + o(\|\xi\|^k),$$

wobei

$$p_k(\xi) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} f(x) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}.$$

Wenn $k = 1$, dann hatten wir schon gesehen, dass

$$p_1(\xi) = q_0(\xi) + q_1(\xi) = f(x) + \langle \text{Grad } f(x), \xi \rangle,$$

und wir erhalten aus dem Satz von Taylor, dass

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \text{Grad } f(x), \xi \rangle + o(\|\xi\|).$$

⁸⁴ Für vorgegebene $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wollen wir also wissen, wieviele m -Tupel $(i_1, \dots, i_m)$ gibt es, so dass die 1 genau α_1 -Mal, die 2 genau α_2 -Mal etc. vorkommt. Ein solches m -Tupel ist gegeben durch

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1\text{-Mal}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2\text{-Mal}}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n\text{-Mal}} \right).$$

Wir erhalten alle anderen m -Tupel indem wir eine Permutation auf dieses m -Tupel anwenden. Andererseits ändert sich das Tupel nicht, wenn wir nur die α_1 -Einträge mit Eintrag 1 permutieren, oder nur die α_2 -Einträge mit Eintrag 2 permutieren, usw. Zusammengefasst erhalten wir also, dass

$$\text{Zahl solcher } m\text{-Tupel} = \frac{\text{Zahl der Permutationen von } (1, \dots, m)}{\prod_{j=1}^m \text{Zahl der Permutationen von } (1, \dots, \alpha_j)} = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}.$$

⁸⁵ Der Fall $k = 2$ ist vielleicht der wichtigste Spezialfall. Es folgt sofort aus den Definitionen, siehe auch Seite 74, dass

$$q_2(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \cdot \xi_i \xi_j.$$

Es folgt also, dass

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \text{Grad } f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \cdot \xi_i \xi_j + o(\|\xi\|^2).$$

Um die Notation etwas zu vereinfachen führen wir die Hessesche Matrix ein:

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Die $n \times n$ -Matrix

$$\text{Hess } f(x) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(x) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(x) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(x) \end{pmatrix}.$$

wird als die *Hessesche Matrix von f im Punkt x* bezeichnet. ⁸⁶

Bemerkung. Nach Satz 5.1 sind die partiellen Ableitungen vertauschbar. Es folgt, dass $\text{Hess } f(x)$ eine symmetrische Matrix ist.

Wir können nun folgendes Korollar zum Satz von Taylor formulieren.

Korollar 7.8. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \text{Grad } f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, \text{Hess } f(x) \xi \rangle + o(\|\xi\|^2).$$

Bemerkung. Eine elementare Rechnung zeigt, dass für jede symmetrische $n \times n$ -Matrix H und jeden Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\langle \xi, H \xi \rangle = \langle H \xi, \xi \rangle$. Aus der Symmetrie der Hesse-Matrix folgt also, dass

$$\langle \xi, \text{Hess } f(x) \xi \rangle = \langle \text{Hess } f(x) \xi, \xi \rangle.$$

⁸⁵Diese Aussage ist äquivalent zu der Aussage, dass

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(x + \xi) - f(x) - \langle \text{Grad } f(x), \xi \rangle}{\|\xi\|} = 0,$$

welches gerade die Definition der Differenzierbarkeit am Punkt x mit Differential $\text{Grad } f(x)$ ist.

⁸⁶Der Name geht auf den Mathematiker Otto Hesse zurück

Beweis. Das Korollar folgt aus der obigen Gleichung und der elementaren Berechnung, dass für eine beliebige $n \times n$ -Matrix $H = (h_{ij})$ und einen beliebigen Vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \langle \xi, H\xi \rangle &= \left\langle (\xi_1, \dots, \xi_n), \left(\sum_{i=1}^n h_{1i}\xi_i, \dots, \sum_{i=1}^n h_{ni}\xi_i \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n h_{1i}\xi_1\xi_i + \dots + \sum_{i=1}^n h_{ni}\xi_n\xi_i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n h_{ji}\xi_i\xi_j. \end{aligned}$$

□

Aus Satz 6.10 und Satz 6.11, der Berechnung vom Beweis von Korollar 7.8 und den Definitionen folgt leicht folgende hilfreiche Interpretation von den Werten $\langle v, \text{Hess } f(x)v \rangle$:

Lemma 7.9. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $\epsilon > 0$, so dass $x + tv \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Für die Funktion*

$$\begin{aligned} g: (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x + tv). \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} g(0) &= f(x) \\ g'(0) &= \langle \text{Grad } f(x), v \rangle \\ g''(0) &= \langle v, \text{Hess } f(x)v \rangle. \end{aligned}$$

Die Aussage des Lemmas wird in Abbildung 26 illustriert.

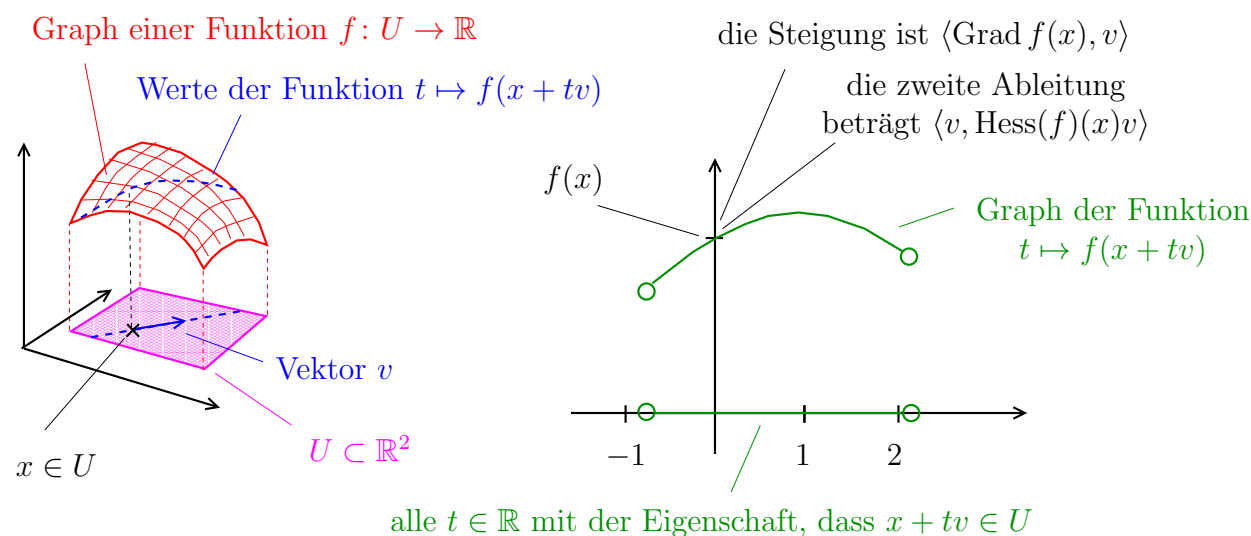


ABBILDUNG 26.

7.6. Lokale Extrema I.

Definition. Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$.

- (1) Wir sagen, $x \in U$ ist ein *globales Minimum* (oder auch *absolutes Minimum*), wenn $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in U$.
- (2) Wir sagen, $x \in U$ ist ein *lokales Minimum* (oder auch *relatives Minimum*), wenn es eine Umgebung V von x gibt, so dass $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in V$.
- (3) Wir sagen, $x \in U$ ist ein *striktes lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung V von x gibt, so dass $f(x) < f(y)$ für alle $y \neq x \in V$.

Ganz analog definieren wir *globales Maximum* und (*striktes*) *lokales Maximum*. Ein (striktes) lokales Extremum ist ein (striktes) lokales Maximum oder Minimum.

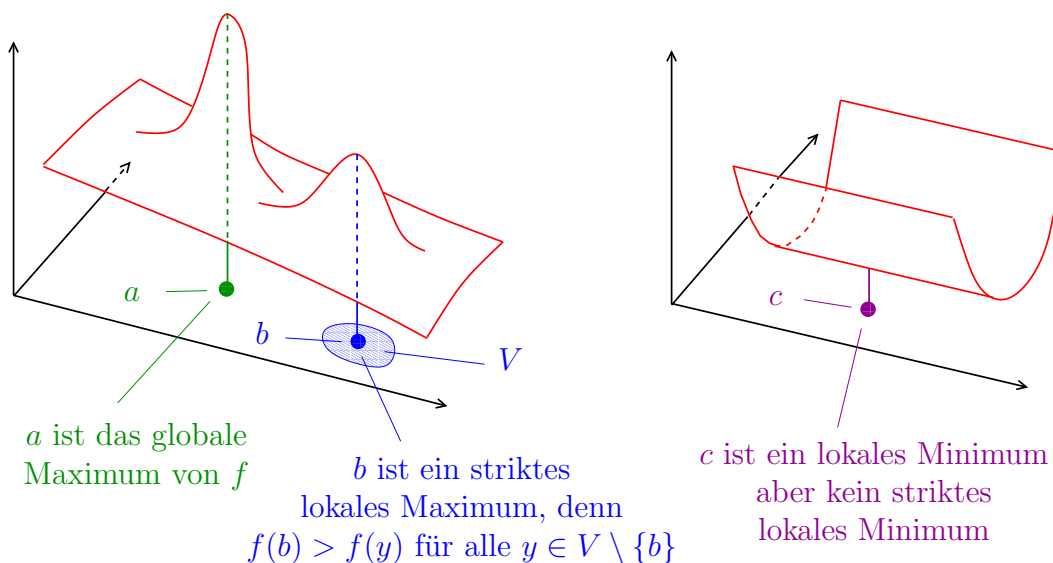


ABBILDUNG 27. Definition von globalen und (strikten) lokalen Extrema.

Wir werden in den folgenden Kapiteln Methoden kennenlernen, um lokale Extrema von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf offenen Teilmengen zu bestimmen. Im Anschluß daran werden wir dann studieren, wie wir globale Extrema von Funktionen bestimmen können.

In Kapitel 12 von Analysis I hatten wir gesehen, dass wenn $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, dann gilt für $x \in (a, b)$, dass

$$x \text{ lokales Minimum} \implies f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) \geq 0,$$

und

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0 \implies x \text{ striktes lokales Minimum}.$$

Das Ziel ist nun, diese Aussagen aus der Analysis I auf zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zu verallgemeinern.

Es ist offensichtlich, dass das Differential von $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ (oder äquivalent, der Gradient), die Rolle der 1. Ableitung spielt, und wir erhalten, nicht überraschend, folgenden Satz:

Satz 7.10. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Wenn $x \in U$ ein lokales Extremum von f ist, dann gilt*

$$\text{Grad } f(x) = 0.$$

Im Folgenden sagen wir, x ist ein kritischer Punkt von f , wenn $\text{Grad } f(x) = 0$.

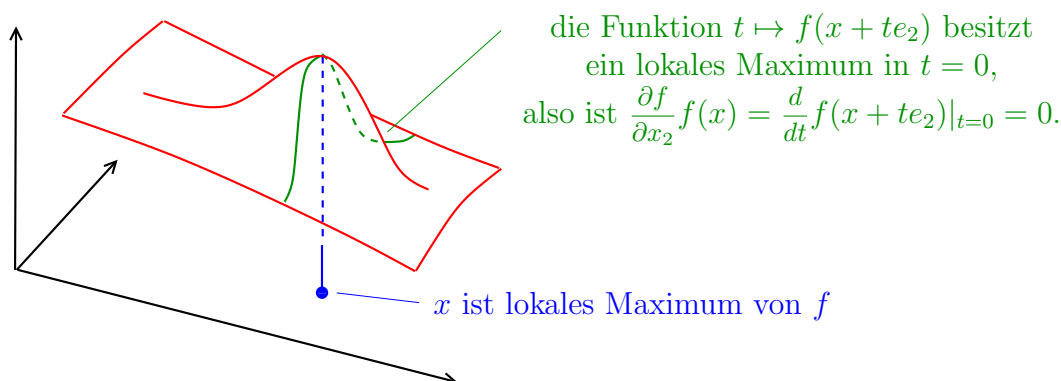


ABBILDUNG 28. Skizze zum Beweis von Satz 7.10.

Beweis. Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Nachdem U offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $x + te_i \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned} g_i: (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x + te_i). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und nach der Kettenregel ist diese Funktion differenzierbar und sie nimmt in $t = 0$ ein lokales Extremum an.⁸⁷ Es folgt also aus Lemma 12.1 von Analysis I, dass $g'_i(t) = 0$. Andererseits folgt aus der Definition der partiellen Ableitung, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g'_i(0).$$

Wir haben also gezeigt, dass alle partiellen Ableitungen von f am Punkt x verschwinden. Insbesondere haben wir bewiesen, dass $\text{Grad } f(x) = 0$. $\square$

Die Rolle der 2. Ableitung einer Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ übernimmt im mehrdimensionalen die Hessesche Matrix. Es ist auf den ersten Blick vielleicht nicht offensichtlich, was

⁸⁷Hier ist das ausführliche Argument dazu. Nehmen wir an, x sei ein lokales Minimum von f . Dann gibt es eine offene Umgebung V von x , so dass $f(y) \geq f(x)$ für alle $y \in V$. Aus der Definition von einer offenen Umgebung folgt, dass es ein $\eta > 0$ gibt, so dass $B_\eta(y) \subset V$. Dann gilt aber auch für alle $t \in (-\eta, \eta)$, dass $f(x + te_i) \in V$. Insbesondere gilt für alle solche t , dass $f(x + te_i) \geq f(x)$. Also ist $t = 0$ in der Tat ein lokales Minimum von $t \mapsto f(x + te_i)$.

die Verallgemeinerung von $g''(x) > 0$ sein soll. Der folgende Satz gibt uns eine Idee, wie wir diese Aussage auf den mehr-dimensionalen Fall verallgemeinern können.

Fast der gleiche Beweis wie von Satz 7.10 liefert uns folgende Aussage.

Satz 7.11. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Wenn $x \in U$ ein lokales Minimum von f ist, dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, dass*

$$\langle \xi, \text{Hess } f(x) \xi \rangle \geq 0.$$

Beweis. Sei x ein lokales Minimum und es sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Nachdem U offen ist existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $x + t\xi \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} g: (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x + t\xi). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung nimmt die Funktion g ein lokales Minimum in $t = 0$ an.⁸⁸ Es folgt aus Satz 12.7 der Analysis I, dass $g''(0) \geq 0$.⁸⁹ Aus Lemma 7.9 folgt nun, dass

$$\langle \xi, \text{Hess } f(x) \xi \rangle = g''(0) \geq 0.$$

□

Im folgenden Kapitel wollen wir jetzt besser verstehen, was es heißt, dass für eine $n \times n$ -Matrix H gilt, dass $\langle \xi, H\xi \rangle \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

7.7. Definite Matrizen und Eigenwerte. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns nur mit Matrizen. Die Aussage von Satz 7.11 motiviert folgende Definition:

Definition. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix.

- (1) Die Matrix A heißt *positiv semidefinit*, falls

$$\langle \xi, A\xi \rangle \geq 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

- (2) Die Matrix A heißt *positiv definit*, falls

$$\langle \xi, A\xi \rangle > 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Ganz analog definieren wir negativ definit und negativ semidefinit.

- (c) Die Matrix A heißt *indefinit*, falls A weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Beispiel.

- (1) Eine 1×1 -Matrix $A = (a)$ ist positiv semidefinit, genau dann, wenn $a \geq 0$, sie ist negativ semidefinit, genau dann, wenn $a \leq 0$.

⁸⁸Das Argument dafür wird Fußnote 87 ausgeführt.

⁸⁹Satz 12.7 besagt, dass wenn $g''(0) < 0$ wäre, dann wäre 0 ein striktes lokales Maximum, es kann also kein lokales Minimum sein.

(2) Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reelle Zahlen. Wir betrachten die diagonale Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ dann gilt f\"ur } \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \text{ dass } \langle \xi, D\xi \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2.$$

Es folgt also, dass A positiv definit ist, genau dann, wenn alle λ_i 's positiv sind. Ganz analog kann man direkt aus den λ_i 's auch ablesen, ob die Matrix D positiv semidefinit beziehungsweise negativ (semi-) definit ist. Die Matrix ist zudem indefinit genau dann, wenn es einen positiven und einen negativen Eintrag auf der Diagonalen gibt.

F\"ur eine Matrix $P = (p_{ij})$ bezeichnen wir mit $P^t = (p_{ji})$ die zu P *transponierte Matrix*. Anders ausgedr\"uckt, wir erhalten P^t aus P indem wir 'die Matrix an der Diagonale spiegeln', d.h. indem wir die Spalten und Zeilen vertauschen. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt sofort aus der Definition der transponierten Matrix, dass $(P^t)^t = P$. Man kann zudem leicht verifizieren, dass $(PQ)^t = Q^t P^t$.

Wir k\"onnen jetzt folgendes Lemma formulieren.

Lemma 7.12. *Es sei A eine $n \times n$ -Matrix und P eine invertierbare $n \times n$ -Matrix. Dann gilt*

$$A \text{ ist positiv definit} \iff P^t A P \text{ ist positiv definit.}$$

Die analogen Aussagen gelten zudem f\"ur positiv semidefinit, negativ (semi-) definit und indefinit.

Bemerkung. Es ist im Allgemeinen nicht wahr, dass A positiv definit ist, genau dann, wenn $P^{-1}AP$ positiv definit ist. Beispielsweise gilt

$$\underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die diagonale Matrix auf der rechten Seite ist positiv definit. Andererseits ist A nicht positiv definit, denn

$$\langle e_1, A e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1.$$

Beweis. Nehmen wir an, A ist positiv definit. Wir wollen zeigen, dass $P^t A P$ positiv definit ist. Es sei also $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \xi, P^t A P \xi \rangle &= \xi^t P^t A P \xi && \text{denn f\"ur beliebige } v, w \in \mathbb{R}^n \text{ gilt } \langle v, w \rangle = v^t w \\ &= (P\xi)^t A P \xi && \text{die Regel } (XY)^t = Y^t X^t \text{ angewandt auf } X = P^t \text{ und } Y = \xi \\ &= \langle P\xi, A P \xi \rangle \\ &> 0 && \text{denn } A \text{ ist positiv definit und } P\xi \neq 0. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Aussage folgt nun aus $A = (P^{-1})^t \cdot P^t A P \cdot P^{-1}$. $\square$

Im Hinblick auf Satz 7.11 wollen wir jetzt Kriterien dafür finden, ob eine gegebene Matrix positiv (semi-) definit ist. Um solch ein Kriterium zu formulieren benötigen wir den Begriff des Eigenwertes einer Matrix.

Definition. Wir sagen eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein *Eigenwert* einer komplexen $n \times n$ -Matrix A , wenn es einen Vektor $v \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ mit $Av = \lambda v$ gibt. Einen Vektor $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$ nennen wir einen *Eigenvektor* zum Eigenwert λ .

Beispiel.

- (1) Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ komplexe Zahlen. Wir betrachten die diagonale Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $De_i = \lambda_i e_i$, d.h. die komplexen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind Eigenwerte von D .

- (2) Wir betrachten die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ Eigenwerte der Matrix B .

- (3) Wir betrachten die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 - i \end{pmatrix} = (1 - i) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix} = (1 + i) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind $1 - i$ und $1 + i$ Eigenwerte der Matrix C .

Für eine $n \times n$ -Matrix bezeichnen wir

$$\chi_A(t) := \det(A - t \operatorname{id}_n)$$

als das *charakteristische Polynom* von A . Aus der Leibniz-Formel für die Determinante folgt leicht, dass dies ein Polynom von Grad $\leq n$ ist. Beispielsweise gilt für die obigen Matrizen B, C, D , dass

$$\chi_B(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2,$$

und für die obige Matrix C gilt, dass

$$\chi_C(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 2.$$

Zudem gilt

$$\chi_D(t) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 - t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n - t \end{pmatrix} = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t).$$

Folgender Satz gibt nun eine einfache Methode um Eigenwerte einer Matrix zu bestimmen.

Satz 7.13. *Es sei A eine komplexe $n \times n$ -Matrix. Dann gilt*

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \iff \lambda \text{ ist Nullstelle von } \chi_A(t).$$

Insbesondere besitzt A höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Beispiel.

- (1) Die Nullstellen von $\chi_B(t) = t^2 - 2$ sind $\pm\sqrt{2}$, wir hatten oben schon explizit gesehen, dass dies Eigenwerte von B sind, und wir wissen jetzt, dass dies auch die einzigen Eigenwerte von B sind.
- (2) Für eine diagonale Matrix hatten wir schon gesehen, dass die Einträge auf der Diagonale Eigenwerte sind. Es folgt nun aus Satz 7.13, dass dies auch die einzigen Eigenwerte sind.

Beweis. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A &\iff \text{es gibt ein } v \neq 0 \text{ mit } Av = \lambda v \\ &\iff \text{es gibt ein } v \neq 0 \text{ mit } (A - \lambda \operatorname{id}_n)v = 0 \\ &\iff \ker(A - \lambda \operatorname{id}_n) \neq 0 \\ &\iff \det(A - \lambda \operatorname{id}_n) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ ist Nullstelle von } \det(A - t \operatorname{id}_n) = \chi_A(t). \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom von A ist ein Polynom von Grad $\leq n$, also besitzt es auch höchstens n Nullstellen, insbesondere besitzt A höchstens n Eigenwerte. $\square$

Satz 7.14. *Es sei A eine komplexe $n \times n$ -Matrix und P eine invertierbare komplexe $n \times n$ -Matrix. Dann gilt*

$$\text{Eigenwerte von } A = \text{Eigenwerte von } P^{-1}AP.$$

Beweis. Wir geben zwei verschiedene Beweise für die Aussage.

- (1) Es sei λ ein Eigenwert von A . Es gibt also ein $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Dann gilt aber auch, dass

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}v) = (P^{-1}A)\underbrace{(PP^{-1})}_{=\text{id}_n}v = P^{-1}Av = P^{-1}\lambda v = \lambda P^{-1}v.$$

Wir haben also gezeigt, dass λ auch ein Eigenwert von $P^{-1}AP$ ist. Die Umkehrung der Aussage wird ganz analog bewiesen.

- (2) Nach Satz 7.13 genügt es zu zeigen, dass die charakteristischen Polynome von A und $P^{-1}AP$ übereinstimmen. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \chi_{P^{-1}AP}(t) &= \det(P^{-1}AP - t \text{id}_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}t \text{id}_n P) && \text{denn } P^{-1}P = \text{id} \\ &= \det(P^{-1}(A - t \text{id}_n)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - t \text{id}_n) \det(P) && \text{denn } \det(XY) = \det(X) \cdot \det(Y) \\ &= \det(P)^{-1} \chi_A(t) \det(P) && \text{denn } \det(P^{-1}) = \det(P)^{-1} \\ &= \chi_A(t). \end{aligned}$$

□

Im Folgenden nennen wir eine quadratische Matrix⁹⁰ P *orthogonal*, wenn $P^t = P^{-1}$. Beispielsweise ist jede Drehmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix. Das folgende Lemma besagt, dass orthogonale Matrizen Isometrien, d.h. längenerhaltend, sind.

Lemma 7.15. *Es sei P eine orthogonale $n \times n$ -Matrix. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, dass*

$$\|P\xi\| = \|\xi\|.$$

Beweis. Es sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|P\xi\|^2 &= \langle P\xi, P\xi \rangle = (P\xi)^t P\xi = \xi^t P^t P\xi \\ &= \xi^t P^{-1} P\xi && \text{weil } P \text{ orthogonal} \\ &= \xi^t \xi = \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Die gewünschte Gleichheit folgt nun durch Wurzelziehen auf beiden Seiten. □

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Linearen Algebra.⁹¹

Satz 7.16. (Spektralsatz) *Es sei A eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix P , so dass $P^{-1}AP$ eine diagonale Matrix mit reellen Einträgen ist.*

Bemerkung.

⁹⁰Wenn wir nicht explizit sagen, dass eine Matrix komplex sein kann, dann ist die gegebene Matrix reell.

⁹¹Der Satz ist beispielsweise Korollar 4 auf Seite 279 in Bosch: Lineare Algebra.

- (1) Es folgt insbesondere aus Satz 7.14 und Satz 7.16, dass die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix reell sind. Am Beispiel der obigen Matrix C hatten wir gesehen, dass diese Aussage für nicht-symmetrische Matrizen im Allgemeinen nicht gilt, d.h. es gibt nicht-symmetrische reelle Matrizen, welche komplexe, aber keine reellen Eigenwerte besitzen.
- (2) Verallgemeinerungen vom Spektralsatz auf unendlich-dimensionale komplexe Vektorräume spielen unter Anderem eine sehr wichtige Rolle in der Quantenphysik.

Der folgende Satz besagt nun, dass man an den Eigenwerten ablesen kann, ob eine symmetrische Matrix A definit oder indefinit ist.

Satz 7.17. *Es sei A eine symmetrische Matrix. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
 A \text{ ist positiv definit} &\iff \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv} \\
 A \text{ ist positiv semidefinit} &\iff \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } \geq 0 \\
 A \text{ ist negativ definit} &\iff \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind negativ} \\
 A \text{ ist negativ semidefinit} &\iff \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } \leq 0,
 \end{aligned}$$

zudem gilt

$$A \text{ ist indefinit} \iff A \text{ besitzt positive und negative Eigenwerte.}$$

Bemerkung.

- (1) Wir hatten weiter oben schon angemerkt, dass aus Satz 5.1 folgt, dass Hesse-Matrizen symmetrisch sind. Wir können also mithilfe von Satz 7.13 und Satz 7.17 leicht überprüfen, ob eine Hesse-Matrix positiv (semi-) definit ist.
- (2) Das Beispiel auf Seite 85 zeigt, dass die Aussage von Satz 7.17 im Allgemeinen nicht für nicht-symmetrische Matrizen gilt.

Beweis. Es sei A eine symmetrische Matrix. Nach Satz 7.16 gibt es eine orthogonale Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reell sind. Nach Satz 7.14 und der Diskussion auf Seite 87 sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gerade die Eigenwerte von A .

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
 &A \text{ ist positiv definit} \\
 \iff &P^t AP \text{ ist positiv definit} && \text{nach Lemma 7.12} \\
 \iff &P^{-1}AP \text{ ist positiv definit} && \text{weil } P^t = P^{-1}, \text{ da } P \text{ orthogonal} \\
 \iff &\text{alle } \lambda_i \text{'s sind positiv} && \text{siehe Diskussion auf Seite 85} \\
 \iff &\text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv.}
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir also gezeigt, dass A positiv definit ist, genau dann, wenn die Eigenwerte von A positiv definit sind. Alle anderen Aussagen von Satz 7.17 werden ganz analog bewiesen. $\square$

Der folgende Satz macht die $\Leftarrow$ -Richtung der ersten beiden Aussagen vom vorherigen Satz noch etwas präziser.

Satz 7.18. *Es sei A eine symmetrische Matrix und λ der kleinste Eigenwert von A . Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, dass*

$$\langle \xi, A\xi \rangle \geq \lambda \|\xi\|^2.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass A eine diagonale Matrix ist mit diagonalen Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\langle \xi, A\xi \rangle = \xi^t A \xi = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\geq \lambda} \xi_i^2 \geq \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \lambda \cdot \|\xi\|^2.$$

Es sei nun A eine beliebige symmetrische Matrix. Nach Satz 7.16 gibt es eine orthogonale Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gerade die Eigenwerte von A sind. Es sei nun $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \xi, A\xi \rangle &= \xi^t A \xi \\ &= (P^{-1}\xi)^t P^{-1}AP P^{-1}\xi \\ &\geq \lambda \cdot \|P^{-1}\xi\|^2 && \text{da } P^{-1}AP \text{ diagonale Matrix} \\ &= \lambda \cdot \|\xi\|^2 && \text{nach Lemma 7.15.} \end{aligned}$$

□

Wir beschließen das Kapitel über Eigenwerte und definite Matrizen mit der Diskussion von 2×2 -Matrizen. Im Folgenden erinnern wir daran, dass die Spur einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ definiert ist als

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Summe der Diagonaleinträge von } A.$$

Folgendes Lemma gibt nun für 2×2 -Matrizen eine einfache Methode, um schnell festzustellen, ob die Matrix definit oder indefinit ist.

Lemma 7.19. *Es sei A eine symmetrische 2×2 -Matrix. Dann gilt*

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\iff \det(A) > 0 \text{ und } \text{Spur}(A) > 0, \\ A \text{ ist negativ definit} &\iff \det(A) > 0 \text{ und } \text{Spur}(A) < 0, \\ A \text{ ist indefinit} &\iff \det(A) < 0. \end{aligned}$$

Beweis. Nachdem A symmetrisch ist gibt es nach Satz 7.16 eine orthogonale Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

eine diagonale Matrix ist. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

und

$$\text{Spur}(P^{-1}AP) = \text{Spur}(A).$$

Zudem folgt aus $P^{-1} = P^t$ und Lemma 7.12, dass

$$P^{-1}AP \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow A \text{ ist positiv definit.}$$

Es genügt also das Lemma für diagonale Matrizen zu beweisen. Aber für solche Matrizen folgt die Aussage aus einer elementaren Fallunterscheidung, je nach Vorzeichen von λ und μ . $\square$

7.8. Lokale Extrema II. Nach dem kurzen Ausflug in die Lineare Algebra kehren wir jetzt gestärkt zur Analysis zurück. In der Sprache vom vorherigen Kapitel können wir jetzt die Aussage von Satz 7.11 wie folgt formulieren.

Satz 7.20. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x \in U$ ein kritischer Punkt, d.h. ein Punkt mit $\text{Grad } f(x) = 0$. Dann gilt*

$$x \text{ ist lokales Minimum} \implies \text{Hess } f(x) \text{ ist positiv semidefinit}$$

sowie

$$x \text{ ist lokales Maximum} \implies \text{Hess } f(x) \text{ ist negativ semidefinit.}$$

Insbesondere gilt

$$\text{Hess } f(x) \text{ indefinit} \implies x \in U \text{ ist weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.}$$

Beweis. Die erste Aussage ist genau die Aussage von Satz 7.11. Die zweite Aussage wird ganz analog zur ersten Aussage bewiesen. Die letzte Aussage folgt sofort aus den ersten beiden Aussagen. $\square$

Der folgende Satz gibt die deutlich interessantere Aussage, dass man mithilfe der Hesse-Matrix zeigen kann, dass ein striktes lokales Extremum vorliegt.

Satz 7.21. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x \in U$ ein Punkt mit $\text{Grad } f(x) = 0$. Dann gilt:*

$$\text{Hess } f(x) \text{ ist positiv definit} \implies x \text{ ist striktes lokales Minimum,}$$

sowie

$$\text{Hess } f(x) \text{ ist negativ definit} \implies x \text{ ist striktes lokales Maximum.}$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage. Die zweite wird natürlich ganz analog bewiesen.⁹² Wir betrachten also den Fall, dass $H := \text{Hess } f(x)$ positiv definit ist. Nachdem

⁹²Die zweite Aussage kann man auch durch Betrachten der Funktion $-f$ auf die erste Aussage zurückführen.

zudem $\text{Grad } f(x) = 0$ folgt aus Korollar 7.8, dass

$$f(x + \xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle \xi, H\xi \rangle + \varphi(\xi),$$

wobei $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|^2)$. Es sei nun λ der kleinste Eigenwert von H . Nachdem H positiv definit ist folgt aus Satz 7.17, dass $\lambda > 0$. Dann folgt aus Satz 7.18, dass

$$f(x + \xi) \geq f(x) + \frac{1}{2}\lambda\|\xi\|^2 + \varphi(\xi).$$

Nachdem $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|^2)$ gibt es insbesondere ein $\delta > 0$, so dass

$$|\varphi(\xi)| \leq \frac{1}{4}\lambda\|\xi\|^2 \quad \text{für alle } \xi \text{ mit } \|\xi\| < \delta.$$

Dann folgt für alle $\xi \neq 0 \in B_\delta(x)$, dass

$$\begin{aligned} f(x + \xi) &\geq f(x) + \frac{1}{2}\lambda\|\xi\|^2 + \varphi(\xi) \\ &\geq f(x) + \frac{1}{2}\lambda\|\xi\|^2 - \frac{1}{4}\lambda\|\xi\|^2 \quad \text{da } \varphi(\xi) \geq -\frac{1}{4}\lambda\|\xi\|^2 \\ &= f(x) + \frac{1}{4}\lambda\|\xi\|^2 \\ &> f(x) \quad \text{da } \xi \neq 0 \text{ und } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass f im Punkt x ein striktes lokales Minimum annimmt. $\square$

Beispiel. Die Hessesche Matrix der Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

besitzt genau einen kritischen Punkt, nämlich $(0, 0)$. An diesem Punkt ist

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

insbesondere positiv definit. Die Funktion f erfüllt also alle Bedingungen von Satz 7.21, der Punkt $(0, 0)$ ist also ein striktes lokales Minimum. In diesem Fall kann man dies natürlich auch direkt zeigen, denn es ist offensichtlich, dass $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$.

7.9. Globale Extrema. Es sei erst einmal $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Nach Satz 7.2 aus der Analysis I besitzt f ein globales Maximum. Dieses kann sich im Inneren des Intervalls, oder an den Randpunkten des Intervalls befinden.

Um das globale Maximum von f zu bestimmen können wir beispielsweise folgenden Algorithmus aus der Schule verwenden:

- (1) wir bestimmen alle kritischen Punkte von f , d.h. alle Punkte in (a, b) an denen die Ableitung verschwindet und wir berechnen die zugehörigen Funktionswerte,
- (2) wir berechnen $f(a)$ und $f(b)$,
- (3) das globale Maximum von f auf $[a, b]$ ist dann das Maximum der Funktionswerte, welche wir in (1) und (2) berechnet haben.

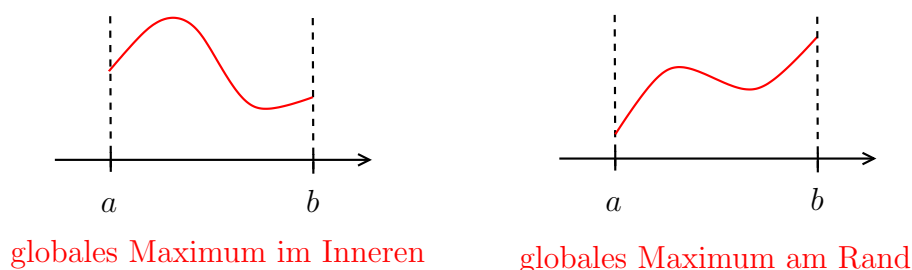


ABBILDUNG 29.

In diesem Kapitel wollen wir uns überlegen, wie wir diesen Algorithmus verallgemeinern können, um für differenzierbare Funktionen auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ das globale Maximum zu bestimmen.

Im Folgenden wollen wir erst einmal den Begriff ‘Innere von einem Intervall’ und ‘Rand von einem abgeschlossenen Intervall’ verallgemeinern. Wir führen dazu folgende Definitionen ein. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wir sagen, $x \in A$ ist ein *innerer Punkt von A*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$. Andernfalls sagen wir, dass x ein *Randpunkt von A* ist.⁹³ Die Menge der inneren Punkte bezeichnen wir als das *Innere* $\text{Inn}(A)$ von A , und die Menge der Randpunkte bezeichnen wir als den *Rand* ∂A von A . Man kann leicht zeigen, dass das Innere von A eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.⁹⁴

In der folgenden Tabelle bestimmen wir das Innere und den Rand von mehreren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Teilmenge A von $\mathbb{R}$	das Innere von A	der Rand von A
$[a, b]$	(a, b)	$\{a, b\}$
$[a, \infty)$	(a, ∞)	$\{a\}$
Teilmenge A von $\mathbb{R}^2$	das Innere von A	der Rand von A
$\{(x, y) y \geq x\}$	$\{(x, y) y > x\}$	$\{(x, y) x = y\}$
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\emptyset$
$D^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \ v\ \leq 1\}$	$\{x \in \mathbb{R}^2 \ v\ < 1\}$	$\{x \in \mathbb{R}^2 \ v\ = 1\}$
$S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \ v\ = 1\}$	$\emptyset$	S^1
Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$	das Innere von A	der Rand von A
$D^n = \{v \in \mathbb{R}^n \ v\ \leq 1\}$	$\{x \in \mathbb{R}^n \ v\ < 1\}$	$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ v\ = 1\}$
$S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \ v\ = 1\}$	$\emptyset$	S^{n-1}

In Abbildung 30 sehen wir zudem für drei verschiedene abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ das Innere und den Rand.

⁹³Diese Definitionen sind Spezialfälle der allgemeineren Definitionen in Kapitel 1.5.

⁹⁴In der Tat, es sei x ein innerer Punkt von A . Nach Voraussetzung gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$. Aber der Beweis von Lemma 1.5 zeigt, dass alle Punkte in $B_\epsilon(x)$ auch innere Punkte von A sind, d.h. es ist $x \in B_\epsilon(x) \subset \text{Inn}(A)$.

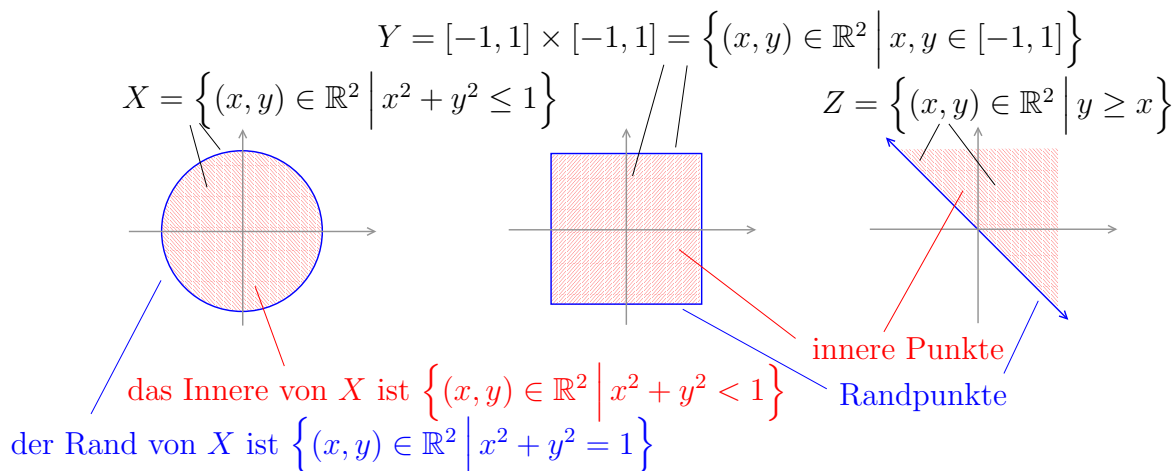


ABBILDUNG 30.

Es sei nun $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare⁹⁵ Funktion. Korollar 3.8 besagt nun, dass f ein globales Maximum besitzt. Um diesen maximalen Funktionswert zu bestimmen, wollen wir alle $x \in K$ finden, welche möglicherweise ein globales Maximum von f sind. Die Suche teilt sich hierbei auf in zwei Teile:

- (1) Wir bestimmen zuerst die kritischen Punkte von f im Inneren von K , d.h. wir bestimmen die Punkte im Inneren von f , an denen der Gradient verschwindet. Für diese kritischen Punkte bestimmen wir jeweils den Funktionswert.⁹⁶
- (2) Wir bestimmen den maximalen Wert von f auf dem Rand von K .

Wie zuvor im ein-dimensionalen Fall erhalten wir jetzt das globale Maximum wie folgt:

- (3) Das globale Maximum von f auf K ist das Maximum der Funktionswerte, welche wir in (1) und (2) bestimmt hatten.

Es stellt sich nun allerdings noch die Frage, wie wir den das Maximum von f auf dem Rand von K bestimmen können. Im ein-dimensionalen Fall besteht der Rand aus Punkten, wir können also das Maximum durch Einsetzen bestimmen. Im zwei-dimensionalen Fall ist der Rand ‘in der Regel’ eine 1-dimensionale Kurve, welche wir ‘normalerweise’ parametrisieren können, wir werden dies gleich im Anschluß mit einem Beispiel illustrieren. Den höher-dimensionalen Fall werden wir später in der Vorlesung noch genauer studieren.

⁹⁵Wir sagen $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, wenn f stetig ist und wenn die Einschränkung von f auf das Innere von K differenzierbar ist.

⁹⁶Hierbei verwenden wir implizit folgendes Argument: Wir bezeichnen mit U das Innere von K . Wenn f das globale Maximum an einem Punkt x im Inneren von K annimmt, dann ist x insbesondere ein lokales Maximum von $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Nachdem U offen ist, folgt aus Satz 7.10, dass $\text{Grad } f(x) = 0$, d.h. x ist in der Tat ein kritischer Punkt von f .

Beispiel. Wir wollen das globale Maximum von

$$\begin{aligned} f: D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

bestimmen. Wir führen dazu den obigen Algorithmus aus.

- (1) Nachdem $Df(x, y) = (1, 1)$ immer ungleich null ist, besitzt f im Inneren von D^2 keine kritischen Punkte.
- (2) Wir müssen nun das globale Maximum von f auf dem Rand

$$\partial D^2 = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

finden. Nachdem

$$\begin{aligned} p: [0, 2\pi] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

surjektiv ist, gilt

$$\text{maximaler Wert von } f \text{ auf } S^1 = \text{maximaler Wert von } f \circ p \text{ auf } [0, 2\pi].$$

Es genügt also das globale Maximum der Funktion

$$\begin{aligned} f \circ p: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (f \circ p)(t) = \cos(t) + \sin(t) \end{aligned}$$

zu bestimmen. Mit den Methoden der Analysis I kann man leicht zeigen, dass das globale Maximum dieser Funktion $\sqrt{2}$ beträgt.

- (3) Wir haben also gezeigt, dass das globale Maximum von $f: D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $\sqrt{2}$.

8. DIE NORM VON MATRIZEN UND ABSCHÄTZUNGEN VON INTEGRALEN

Folgender Satz ist ein Korollar zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus der Analysis I.

Satz 8.1. *Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall I . Wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass $|f'(x)| \leq C$ für alle x , dann gilt für beliebige $s, t \in I$, dass*

$$|f(s) - f(t)| \leq C \cdot |s - t|.$$

Beweis. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall I mit der Eigenschaft, dass $|f'(x)| \leq C$ für alle x . Es seien zudem $s, t \in I$. Wenn $s = t$, dann ist die gewünschte Ungleichung trivialerweise erfüllt. Wir nehmen also an, dass $s \neq t$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein ξ zwischen s und t , so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(s) - f(t)}{s - t}.$$

Es folgt, dass

$$|f(s) - f(t)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq C} \cdot |s - t|.$$

□

Anders ausgedrückt, der Satz besagt, dass wenn wir eine Schranke für den Absolutbetrag der Ableitung besitzen, dann können wir den Abstand zwischen Funktionswerten abschätzen.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist eine analoge Aussage für differenzierbare Abbildungen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ zu finden. Diese Verallgemeinerung wird dann im weiteren Verlauf der Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen.

Für eine stetige Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$\int_a^b f(t) dt := \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_m(t) dt \right),$$

d.h. wir integrieren die Abbildung f komponentenweise. Ganz analog, in dem wir jeden Matrixeintrag separat integrieren, definieren wir das Integral einer stetigen Abbildung $f: [a, b] \rightarrow M(n \times m, \mathbb{R})$ in den Raum der $n \times m$ -Matrizen.

Wir beweisen zuerst folgendes Lemma, welches wir im Laufe der Vorlesung immer wieder verwenden werden.⁹⁷

Lemma 8.2. *Es sei $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Dann gilt⁹⁸*

$$\left\| \int_a^b v(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\| dt \in \mathbb{R}.$$

⁹⁷Lemma 13.16 aus Analysis I besagt, dass für jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

gilt. Wir können Lemma 8.2 als Verallgemeinerung von diesem Lemma auffassen.

⁹⁸Dieses Lemma ist eine Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung $\|c + d\| \leq \|c\| + \|d\|$, in dem Sinne, dass man für eine geeignet gewählte Abbildung v gerade die Dreiecksungleichung erhält. Was für eine Abbildung müssten Sie dazu wählen?

Beweis. Wir setzen

$$u := \int_a^b v(t) dt \in \mathbb{R}^n.$$

Wenn $\|u\| = 0$, dann gibt es nichts zu zeigen. Wir können also annehmen, dass $\|u\| > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b v(t) dt \right\|^2 &= \|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \left\langle \int_a^b v(t) dt, u \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\int_a^b v_1(t) dt, \dots, \int_a^b v_m(t) dt \right), (u_1, \dots, u_m) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \int_a^b v_i(t) dt \cdot u_i \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m v_i(t) \cdot u_i dt \\ &= \int_a^b \langle v(t), u \rangle dt \\ &\leq \int_a^b \|v(t)\| \cdot \|u\| dt \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ gilt } \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \\ &= \|u\| \cdot \int_a^b \|v(t)\| dt. \end{aligned}$$

Das Lemma folgt nun indem wir durch $\|u\|$ kürzen. □

Lemma 8.3. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $x \in U$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so dass $x + tv \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt*⁹⁹

$$f(x + v) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x + tv) dt \right) \cdot v \in \mathbb{R}^m.$$

⁹⁹Die rechte Seite ist das Produkt einer $m \times n$ -Matrix mit einem Vektor in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Es genügt die Aussage für die m verschiedenen Koordinaten zu beweisen. Es sei also $i \in \{1, \dots, m\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 f_i(x+v) - f_i(x) &= \int_0^1 \underbrace{\frac{d}{dt} f_i(x+tv)}_{\substack{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+tv) v_j \\ \text{nach Satz 6.10}}} dt && \text{Hauptsatz der Differential-} \\
 && \text{und Integralrechnung} \\
 &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+tv) v_j dt \\
 &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+tv) dt \cdot v_j \\
 &= i\text{-te Zeile von}^{100} \left(\int_0^1 Df(x+tv) dt \right) \cdot v \in \mathbb{R}^m.
 \end{aligned}$$

□

Wir können jetzt die Verallgemeinerung von Satz 8.1 formulieren und beweisen. Die Rolle der Ableitung spielt dabei natürlich das Differential, und anstatt dem Absolutbetrag der Ableitung betrachten wir die Norm des Differentials. Zur Erinnerung, die Norm einer $m \times n$ -Matrix A ist definiert als

$$\|A\| := \max \left\{ \|Av\| \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \right\}.$$

Wir erhalten jetzt folgendes Korollar zu den obigen Ergebnissen:

Korollar 8.4. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so dass $x+tv \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Wir setzen*

$$C := \sup_{t \in [0,1]} \|Df(x+tv)\|.$$

Dann gilt

$$\|f(x+v) - f(x)\| \leq C\|v\|.$$

¹⁰⁰Zur Erinnerung, $\int_0^1 Df(x+tv) dt$ ist per Definition die Matrix

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x+tv) dt & \dots & \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x+tv) dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x+tv) dt & \dots & \int_0^1 \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x+tv) dt \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
 \|f(x+v) - f(x)\| &= \left\| \left(\int_0^1 Df(x+tv) dt \right) \cdot v \right\| && \text{nach Lemma 8.3} \\
 &= \left\| \int_0^1 Df(x+tv) \cdot v dt \right\| && \text{folgt aus der Linearität des Integrals} \\
 &\leq \int_0^1 \|Df(x+tv) \cdot v\| dt && \text{nach Lemma 8.2} \\
 &\leq \int_0^1 \|Df(x+tv)\| \cdot \|v\| dt && \text{nach Lemma 6.6 (2)} \\
 &\leq \int_0^1 C \cdot \|v\| dt \\
 &= C \cdot \|v\|.
 \end{aligned}$$

□

9. DER SATZ ÜBER DIE UMKEHRFUNKTION UND IMPLIZITE FUNKTIONEN

9.1. Der Banachsche Fixpunktsatz. In diesem Kapitel formulieren und beweisen wir den Banachschen Fixpunktsatz. Auf den ersten Blick hat dieser wenig Bezug zu dem eigentlichen Ziel dieser Vorlesung, nämlich dem Studium von Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wir werden aber später sehen, dass der Banachsche Fixpunktsatz eine essentielle Rolle im Beweis von zwei sehr wichtigen Aussagen spielt.

Definition. Ein *Banachraum* ist ein normierter Vektorraum, so dass der zugehörige metrische Raum vollständig ist.¹⁰¹

Beispiel. In Analysis I und Kapitel 2.1 hatten wir gesehen, dass die normierten Vektorräume

$$\mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

und¹⁰²

$$C([a, b], \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \|f\| = \sup \left\{ |f(x)| \mid x \in [a, b] \right\}$$

Banachräume sind. Andererseits hatten wir gesehen, dass der normierte Vektorraum

$$C([a, b], \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

kein Banachraum ist.

Der folgende Satz verallgemeinert das zweite Beispiel von einem Banachraum. Der Beweis von Satz 16.3 in Analysis I kann problemlos abgewandelt werden um folgenden Satz zu beweisen.

¹⁰¹Zur Erinnerung, für einen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ definiert $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V . Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

¹⁰²Zur Erinnerung, $C([a, b], \mathbb{R})$ ist die Menge der stetigen Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 9.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Der Vektorraum*

$C_b(U, \mathbb{R}^m) =$ *Vektorraum aller beschränkten stetigen Abbildungen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Supremumsnorm, d.h. mit der Norm*

$$\|f\| = \sup \left\{ \|f(x)\| \mid x \in U \right\}$$

ist ein Banachraum.

Bevor wir den nächsten Banachschen Fixpunktsatz formulieren, führen wir noch zwei Begriffe ein:

- (1) Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung $\Phi: V \rightarrow V$ heißt *Kontraktion*, wenn es ein $\Theta \in [0, 1)$, genannt *Kontraktionsfaktor*, gibt, so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \Theta \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

- (2) Es sei $\Phi: X \rightarrow X$ eine Abbildung. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von Φ , wenn $\Phi(x) = x$.

Beispiel.

- (1) Es sei $\alpha \in (0, 2\pi)$. Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$v \mapsto$ Drehung von v um den Winkel α im Uhrzeigersinn.

Diese Abbildung besitzt genau einen Fixpunkt, nämlich den Ursprung.

- (2) Es sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{1}{2}(P + x) \end{aligned}$$

eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$,¹⁰³ und der Punkt P ist (der einzige) Fixpunkt von Φ . Geometrisch bildet Φ jeden Punkt x auf den Mittelpunkt von x und P ab. Anders ausgedrückt, der Abstand von $\Phi(x)$ zu P ist halb so groß wie der Abstand von x zu P . Das Beispiel wird in Abbildung 31 illustriert.

- (3) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

ist eine Kontraktion, aber die Abbildung besitzt keinen Fixpunkt.

Wir können jetzt den folgenden wichtigen Satz formulieren:

Satz 9.2. (Banachscher Fixpunktsatz) *Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann besitzt jede Kontraktion $\Phi: A \rightarrow A$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset V$ genau einen Fixpunkt.*

¹⁰³In der Tat, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \left\| \frac{1}{2}(P + x) - \frac{1}{2}(P + y) \right\| = \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\| = \frac{1}{2}\|x - y\|.$$

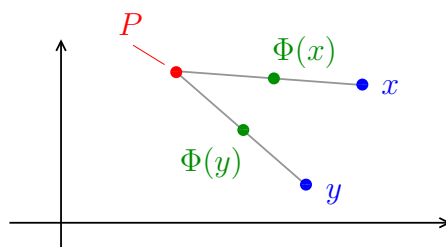


ABBILDUNG 31.

Dieser unscheinbare Satz spielt eine wichtige Rolle in der Mathematik, wir werden ihn später bei mehreren Gelegenheiten wieder treffen.

Beispiel. Es sei A die Altstadt von Regensburg, aufgefasst als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Wenn man nun in der Altstadt steht, und eine detailgetreue Karte K der Altstadt im Maßstab 1:10000 in der Hand hält, dann ist die Kartenabbildung $\Phi: A \rightarrow K$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{10000}$. Der Banachsche Fixpunktsatz besagt also, dass es genau einen Punkt auf der Karte gibt, welcher mit dem direkt darunter liegenden Punkt in der realen Welt übereinstimmt.

Im Beweis vom Banachschen Fixpunktsatz werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 9.3. *Jede Kontraktion auf einem normierten Vektorraum ist stetig.*

Beweis. Eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor Θ ist insbesondere Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante Θ . Das Argument von Lemma 13.12 aus der Analysis I zeigt, dass jede Lipschitz-stetige Funktion, insbesondere also jede Kontraktion, stetig ist. $\square$

Wir wenden uns nun dem Beweis vom Banachschen Fixpunktsatz zu.

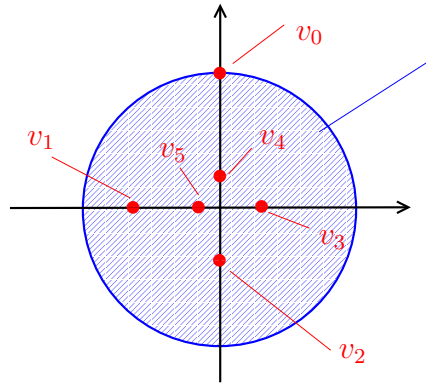
Beweis vom Banachschen Fixpunktsatz. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und es sei zudem $\Phi: A \rightarrow A$ eine Kontraktion auf einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset V$ mit Kontraktionsfaktor $\Theta \in [0, 1)$. Wir zeigen zuerst, dass Φ höchstens einen Fixpunkt besitzt: Es seien also $v, w \in V$ mit $\Phi(v) = \Phi(w)$, dann gilt

$$\|v - w\| = \|\Phi(v) - \Phi(w)\| < \Theta \cdot \|v - w\|.$$

Nachdem $\Theta \in [0, 1)$ ist dies nur möglich, wenn $\|v - w\| = 0$, d.h. wenn $v = w$.

Wir zeigen nun, dass Φ einen Fixpunkt besitzt. Genauer gesagt, wir werden folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Es sei $v_0 \in A$ beliebig. Dann konvergiert die durch $v_k := \Phi(v_{k-1})$ rekursiv definierte Folge gegen einen Fixpunkt von Φ .



wir betrachten die abgeschlossene Teilmenge

$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ vom Banachraum $\mathbb{R}^2$ mit der Kontraktion

$\Phi: A \rightarrow A$

$(x, y) \mapsto \left(-\frac{2}{3}y, \frac{2}{3}x\right) = \frac{2}{3} \cdot \text{Drehung von } (x, y) \text{ um } \frac{\pi}{2}$

die Folge $v_0 = (0, 1)$ und $v_i = \Phi(v_{i-1})$ für $i \geq 1$ konvergiert gegen den Fixpunkt $(0, 0)$

ABBILDUNG 32. Illustration zum Beweis vom Banachschen Fixpunktsatz.

Die Idee ist nun zu zeigen, dass die Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wir wollen zuerst die sukzessiven Abstände $\|v_{i+1} - v_i\|$ besser verstehen. Für $i \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
 \|v_{i+1} - v_i\| &= \|\Phi(v_i) - \Phi(v_{i-1})\| \\
 &\leq \Theta \cdot \|v_i - v_{i-1}\| && \text{da } \Phi \text{ Kontraktion mit Kontraktionsfaktor } \Theta \\
 &\leq \Theta^2 \cdot \|v_{i-1} - v_{i-2}\| && \text{Kontraktion auf } v_i \text{ und } v_{i-1} \text{ angewandt} \\
 &\leq \Theta^i \cdot \underbrace{\|v_1 - v_0\|}_{=: c} && \text{Kontraktion insgesamt } i\text{-Mal angewandt} \\
 &= \Theta^i \cdot c.
 \end{aligned}$$

Für beliebige $m > k \in \mathbb{N}$ folgt also

$$\begin{aligned}
 \|v_m - v_k\| &= \left\| \sum_{i=k}^{m-1} (v_{i+1} - v_i) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=k}^{m-1} \|v_{i+1} - v_i\| && \text{Dreiecksungleichung} \\
 &\leq \sum_{i=k}^{m-1} \Theta^i c && \text{obige Ungleichung} \\
 &= c \Theta^k \sum_{i=0}^{m-1-k} \Theta^i \\
 &< c \Theta^k \sum_{i=0}^{\infty} \Theta^i \\
 &= c \Theta^k \frac{1}{1-\Theta} && \text{geometrische Reihe}
 \end{aligned}$$

Nachdem $c \Theta^k \frac{1}{1-\Theta} = \frac{c}{1-\Theta} \cdot \Theta^k$ sieht man leicht, dass $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V ist.

¹⁰⁴Da V vollständig ist, konvergiert die Folge gegen ein $v \in V$. Aus der Voraussetzung, dass

¹⁰⁴In der Tat, nachdem $\Theta \in [0, 1)$ existiert für gegebenes $\epsilon > 0$ ein N , so dass $\frac{c}{1-\Theta} \cdot \Theta^N < \epsilon$. Für alle $k, m \geq N$ folgt dann: $\|v_m - v_k\| < \frac{c}{1-\Theta} \cdot \Theta^N < \epsilon$.

A abgeschlossen ist, und nachdem alle Folgenglieder v_n in A liegen, folgt aus Lemma 2.2, dass $v \in A$.

Wir wollen nun zeigen, dass v ein Fixpunkt von Φ ist. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(v) &= \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(v_n) && \text{nach Satz 2.7 und Lemma 9.3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = v.\end{aligned}$$

□

Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r \geq 0$ bezeichnen wir im Folgenden

$$\overline{B_r(x)} := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r \right\}$$

als die *abgeschlossene r -Kugel um x* .¹⁰⁵ Dies ist in der Tat eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Der folgende Satz gibt ein wichtiges Beispiel für eine kontrahierende Abbildung.

Satz 9.4. *Es sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $Dg(0) = 0$. Wir setzen*^{106 107 108}

$$r := \max \left\{ s \in [0, \infty) \mid \text{für alle } x \in \overline{B_s(0)} \text{ gilt } \|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \right\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) $r > 0$.
- (2) Die Einschränkung $g: \overline{B_r(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist kontrahierend mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.
- (3) Wir schreiben $y = g(0)$. Dann ist

$$f\left(\overline{B_r(0)}\right) \subset \overline{B_{\frac{r}{2}}(y)} \subset \overline{B_{\frac{r}{2} + \|y\|}(0)}.$$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $g(x) = x^2$. Dann ist $Dg(0) = g'(0) = 0$. In diesem Fall gilt

$$r = \max \left\{ s \in [0, \infty) \mid \text{für alle } x \in [-s, s] \text{ gilt } \underbrace{|f'(x)|}_{=|2x|} \leq \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{4}.$$

Die Einschränkung von $f(x) = x^2$ auf

$$\begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right] & \rightarrow & \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

¹⁰⁵Manchmal bezeichnen wir $\overline{B_r(x)}$ auch einfach nur als ‘geschlossene Kugel’.

¹⁰⁶Hierbei verwenden wir die Konvention, dass das Maximum einer nach oben unbeschränkten Menge das Symbol ∞ ist.

¹⁰⁷Anders ausgedrückt, r ist der größte Radius einer Scheibe um den Ursprung, so dass auf der Scheibe gilt $\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}$.

¹⁰⁸Warum existiert das Maximum? Anders ausgedrückt, warum können wir an dieser Stelle Maximum anstatt Supremum schreiben?

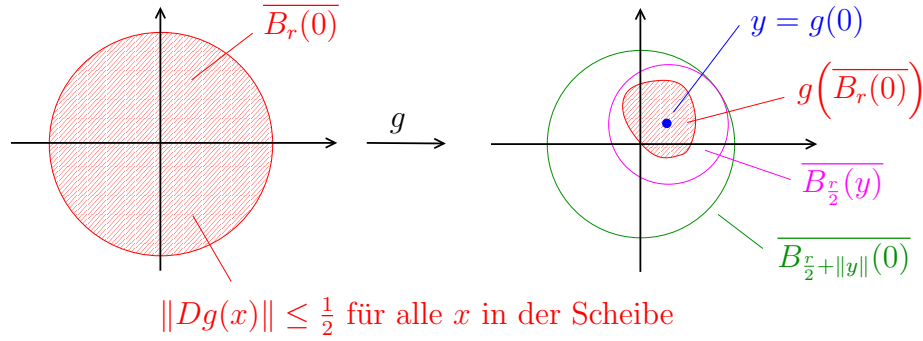


ABBILDUNG 33. Illustration von Satz 9.4.

ist eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.¹⁰⁹

Beweis. Es sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $Dg(0) = 0$.

- (1) Es folgt aus $Dg(0) = 0$, der Stetigkeit der partiellen Ableitungen und aus Lemma 6.6 (3), dass es ein $s > 0$ gibt, so dass $\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \overline{B_s(0)}$. Insbesondere ist also $r \geq s > 0$.
- (2) Es folgt sofort aus Korollar 8.4, dass g auf der abgeschlossenen Scheibe $\overline{B_r(0)}$ kontrahierend ist mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.
- (3) Es sei $x \in \overline{B_r(0)}$. Dann folgt aus (2), dass

$$\|f(x) - y\| = \|f(x) - f(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x - 0\| = \frac{r}{2}.$$

Wir haben also gezeigt, dass $f(\overline{B_r(0)}) \subset \overline{B_{r/2}(y)}$. Die Inklusion $\overline{B_{r/2}(y)} \subset \overline{B_{r/2 + \|y\|}(0)}$ folgt leicht aus der Dreiecksungleichung.

□

9.2. Der Satz über die Umkehrabbildung. Es sei $f: U \rightarrow V$ eine bijektive differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Wenn die Umkehrabbildung $g = f^{-1}: V \rightarrow U$ ebenfalls differenzierbar ist, dann hatten wir schon in Korollar 6.8 gesehen, dass $Df(x)$ an jedem Punkt $a \in U$ invertierbar ist.¹¹⁰

¹⁰⁹Dies kann man auch direkt sehen, denn für $x, y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot \underbrace{|x + y|}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

¹¹⁰Zur Erinnerung, für alle $a \in U$ gilt, dass $g(f(a)) = a$, d.h. $g \circ f$ ist die Identitätsabbildung auf U . Für beliebiges a folgt dann aus der Kettenregel, dass

$$\text{id}_n = D(\text{id})(a) = D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a).$$

Insbesondere sehen wir, dass die $n \times n$ -Matrix $Df(a)$ invertierbar ist, mit inverser Matrix $Dg(f(a))$.

Es ist sehr leicht zu überprüfen, ob eine lineare Abbildung invertierbar ist, beispielsweise genügt es die Determinante zu berechnen. Andererseits ist es im Allgemeinen sehr schwer festzustellen, ob eine beliebige Abbildung $f: U \rightarrow V$ umkehrbar ist. Der folgende Satz besagt nun, dass wenn das Differential $Df(a)$ einer stetig differenzierbaren Funktion f an einem Punkt a invertierbar ist, dann ist f ‘lokal umkehrbar’¹¹¹, d.h. es gibt eine kleine Umgebung U von a , so dass die Einschränkung von f auf U umkehrbar ist.

Satz 9.5. (Satz über die Umkehrabbildung) *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $a \in X$. Wenn $Df(a)$ invertierbar ist, dann existieren offene Umgebungen $U \subset X$ von a und V von $b := f(a)$, so dass $f: U \rightarrow V$ bijektiv ist, und so dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: V \rightarrow U$ ebenfalls stetig ist.*

Auf Seite 47 von Bröcker: Analysis II wird die stärkere Aussage bewiesen, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: V \rightarrow U$ sogar stetig differenzierbar ist. Wir werden diese Aussage im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht benötigen, und daher auch nicht beweisen.

Beispiel. Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

und den Punkt $a = 2$ in $\mathbb{R}$. Dann ist $Df(a) = f'(a) = a = 2$ ungleich null. Die offenen Umgebungen $U = (1, 3)$ von $a = 2$ und $V = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ von $b = f(a) = 2$ und die Abbildung $f^{-1}: V \rightarrow U, x \mapsto \sqrt{x}$ haben dann beispielsweise die geforderten Eigenschaften. Das Beispiel wird in Abbildung 34 illustriert.

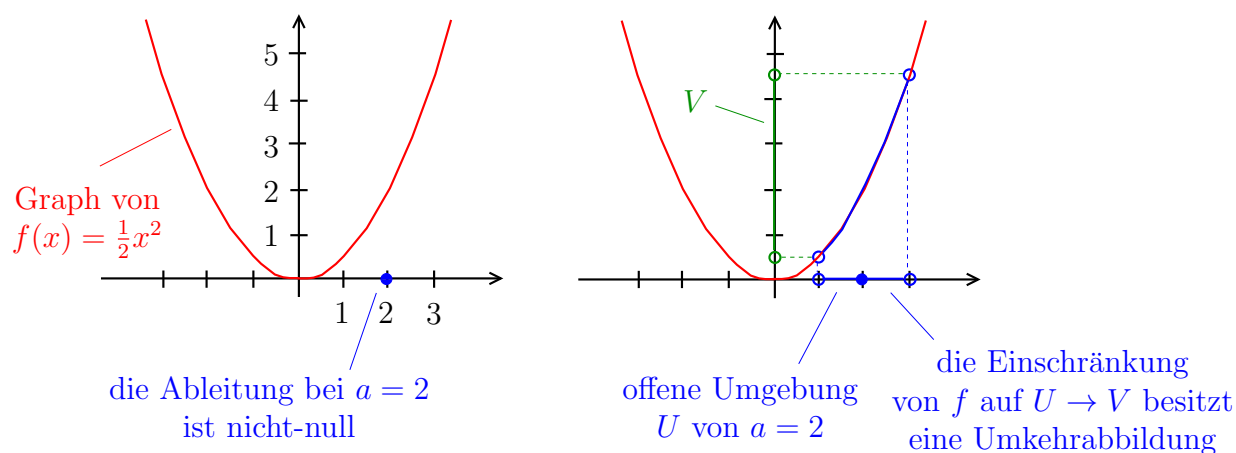


ABBILDUNG 34. Illustration vom Satz über die Umkehrabbildung.

¹¹¹Manchmal sagt man auch ‘lokal invertierbar’. Die Begriffe ‘umkehrbar’ und ‘invertierbar’ sind völlig austauschbar.

Bemerkung. Den Fall $n = 1$ können wir auch mithilfe von Analysis I beweisen. Es sei $X \subset \mathbb{R}$ offen, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $a \in X$, so dass $f'(a) \neq 0$. Nachdem f stetig differenzierbar ist, ist f' stetig. Es existiert daher ein $\epsilon > 0$, so dass $f'(x) > 0$ für $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Aus Analysis I Satz 12.4 folgt, dass die Einschränkung von f auf $U := (a - \epsilon, a + \epsilon)$ streng monoton ist. Insbesondere besitzt diese Einschränkung eine Umkehrfunktion. Nach Satz 11.12 aus der Analysis I Vorlesung ist die Umkehrfunktion zudem differenzierbar.

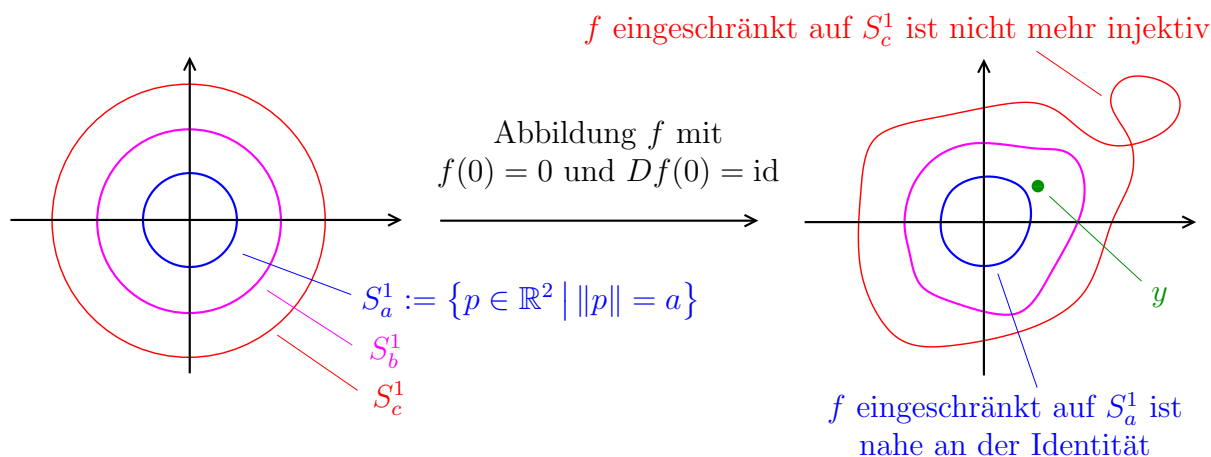


ABBILDUNG 35. Illustration zum Beweis vom Satz über die Umkehrabbildung.

Beweis. Wir beweisen den Satz über die Umkehrabbildung für $X = \mathbb{R}^n$ und $a = b = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. O.B.d.A. können wir auch annehmen, dass $Df(0) = \text{id}$.¹¹²

¹¹³ Unser Ziel ist also, in der Nähe des Ursprungs eine Umkehrfunktion f^{-1} zu finden. Es sei also $y \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt nahe am Ursprung. Das Ziel ist nun zu zeigen, dass es ein x mit $y = f(x)$ gibt. Wir wollen solch ein x mit dem Banachschen Fixpunktsatz finden. Wir müssen die Problemstellung also als Fixpunktproblem umformulieren. Offensichtlich gilt

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = y + \underbrace{(x - f(x))}_{=: g_y(x)}.$$

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir nun die Lage so arrangieren, dass die Abbildung g_y kontrahierend ist.

¹¹²In der Tat, denn nehmen wir an, dass $A := Df(0)$ nicht die Identität ist. Wir betrachten dann die Abbildung $g := A^{-1} \circ f$. Aus der Kettenregel folgt, dass $dg(0) = A^{-1} \circ Df(0) = \text{id}$. Wenn g eine lokale Umkehrabbildung besitzt, dann ist $g^{-1} \circ A^{-1}$ eine Umkehrabbildung für f .

¹¹³Wie in Analysis I ist der Text in blau nur dazu gedacht, auf die Beweisidee zu kommen. Der Text in blau ist nicht Bestandteil des eigentlichen Beweises.

Für ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} g_y: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto g_y(x) := y + (x - f(x)). \end{aligned}$$

Die Abbildungen unterscheiden sich nur durch eine Translation, insbesondere besitzen alle Abbildungen die gleichen Differentiale. Wir schreiben $g := g_0$. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\begin{aligned} Dg_y(0) &= Dg(0) \\ &= D(\text{id} - f)(0) && \text{denn } g = \text{id} - f \\ &= \underbrace{D\text{id}(0)}_{=\text{id}} - \underbrace{Df(0)}_{=\text{id}} = \text{id} - \text{id} = 0. \end{aligned}$$

Wie in Satz 9.4 setzen wir nun

$$r := \max \left\{ s \in [0, \infty) \mid \text{für alle } x \in \overline{B_0(s)} \text{ gilt } \|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Es folgt nun aus Satz 9.4 (1), dass $r > 0$. Zudem folgt aus $g_y(0) = y$ und aus Satz 9.4 (2) und (3), dass für alle y mit $\|y\| \leq \frac{r}{2}$ die Abbildung g_y sich einschränkt auf eine kontrahierende Abbildung

$$g_y: \overline{B_r(0)} \rightarrow \overline{B_r(0)}$$

mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$. Der Banachsche Fixpunktsatz¹¹⁴ besagt nun, dass es für jedes $y \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ genau ein $x \in \overline{B_r(0)}$ mit $g_y(x) = x$, also mit $f(x) = y$, gibt.

Zusammengefasst haben wir jetzt also folgende Aussage bewiesen.

Aussage. Es gibt ein $r > 0$, so dass es zu jedem $y \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ genau ein $f^{-1}(y) := x \in \overline{B_r(0)}$ mit $f(x) = y$ gibt.

Wir haben nun also eine Abbildung $f^{-1}: \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)} \rightarrow \overline{B_r(0)}$ definiert. Die folgende Behauptung besagt, dass die Abbildung f^{-1} eine Lipschitz-Abbildung ist. Insbesondere ist also f^{-1} eine stetige Abbildung.

Behauptung. Für alle $y, z \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ gilt

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| \leq 2\|y - z\|.$$

¹¹⁴Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz an auf die abgeschlossene Teilmenge $\overline{B_r(0)}$ von dem Banachraum $\mathbb{R}$ und die Kontraktion g_y .

Es seien also $y, z \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| \\
&= \left\| \underbrace{g(f^{-1}(y)) + \underbrace{f(f^{-1}(y))}_{=y}}_{=f^{-1}(y)} - \underbrace{(g(f^{-1}(z)) + \underbrace{f(f^{-1}(z))}_{=z})}_{=f^{-1}(z)} \right\| \quad \text{denn } g(w) = w - f(w) \\
&\leq \underbrace{\|g(f^{-1}(y)) - g(f^{-1}(z))\|}_{\substack{\leq \frac{1}{2}\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\|, \text{ da } g \\ \text{kontrahierend auf } V \subset \overline{B_r(0)} \\ \text{mit Kontraktionsfaktor } \frac{1}{2}}} + \|y - z\| \quad \text{Dreiecksungleichung} \\
&\leq \frac{1}{2}\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| + \|y - z\|.
\end{aligned}$$

Indem wir die Ungleichung nach $\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\|$ auflösen erhalten wir die gewünschte Ungleichung

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| \leq 2\|y - z\|.$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Wir müssen nun *offene* Umgebungen U von $a = 0$ und V von $b = 0$ finden, so dass $f: U \rightarrow V$ bijektiv ist, und so dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: V \rightarrow U$ stetig ist. Wir setzen

$$\begin{aligned}
U &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r \text{ und } \|f(x)\| < \frac{r}{2}\}, \text{ und} \\
V &:= f(U).
\end{aligned}$$

Dann ist U eine offene¹¹⁵ Umgebung von $a = 0$ und V enthält $b = 0$. Aus der Wahl von U folgt, dass zudem $V = f(U) \subset B_{\frac{r}{2}}(0)$. Es folgt nun aus der vorherigen Aussage folgt, dass $f: U \rightarrow f(U) = V$ nicht nur surjektiv, sondern auch injektiv, also bijektiv ist. Zudem folgt aus der vorherigen Behauptung, dass $f^{-1}: V \rightarrow U$ stetig ist.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass V offen ist. Wir werden folgende etwas genauere Behauptung beweisen.

Behauptung. Es ist $V = B_{\frac{r}{2}}(0)$.

Wir hatten schon gesehen, dass $V \subset B_{\frac{r}{2}}(0)$. Wir müssen nun noch zeigen, dass auch $B_{\frac{r}{2}}(0) \subset V$. Es sei also $y \in B_{\frac{r}{2}}(0)$. Da f^{-1} auf $B_{\frac{r}{2}}(0)$ definiert ist, gibt es ein $x \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ mit $f(x) = y$. Wir müssen zeigen, dass $x \in U$, d.h. wir müssen zeigen, dass $\|x\| < r$. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|x - 0\| = \|f^{-1}(y) - f^{-1}(0)\| \\
&\leq 2\|y - 0\| && \text{nach der vorherigen Behauptung} \\
&< 2\frac{r}{2} = r.
\end{aligned}$$

Wir haben damit also die Behauptung bewiesen. □

¹¹⁵Warum ist U offen?

9.3. Polarkoordinaten als Beispiel für eine lokale Umkehrabbildung. In diesem Kapitel betrachten wir ein ausführliches Beispiel für den Satz über die Umkehrabbildung. Wir erinnern zuerst daran, dass wir in Satz 10.10 in der Analysis I gesehen hatten, dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ geschrieben werden kann als

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

wobei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Wir nennen (r, φ) *Polarkoordinaten von (x, y)* . Die Polarkoordinaten von einem Punkt sind nicht eindeutig bestimmt, beispielsweise können wir φ immer durch $\varphi + 2\pi$ ersetzen.¹¹⁶

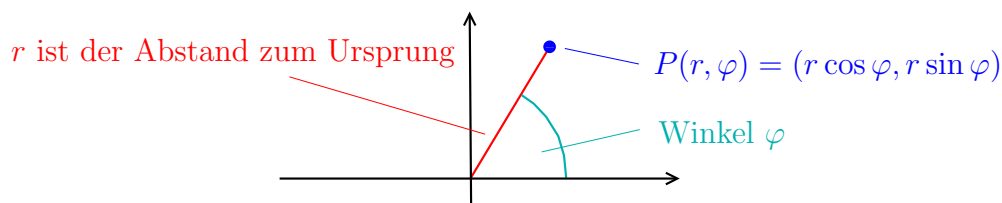


ABBILDUNG 36.

Wir betrachten jetzt etwas formaler die Abbildung¹¹⁷

$$\begin{aligned} P: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist eine C^∞ -Abbildung aber keine Bijektion, nachdem $P(r, \varphi) = P(r, \varphi + 2\pi)$. Die Tatsache, dass P nicht injektiv ist, entspricht genau der Aussage, dass die Polarkoordinaten von einem Punkt nicht eindeutig sind. Das Differential der Abbildung P ist gegeben durch

$$DP(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial r} & \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial P_2}{\partial r} & \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

¹¹⁶Wir hatten in der Analysis I Vorlesung die Polarkoordinaten etwas anders eingeführt. Nämlich für jeden Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ gibt es *eindeutige* $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Dann sind (r, φ) sind also eindeutig bestimmte Polarkoordinaten von (x, y) . Diese haben aber den großen Nachteil, dass diese nicht stetig vom Punkt (x, y) abhängen, nachdem der Winkel beim ‘überschreiten’ der positiven x -Achse von 0 auf ‘fast’ 2π springt.

¹¹⁷Für Vektoren verwenden wir sowohl die ‘horizontale’ als auch die ‘vertikale’ Schreibweise. In vielen Fällen ist die horizontale Schreibweise (x, y) platzsparender. Andererseits ist manchmal die vertikale Schreibweise $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ logischer, beispielsweise wenn wir das Differential bestimmen wollen.

Die Determinante des Differentials ist r . Für $r > 0$ ist die Determinante also nicht null, das Differential ist also eine invertierbare Matrix.¹¹⁸ Aus dem Satz über die Umkehrabbildung folgt nun, dass P an allen Punkten $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ ‘lokal invertierbar’ ist. Anders ausgedrückt, in der Nähe von jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ können wir also eindeutige Polarkoordinaten einführen, welche stetig vom Punkt abhängen.

Betrachten wir beispielsweise den Punkt $(1, 0)$. Dann ist die Einschränkung von P auf

$$\begin{aligned} P: U := \mathbb{R}_{>0} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow V := \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

umkehrbar mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} Q: V = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} &\rightarrow U = \mathbb{R}_{>0} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ (x, y) &\mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

9.4. Umkehrabbildungen von C^k -Abbildungen (*). In diesem Kapitel wollen wir die Umkehrabbildungen von k -fach stetig differenzierbaren Abbildungen studieren. Dieses Kapitel ist nicht offizieller Teil der Vorlesung.

Definition.

- (1) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Abbildung. Wir nennen f eine C^k -Abbildung, wenn die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ alle k -mal stetig differenzierbar sind.

- (2) Wir sagen, f ist eine C^∞ -Abbildung, wenn f für alle k eine C^k -Abbildung ist, d.h. f ist eine C^∞ -Abbildung, wenn die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Die Umkehrabbildung einer bijektiven C^k -Abbildung ist nicht notwendigerweise eine C^k -Abbildung, wie man schon an dem Beispiel

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

sieht, denn die Umkehrabbildung $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist nicht differenzierbar, d.h. f^{-1} ist noch nicht einmal eine C^1 -Funktion.

Erstaunlicherweise besagt der nächste Satz, dass das einzige Problem bei $k = 1$ auftaucht. Anders ausgedrückt, wenn f eine C^k -Abbildung ist, und die Umkehrabbildung f^{-1} eine C^1 -Abbildung ist, dann ist die Umkehrabbildung f^{-1} sogar schon eine C^k -Abbildung.

¹¹⁸Die Abbildung $P: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat also die Eigenschaft, dass das Differential überall invertierbar ist, aber P ist trotzdem nicht bijektiv. Dies ist im Gegensatz zur Situation von Funktionen $g: (a, b) \rightarrow (c, d)$ in einer Variablen: wenn die Ableitung überall nicht null ist, dann ist g bijektiv.

Satz 9.6. *Es sei $f: U \rightarrow V$ eine bijektive C^k -Abbildung zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wenn die Umkehrabbildung eine C^1 -Abbildung ist, dann ist die Umkehrabbildung sogar eine C^k -Abbildung.*

Beispiel. Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine bijektive C^2 -Abbildung, so dass f^{-1} differenzierbar ist. Dann gilt

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Nach Voraussetzung sind f' und f^{-1} differenzierbar. Also ist auch $(f^{-1})'$ als Verknüpfung von zwei differenzierbaren Funktionen wiederum differenzierbar. Der Beweis von Satz 9.6 ist eine Verallgemeinerung von diesem Argument.

Im Beweis von Satz 9.6 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 9.7. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und*

$$\begin{aligned} U &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto A(x) = (a_{ij}(x)) \end{aligned}$$

eine Abbildung, so dass die Matrixeinträge stetig differenzierbar sind, d.h. die Funktionen

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_{ij}(x) \end{aligned}$$

sind stetig differenzierbar. Dann sind auch die Einträge von

$$\begin{aligned} U &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto A(x)^{-1} \end{aligned}$$

stetig differenzierbar.

Beweis. Die Cramersche Regel¹¹⁹ aus der Linearen Algebra besagt, dass für eine beliebige Matrix A mit $\det(A) \neq 0$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{adj},$$

wobei A^{adj} die Adjunkte der Matrix A ist, d.h. der ij -Eintrag von A^{adj} ist gegeben durch

$$(-1)^{i+j} \cdot \begin{array}{l} \text{Determinante der Matrix, welche man aus } A \text{ durch} \\ \text{Streichen der } i\text{-ten Spalte und der } j\text{-ten Zeile erhält.} \end{array}$$

Es folgt also, dass die Einträge von A^{-1} rationale Funktionen in den Einträgen von A sind. Insbesondere, wenn die Einträge von $x \mapsto A(x)$ stetig differenzierbar sind, dann sind auch die Einträge von $x \mapsto A(x)^{-1}$ stetig differenzierbar. $\square$

Wir wenden uns jetzt dem Beweis von Satz 9.6 zu.

¹¹⁹Für eine invertierbare 2×2 -Matrix besagt die Regel, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Beweis von Satz 9.6. Wir beweisen das Lemma für den Fall $k = 2$, der allgemeine Fall folgt dann durch Induktion.

Wir bezeichnen mit $g: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von f . Nachdem g stetig differenzierbar ist, folgt aus Satz 6.2, dass die Einträge von $Dg(y)$ gerade die partiellen Ableitungen von g sind. Wir müssen zeigen, dass diese stetig differenzierbar sind. Korollar 6.8 besagt, dass

$$Dg(y) = \left(Df(g(y)) \right)^{-1}$$

für alle $y \in V$. Nachdem g eine C^1 -Abbildung ist, und nachdem die partiellen Ableitungen von f nach Voraussetzung stetig differenzierbar sind, folgt, dass die Einträge von $y \mapsto Df(g(y))$ stetig differenzierbar sind. Wir müssen aber wirklich zeigen, dass die Einträge von $\left(Df(g(y)) \right)^{-1}$ stetig differenzierbar sind. Dies folgt aber aus Lemma 9.7. $\square$

Definition. Es sei $f: U \rightarrow V$ eine bijektive C^∞ Abbildung zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wenn die Umkehrfunktion ebenfalls eine C^∞ -Abbildung ist, dann nennen wir f einen *Diffeomorphismus*.

Korollar 9.8. *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ -Abbildung und zudem $a \in X$. Wenn $Df(a)$ invertierbar ist, dann existieren offene Umgebungen $U \subset X$ von a und V von $b := f(a)$, so dass $f: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Der Satz über die Umkehrabbildung besagt, dass es offene Umgebungen $U \subset X$ von a und V von $b := f(a)$ gibt, so dass $f: U \rightarrow V$ eine Bijektion ist, und so dass f^{-1} stetig ist. Wie schon erwähnt wird auf Seite 47 von Bröcker: Analysis II bewiesen, dass f^{-1} sogar stetig differenzierbar ist. Das Korollar folgt nun aus Satz 9.6. $\square$

9.5. Satz über implizite Funktionen. Der folgende Satz ist wahrscheinlich der auf den ersten Blick unverdaulichste Satz der Analysis II:

Satz 9.9. (Satz über implizite Funktionen) *Es seien $U_x \subset \mathbb{R}^k$ und $U_y \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und es sei*

$$\begin{aligned} f: U_x \times U_y &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $C \in \mathbb{R}^m$ und es sei $(a, b) \in U_x \times U_y$ ein Punkt mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $f(a, b) = C$, und
- (2) die $m \times m$ -Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

ist im Punkt (a, b) invertierbar.

Dann existieren

- (1) eine offene Umgebungen $V_x \subset U_x$ von a ,
- (2) eine Umgebung $V_y \subset U_y$ von b , sowie
- (3) eine stetig differenzierbare Abbildung $g: V_x \rightarrow V_y$ mit $g(a) = b$,

so dass folgende Aussagen gelten:

- (1) für alle $x \in V_x$ ist

$$f(x, g(x)) = C,$$

- (2) und für alle $(x, y) \in V_x \times V_y$ mit $f(x, y) = C$ gilt, dass $y = g(x)$.

Bemerkung.

- (1) Etwas vereinfacht ausgedrückt besagt der Satz über implizite Funktionen Folgendes: Es sei (a, b) ein Punkt, welcher die Gleichung $f(x, y) = C$ erfüllt, und so dass die Matrix $\frac{\partial f}{\partial y}$ am Punkt (a, b) invertierbar ist. Dann kann man eine kleine Umgebung um den Punkt (a, b) finden, so dass die y -Koordinaten von den Lösungen der Gleichung $f(x, y) = C$ eine Funktion der x -Koordinaten sind.
- (2) Die Ausgangslage vom Satz über implizite Funktionen definiert also Abbildungen $g: V_x \rightarrow V_y$. Diese Funktionen nennt man manchmal die durch f definierten impliziten Funktionen.

Beispiel. Wir betrachten den Fall $k = m = 1$, $U_x = \mathbb{R}$ und $U_y = \mathbb{R}$, die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2. \end{aligned}$$

und den Wert $C = 4$. Dann gilt für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, dass

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2b.$$

Betrachten wir den Punkt $(a, b) = (0, 2)$. Dann gilt $f(0, 2) = 4$ und am Punkt $(0, 2)$ ist $\frac{\partial f}{\partial y} = (4)$, insbesondere eine invertierbare 1×1 -Matrix. Die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen sind also erfüllt. Beispielsweise haben $V_x = (-1, 1)$ und $V_y = (1, 3)$ und

$$\begin{aligned} g: V_x &\rightarrow V_y \\ x &\mapsto \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

die gewünschte Eigenschaft:

- (1) für alle $x \in (-1, 1)$ gilt

$$f(x, g(x)) = f\left(x, \sqrt{4 - x^2}\right) = x^2 + \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 = 4,$$

- (2) wenn $(x, y) \in V_x \times V_y = (-1, 1) \times (1, 3)$ die Gleichung $f(x, y) = x^2 + y^2 = 4$ erfüllt, dann erhält man durch Auflösen nach y , unter der Verwendung, dass $y > 0$, dass $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Das Beispiel wird auch in Abbildung 37 illustriert. Wir beschließen die Diskussion von diesem Beispiel mit zwei Beobachtungen:

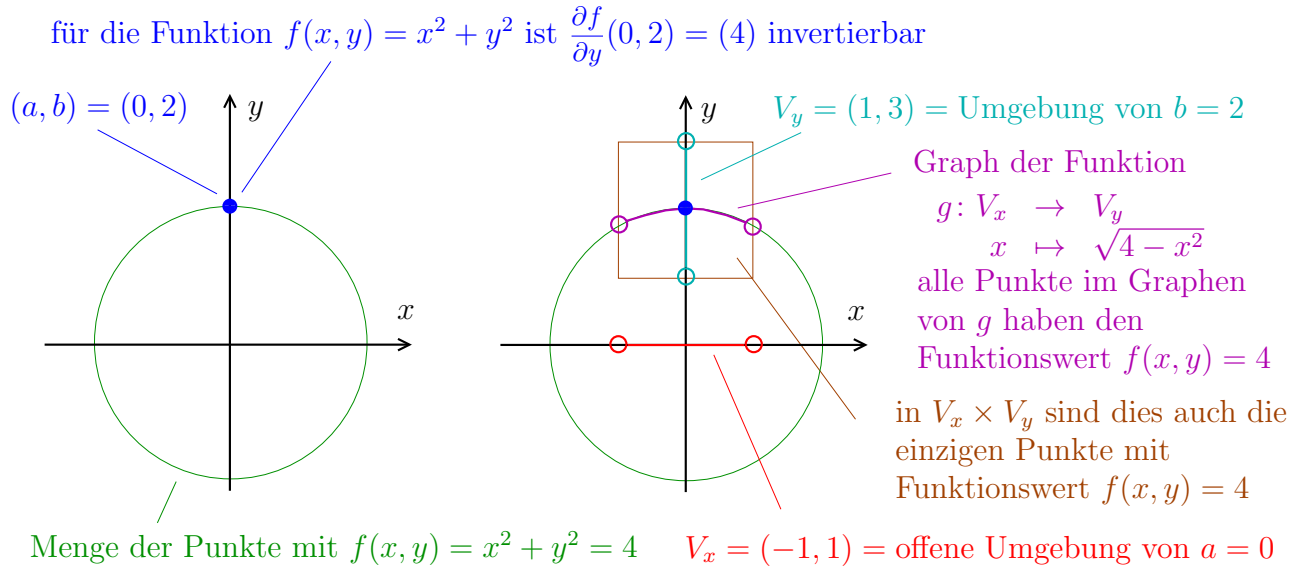


ABBILDUNG 37. Beispiel zum Satz über die impliziten Funktionen.

- (1) Wenn wir $V_y = \mathbb{R}$ gewählt hätten, dann würde die zweite Bedingung nicht mehr gelten, denn dann wären die Punkte in der Nullstellenmenge unterhalb der x -Achse nicht mehr im Graphen von g .
- (2) Für den Punkt $(a, b) = (2, 0)$ gilt ebenfalls $f(a, b) = 4$. In diesem Fall ist aber $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 0$, wir können den Satz über implizite Funktionen also nicht anwenden. In der Tat kann man leicht anhand von Abbildung 37 sehen, dass es keine offene Umgebung V_x von 2 gibt, so dass es zu jedem $x \in V_x$ ein y mit $f(x, y) = 4$ gibt.

Beispiel. Wir betrachten den Fall $U_x = \mathbb{R}^k$, $U_y = \mathbb{R}^m$ und die Projektionsabbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto y. \end{aligned}$$

Wir betrachten zudem ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$. Für den Punkt $(a, b) = (0, C)$ gilt dann $p(0, C) = 0$. Nachdem $\frac{\partial p}{\partial y} = \text{id}_m$ können wir den Satz über implizite Funktionen anwenden. In der Tat haben beispielsweise $V_x = \mathbb{R}^k$, $V_y = \mathbb{R}^m$ und $g(x) = C$ die gewünschten Eigenschaften.

Bevor wir uns dem Beweis vom Satz über implizite Funktionen zuwenden, wollen wir noch einen weiteren Begriff einführen. Es sei $V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge. Wir sagen eine Abbildung

$$\begin{aligned} F: V &\rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) \end{aligned}$$

ist *x-erhaltend*, wenn $F(x, y)$ von der Form $(x, f(x, y))$ ist. ¹²⁰

¹²⁰Anders ausgedrückt, für jedes $(x, y) \in V$ ist $F(x, y) = (x, \tilde{y})$ für ein $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$.

Im Beweis vom Satz über implizite Funktionen werden wir folgendes elementare Lemma verwenden.

Lemma 9.10. *Das Inverse einer bijektiven x -erhaltenden Abbildung ist wiederum x -erhaltend.*

Beweis. Es seien also V und W Teilmengen von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ und es sei $F: V \rightarrow W$ eine bijektive x -erhaltende Abbildung. Wir wollen zeigen, dass $F^{-1}: W \rightarrow V$ ebenfalls x -erhaltend ist. Es sei also $(x, y) \in W$. Wir schreiben $F^{-1}(x, y) = (x', y')$. Nachdem F eine x -erhaltende Abbildung ist folgt, dass $(x, y) = F(x', y') = (x', \tilde{y})$ für ein $\tilde{y} \in \mathbb{R}^k$. Insbesondere ist, wie gewünscht, $x = x'$. $\square$

Beweis des Satzes über implizite Funktionen. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir nur den Spezialfall $U_x = \mathbb{R}^k$ und $U_y = \mathbb{R}^m$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Es sei also

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Zudem sei $C \in \mathbb{R}$ und es sei $(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ ein Punkt mit $f(a, b) = C$, und so dass die $m \times m$ -Matrix $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ invertierbar ist.

Die Idee des Beweises ist die Aussage auf den Satz 9.5 über die Umkehrabbildung zurückzuführen. Um den Satz über die Umkehrabbildung anwenden zu können ‘ergänzen’ wir f zu einer Abbildung $F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{k+m}$, welche ein invertierbares Differential am Punkt (a, b) besitzt. Genauer gesagt, wir betrachten die x -erhaltende Abbildung

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^{k+m} \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) := (x, f(x, y)). \end{aligned}$$

Dann gilt¹²¹

$$DF = \begin{pmatrix} \text{id}_k & 0 \\ * & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Es folgt also aus der Voraussetzung, dass

$$DF(a, b) = \begin{pmatrix} \text{id}_k & 0 \\ * & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Es folgt nun aus dem Satz 9.5 über die Umkehrabbildung, dass es eine offene Umgebung V von (a, b) sowie eine offene Umgebung W von $F(a, b)$ gibt, so dass $F: V \rightarrow W$ eine stetig differenzierbare¹²² Umkehrabbildung $F^{-1}: W \rightarrow V$ besitzt. Wir machen folgende Beobachtungen:

¹²¹Das Symbol $*$ soll nur bedeuten, dass es irrelevant ist, was die Einträge sind.

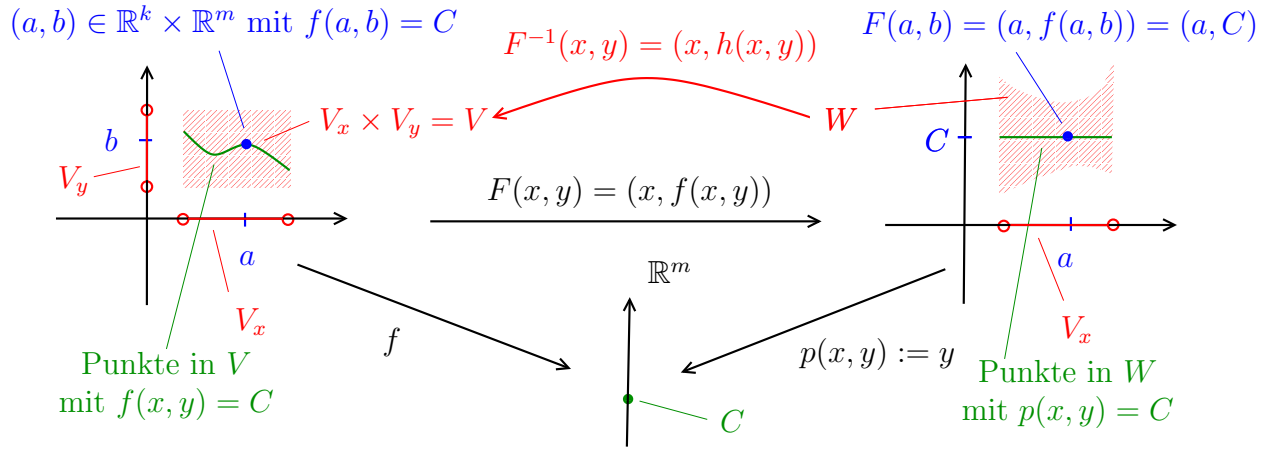
¹²²Die Aussage, dass die Umkehrabbildung stetig differenzierbar ist wird, wie erwähnt, auf Seite 47 von Bröcker: Analysis II bewiesen.

- (1) In dem wir uns notfalls auf eine kleinere offene Menge einschränken, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $V = V_x \times V_y$, wobei V_x eine offene Umgebung von a und V_y eine offene Umgebung von b ist.
- (2) Nachdem $(a, C) = F(a, b) \in W$ und nachdem F eine x -erhaltende Abbildung ist können wir o.B.d.A. annehmen, dass $V_x \times \{C\} \subset W$.¹²³
- (3) Es folgt aus Lemma 9.10, dass F^{-1} ebenfalls x -erhaltend ist, d.h. $F^{-1}(x, y)$ ist von der Form $F^{-1}(x, y) = (x, h(x, y))$.

Wir betrachten nun auch noch die Projektionsabbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^{k+m} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto p(x, y) := y. \end{aligned}$$

Die Lage ist in Abbildung 38 zusammengefasst. Wir hatten schon gesehen, dass auf der



dieses Diagramm von Abbildungen kommutiert, d.h. $p \circ F = f$

ABBILDUNG 38.

rechten Seite von Abbildung 38 die gewünschte implizite Funktion gegeben ist durch

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto C. \end{aligned}$$

Die Idee ist nun diese Lösung mithilfe der Abbildung $F^{-1}(x, y) = (x, h(x, y))$ auf die linke Seite zurückzuziehen. Wir betrachten also die Abbildung¹²⁴

$$\begin{aligned} g: V_x &\rightarrow V_y \\ x &\mapsto h(x, C) = y\text{-Koordinate von } F^{-1}(x, C). \end{aligned}$$

¹²³In der Tat, denn aus der Offenheit von W folgt, dass es eine offene Umgebung X von a gibt, so dass $X \times \{C\} \subset W$. Indem wir V_x durch $V_x \cap X$ ersetzen, und nachdem F eine x -erhaltende Abbildung ist folgt dann, dass $V_x \times \{C\} \subset W$.

¹²⁴Es folgt aus Beobachtung (2), dass $(x, C) \in W$.

Wir müssen nun zeigen, dass g in der Tat die beiden gewünschten Eigenschaften besitzt.

(1) Es sei also $x \in V_x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x, g(x)) &= f(\underbrace{(x, h(x, C))}_{=F^{-1}(x, C)}) = f(F^{-1}(x, C)) \\ &= p(x, C) \quad \text{aus } p \circ F = f \text{ folgt } p = f \circ F^{-1} \\ &= C. \end{aligned}$$

(2) Es sei nun $(x, y) \in V_x \times V_y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x, y) = C &\implies F(x, y) = (x, C) \\ &\implies (x, y) = F^{-1}(x, C) = (x, h(x, C)) \\ &\implies y = h(x, C) = g(x) \end{aligned}$$

□

10. UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

In vielen Anwendungen betrachtet man nicht Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, sondern auf ‘niedrig-dimensionalen’ Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Ein Beispiel von einer solchen Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Erdoberfläche} &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \text{Luftdruck am Punkt } P. \end{aligned}$$

Oder, wenn D ein gebogenes Drahtstück im drei-dimensionalen Raum ist, dann interessiert man sich für die Funktion

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \text{Temperatur am Punkt } P. \end{aligned}$$

Im ersten Fall betrachten wir also eine Funktionen auf einem ‘2-dimensionalen Objekt’ und im zweiten Fall eine Funktion auf einem ‘1-dimensionalen Objekt’. Weitere solche Beispiele hatten wir in Kapitel 7.9 gesehen, beispielsweise hatten wir gesehen, dass wenn wir das globale Maximum einer Funktion f auf der Kugel $D^3 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| \leq 1\}$ bestimmen wollen, dann müssen wir insbesondere das globale Maximum von f auf der Kugeloberfläche $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$ bestimmen.

In diesem Kapitel wollen wir jetzt Methoden finden um auch für Funktionen auf ‘niedrig-dimensionalen’ Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ relative Maxima und Minima zu bestimmen. Dazu müssen wir aber erst einmal eine vernünftige Definition von einem ‘ k -dimensionalen Objekt’ in $\mathbb{R}^n$ einführen. Diese Objekte werden im weiteren Verlauf der Vorlesung ‘Untermannigfaltigkeiten’ genannt.

10.1. Polarkoordinaten, zylindrische Koordinaten und sphärische Koordinaten.

Bevor wir uns der eigentlichen Definition von Untermannigfaltigkeiten zuwenden, wollen wir an die Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$ aus der Analysis I erinnern, und wir führen zudem die zylindrischen und die sphärischen Koordinaten auf $\mathbb{R}^3$ ein. Im Folgenden werden wir manchmal $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren, d.h. für $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben wir $(x, y) = x + iy$.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} P: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = re^{i\varphi}. \end{aligned}$$

In Kapitel 10 von Analysis I hatten wir gesehen, dass diese Abbildung surjektiv ist. Wenn

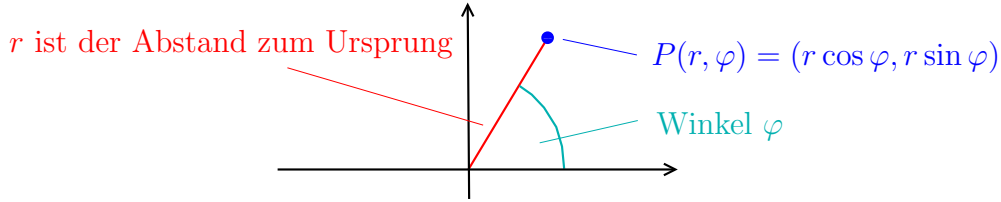


ABBILDUNG 39. Illustration von Polarkoordinaten.

$(x, y) = P(r, \varphi)$, dann bezeichnen wir r und φ als *Polarkoordinaten von (x, y)* . In Analysis I hatten wir zudem gesehen, dass für $r, r' > 0$ und $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$P(r, \varphi) = P(r', \varphi') \iff r = r' \text{ und } \varphi = \varphi' + 2\pi k \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}.$$

Anders ausgedrückt, für einen Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ sind die Polarkoordinaten (r, φ) , bis auf Addition von einem Vielfachen von 2π zu φ , eindeutig bestimmt.

Bevor wir die Zylinderkoordinaten und die sphärischen Koordinaten betrachten, führen wir noch mehrere Definitionen ein, welche uns in der Beschreibung der verschiedenen Koordinaten behilflich sein werden. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ betrachten wir den offenen Strahl

$$S_\varphi = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = re^{i\varphi} \mid r > 0\}$$

und den abgeschlossenen¹²⁵Strahl

$$\overline{S}_\varphi = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = re^{i\varphi} \mid r \geq 0\}.$$

Für $r > 0$ liegt der Punkt $P(r, \varphi)$ offensichtlich im offenen Strahl S_φ . Zudem betrachten wir die offene Halbebene

$$H_\varphi = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = (re^{i\varphi}, z) \mid r > 0 \text{ und } z \in \mathbb{R}\},$$

und die abgeschlossene Halbebene

$$\overline{H}_\varphi = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = (re^{i\varphi}, z) \mid r \geq 0 \text{ und } z \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma 10.1. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{R}^2 \setminus \overline{S}_\pi &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{array}{l} \text{der eindeutige bestimmte Winkel} \\ \varphi \in (-\pi, \pi) \text{ mit } (x, y) \in S_\varphi \end{array} \end{aligned}$$

ist stetig.

¹²⁵Die Bezeichnung ‘offener’ Strahl ist vielleicht etwas mißverständlich, weil es sich hierbei nicht um eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ handelt. Wir verwenden den Begriff nur, um die Strahl ‘ohne den Rand’, von den abgeschlossenen Strahlen ‘mit dem Rand’ zu unterscheiden.

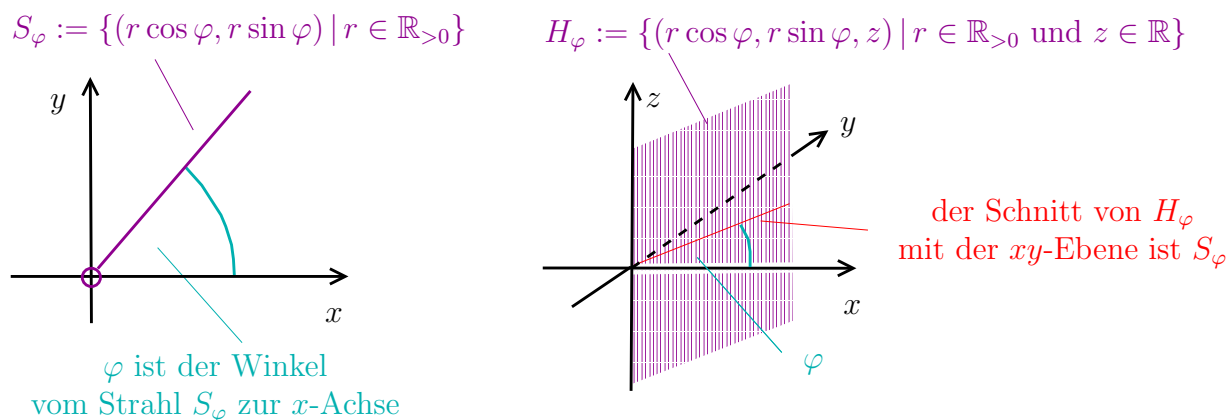


ABBILDUNG 40. Strahlen und Halbebenen.

Beweis. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{S}_\pi$ gilt¹²⁶

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{wenn } x \geq 0, \\ \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{wenn } x < 0 \text{ und } y > 0, \\ -\pi + \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{wenn } x < 0 \text{ und } y < 0. \end{cases}$$

Es ist nun eine freiwillige Übungsaufgabe zu zeigen, dass ρ in der Tat stetig ist. $\square$

Wir wenden uns nun den Zylinderkoordinaten zu. Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} Z: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (r, \varphi, z) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = (r e^{i\varphi}, z). \end{aligned}$$

Aus der obigen Diskussion von Polarkoordinaten folgt, dass diese Abbildung surjektiv ist. Wenn $(x, y, z) = Z(r, \varphi, z)$, dann bezeichnen wir (r, φ, z) als *Zylinderkoordinaten von* (x, y, z) . Aus der obigen Diskussion von Polarkoordinaten folgt, dass für $r, r' > 0$, $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ und $z, z' \in \mathbb{R}$ gilt

$$Z(r, \varphi, z) = Z(r', \varphi', z') \iff r = r', z = z' \text{ und } \varphi = \varphi' + 2\pi k \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}.$$

Anders ausgedrückt, für einen Punkt (x, y, z) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ sind die Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , bis auf Addition von einem Vielfachen von 2π zu φ , eindeutig bestimmt.

¹²⁶Hierbei ist $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$ die radiale Projektion von (x, y) auf den Einheitskreis. Wir betrachten im Argument von $\arcsin$ also die y -Koordinate von der Projektion von (x, y) auf den Einheitskreis.

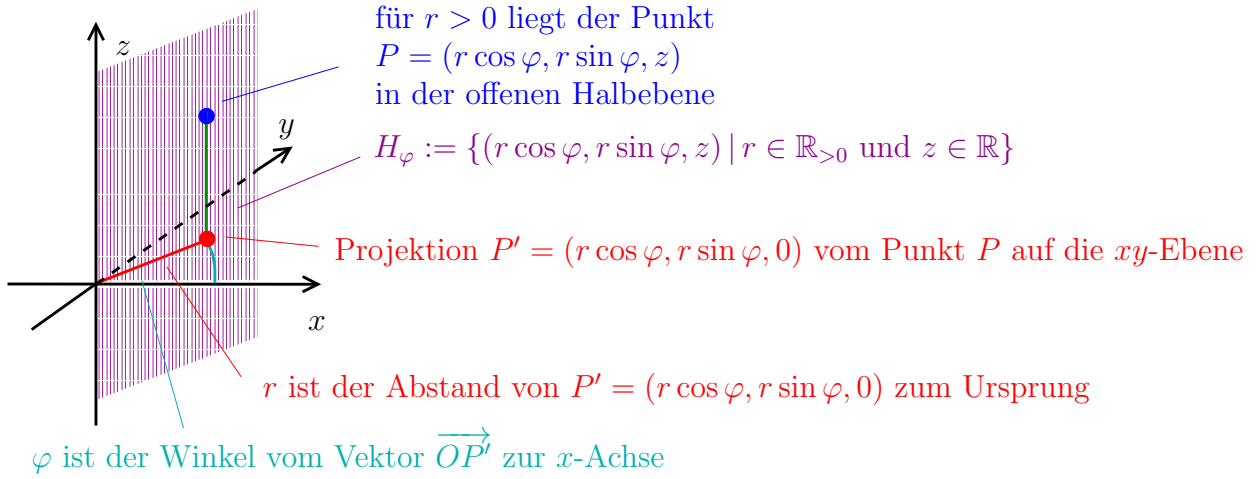


ABBILDUNG 41. Illustration von Zylinder-Koordinaten

Zum Abschluß des Kapitels führen wir noch die sphärischen Koordinaten ein. Wir betrachten die Abbildung

$$S: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \varphi, \theta) \mapsto (r \sin \theta \cdot \cos \varphi, r \sin \theta \cdot \sin \varphi, r \cos \theta).$$

In Übungsblatt 9 werden folgende Aussage bewiesen:

- (1) Der Punkt $S(r, \varphi, \theta)$ hat Abstand r vom Ursprung.
- (2) Für $r > 0$ und $\theta \in (0, \pi)$ liegt der Punkt $P := S(r, \varphi, \theta)$ in der Halbebene H_φ .
- (3) Der Winkel vom Vektor $\overrightarrow{OP}$ zur positiven z -Achse beträgt θ .
- (4) Die Abbildung S ist surjektiv.
- (5) Für ein fest gewähltes $r > 0$ ist

$$\{S(r, \varphi, \theta) \mid \varphi \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\} = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = r\},$$

d.h. wir erhalten die 2-dimensionale Sphäre mit Radius r .

Wenn $(x, y, z) = S(r, \varphi, z)$, dann bezeichnen wir (r, φ, z) als *sphärische Koordinaten*¹²⁷ von (x, y, z) . Wenn $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt ist, welcher nicht auf der z -Achse liegt, d.h. wenn $(x, y) \neq (0, 0)$, dann kann man sich leicht davon überzeugen, dass für $r, r' > 0$, $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ und $\theta, \theta' \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt

$$S(r, \varphi, \theta) = S(r', \varphi', \theta') \iff r = r', \theta = \theta' \text{ und } \varphi = \varphi' + 2\pi k \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}.$$

Anders ausgedrückt, für einen Punkt (x, y, z) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ sind die sphärischen Koordinaten (r, φ, z) , bis auf Addition von einem Vielfachen von 2π zu φ , eindeutig bestimmt.

¹²⁷Manchmal sagt man auch ‘Kugelkoordinaten’ anstatt ‘sphärische Koordinaten’.

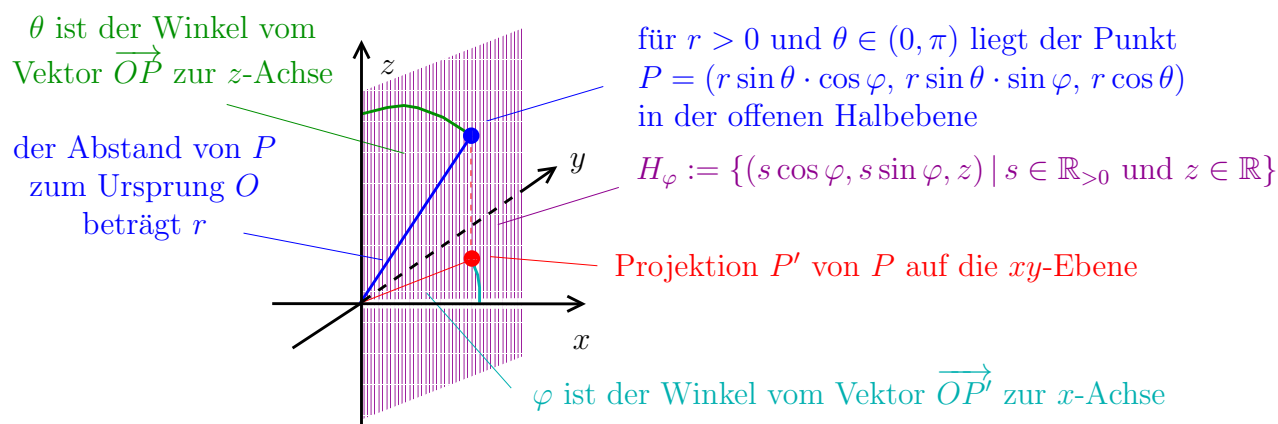


ABBILDUNG 42. Illustration von sphärischen Koordinaten.

10.2. Immersionen und Einbettungen. Wir erinnern zuerst an eine Definition aus der Linearen Algebra. Es sei A eine Matrix. Dann ist der *Rang von A* definiert als

$$\text{Rang}(A) = \text{Dimension des Spaltenraums.}$$

Wir werden im weiteren Verlauf öfters folgendes Lemma aus der Linearen Algebra verwenden.¹²⁸

Lemma 10.2. *Es sei A eine $n \times k$ -Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) A besitzt Rang k ,
- (2) die Spaltenvektoren sind linear unabhängig,
- (3) die Abbildung $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto Av$ ist injektiv,
- (4) es gibt k Zeilen, welche linear unabhängig sind,
- (5) es gibt eine $k \times k$ -Untermatrix mit nicht verschwindender Determinante.

Es folgt beispielsweise aus dem Lemma, dass der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gleich zwei ist, weil die 2×2 -Untermatrix, welche wir aus der ersten und der letzten Zeile bilden, eine nicht verschwindende Determinante besitzt.

¹²⁸Die genaue Definition vom Rang einer Matrix ist im weiteren Verlauf der Vorlesung unerheblich, wir werden nur die Aussage von Lemma 10.2 verwenden.

Definition. Es sei $T \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge. Eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} F: T &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t_1, \dots, t_k) &\rightarrow F(t_1, \dots, t_k) \end{aligned}$$

heißt *Immersion*, wenn in jedem Punkt von T der Rang des Differentials

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

gleich k ist.

Wir betrachten zuerst ein sehr einfaches Beispiel.

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist also gerade die Abbildung P für die Polarkoordinaten, mit der Einschränkung, dass $r = 1$. Die Bildmenge ist der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Es ist

$$DF = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nie die Null-Matrix, also ist F eine Immersion.

Wir betrachten nun noch ein etwas komplizierteres Beispiel.

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist gegeben durch die Abbildung S für die sphärischen Koordinaten, mit der Einschränkung, dass $r = 1$. Aus der Diskussion von den sphärischen Koordinaten folgt: die Bildmenge von F ist die Kugel mit Radius 1 im $\mathbb{R}^3$, ohne den ‘Nordpol’ und den ‘Südpol’, d.h. ohne die Punkte $(0, 0, 1)$ und $(0, 0, -1)$. Die Abbildung ist aber keine Bijektion, denn $F(\theta, \varphi + 2\pi) = F(\theta, \varphi)$. In Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass F eine Immersion ist.

Definition.

- (1) Es sei $F: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Wir sagen, die Abbildung F ist ein *Homöomorphismus auf ihr Bild*, wenn $F: X \rightarrow F(X)$ ein Homöomorphismus ist.

- (2) Es sei $T \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $F: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Einbettung*, wenn F eine Immersion ist und wenn zudem die Abbildung F ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Das folgende elementare Lemma gibt ein Kriterium dafür, dass eine stetige, bijektive Abbildung ein Homöomorphismus ist.

Lemma 10.3. *Es sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und $F: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige und injektive Abbildung. Wenn es eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^n$ gibt, welche $F(T)$ enthält und wenn es zudem eine stetige Abbildung $G: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ gibt, so dass $G(F(t)) = t$ für alle $t \in T$, dann ist die Abbildung F ein Homöomorphismus auf ihr Bild.*

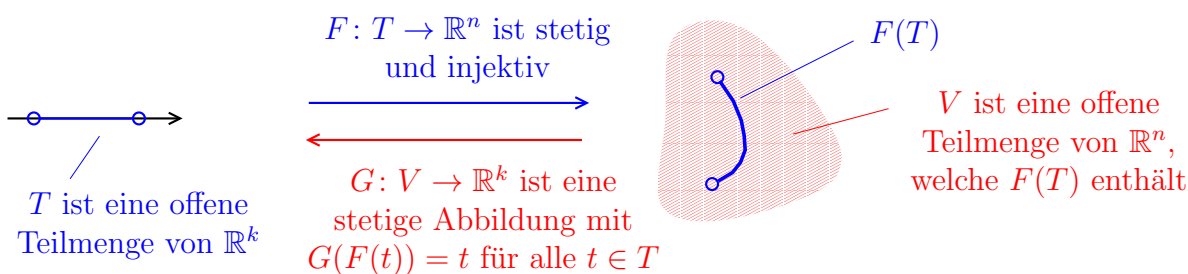


ABBILDUNG 43. Illustration zu Lemma 10.3.

Beweis. Es sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und $F: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige und injektive Abbildung. Es sei zudem V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ gibt, welche $F(T)$ enthält und $G: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Abbildung, so dass $G(F(t)) = t$ für alle $t \in T$.

Wir müssen noch zeigen, dass $F^{-1}: F(T) \rightarrow T$ stetig ist. Die Einschränkung von G auf $F(T)$ ist die Umkehrabbildung von F . Die Einschränkung der stetigen Abbildung $G: V \rightarrow T$ auf $F(T)$ ist weiterhin stetig. Es folgt, dass die Umkehrabbildung von F stetig ist, d.h. F ist ein Homöomorphismus $\square$

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

$$F: T := (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

welche die Punkte in $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ durchläuft. Wir wollen zeigen, dass $F: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Einbettung ist. Wir hatten oben schon gesehen, dass F eine Immersion ist. Die Abbildung F ist zudem injektiv mit $F(T) = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$. Wir wollen nun Lemma 10.3 verwenden um zu zeigen, dass die Abbildung F ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

In Lemma 10.1 hatten wir gezeigt, dass die Abbildung

$$\rho: V := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{S}_\pi \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{array}{l} \text{der eindeutige bestimmte Winkel} \\ \varphi \in (-\pi, \pi) \text{ mit } (x, y) \in S_\varphi \end{array}$$

stetig ist. Es ist leicht nachzuprüfen, dass diese Abbildung alle gewünschten Eigenschaften von Lemma 10.3 erfüllt. Wir haben also gezeigt, dass die Abbildung F ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

$$F: T := (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

die dadurch gegeben ist, dass wir die Abbildung S der sphärischen Koordinaten auf $r = 1$ einschränken. Wir wollen zeigen, dass $F: T \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Einbettung ist. Wir hatten oben schon gesehen, dass F eine Immersion ist, und man kann leicht zeigen, dass F injektiv ist. Man sieht zudem leicht, dass $F(T)$ die Sphäre S^2 ist ‘ohne den Schlitz bei $\overline{H}_\pi$ ’, genauer gesagt, es ist

$$F(T) = S^2 \setminus \overline{H}_\pi.$$

Wenn wir Lemma 10.3 mit der Abbildung

$$\psi: V := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{H}_\pi \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\rho(x, y), \arccos \left(\frac{z}{\|(x, y, z)\|} \right) \right).$$

anwenden, welche nach Lemma 10.1 stetig ist, dann sehen wir, dass F ein Homöomorphismus ihr Bild ist.

Beispiel. Es sei zuletzt $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist F eine stetig differenzierbare Kurve mit

$$F'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dF_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dF_n(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = DF(t).$$

Wir sehen also, dass F eine Immersion ist, genau dann, wenn $F'(t) \neq 0$ für alle t , d.h. genau dann, wenn F eine reguläre Kurve ist. In Abbildung 44 ist eine Kurve skizziert, welche eine injektive Immersion ist, aber keine Einbettung.

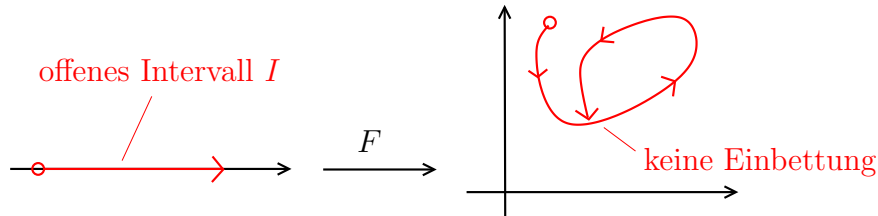


ABBILDUNG 44. Eine injektive Immersion, welche keine Einbettung ist.

10.3. Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir sagen $U \subset M$ ist eine *offene Teilmenge* von M , wenn es eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $U = M \cap V$.

Beispiel. Es sei

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

der Einheitskreis in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Dann ist für jede Wahl von $a < b$ der ‘offene’ Kreisbogen

$$U = \{e^{it} \mid a < t < b\}$$

eine offene Teilmenge von M , denn

$$U = M \cap V$$

wobei

$$V = \{re^{it} \mid a < t < b \text{ und } 0 < r < 2\}$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist.¹²⁹ Diese Aussage wird auch in Abbildung 45 illustriert.

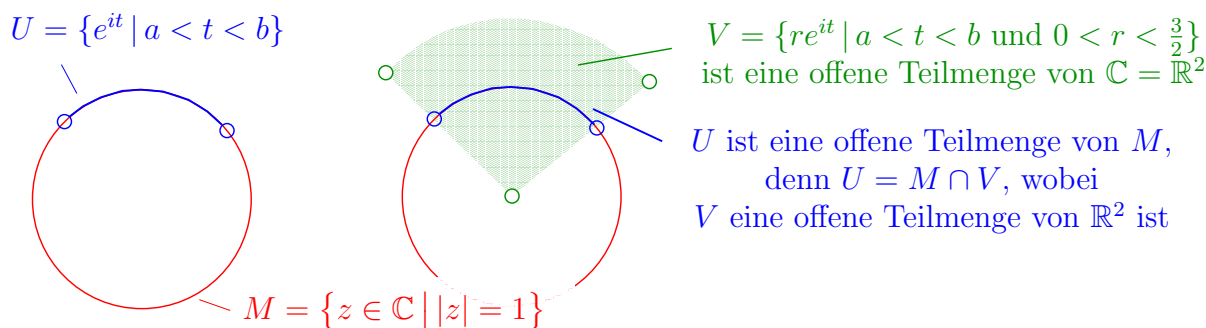


ABBILDUNG 45.

Wir haben jetzt alle Begriffe eingeführt, welche wir für die wichtigste Definition von diesem Kapitel benötigen.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

- (1) Eine *k-dimensionale Parametrisierung* von M im Punkt a ist definiert als eine Einbettung $F: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ von einer offenen Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^k$, so dass $F(T)$ eine offene Umgebung von a in M ist.
- (2) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit*¹³⁰ von $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine *k-dimensionale Parametrisierung* gibt.

¹²⁹Warum ist V eine offene Teilmenge?

¹³⁰Es stellt sich hier natürlich die Frage, wenn es ‘Untermannigfaltigkeiten’ gibt, gibt es dann auch ‘Mannigfaltigkeiten’? Diese gibt es in der Tat, wir werden diese allerdings erst in Analysis IV einführen.

- (3) Ein *Atlas* für eine Untermannigfaltigkeit M ist eine Familie von Parametrisierungen $\{F_i: T_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$, so dass $\bigcup_{i \in I} F_i(T_i) = M$.

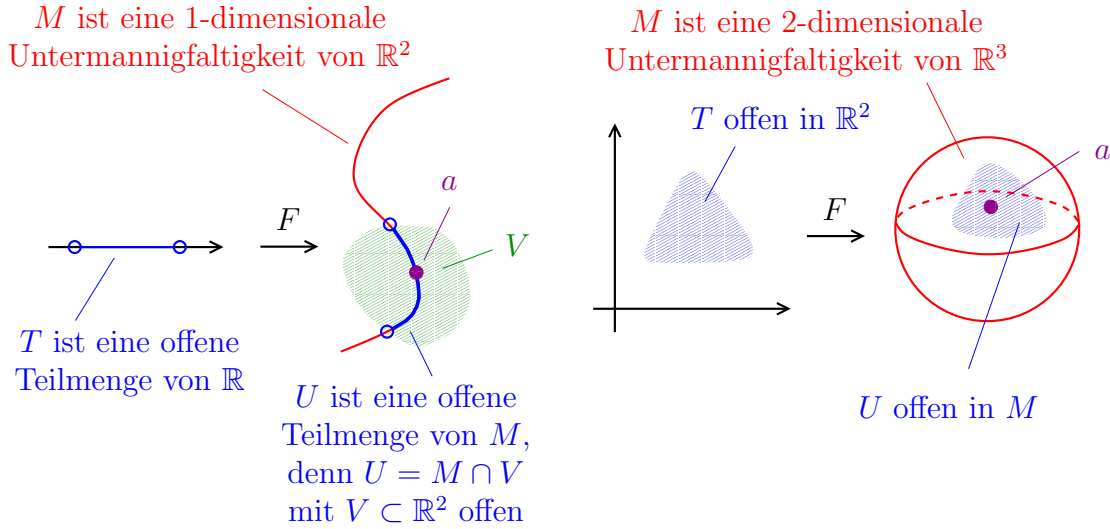


ABBILDUNG 46. Veranschaulichung der Definition von Untermannigfaltigkeiten.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass

$$M = \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \mid |z| = 1\}$$

eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Es sei also $a \in M$ beliebig. Wir betrachten zuerst den Fall $a \neq (-1, 0)$. Wie wir im vorherigen Kapitel gesehen hatten ist

$$\begin{aligned} F: T := (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi &\mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi), \end{aligned}$$

eine Einbettung ist. Zudem ist $F(T) = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ eine offene Teilmenge, welche nach Voraussetzung den Punkt a enthält. Die Abbildung F ist also eine Parametrisierung von M um den Punkt a .

Wir betrachten nun noch den Fall, dass $a = (-1, 0)$. Es sei

$$\begin{aligned} s: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-x, y) \end{aligned}$$

die Spiegelung von $\mathbb{R}^2$ an der y -Achse. Man kann nun leicht verifizieren, dass die Abbildung $s \circ F: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung um den Punkt $a = (-1, 0)$ ist.

Wir haben also insbesondere gezeigt, dass $F: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $s \circ F: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ einen Atlas für die 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Beispiel. Wir wollen nun zeigen, dass

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Der Beweis dieser Aussage läuft ganz analog zum vorherigen Beispiel. Wir betrachten zuerst die Einbettung

$$\begin{aligned} F: T := (-\pi, \pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta) &\mapsto (\sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \sin \varphi, \cos \theta). \end{aligned}$$

Dies ist sogar eine Parametrisierung, denn

$$F(T) = S^2 \setminus \overline{H_\pi} = S^2 \cap \underbrace{(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{H_\pi})}_{\text{offen in } \mathbb{R}^3}$$

ist eine offene Umgebung von a in S^2 . Wir haben also eine Parametrisierung für alle Punkte außerhalb des Halbkreises

$$S^2 \cap \overline{H_\pi} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \leq 0, y = 0\}$$

gefunden.

Wir brauchen nun noch eine Parametrisierung, welche die fehlenden Punkte abdeckt. Wir verwenden dazu die vorherige Parametrisierung, vertauschen die Rollen der y und z -Koordinaten und wir spiegeln entlang der xz -Ebene. Genauer gesagt, wir betrachten die Parametrisierung

$$\begin{aligned} G: T := (-\pi, \pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta) &\mapsto (-\sin \theta \cdot \cos \varphi, \cos \theta, \sin \theta \cdot \sin \varphi). \end{aligned}$$

Diese Parametrisierung deckt alle außerhalb des Halbkreises

$$\{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0, z = 0\}.$$

Nachdem es keinen Punkt gibt, welcher in beiden Halbkreisen liegt, decken die beiden Parametrisierungen S^2 ab. Wir haben also insbesondere gezeigt, dass S^2 einen Atlas besitzt, welcher aus zwei Parametrisierungen besteht.

Beispiel. In Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass der ‘unendliche Zylinder’

$$M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Der Beweis dieser Aussage ist ganz analog zum Beweis, dass der Kreis S^1 und die Sphäre S^2 Untermannigfaltigkeiten sind. Der einzige Unterschied ist, dass man in diesem Fall die Abbildung Z für die Zylinderkoordinaten geeignet einsetzen muss.

Beispiel. Wir bezeichnen mit

$$E_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine k -dimensionale Ebene in $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

offensichtlich eine Parametrisierung. Also ist E_k eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

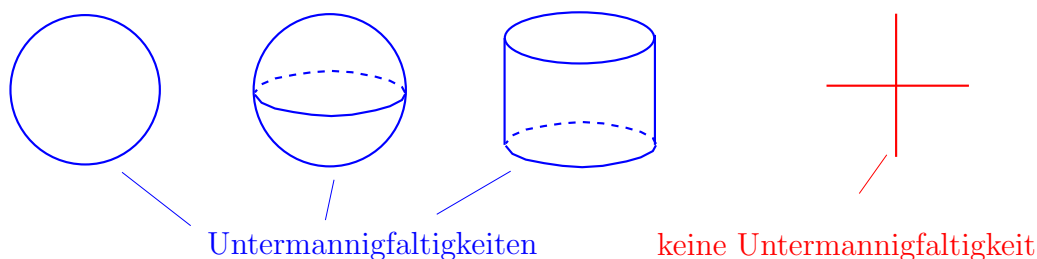


ABBILDUNG 47.

Beispiel. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. In Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass der Graph

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

Beispiel. Zum Abschluß betrachten wir das ‘Kreuz’

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\}.$$

In diesem Fall ist M *keine* 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit, weil jede offene Umgebung $U \subset M$ von $(0, 0)$ ein ‘kleines Kreuz’ enthält, und solch ein ‘Kreuz’ ist nicht homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^1$.¹³¹

10.4. Extrema für Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (1) Wir sagen, $x \in M$ ist ein *globales Maximum*, wenn $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in M$.
- (2) Wir sagen, $x \in M$ ist ein *lokales Maximum*, wenn es eine offene Umgebung V von x in M gibt, so dass $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in V$.
- (3) Wir sagen, $x \in M$ ist ein *striktes lokales Maximum*, wenn es eine offene Umgebung V von x in M gibt, so dass $f(y) < f(x)$ für alle $y \neq x \in V$.

Ganz analog definieren wir *globales Minimum* und (*striktes*) *lokales Minimum*. Ein (*striktes*) *lokales Extremum* ist ein (*striktes*) *lokales Maximum* oder *Minimum*.

Wir wollen jetzt lokale Extrema von Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten bestimmen. Wir werden dazu folgendes Lemma verwenden.

¹³¹Diese Aussage ist zwar intuitiv klar, aber es ist nicht evident, wie man das mathematisch sauber beweist. Hier ist ein möglicher Ansatz zu zeigen, dass es keinen Homöomorphismus φ von der Teilmenge

$$M' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in (-\epsilon, \epsilon) \text{ und } x = 0 \text{ oder } y = 0\}$$

auf eine Teilmenge $N' \subset \mathbb{R}$ geben kann: Nachdem M' wegzusammenhängend ist, müsste dann insbesondere auch $N' = \varphi(M') \subset \mathbb{R}$ wegzusammenhängend sein. Andererseits besteht $M' \setminus \{(0, 0)\}$ aus vier Komponenten, die Teilmenge $\varphi(M' \setminus \{(0, 0)\}) = N' \setminus \varphi(0, 0)$ müsste also auch aus vier Komponenten bestehen. Aber es gibt keine wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, so dass durch herausnehmen eines Punktes die Teilmenge in vier Komponenten zerbricht.

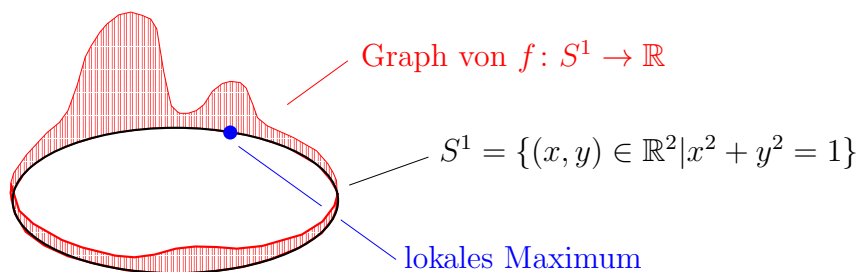


ABBILDUNG 48. Beispiel von einem lokalen Maximum einer Funktion $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 10.4. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $a \in M$. Zudem sei $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von M am Punkt a . Dann gilt*

$$a \text{ ist lokales Maximum der Funktion } f \iff \varphi^{-1}(a) \text{ ist lokales Maximum der Funktion } f \circ \varphi.$$

Ganz analog gelten auch die Aussagen für lokale Minima und strikte Extrema.

Das Lemma besagt insbesondere, dass wenn $\{\varphi_i: T_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i=1, \dots, m}$ ein endlicher Atlas von einer Untermannigfaltigkeit M ist, dann kann man die lokalen Extrema einer Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ dadurch bestimmen, dass man alle lokale Extrema von den Verknüpfungen $f \circ \varphi_i: T_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ bestimmt.

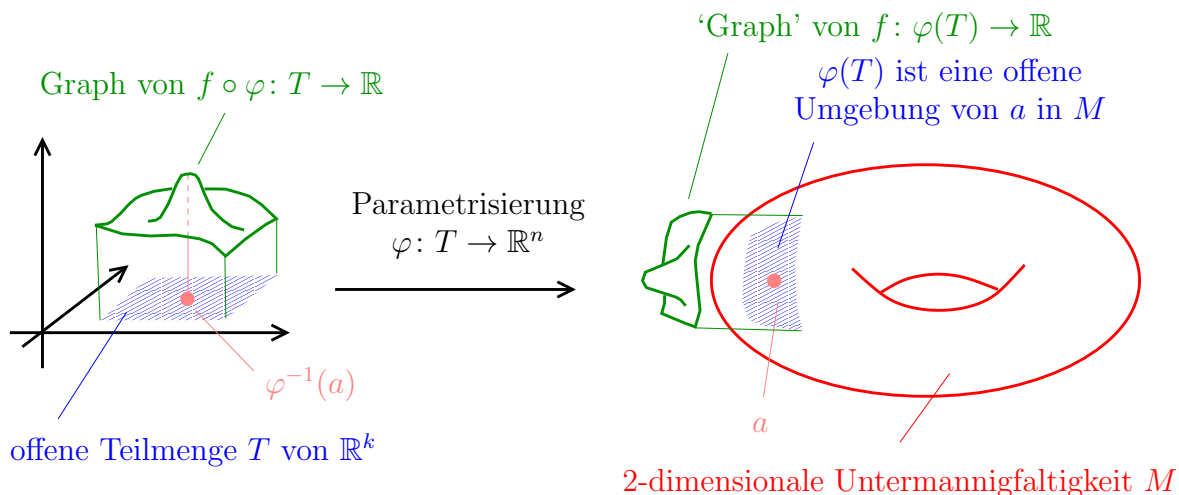


ABBILDUNG 49. Illustration von Lemma 10.4

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $a \in M$. Zudem sei $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von M am Punkt

a. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & a \text{ ist lokales Maximum von } f: M \rightarrow \mathbb{R} \\
 \implies & \text{ es gibt eine offene Umgebung } V \text{ von } a \text{ mit } f(y) \leq f(a) \text{ für alle } y \in V \\
 \implies & \text{ es ist } \underbrace{(f \circ \varphi)(x)}_{=f(\varphi(x))} \leq \underbrace{(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(a))}_{=f(a)} \text{ für alle } x \in \underbrace{\varphi^{-1}(V)}_{\substack{\text{offen in } \mathbb{R}^k \\ \text{nach Satz 2.8}}} \\
 \implies & \varphi^{-1}(a) \text{ ist lokales Maximum der Funktion } f \circ \varphi.
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Voraussetzung, dass die Umkehrabbildung φ^{-1} existiert kann man auch leicht die Rückrichtung beweisen.

Die anderen Aussagen des Satzes werden ganz analog bewiesen. $\square$

Beispiel. Wir betrachten die Untermannigfaltigkeit $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und darauf die Funktion

$$\begin{aligned}
 g: S^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y, z) & \mapsto xy.
 \end{aligned}$$

Es folgt aus dem Satz 3.6 von Heine–Borel, dass S^2 kompakt ist. Korollar 3.8 besagt nun, dass die stetige Funktion $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein globales Maximum annimmt. Wir wollen dieses nun mithilfe von Lemma 10.4 bestimmen. Wir betrachten wiederum die Parametrisierung

$$\begin{aligned}
 F: T = (-\pi, \pi) \times (0, \pi) & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (\varphi, \theta) & \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

Die Verknüpfung der Parametrisierung und der Funktion g ergibt uns dann die differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned}
 g \circ F: T = (-\pi, \pi) \times (0, \pi) & \rightarrow \mathbb{R} \\
 (\varphi, \theta) & \mapsto \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Es ist

$$\text{Grad}(g \circ F) = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ 2 \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Auf dem Definitionsbereich T verschwindet der Gradient genau dann, wenn¹³²

$$(\varphi, \theta) = \left(\pm \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{oder} \quad (\varphi, \theta) = \left(\pm \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Diese vier Punkte sind also die einzigen Punkte, bei denen $g \circ F$ möglicherweise ein lokales Extremum besitzt. Die Bildpunkte

$$F\left(\pm \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad \text{und} \quad F\left(\pm \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

¹³²Im Definitionsbereich ist $\sin(\theta) \neq 0$. Die erste Koordinate ist null, genau dann, wenn $\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$, d.h. wenn $\tan^2(\varphi) = 1$, aber im Bereich $\varphi \in (-\pi, \pi)$ ist dies genau der Fall, wenn $\varphi \in \{\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}\}$. Die zweite Koordinate kann dann nur null sein, wenn $\cos \theta = 0$, d.h. wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$.

sind dann nach Lemma 10.4 die einzigen Punkte in $F(T) \subset S^2$, bei denen g möglicherweise das globale Maximum annimmt. Wir berechnen die zugehörigen Funktionswerte

$$\underbrace{g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}_{=\frac{1}{2}}, \quad \underbrace{g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}_{=-\frac{1}{2}}, \quad \underbrace{g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}_{=-\frac{1}{2}}, \quad \underbrace{g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}_{=\frac{1}{2}}.$$

Wir können jetzt auf zwei verschiedene Arten fortfahren:

- (1) Auf Seite 10.3 hatten wir einen Atlas für S^2 mit zwei Parametrisierungen F und G gefunden. Wir können jetzt die obige Rechnung für die Parametrisierung G durchführen. Fast die gleiche Rechnung wie oben zeigt, dass die vier obigen Punkte tatsächlich die einzigen möglichen Maxima sind, d.h. das globale Maximum von $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\frac{1}{2}$.
- (2) Die Parametrisierung F deckt alle Punkte in S^2 bis auf die Punkte in

$$F(T) = S^2 \cap \overline{H}_{-\pi} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y = 0 \text{ und } x \leq 0\}$$

ab. Auf dieser Teilmenge ist die y -Koordinate null, d.h. die Funktion $g(x, y, z) = xy$ ist null auf dieser Menge. Der oben gefundene Funktionswert $\frac{1}{2}$ ist also schon der maximale Funktionswert. Wir sehen also wiederum, dass das globale Maximum von $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $\frac{1}{2}$.

11. DER SATZ VOM REGULÄREN WERT UND LOKALE EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNGEN

In diesem Kapitel geben wir zuerst eine alternative Definition von Untermannigfaltigkeiten. Danach formulieren und beweisen wir den Satz vom regulären Wert. Dieser erlaubt es uns oft relativ leicht zu zeigen, dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Danach werden wir auch eine Methode einführen, welche in vielen Fällen das Bestimmen von lokalen Extrema auf Untermannigfaltigkeiten deutlich vereinfacht.

11.1. Eine alternative Definition von Untermannigfaltigkeiten. Es gibt verschiedene äquivalente Definitionen von Untermannigfaltigkeiten. Im weiteren Verlauf der Vorlesung wird es öfters hilfreich sein mit der äquivalenten Definition von Satz 11.1 zu arbeiten. Bevor wir den Satz formulieren führen wir noch eine Definition ein.

Definition. Eine bijektive Abbildung $f: U \rightarrow V$ zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ heißt C^1 -Diffeomorphismus, wenn sowohl f also auch f^{-1} stetig differenzierbar sind.

Satz 11.1. *Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, sowie einen C^1 -Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ gibt, so dass*¹³³

$$\Phi(M \cap U) = V \cap E_k.$$

¹³³Zur Erinnerung,

$$E_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet eine k -dimensionale Ebene in $\mathbb{R}^n$.

Die Abbildungen Φ werden *Karten von M* genannt. Parametrisierungen sind also Immersionen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^k$, welche M beschreiben. Karten hingegen sind Abbildungen von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, welche ‘ M gerade biegen’. Beide Gesichtspunkte sind hilfreich und werden oft verwendet.

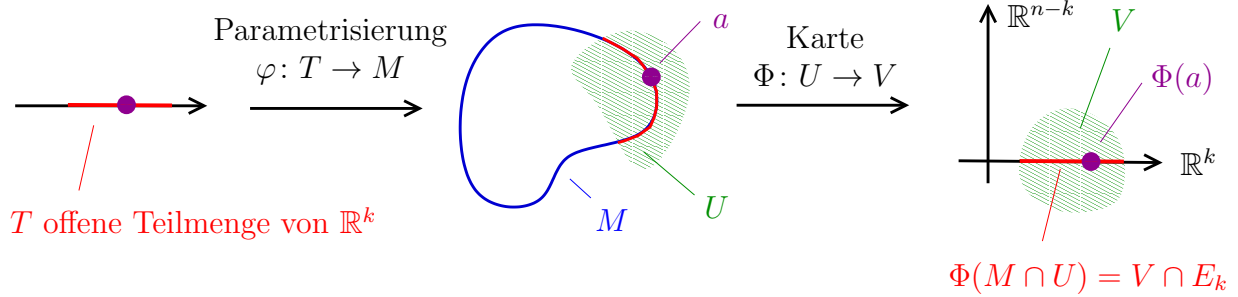


ABBILDUNG 50. Illustration einer Parametrisierung und einer Karte für eine Untermannigfaltigkeit M .

Beweis. Sei $a \in M$ ein Punkt. Nehmen wir zuerst an, dass es einen C^1 -Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ mit den genannten Eigenschaften gibt. Wir werden sehen, dass die Einschränkung von Φ^{-1} auf $V \cap E_k$ (aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}^k$), die gewünschte Parametrisierung ist.

Behauptung. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: T := \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, 0) \in V\} &\mapsto \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \Phi^{-1}(x, 0) \end{aligned}$$

ist eine Parametrisierung von M um den Punkt a .

Für die Behauptung müssen wir folgende Aussagen beweisen:

- (1) T ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$,
- (2) $\varphi(T) \subset M$,
- (3) $\varphi(T)$ ist eine offene Umgebung von a in M ,
- (4) φ ist eine Immersion,
- (5) $\varphi: T \rightarrow \varphi(T)$ ist ein Homöomorphismus.

Wir beweisen nun diese Aussagen:

- (1) Es folgt leicht aus der Offenheit von V und den Definitionen, dass T ebenfalls offen ist.
- (2) Für $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ mit $(x, y) \in V$ gilt $\Phi^{-1}(x, y) \in M$ genau dann, wenn $y = 0$. Die erste Aussage folgt nun sofort aus den Definitionen.
- (3) In (1) hatten wir gerade insbesondere gezeigt, dass $V \cap M = \varphi(T)$. Aber dies bedeutet gerade, dass $\varphi(T)$ eine offene Teilmenge von M ist.

- (4) Wir betrachten die Abbildung $\psi(x_1, \dots, x_k) := (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\varphi = \Phi^{-1} \circ \psi$. Es sei nun $x \in T$, es folgt aus der Kettenregel, dass

$$D\varphi(x) = D\Phi^{-1}(\psi(x)) \cdot D\psi(x) = \text{die ersten } k \text{ Spalten von } D\Phi^{-1}(x).$$

Nachdem Φ^{-1} invertierbar ist, besitzt die $n \times n$ -Matrix $D\Phi^{-1}(x)$ den Rang n , insbesondere sind alle Spalten linear unabhängig. Es folgt, dass die $n \times k$ -Matrix $D\varphi(x)$ den Rang k besitzt.

- (5) Die Abbildung $\varphi = \Phi^{-1} \circ \psi$ ist die Verknüpfung von stetigen injektiven Abbildungen. Also ist auch $\varphi: T \rightarrow \varphi(T)$ stetig und injektiv. Es folgt aus Lemma 10.3, angewandt mit $\rho \circ \Phi$, wobei $\rho(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, dass $\varphi: T \rightarrow \varphi(T)$ ein Homöomorphismus ist.

Wir beweisen nun die andere Richtung des Satzes. Wir nehmen nun also an, dass M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Es sei $a \in M$ ein Punkt. Nach Voraussetzung existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^k$, sowie eine Immersion

$$\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

so dass $\varphi(T) = M \cap U$, und so dass $\varphi: T \rightarrow M \cap U$ ein Homöomorphismus ist. Wir schreiben $b = \varphi^{-1}(a)$. Nachdem φ eine Immersion ist, sind die Spalten der $n \times k$ -Matrix $D\varphi(b)$ linear unabhängig. Nachdem Basisergänzungssatz¹³⁴ aus der Linearen Algebra folgt, dass es eine $n \times (n - k)$ -Matrix W gibt, so dass die Spalten der $n \times n$ -Matrix $(D\varphi(b) W)$ eine Basis sind, d.h. so dass diese Matrix invertierbar ist. Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: T \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x) + Wy. \end{aligned}$$

Das Differential am Punkt $(x, 0, \dots, 0)$ ist gegeben durch die Matrix

$$(D\varphi(x) W),$$

welche invertierbar ist. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung besitzt Ψ eine lokale Umkehrung Φ . Diese Abbildung Φ hat dann die gewünschten Eigenschaften. $\square$

11.2. Der Satz vom regulären Wert. In der Linearen Algebra wird gezeigt, dass für eine beliebige Matrix A gilt, dass $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^t)$. Aus Lemma 10.2 erhalten wir nun insbesondere folgendes Lemma.

Lemma 11.2. *Es sei A eine $k \times n$ -Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) A besitzt Rang k ,
- (2) die Zeilen von A sind linear unabhängig
- (3) die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, v \mapsto Av$ ist surjektiv.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

¹³⁴Wir bezeichnen mit $v_1, \dots, v_k$ die Spalten von $D\varphi(b)$. Da diese Vektoren linear unabhängig sind gibt es nach dem Basisergänzungssatz Vektoren $w_1, \dots, w_{n-k}$, so dass $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden. Wir bezeichnen dann mit W die Matrix, deren Spalten gerade $w_1, \dots, w_{n-k}$ sind.

- (1) Wir sagen $x \in U$ ist ein *regulärer Punkt von f* , wenn das Differential $Df(x)$ den Rang k besitzt.
- (2) Wir sagen $z \in \mathbb{R}^k$ ist ein *regulärer Wert von f* , wenn alle Punkte in $f^{-1}(z)$ regulär sind.

Ein Punkt (bzw. Wert), welcher nicht regulär ist, wird *singulär* genannt.¹³⁵

Bemerkung. Der Fall $k = 1$ ist ein wichtiger Spezialfall. Eine $1 \times n$ -Matrix besitzt Rang 1 genau dann, wenn die Matrix ungleich Null ist. Für $k = 1$ entspricht das Differential gerade dem Gradienten. Wir sehen also, dass ein Punkt $x \in U$ ein regulärer Punkt einer Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist, genau dann, wenn $\text{Grad } f(x) \neq 0$.

Beispiel. Es seien $a_1, \dots, a_n$ positive reelle Zahlen. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2, \end{aligned}$$

dann gilt für jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$, dass

$$\text{Grad } f(x_1, \dots, x_n) = (2a_1 x_1, \dots, 2a_n x_n),$$

insbesondere ist der Gradient ungleich null für jeden Punkt $x \neq 0$. Anders ausgedrückt, die Menge der regulären Punkte von f ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nachdem $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ folgt, dass alle Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ regulär sind.

Wir können jetzt folgenden wichtigen Satz formulieren:

Satz 11.3. (Satz vom regulären Wert) *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Wenn $z \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert ist, dann ist $f^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.*¹³⁶

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen betrachten wir den Fall, dass $X = \mathbb{R}^n$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Wir wollen mithilfe von Satz 11.1 zeigen, dass $M := f^{-1}(z)$ eine $(n - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Es sei also $c \in M = f^{-1}(z)$. Wir müssen für c eine Karte finden. Die Idee hierbei ist die Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$, auf einer Umgebung U von c , zu einer Karte $f: U \rightarrow V$ zu ergänzen.

Wir machen dies wie folgt. Nach Voraussetzung ist c ein regulärer Punkt. Das Differential $Df(c)$ hat daher den Rang k , nach Lemma 10.2 sind also die Zeilen der $k \times n$ -Matrix $Df(c)$ linear unabhängig. Nach dem Basisergänzungssatz gibt es eine $(n - k) \times n$ -Matrix B , so dass die Zeilen der $n \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} B \\ Df(c) \end{pmatrix}$$

¹³⁵ Anders ausgedrückt, ein Wert $w \in \mathbb{R}^k$ ist regulär, wenn dieser nicht das Bild von einem singulären Punkt in U ist.

¹³⁶ Wenn z nicht im Bild von f liegt, dann ist $f^{-1}(z) = \emptyset$ die leere Menge, insbesondere eine (nicht besonders interessante) Untermannigfaltigkeit beliebiger Dimension.

linear unabhängig sind, d.h. die Matrix ist invertierbar. Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} Bx \\ f(x) - z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Am Punkt c ist das Differential gegeben durch die invertierbare Matrix

$$\begin{pmatrix} B \\ Df(c) \end{pmatrix}.$$

Es folgt nun aus dem Satz 9.5 über die Umkehrabbildung, dass es eine offene Umgebung U von c und eine offene Umgebung V von $\Phi(c) \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\Phi: U \rightarrow V$ eine Umkehrabbildung $\Psi^{-1}: V \rightarrow U$ besitzt, welche ebenfalls stetig differenzierbar ist.

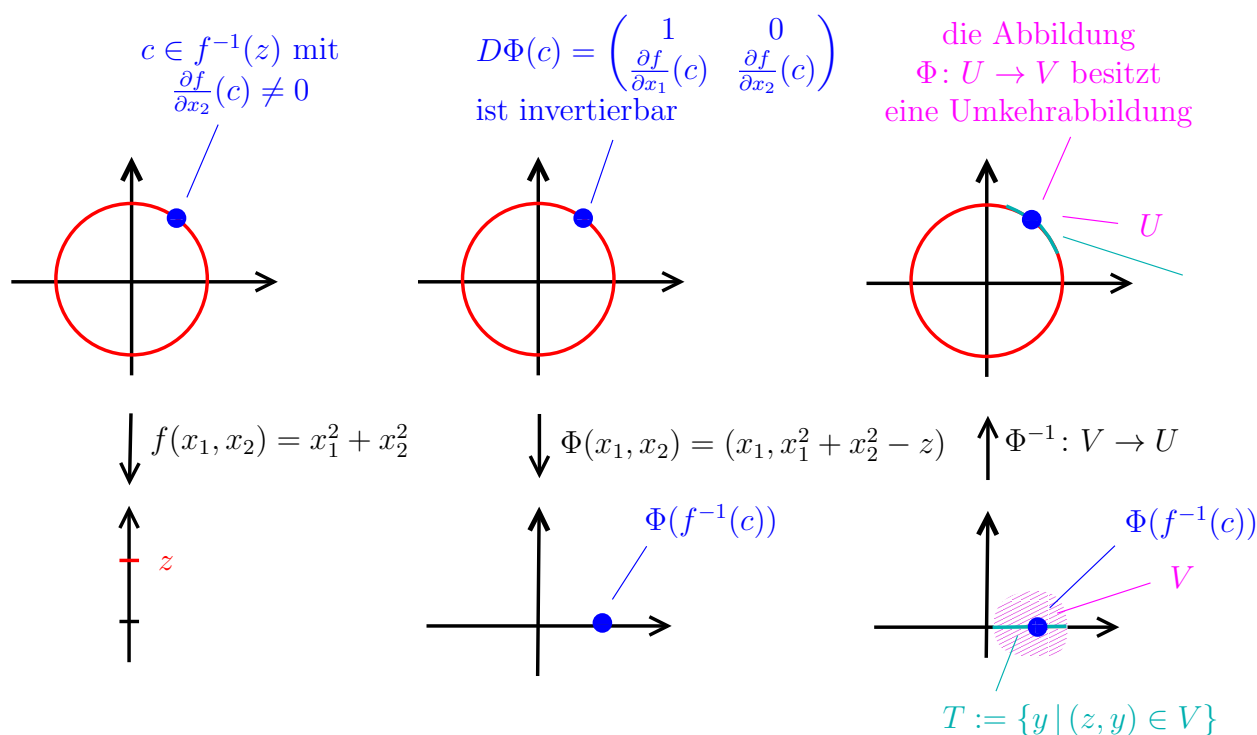


ABBILDUNG 51. Illustration zum Beweis vom Satz vom regulären Wert.

Nach Satz 11.1 genügt es nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die Abbildung $F: U \rightarrow V$ ist eine Karte um den Punkt c .

Es genügt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\Phi(U \cap M) &= V \cap E_{n-k} \\ &= \text{alle } x \in V, \text{ so dass die ersten } (n-k)\text{-Koordinaten verschwinden.}\end{aligned}$$

Aber es folgt sofort aus der Definition von F und von M , dass dies der Fall ist. In der Tat, denn sei $x \in U$. Dann gilt

$$x \in M \iff f(x) = z \iff \Phi(x) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \{0\} \iff \Phi(x) \in V \cap E_{n-k}.$$

□

Beispiel. Es seien $a_1, \dots, a_n$ positive reelle Zahlen. Wie oben betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2. \end{aligned}$$

Für $a_1 = \dots = a_n = 1$ und den regulären Wert $z = 1$, erhalten wir mithilfe vom Satz vom regulären Wert einen Beweis dafür, dass die Sphäre

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Im allgemeinen Fall sehen wir, dass für jede Wahl von positiven reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n$ das Ellipsoid

$$E(a_1, \dots, a_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 1\}$$

eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Die 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit $E(a_1, a_2)$ von $\mathbb{R}^2$ ist eine Ellipse, welche in Abbildung 52 abgebildet ist.

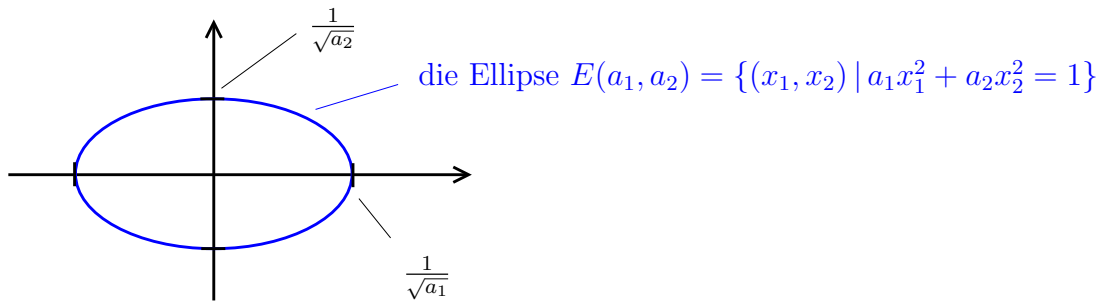


ABBILDUNG 52.

Beispiel. Wir betrachten nun noch die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy. \end{aligned}$$

Der Gradient ist gegeben durch $\text{Grad } f(x, y) = (y, x)$. Dieser ist also überall ungleich null, außer bei am Ursprung. Insbesondere sind alle Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ reguläre Werte. Für jedes $a \neq 0$ ist also $f^{-1}(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = a\}$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $a = 0$ ist $f^{-1}(0)$ das ‘Kreuz’, welches von der x -Achse und der y -Achse gebildet wird. Dies ist, wie schon auf Seite 128 diskutiert, keine Untermannigfaltigkeit. In Abbildung 53 werden die Untermannigfaltigkeiten $f^{-1}(\frac{1}{2})$ und $f^{-1}(1)$ skizziert. Zudem wird auch das Urbild $f^{-1}(0)$ skizziert.

$f^{-1}(\frac{1}{2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = \frac{1}{2}\} = \text{Graph von } f(x) = \frac{1}{2x}$
 ist eine Untermannigfaltigkeit

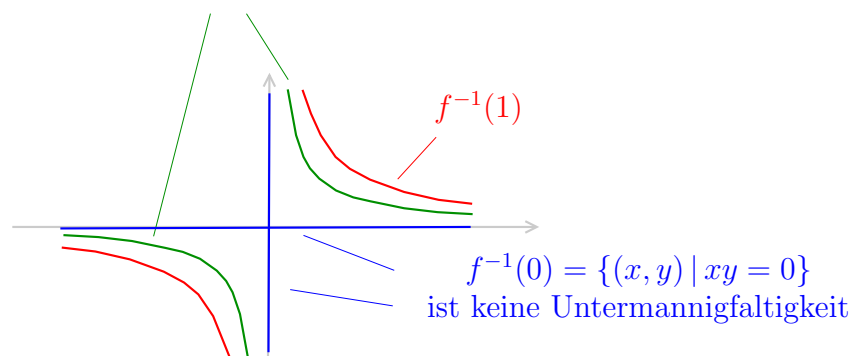


ABBILDUNG 53. Verschiedene Urbilder für $f(x, y) = xy$.

Beispiel. Wir betrachten zuerst die Abbildung

$$\begin{aligned} P: U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \neq (0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{1}{\|(x, y)\|} (x, y, 0). \end{aligned}$$

Diese Abbildung projiziert also einen Punkt (x, y, z) auf die xy -Ebene und normiert dann den Abstand zum Ursprung auf 1. Wir betrachten dann die Abbildung

$$\begin{aligned} f: U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \neq (0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \|(x, y, z) - P(x, y, z)\|. \end{aligned}$$

Diese Abbildung misst den Abstand vom Punkt (x, y, z) zum Punkt $P(x, y, z)$. In Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass $\frac{1}{4}$ ein regulärer Wert von f ist. Es folgt also aus dem Satz vom regulären Wert, dass $f^{-1}(\frac{1}{4})$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

Es stellt sich die Frage, wie wir uns diese Untermannigfaltigkeit vorstellen sollen. Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ betrachten wir dazu wiederum die offene Halbebene

$$H_\varphi := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \mid r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } z \in \mathbb{R}\}.$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass alle Punkt auf H_φ unter der Abbildung P auf den Punkt $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ geschickt werden. In H_φ betrachten wir dann alle Punkte, welche den Abstand $\frac{1}{4}$ zum Punkt $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ besitzen. Anders ausgedrückt, die Urbildmenge

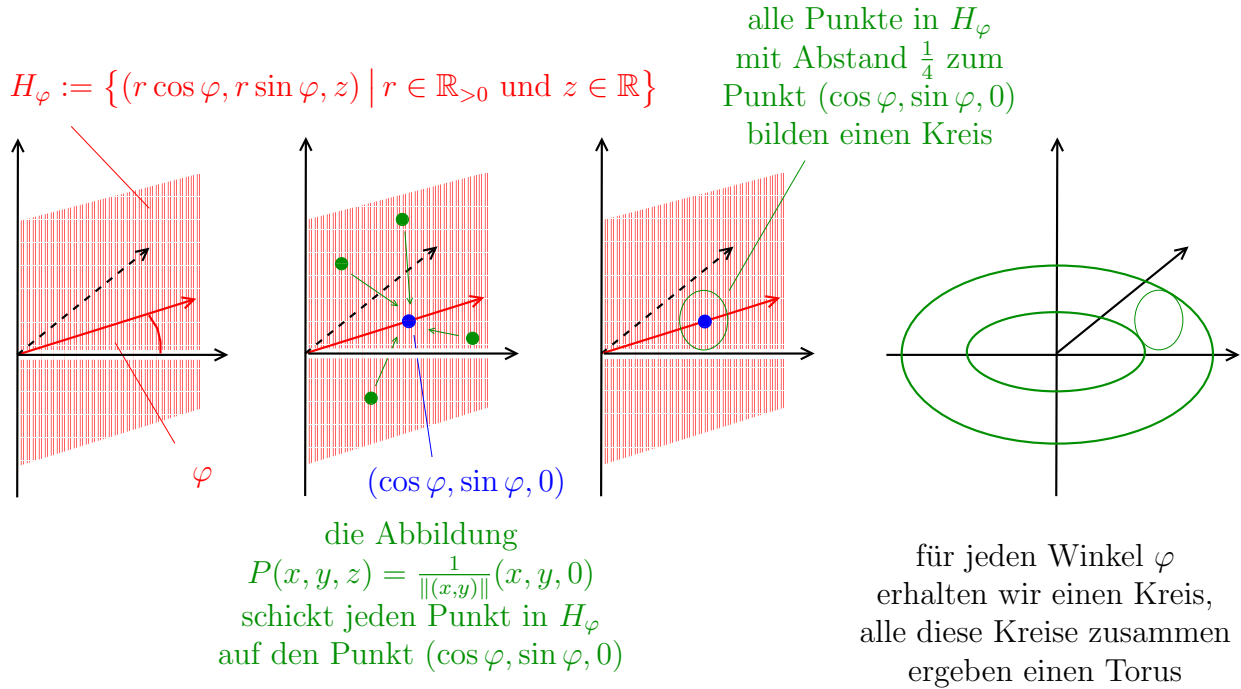


ABBILDUNG 54.

$M = f^{-1}(\frac{1}{4})$ schneidet jede offene Halbebene in einem Kreis von Radius $\frac{1}{4}$. Die Menge M bildet also einen Torus. ¹³⁷

Beispiel. Wir betrachten nun $M(n, \mathbb{R})$, die Menge aller reellen $n \times n$ -Matrizen. Nachdem eine $n \times n$ -Matrix durch die n^2 Einträge bestimmt ist, können wir $M(n, \mathbb{R})$ mit dem Raum $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \det: M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

ist ein Polynom in den Einträgen der Matrix A , insbesondere ist diese Abbildung stetig differenzierbar. Dann ist jede Matrix $A \in M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ mit $\det(A) \neq 0$ ein regulärer Punkt der Determinantenabbildung. ¹³⁸ Es folgt, dass jedes $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein regulärer Wert

¹³⁷Der Vollständigkeit halber, Parametrisierungen von M sind beispielsweise dadurch gegeben, dass man die Abbildung

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{4} \sin \theta) \cos \varphi \\ (1 + \frac{1}{4} \sin \theta) \sin \varphi \\ \frac{1}{4} \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

auf offene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ einschränkt, auf denen F injektiv ist.

¹³⁸Dies sieht man beispielsweise wie folgt: es sei A eine Matrix mit $\det(A) \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass $\text{Grad } \det_A \neq 0$. Nach Satz 6.12 genügt es eine Richtung v zu finden, so dass die Richtungsableitung nicht

der Determinantenabbildung ist. Insbesondere folgt aus dem Satz vom regulären Wert, dass

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \subset M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$$

eine $(n^2 - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

11.3. Tangentialvektoren zu Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in M$.

- (1) Eine *Kurve in M durch a* ist eine Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ auf einem offenen Intervall I mit $\gamma(0) = a$.
- (2) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt a , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve γ in M durch a gibt, so dass $\gamma'(0) = v$.
- (3) Die Menge aller Tangentialvektoren am Punkt a wird mit $T_a M$ bezeichnet. Wir nennen $T_a M$ den *Tangentialraum* am Punkt a .

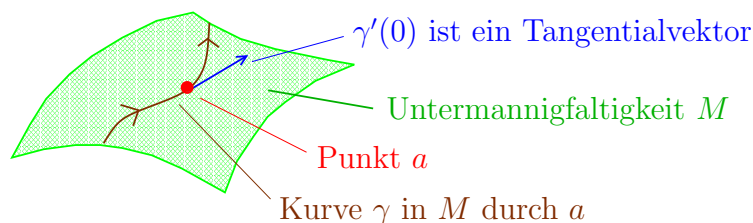


ABBILDUNG 55.

Beispiel.

null ist. Wir bezeichnen mit $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A . Es sei $B = (\frac{1}{\|a_1\|} a_1 0 \dots 0)$ die Matrix, deren erste Spalte gerade die erste Spalte von A , normiert auf die Länge ist, und deren anderen Spalten null sind. Dann gilt für die zugehörige Richtungsableitung, dass

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \det(A + tB) \right|_{t=0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det \left(a_1 \left(1 + \frac{h}{\|a_1\|} \right) a_2 \dots a_n \right) - \det(a_1 \dots a_n) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\left(1 + \frac{h}{\|a_1\|} \right) \det(a_1 a_2 \dots a_n) - \det(a_1 \dots a_n) \right) \quad \text{Linearität der Determinante} \\ &= \frac{1}{\|a_1\|} \det(A), \end{aligned}$$

d.h. die Richtungsableitung ist ungleich null.

- (1) Wir betrachten zuerst die 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Es sei $(x, y) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ein Punkt auf S^1 . Für $r \in \mathbb{R}$ betrachten wir die differenzierbare Kurve

$$\begin{aligned} \gamma_r: (-\pi, \pi) &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(\varphi + rt), \sin(\varphi + rt)). \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma_r(0) = (x, y)$ und

$$\gamma'_r(0) = (-r \sin(\varphi + rt), r \cos(\varphi + rt)) = (-ry, rx).$$

Die Menge aller dieser Ableitungen ist gerade die Menge der Vektoren, welche orthogonal zum Vektor (x, y) sind. Wir werden in Satz 11.4 sehen, dass dies alle Tangentialvektoren zum Punkt (x, y) sind, d.h.

$$T_{(x,y)}S^1 = \{(-ry, rx) \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Verschiedene Beispiele von Tangentialvektoren zu S^1 werden in Abbildung 56 illustriert.

- (2) Wir betrachten die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und den Punkt $a = (0, 0, 1)$. Dann ist $v = (1, 0, 0)$ ein Tangentialvektor, nachdem v die Ableitung der Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: (-\pi, \pi) &\rightarrow S^2 \\ t &\mapsto (\sin(t), 0, \cos(t)) \end{aligned}$$

durch den Punkt a ist. Wenn wir die gleiche Kurve um den Faktor $r \in \mathbb{R}$ ‘beschleunigen’ erhalten wir die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: (-\pi, \pi) &\rightarrow S^2 \\ t &\mapsto (\sin(rt), 0, \cos(rt)) \end{aligned}$$

mit $\gamma'(0) = (r, 0, 0)$. Indem wir diese Kurve noch um den Vektor $\varphi \in [0, 2\pi]$ um die z -Achse drehen erhalten wir die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: (-\pi, \pi) &\rightarrow S^2 \\ t &\mapsto (\sin(rt) \cdot \cos(\varphi), \sin(rt) \cdot \sin(\varphi), \cos(rt)). \end{aligned}$$

¹³⁹ Wir berechnen, dass $\gamma'(0) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), 0)$. Wir sehen also, dass alle Vektoren vom Typ $(x, y, 0)$, d.h. alle Vektoren in der xy -Ebene, Tangentialvektoren von S^2 am Punkt $(0, 0, 1)$ sind. Anders ausgedrückt, es ist

$$\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset T_{(0,0,1)}S^2.$$

Mithilfe von Satz 11.4 werden wir die nicht ganz offensichtliche Aussage beweisen, dass dies in der Tat schon alle Tangentialvektoren.

¹³⁹Diese Kurve beschreibt den Großkreis durch den Nordpol von ‘Längengrad’ φ . Ein Großkreis in $\mathbb{R}^3$ ist hierbei der Schnitt von S^2 mit einer Ebene, welche den Ursprung enthält.

(3) Als letztes Beispiel betrachten wir die k -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$E_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Es sei $a \in E_k$. Für jedes $v \in E_k$ ist dann $\gamma(t) = a + tv$ eine Kurve durch E_k mit $\gamma'(0) = v$. Wir sehen also, dass $E_k \subset T_a E_k$. Dies sind sogar alle Tangentialvektoren, denn für eine beliebige Kurve γ in E_k sind die letzten $(n - k)$ Koordinaten null, dies gilt dann auch für die Ableitung, d.h. $\gamma'(0) \in E_k$. Wir haben also gezeigt, dass $T_a E_k = E_k$.

Wir skizzieren in Abbildung 56 Tangentialvektoren für S^1 und den Tangentialraum zu S^2 am Punkt $(0, 0, 1)$. Der folgende Satz besagt nun insbesondere, dass die Tangentialräume

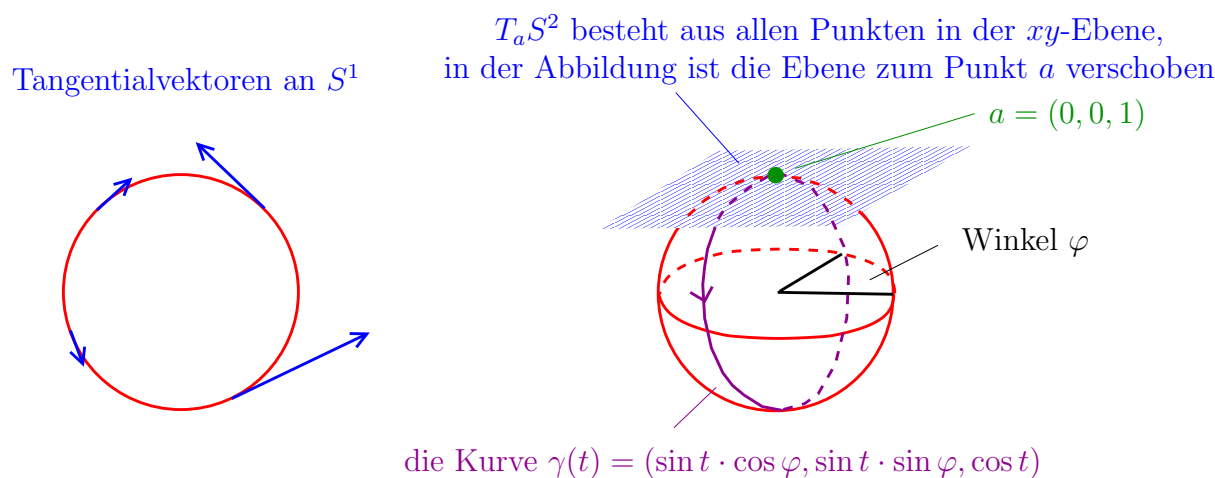


ABBILDUNG 56.

immer Vektorräume sind.

Satz 11.4. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann gilt:*

- (1) $T_a M$ ist ein k -dimensionaler Vektorraum,
- (2) wenn $\varphi: X \rightarrow M$ eine Parametrisierung von M am Punkt a ist mit $\varphi(b) = a$, dann bilden die Spalten des Differentials

$$D\varphi(b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(b) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}(b) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}(b) \end{pmatrix}$$

eine Basis von $T_a M$.

Bemerkung. Von der Anschauung her ist $T_a M$ der k -dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^n$, welche die Untermannigfaltigkeit am Punkt a am besten approximiert. Der Tangentialraum spielt also für Untermannigfaltigkeiten die Rolle der Tangenten für Graphen in $\mathbb{R}^2$.

Beispiel. Wir betrachten wiederum

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und den Punkt $a = (0, 0, 1)$. Auf Seite 127 hatten wir gesehen, dass

$$G: (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \cos \theta \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi \end{pmatrix},$$

eine Parametrisierung um den Punkt $a = (0, 0, 1)$ ist. Offensichtlich ist $G(b) = a$ für $b = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Es folgt also aus Satz 11.4, dass $T_a S^2$ der 2-dimensionale Vektorraum ist, welcher aufgespannt wird von den Spalten von

$$DG\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \sin \varphi & -\cos \theta \cdot \cos \varphi \\ 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta \cdot \cos \varphi & \cos \theta \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anders ausgedrückt, $T_{(0,0,1)} S^2$ ist die xy -Ebene.

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Zudem sei $\varphi: X \rightarrow M$ eine Parametrisierung von M am Punkt a mit $\varphi(b) = a$. Für $i \in \{1, \dots, k\}$ bezeichnen wir mit v_i den i -ten Spaltenvektor von $D\varphi(b)$. Nachdem φ eine Immersion ist folgt aus Lemma 10.2, dass die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig sind. Wir bezeichnen mit V den Vektorraum, welcher von $v_1, \dots, v_k$ aufgespannt wird. Wir müssen zeigen, dass $T_a M = V$. Wir zeigen zuerst, dass $V \subset T_a M$. Sei also $v = \sum_{i=1}^k c_i v_i \in V$. Wir betrachten die Kurve

$$I \xrightarrow{\eta(s) := b + s \cdot (c_1, \dots, c_k)} X \xrightarrow{\varphi} M,$$

$\varphi \circ \eta$

wobei I ein geeignet gewähltes offenes Intervall ist. Dann ist $s \mapsto (\varphi \circ \eta)(s)$ eine Kurve in M durch a , und aus der Kettenregel folgt, dass

$$(\varphi \circ \eta)'(0) = D\varphi(\eta(0)) \cdot \eta'(0) = (v_1 \ \dots \ v_k) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k c_i v_i = v.$$

Wir haben nun gezeigt, dass der k -dimensionale Vektorraum V in $T_a M$ *enthalten* ist. Um die Gleichheit $V = T_a M$ zu zeigen genügt es nun zu beweisen, dass $T_a M$ ebenfalls ein k -dimensionaler Vektorraum ist. Auf Seite 141 hatten wir schon gesehen, dass jeder Tangentialraum zu der k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $E_k \subset \mathbb{R}^n$ ein k -dimensionaler Vektorraum ist. Mithilfe einer Karte wollen wir jetzt diese Aussage auf den Tangentialraum $T_a M$ übertragen.

Wir wählen nun also eine Karte $\Phi: A \rightarrow B$ wie in Satz 11.1. Genauer gesagt, nach Satz 11.1 gibt es eine offene Umgebung A von a und einen C^1 -Diffeomorphismus $\Phi: A \rightarrow B$ auf eine offene Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$, so dass $\Phi(A \cap M) = B \cap E_k$.

Behauptung. Das Differential $D\Phi(a)$ induziert eine Abbildung zwischen T_aM und E_k .¹⁴⁰

Es sei $v \in T_aM$ ein Vektor. Wir müssen zeigen, dass $(D\Phi)(a) \cdot v \in E_k$. Es ist

$$\begin{aligned} (D\Phi)(a) \cdot v &= (D\Phi)(a) \cdot \gamma'(0) && \text{wobei } \gamma \text{ eine Kurve in } M \text{ durch } a \text{ mit } \gamma'(0) = v \\ &= (\Phi \circ \gamma)'(0) && \text{nach der Kettenregel} \\ &\in T_{\Phi(a)}E_k && \text{denn } \Phi \circ \gamma \text{ ist eine Kurve in } E_k \text{ durch } \Phi(a) \\ &= E_k && \text{denn auf Seite 141 hatten wir gezeigt,} \\ &&& \text{dass } T_zE_k = E_k \text{ für alle } z \in E_k. \end{aligned}$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Wir haben also bewiesen, dass $D\Phi(a)(T_aM) \subset E_k$. Zusammengefasst erhalten wir, dass

$$V \subset T_aM \subset \underbrace{W := ((D\Phi)(a))^{-1}(E_k)}_{\substack{k\text{-dimensionaler Vektorraum} \\ \text{denn } E_k \text{ ist ein } k\text{-dimensionaler} \\ \text{Vektorraum und } (D\Phi)(a) \text{ ist} \\ \text{ein Isomorphismus}}}$$

Nachdem V und W jeweils k -dimensionale Vektorräume sind, muss $V = W$ gelten, also insbesondere auch $V = T_aM$. $\square$

Für $v \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir im Folgenden

$$v^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w \text{ orthogonal zu } v\}.$$

Wenn $v \neq 0$, dann ist $v^\perp$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - 1$. Allgemeiner, für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$A^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w \text{ orthogonal zu allen } v \in A\}.$$

Wenn wir Untermannigfaltigkeiten betrachten, welche als Urbild eines regulären Wertes einer Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind, dann ist es nun besonders einfach den Tangentialraum zu bestimmen:

Satz 11.5. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und es sei $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist $M := f^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, und für jedes $a \in M$ gilt:*

$$T_aM = (\text{Grad } f(a))^\perp.$$

¹⁴⁰Das Differential ist eine $n \times n$ -Matrix, also eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Der Tangentialraum T_aM ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, und die Aussage der Behauptung ist nun, dass das Bild von $T_aM \subset \mathbb{R}^n$ unter der linearen Abbildung $D\Phi(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in E_k liegt.

¹⁴¹Wir werden in Analysis IV sehen, dass eine differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten an jedem Punkt $a \in M$ eine lineare Abbildung $Df(a): T_aM \rightarrow T_{f(a)}N$ induziert. Viele Aussagen über Differentiale können dann leicht verallgemeinert werden. Beispielsweise, wenn $Df(a)$ eine invertierbare lineare Abbildung ist, dann besitzt f lokal eine Umkehrabbildung.

Beispiel. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und es sei $C \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist

$$M = f^{-1}(C) = \{x \in U \mid f(x) = C\}$$

insbesondere eine Niveaulinie von f . Satz 11.5 besagt nun, dass diese Niveaulinie orthogonal zu den Gradienten von f ist. Dies ist genau die Aussage, welche wir schon auf Seite 71, ohne Beweis, formuliert hatten.

Beweis. Nach dem Satz 11.3 vom regulären Wert ist $M = f^{-1}(z)$ eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei nun $a \in M$. Nach Satz 11.4 ist $T_a M$ ein $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum. Nachdem z ein regulärer Wert ist, ist a ein regulärer Punkt von f , d.h. $\text{Grad } f(a)$ ist nicht der Nullvektor. Es folgt, dass $(\text{Grad } f(a))^\perp$ ebenfalls ein $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum ist.

Es genügt nun zu zeigen, dass $T_a M \subset (\text{Grad } f(a))^\perp$. Es sei also $v \in T_a M$. Wir müssen zeigen, dass $\langle \text{Grad } f(a), v \rangle = 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \langle \text{Grad } f(a), v \rangle &= \langle \text{Grad } f(a), \gamma'(0) \rangle && \text{wobei } \gamma \text{ eine Kurve in } M \text{ durch } a \text{ mit } \gamma'(0) = v \\ &= (f \circ \gamma)'(0) && \text{nach Satz 6.10} \\ &= 0 && \text{da } (f \circ \gamma)(t) = z \text{ für alle } t, \text{ d.h. } f \circ \gamma \text{ ist konstant.} \end{aligned}$$

□

Beispiel.

- (1) Wir betrachten zuerst die Untermannigfaltigkeit

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 + y^2}_{=: f(x, y)} = 1\}.$$

Dann gilt $\text{Grad } f(x, y) = (2x, 2y)$. Es folgt aus Satz 11.5, dass der Tangentialraum von M an einem beliebigen Punkt $(x, y) \in S^1$ gegeben ist durch

$$T_{(x, y)} S^1 = (2x, 2y)^\perp = \{\lambda(y, -x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- (2) Betrachten wir nun das Ellipsoid

$$M = \{(x, y, z) \mid \underbrace{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}_{=: f(x, y, z)} = 9\}.$$

Dann gilt $\text{Grad } f(x, y, z) = (4x, 6y, 8z)$, und es folgt aus Satz 11.5, dass der Tangentialraum von M am Punkt $(1, 1, 1)$ gegeben ist durch

$$T_{(1, 1, 1)} M = (4, 6, 8)^\perp = \{\lambda(3, -2, 0) + \mu(-2, 0, 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Wir beschließen das Kapitel mit einer Umformulierung von Satz 11.5

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor* von M in a , wenn $v \in (T_a M)^\perp$.

Der folgende Satz kann als Umformulierung von Satz 11.5 betrachtet werden.

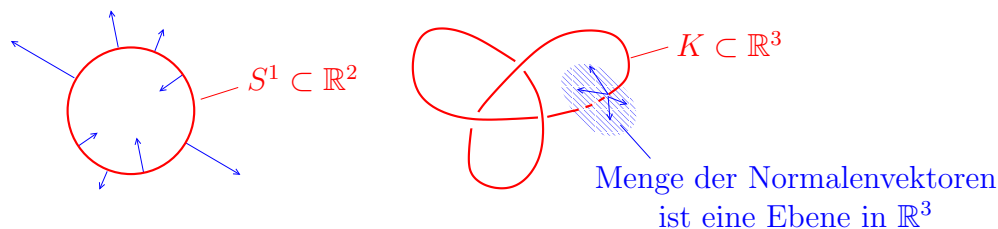
Normalenvektoren zu $S^1 \in \mathbb{R}^2$ 

ABBILDUNG 57.

Satz 11.6. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist $M := f^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, und für jedes $a \in M$ gilt:

$$\text{Menge der Normalenvektoren am Punkt } a = \mathbb{R} \cdot \text{Grad } f(a).$$

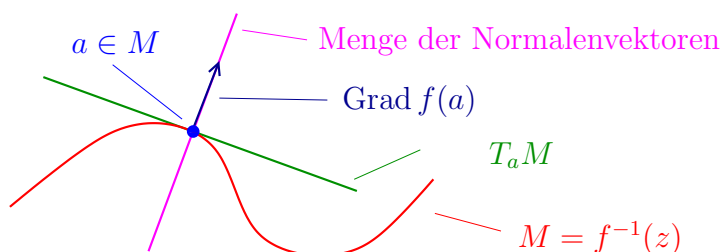


ABBILDUNG 58.

Beweis. Für einen beliebigen Vektor $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ gilt ¹⁴²

$$(v^\perp)^\perp = \mathbb{R} \cdot v.$$

In dem wir diese Aussage auf $v = \text{Grad } f(a)$ anwenden, erhalten wir, dass

$$\mathbb{R} \cdot \text{Grad } f(a) = ((\text{Grad } f(a))^\perp)^\perp = (T_a M)^\perp = \text{Menge der Normalenvektoren im Punkt } a.$$

$\uparrow$
 nach Satz 11.5

□

¹⁴²Dies kann man beispielsweise wie folgt sehen: es folgt aus dem Basis-Ergänzungssatz und aus dem Gram-Schmidt-Verfahren, dass man v zu einer orthogonalen Basis $v, w_1, \dots, w_{n-1}$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzen kann. Hierbei bedeutet ‘orthogonal’, dass $\langle v, w_i \rangle = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$ und es ist $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$. Dann ist $v^\perp$ der von $w_1, \dots, w_{n-1}$ aufgespannte Vektorraum. Zudem ist ein Vektor $\lambda v + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i w_i$ genau dann zu allen w_i ’s orthogonal, wenn $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 0$. Dies zeigt, dass $(v^\perp)^\perp = \mathbb{R}v$.

11.4. Die Methode der Lagrangemultiplikatoren. In diesem Kapitel werden wir eine Methode einführen, welche es in vielen Fällen erlaubt ohne großen Aufwand lokale Extrema einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit zu bestimmen.

Satz 11.7. *Es sei $M := g^{-1}(z)$ das Urbild eines regulären Wertes $z \in \mathbb{R}$ einer stetig differenzierbaren Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere stetig differenzierbare Funktion. Wenn $x \in M$ ein lokales Extremum von $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist, dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\text{Grad } f(x) = \lambda \cdot \text{Grad } g(x).$$

Bemerkung. In der Literatur bezeichnet man öfters ein lokales Extremum der Funktion

$$f: M = g^{-1}(z) \rightarrow \mathbb{R}$$

als *lokales Extremum von $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $g = z$* . Die reelle Zahl λ wird zudem oft als *Lagrangemultiplikator* bezeichnet.

Beweis. Es sei also $x \in M$ ein lokales Extremum der Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass

$$\text{Grad } f(x) \in \mathbb{R} \cdot \text{Grad } g(x)$$

In Satz 11.6 hatten wir gesehen, dass

$$\mathbb{R} \cdot \text{Grad } g(x) = (T_x M)^\perp.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\text{Grad } f(x)$ orthogonal zu allen Vektoren in $T_x M$ ist. Sei also $v \in T_x M$. Wir müssen zeigen, dass $\langle \text{Grad } f(x), v \rangle = 0$. Es ist in der Tat

$$\begin{aligned} \langle \text{Grad } f(x), v \rangle &= \langle \text{Grad } f(x), \gamma'(0) \rangle \quad \text{wobei } \gamma \text{ eine Kurve auf } M \text{ durch } x \text{ mit } \gamma'(0) = v \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \quad \text{nach Satz 6.10} \\ &= 0 \quad \text{da } 0 \text{ ein lokales Extremum}^{143} \text{ von } f \circ \gamma \text{ ist.} \end{aligned}$$

Wir haben also bewiesen, dass $\text{Grad } f(x)$ orthogonal zu allen Vektoren in $T_x M$ ist, d.h. $\text{Grad } f(x)$ ist orthogonal zu $T_x M$. $\square$

Bemerkung. Der Satz kann auch verallgemeinert werden zu Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten, welche durch mehrere Gleichungen $g_1 = 0, g_2 = 0, \dots, g_s = 0$ beschrieben sind. Siehe Forster, Analysis II, Seite 110 für Details.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: S^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Wir können den Kreis S^1 beschreiben also $S^1 = g^{-1}(1)$, wobei $g(x, y) = x^2 + y^2$. Hierbei ist $\text{Grad } f(x, y) = (1, 0)$ und $\text{Grad } g(x, y) = (2x, 2y)$. Offensichtlich wird das globale Maximum von f auf dem Kreis S^1 im Punkt $(1, 0)$ angenommen. In diesem Punkt gilt

$$\text{Grad } f(1, 0) = (1, 0) = \frac{1}{2} \text{Grad } g(1, 0).$$

¹⁴³Das Argument von Fußnote 87 zeigt, dass $t = 0$ in der Tat ein lokales Extremum von $f \circ \gamma$ ist.

Die Gradienten von f und g sind also, wie von Satz 11.7 vorhergesagt, im Punkt $(1, 0)$ parallel. Der Punkt $(1, 0)$ ist natürlich kein globales Maximum von f auf $\mathbb{R}^2$, der Gradient $\text{Grad } f(1, 0)$ muss also nicht der Nullvektor sein.

Beispiel. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto xy \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Wir wollen das globale Maximum von f auf $S^2 := g^{-1}(1)$ bestimmen.¹⁴⁴ Es ist

$$\begin{aligned} \text{Grad } g &= (2x, 2y, 2z), \\ \text{Grad } f &= (y, x, 0). \end{aligned}$$

Wir versuchen also alle Punkte in $\mathbb{R}^3$ zu finden, welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} (A) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ und} \\ (B) \quad & (y, x, 0) = (2\lambda x, 2\lambda y, 2\lambda z), \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

lösen. Wenn $\lambda = 0$, dann folgt aus (B), dass $x = y = 0$, und aus $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erhalten wir dann, dass $z = \pm 1$. Wir schreiben

$$R_- = (0, 0, -1) \text{ und } R_+ = (0, 0, 1).$$

Andererseits, wenn $\lambda \neq 0$, dann liefert die letzte Koordinate von (B), dass $z = 0$. Die anderen beiden Koordinaten ergeben die Gleichungen $x = 2\lambda y$ und $y = 2\lambda x$. Wir erhalten die Gleichung $x = 2\lambda y = 4\lambda^2 x$. Entweder ist $x = 0$, und dann auch $y = 0$. Aber wir hatten schon gesehen, dass $z = 0$, d.h. dieser Fall tritt nicht ein. Also folgt aus $x = 4\lambda^2 x$, dass $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, und daraus folgt dann $x = \pm y$. Es gibt genau 4 Punkte auf S^2 , d.h. genau 4 Punkte mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, so dass $z = 0$ und $x = \pm y$, nämlich

$$P_+ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), P_- = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), Q_+ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ und } Q_- = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Satz 7.2 besagt, dass das globale Maximum (bzw. Minimum) von $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an einem der Punkte $P_\pm, Q_\pm, R_\pm$ angenommen wird.

Es gilt $f(P_\pm) = \frac{1}{2}$, $f(Q_\pm) = -\frac{1}{2}$ und $f(R_\pm) = 0$. Also ist $\frac{1}{2}$ das globale Maximum von f und $-\frac{1}{2}$ das globale Minimum von $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Wir erhalten also das gleiche Ergebnis wie auf Seite 147, aber mit weniger Rechenaufwand.¹⁴⁵

¹⁴⁴Oder anders ausgedrückt, wir wollen das globale Maximum von f unter der Nebenbedingung $g = 1$ bestimmen.

¹⁴⁵Allerdings haben wir auch in diesem Beispiel schon gesehen, dass es gar nicht so einfach ist, alle Punkte zu finden, an denen $\text{Grad } f = \lambda \text{Grad } g$ gilt.

12. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN: DEFINITION UND BEISPIELE

12.1. Definition von Differentialgleichungen.

Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Ein *Vektorfeld auf A* ist eine stetige Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ein Vektorfeld auf A ordnet also jedem Punkt in $A \subset \mathbb{R}^n$ einen Vektor in $\mathbb{R}^n$ zu. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2}(-y, x) \end{aligned}$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Dieses Vektorfeld ist in Abbildung 59 auf der linken Seite skizziert.

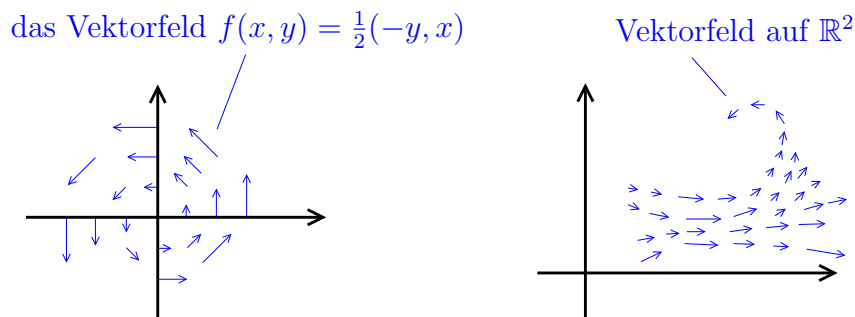


ABBILDUNG 59. Illustration von Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^2$.

Wir verallgemeinern nun noch etwas den Begriff von einem Vektorfeld.

Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Ein *variables Vektorfeld auf A* besteht aus einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und einer stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} f: I \times A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, y) &\mapsto f(t, y). \end{aligned}$$

Ein variables Vektorfeld definiert also insbesondere für ein fest gewähltes $t \in I$ ein Vektorfeld $y \mapsto f(t, y)$. Anders ausgedrückt, f ist ein Vektorfeld auf A , welches sich mit der 'Zeit' t verändern kann. Umgedreht definiert jedes Vektorfeld v auf A durch $f(t, y) := v(y)$ auch ein variables Vektorfeld.

Wir können jetzt die wichtigste Definition des Kapitels einführen.

Definition. Es sei $f: I \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld auf einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Kurve $\varphi: J \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $J \subset I$ ist eine *Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$* , wenn für alle $t \in J$ gilt

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Bemerkung. Eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist also eine Kurve φ , so dass zu jedem Zeitpunkt t die Ableitung gerade durch den Vektor des variablen Vektorfeldes am Punkt $\varphi(t)$ zur Zeit t gegeben ist.

Beispiel. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x, y) &\mapsto \frac{1}{2}(-y, x). \end{aligned}$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Dann definiert beispielsweise

$$\varphi(t) = \left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right), \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right)$$

auf jedem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = (1, 0)$. Diese Lösung ist in Abbildung 59 skizziert.

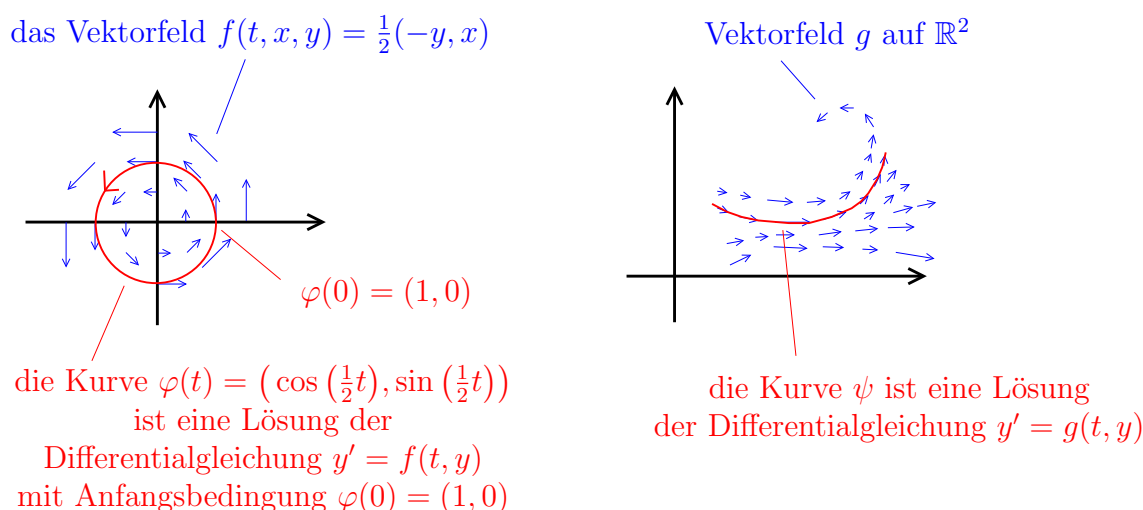


ABBILDUNG 60. Illustration von Lösungen von Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^2$.

Beispiel. Es sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine ‘Teilmenge eines Sees’ und es sei $f(t, a)$ die Wassergeschwindigkeit zum Zeitpunkt t am Punkt a . Dann entspricht die Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ gerade der Bahn eines Wassermoleküls.

Beispiel. Wir betrachten das variable Vektorfeld¹⁴⁶

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y) &\mapsto \frac{1}{t}y \end{aligned}$$

und die dazugehörige Differentialgleichung $y' = f(t, y) = \frac{1}{t}y$. Für jedes $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist dann

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto tw \end{aligned}$$

¹⁴⁶Das Vektorfeld zeigt an einem Punkt $y \in \mathbb{R}^2$ ‘nach außen’ und hat die Länge $\frac{1}{t}\|y\|$, d.h. mit zunehmender Zeit werden die Vektoren immer kürzer.

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$. In der Tat, denn für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\varphi'(t) = w = \frac{1}{t}tw = f(t, tw) = f(t, \varphi(t)).$$

Es gibt kein allgemeines Verfahren, um Differentialgleichungen zu lösen. Wir werden in diesem Kapitel verschiedene Verfahren kennenlernen, um bestimmte Typen von Differentialgleichungen zu lösen. In den folgenden Kapiteln werden wir dann die Theorie der Differentialgleichungen behandeln.

12.2. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Wir betrachten jetzt nur Differentialgleichungen im Fall $n = 1$. Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und es seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y' = f(t)g(y)$$

heißt *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*. Beispielsweise ist

$$y' = 2ty^2$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Wir versuchen zuerst einmal die Differentialgleichung $y' = f(t)g(y)$ ganz naiv zu lösen. Hierbei führen wir folgende suggestive, allerdings sinnlose ‘Rechnung’ durch

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t)g(y) \\ \implies \frac{1}{g(y)}dy &= f(t)dt \\ \implies \int \frac{1}{g(y)}dy &= \int f(t)dt + C \\ \implies G(y) &= F(t) \quad \text{wobei } F, G \text{ Stammfunktionen von } f, g \text{ sind} \\ \implies y &= G^{-1}(F(t)). \end{aligned}$$

Der folgende Satz besagt nun, dass unter geeigneten Voraussetzungen diese naive Rechnung in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t)g(y)$ liefert.

Satz 12.1. *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und es seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so dass $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Sei $(t_0, y_0) \in I \times J$ ein Punkt. Wir definieren*

$$\begin{aligned} F: I &\rightarrow \mathbb{R} & \text{und} & & G: J &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^t f(s)ds & & & y &\mapsto \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)}ds. \end{aligned}$$

Wenn $F(I) \subset G(J)$, dann ist ¹⁴⁷

$$\begin{aligned} \varphi: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto G^{-1}(F(t)) \end{aligned}$$

die einzige Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t)g(y)$ auf dem Intervall I , welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = y_0$ erfüllt.

¹⁴⁷Die Voraussetzung $g(y) \neq 0$ impliziert, dass $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ durchgehend das gleiche Vorzeichen besitzt, d.h. G ist eine streng monotone Funktion, insbesondere besitzt G eine Umkehrfunktion.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ in der Tat eine Lösung ist. Es ist

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= (G^{-1}(F(t)))' \\
 &= (G^{-1})'(F(t)) \cdot F'(t) && \text{Kettenregel} \\
 &= \frac{1}{G'(G^{-1}(F(t)))} \cdot F'(t) && \text{Differentiation der Umkehrfunktion} \\
 &= g(\underbrace{G^{-1}(F(t))}_{=\varphi(t)}) \cdot f(t) && \text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung} \\
 &= g(\varphi(t)) \cdot f(t) && \text{Definition von } \varphi.
 \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass φ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(y)f(t)$ ist. Man kann zudem leicht verifizieren, dass $\varphi(t_0) = y_0$.

Wir zeigen nun noch die Eindeutigkeit der Lösung. Es sei also $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t)g(y)$ mit $\psi(t_0) = y_0$. Wir wollen zeigen, dass $\psi(t) = G^{-1}(F(t))$, oder anders ausgedrückt, dass $G(\psi(t)) = F(t)$ für alle $t \in I$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
 G(\psi(t)) &= \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} \frac{1}{g(u)} du && \text{Definition von } G \\
 &= \int_{t_0}^t \frac{\psi'(s)}{g(\psi(s))} ds && \text{Substitutionsregel mit } u = \psi(s) \text{ rückwärts angewandt} \\
 &= \int_{t_0}^t f(s) ds && \text{denn } \psi'(s) = f(s)g(\psi(s)), \text{ da } \psi \text{ Lösung von } y' = f(t)g(y) \\
 &= F(t) && \text{Definition von } F.
 \end{aligned}$$

□

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 2ty^2.$$

Es sei $c \neq 0$. Wir suchen die Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$. Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, wir können daher Satz 12.1 anwenden. Wir berechnen also

$$\begin{aligned}
 F(t) &:= \int_0^t 2s ds = t^2, \\
 G(y) &:= \int_c^y \frac{1}{s^2} ds = -\frac{1}{y} + \frac{1}{c}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$G^{-1}(z) = \frac{1}{\frac{1}{c} - z}$$

Dann ist nach Satz 12.1 die Funktion

$$\varphi(t) = G^{-1}(F(t)) = \frac{1}{\frac{1}{c} - t^2}$$

¹⁴⁸ die einzige Lösung der Differentialgleichung $y' = 2ty^2$ mit $\varphi(0) = c$. Wenn $c < 0$, dann ist $\varphi(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Andererseits, wenn $c > 0$, dann ist das maximale Intervall auf dem φ definiert ist, und welches 0 enthält, gegeben durch

$$I = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| < \sqrt{\frac{1}{c}} = c^{-1/2}\}.$$

Anders ausgedrückt, für $c > 0$ divergiert die Lösung $\varphi(t)$ für $t \rightarrow \pm c^{-1/2}$. Insbesondere gibt es zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = c > 0$ keine Lösung ¹⁴⁹ der Differentialgleichung, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. ¹⁵⁰

12.3. Homogene lineare Differentialgleichungen. Es sei $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall I . Wir nennen eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(t)y$$

homogene lineare Differentialgleichung. Eine homogene lineare Differentialgleichung ist ein wichtiger Spezialfall einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Satz 12.2. *Es sei $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall I , es sei $t_0 \in I$ und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann besitzt die homogene lineare Differentialgleichung*

$$y' = a(t)y$$

genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt, nämlich

$$\varphi(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).^{151}$$

Beispiel. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann besagt der Satz insbesondere, dass es genau eine differenzierbare Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi'(t) = a\varphi(t)$ und $\varphi(t_0) = c$ gibt, nämlich $\varphi(t) = c \cdot e^{a(t-t_0)}$.

¹⁴⁸Mit der ‘unsinnigen’ aber intuitiven Lösungsmethode der obigen Bemerkung erhalten wir Lösungen der Differentialgleichung $y' = 2ty^2$ wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = 2ty^2 &\implies \frac{1}{y^2} dy = 2t dt \\ &\implies \int \frac{1}{y^2} dy = \int 2t dt + D \implies -\frac{1}{y} = t^2 + D \implies y = \frac{-1}{t^2 + D}. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung wird dann für ein geeignetes D gelöst.

¹⁴⁹Hierbei verwenden wir, dass es nach Satz 12.1 keine weitere Lösung, außer der angegebenen, geben kann.

¹⁵⁰Die Differentialgleichung $y' = 2ty^2$ ist für alle $t, y \in \mathbb{R}$ definiert. Warum besagt dann Satz 12.1 nicht, dass auch die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert?

¹⁵¹Die ‘dreckige’ Lösung der Differentialgleichung mit getrennten Variablen liefert hierbei:

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y \implies \frac{1}{y} dy = a(t) dt \implies \int \frac{1}{y} dy = \int a(t) dt \implies \ln(y) dy = \int a(t) dt \implies y = \exp\left(\int a(t) dt\right).$$

Nachdem homogene lineare Differentialgleichungen ein Spezialfall von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen sind, kann man Satz 12.2 insbesondere mithilfe von Satz 12.1 beweisen. Wir geben im Folgenden allerdings einen unabhängigen, etwas einfacheren Beweis.

Beweis. Wir setzen also

$$\varphi(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Es folgt sofort aus $\exp(g(t))' = g'(t) \cdot \exp(g(t))$ und dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, dass φ in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung $y' = a(t)y$ ist. Zudem ist offensichtlich die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt.

Es sei nun $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung mit $\psi(t_0) = c$. Wir wollen zeigen, dass $\psi(t) = \varphi(t)$ für alle t . Nachdem $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ genügt es zu zeigen, dass die Quotientenfunktion $t \mapsto \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$ konstant ist. Dies ist aber der Fall, denn

$$\left(\psi(t) \cdot \frac{1}{\varphi(t)}\right)' = \frac{\psi'(t)\varphi(t) - \psi(t)\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} = \frac{a(t)\psi(t)\varphi(t) - \psi(t)a(t)\varphi(t)}{\varphi(t)^2} = 0.$$

□

12.4. Inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es seien $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I . Wir nennen eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(t)y + b(t)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung.

Sei nun $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Das Ziel ist eine Lösung φ der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu finden, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt. Sei dazu $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung der *homogenen* linearen Differentialgleichung $y' = a(t)y$ zu der Anfangsbedingung $\psi(t_0) = 1$, welche wir beispielsweise mithilfe von Satz 12.2 finden können. Sei $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ nun eine beliebige differenzierbare Funktion. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen das Produkt $\varphi(t) = \psi(t)u(t)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi' &= (\psi \cdot u)' \\ &= \psi' \cdot u + \psi \cdot u' && \text{Produktregel} \\ &= a \cdot \underbrace{\psi \cdot u}_{=\varphi} + \psi \cdot u' && \text{da } \psi \text{ Lösung von } y' = a(t)y \\ &= a\varphi + \psi \cdot u' && \text{Definition von } \varphi. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass

$$\varphi' = a\varphi + b$$

genau dann, wenn

$$b = \psi \cdot u'.$$

Nachdem ψ und b schon gegeben sind, müssen wir nach u ‘auflösen’, und dieses geschieht wählen. Die obige Gleichung gilt genau dann, wenn

$$u' = \frac{1}{\psi} b,$$

oder anders ausgedrückt, wenn

$$u(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\psi(s)} b(s) ds + \text{const.}$$

Die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ ist zudem genau dann erfüllt, wenn wir die Integrationskonstante gleich c setzen. Wir erhalten nun folgenden Satz:

Satz 12.3. *Es seien $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I . Es sei $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Die einzige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = a(t)y + b(t),$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt, ist gegeben durch die Funktion

$$\varphi(t) = \psi(t) \cdot \left(c + \int_{t_0}^t \frac{1}{\psi(s)} b(s) ds \right)$$

wobei

$$\psi(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Beweis. Wir haben vor dem Satz schon bewiesen, dass φ eine Lösung der Differentialgleichung ist (und man kann das auch noch mal leicht durch Einsetzen nachweisen). Zudem ist $\psi(t_0) = 1$, es folgt, dass $\varphi(t_0) = c$. Die Funktion φ erfüllt also auch die gewünschte Anfangsbedingung.

Wir müssen nun noch zeigen, dass ψ die einzige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t)y + b(t)$ ist, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = c$ erfüllt. Sei dazu $\phi(t)$ eine weitere Lösung. Nachdem $\psi(t) \neq 0$ für alle t , existiert eine Funktion v , nämlich $v(t) = \frac{\phi(t)}{\psi(t)}$, so dass $\phi(t) = \psi(t)v(t)$. Aber vor dem Satz hatten wir schon gesehen, dass es genau eine solche Funktion v gibt, nämlich $v = u$. Es folgt also, dass $\phi = \varphi$. $\square$

Beispiel. Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' = 2ty + t^3.$$

Wir suchen eine Lösung, welche die Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ erfüllt. Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung $y' = 2t \cdot y$ besitzt die Lösung

$$\psi(t) = \exp \left(\int_0^t 2s ds \right) = \exp(t^2),$$

welche die Anfangsbedingung $\psi(0) = 1$ erfüllt. Aus dem obigen Satz folgt, dass

$$\varphi(t) = e^{t^2} \cdot \left(c + \int_0^t s^3 e^{-s^2} ds \right)$$

die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ ist. Mithilfe der Substitution $u = -s^2$ und durch partielle Integration bestimmt man, dass

$$\int_0^t s^3 e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t^2 + 1)e^{-t^2},$$

also ist

$$\varphi(t) = \left(c + \frac{1}{2}\right)e^{t^2} - \frac{1}{2}(t^2 + 1).$$

13. DER EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ

Es sei

$$y' = f(t, y)$$

eine Differentialgleichung. Es stellen sich folgende Fragen:

- (1) Besitzt die Differentialgleichung immer eine Lösung?
- (2) Ist eine Lösung, zu einer gegebenen Anfangsbedingung, eindeutig bestimmt?

In allen bisherigen Beispielen haben wir gesehen, dass beide Fragen bejaht werden können. In diesem Kapitel wollen wir auf beide Fragen ganz allgemein eingehen.

13.1. Lipschitz-stetige Abbildungen. Bevor wir uns den oben genannten Fragen zuwenden, müssen wir allerdings noch kurz ein etwas trockenes Kapitel abarbeiten.

Definition. Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und es sei

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, y) &\mapsto f(t, y) \end{aligned}$$

eine Abbildung.

- (1) Wir sagen die Abbildung f ist *Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen mit Lipschitzkonstante $L \geq 0$* , wenn

$$\|f(t, y) - f(t, y')\| \leq L\|y - y'\| \quad \text{für alle } (t, y), (t, y') \in G.$$

- (2) Wir sagen f ist *lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable*, falls jeder Punkt $(a, b) \in G$ eine Umgebung U besitzt, so dass $f: G \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist.

Beispiel.

- (1) Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) &\mapsto y^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

ist nicht lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen am Punkt $(0, 0)$, insbesondere ist f nicht Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable.

(2) Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) &\mapsto t^{\frac{2}{3}} + y^2 \end{aligned}$$

ist nicht Lipschitz-stetig bezüglich der t -Variable, aber f ist lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable. Beides ist nicht schwierig zu zeigen, und ist Teil von Übungsblatt 12.

Der folgende Satz besagt insbesondere, dass stetig differenzierbare Abbildungen lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen sind.

Satz 13.1. *Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und es sei*

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, y) &\mapsto f(t, y) \end{aligned}$$

eine Abbildung, welche bezüglich der Variablen $y = (y_1, \dots, y_n)$ stetig partiell differenzierbar ist. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen.

Beweis. Wir betrachten den Fall $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, der allgemeine Fall wird ganz ähnlich bewiesen. Sei also $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Es sei $r > 0$. Wir betrachten folgende Umgebung von (a, b) :

$$X := \{(t, y) \mid |t - a| \leq r \text{ und } \|y - b\| \leq r\},$$

welche nach dem Satz 3.6 von Heine–Borel kompakt ist.

Wir werden jetzt zeigen, dass f Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen auf X ist. Es seien also (t, y) und $(t, y + v)$ in U . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f(t, y) - f(t, y + v)\| &\leq \|v\| \cdot n^2 \cdot \max_{\substack{t \in [0, 1] \\ i, j = 1, \dots, n}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x + tv) \right| && \text{nach Korollar 8.4} \\ && \text{und Lemma 6.6} \\ &\leq \|v\| \cdot n^2 \cdot \max_{\substack{w \in X \\ i, j = 1, \dots, n}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(w) \right| \\ &= (*) \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ sind nach Voraussetzung stetig, insbesondere sind sie nach Korollar 3.8 auf der kompakten Menge X durch eine Konstante C beschränkt. Also gilt

$$(*) \leq \|v\| \cdot n^2 \cdot C.$$

Wir haben also gezeigt, dass f auf X Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen mit Lipschitzkonstante $n^2 \cdot C$ ist. $\square$

13.2. Der Existenzsatz von Picard–Lindelöf. Es sei

$$y' = f(t, y)$$

eine Differentialgleichung. Wir möchten nun gerne zeigen, dass es zu jeder Anfangsbedingung $\varphi(s) = a$ eine Lösung φ gibt, welche zumindest auf einem kleinen offenen Intervall $(s - \epsilon, s + \epsilon)$ definiert ist.¹⁵²

Das Hilfsmittel, welches wir dabei verwenden wollen, um solch ein φ zu finden ist der Banachsche Fixpunktsatz 9.2. Zur Erinnerung, dieser lautet wie folgt.

Satz 13.2. (Banachscher Fixpunktsatz) *Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes¹⁵³ $(V, \|\cdot\|)$ und es sei $T: A \rightarrow A$ eine Kontraktion¹⁵⁴. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $a \in A$ mit $a = T(a)$.*

Es stellen sich nun verschiedene Fragen:

- (A) Was soll der Banachraum in unserem Fall sein?
- (B) Wie können wir das Lösen einer Differentialgleichung als Fixpunktproblem formulieren?
- (C) Welche Kontraktion wollen wir verwenden?
- (D) Welche abgeschlossene Teilmenge A wollen wir verwenden?

Wir suchen die Lösung einer Differentialgleichung, d.h. wir suchen eine Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall I . Oder noch mal anders ausgedrückt, wir suchen einen Punkt im Vektorraum der Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Satz 9.1 besagt, dass für eine beliebiges kompaktes Intervall $[a, b]$ der Vektorraum

$$C([a, b], \mathbb{R}^n) = \text{Vektorraum aller stetigen Abbildungen } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit der Maximumsnorm, d.h. mit der Norm

$$\|\varphi\| = \max \{ \|\varphi(t)\| \mid t \in [a, b] \}$$

ein Banachraum ist.

Der folgende Satz erlaubt es uns nun das Auffinden einer Funktion φ mit $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ als Fixpunktproblem umzuformulieren.

Satz 13.3. *Es sei I ein Intervall, es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f: I \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld und es sei $(s, a) \in I \times A$. Für eine Kurve $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $J \subset I$ sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

- (1) φ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(s) = a$,

¹⁵²Im Beispiel nach Satz 12.1 hatten wir gesehen, dass selbst wenn die Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert ist, und wenn $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld, welches lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist, dann ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ nicht notwendigerweise auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wir können also nicht hoffen, eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ zu finden.

¹⁵³Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Vektorraum, d.h. ein normierter Vektorraum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert.

¹⁵⁴Eine Abbildung $T: A \rightarrow A$ heißt *Kontraktion*, wenn es eine Konstante $\Theta \in [0, 1)$ gibt, so dass

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \Theta \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in A.$$

(2) es gilt

$$\varphi(t) = a + \int_s^t f(z, \varphi(z)) dz \quad \text{für alle } t \in J.$$

Der Satz besagt also, dass eine Funktion φ eine Differentialgleichung erfüllt, genau dann, wenn φ die in (2) formulierte Integralgleichung erfüllt.

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass φ eine Lösung der Differentialgleichung bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(s) = a$. Dann folgt für alle $t \in J$, dass

$$\int_s^t f(z, \varphi(z)) dz = \int_s^t \varphi'(z) dz = \varphi(t) - \varphi(s) = \varphi(t) - a.$$

Nehmen wir nun an, dass φ die Integralgleichung erfüllt. Dann gilt $\varphi(s) = a$ und aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \int_s^t f(z, \varphi(z)) dz = f(t, \varphi(t))$$

für alle $t \in J$. □

Es sei nun also $y' = f(t, y)$ eine Differentialgleichung, sagen wir auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, wobei f stetig ist. Der Einfachheit halber wollen wir nur die Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ lösen. Es sei erst einmal $\epsilon > 0$ beliebig. Wir können jetzt folgenden Ansatz versuchen. Wir betrachten den Banachraum $C([- \epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n)$ zusammen mit der Abbildung

$$\begin{aligned} T: C([- \epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n) &\rightarrow C([- \epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n) \\ \psi &\mapsto \left(\begin{array}{ll} T(\psi): [- \epsilon, \epsilon] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \int_0^t f(z, \psi(z)) dz \end{array} \right). \end{aligned}$$

Nach Satz 13.3 genügt es nun zu zeigen, dass T einen Fixpunkt besitzt.¹⁵⁵ Aus dem Banachschen Fixpunktsatz wiederum folgt, dass wir nun noch eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset C([- \epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n)$ finden müssen, so dass $T: A \rightarrow A$ eine Kontraktion ist.

¹⁵⁵Ein Fixpunkt von T ist also ein $\varphi \in C([- \epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n)$ mit

$$\varphi(t) = T(\varphi)(t) = \int_0^t f(z, \varphi(z)) dz \quad \text{für alle } t \in [- \epsilon, \epsilon].$$

Wir müssen also besser verstehen, unter welchen Voraussetzungen die Abbildung T kontrahierend ist. Es seien nun $\varphi, \psi \in C([- \epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|T(\varphi) - T(\psi)\| &= \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \|T(\varphi)(t) - T(\psi)(t)\| \\ &= \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \left\| \int_0^t f(z, \varphi(z)) - f(z, \psi(z)) dz \right\| \\ &\leq \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \left| \int_0^t \|f(z, \varphi(z)) - f(z, \psi(z))\| dz \right| \quad \text{nach Lemma 8.2} \\ &= (*) \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass T kontrahierend ist müssen wir zuallermindest $(*)$ durch $\|\varphi - \psi\|$ abschätzen. Anders ausgedrückt, wir müssen den Integranden durch $\|\varphi - \psi\|$ abschätzen. Wir können dies dadurch bewerkstelligen, dass wir im Folgenden annehmen, dass f Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen mit einer Lipschitz-Konstante $L > 0$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} (*) &= \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \left| \int_0^t \underbrace{\|f(z, \varphi(z)) - f(z, \psi(z))\|}_{\leq L\|\varphi(z) - \psi(z)\| \leq L\|\varphi - \psi\|} dz \right| \\ &\leq \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \left| \int_0^t L\|\varphi - \psi\| dz \right| \\ &\leq L \cdot |t| \cdot \|\varphi - \psi\| \\ &\leq L\epsilon \cdot \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Wenn wir beispielsweise $\epsilon = \frac{1}{2L}$ wählen, dann ist also die Abbildung T kontrahierend, mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

Wir sehen also, dass es hilfreich ist anzunehmen, dass f Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Nachdem wir uns nur Gedanken über Lösungen auf kleinen Intervallen machen, genügt es wohl anzunehmen, dass f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wir können also jetzt den Hauptsatz von diesem Kapitel formulieren.

Satz 13.4. (Existenzsatz von Picard–Lindelöf) *Es sei I ein Intervall, es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f: I \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein variables Vektorfeld, welches lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable ist. Dann gibt es zu jedem $(s, a) \in G$ ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi: (s - \epsilon, s + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung*

$$y' = f(t, y),$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(s) = a$ erfüllt.

Beweis. Wir beweisen den Existenzsatz für den Spezialfall $I = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R}^n$ sowie $s = 0$ und $a = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz ähnlich bewiesen.

Nach Voraussetzung ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable. Es existiert also ein $\delta > 0$ und ein $r > 0$, so dass die Einschränkung von f auf

$$Q := \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in [-\delta, \delta] \text{ und } \|y\| \leq r\}$$

Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable mit einer Lipschitzkonstante $L > 0$ ist. Es folgt aus der Diskussion vor Satz 13.4, dass für Funktionen auf $[-\epsilon, \epsilon]$ gilt

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq L\epsilon \|\varphi - \psi\|,$$

solange auf dem Definitionsbereich gilt, dass $(z, \varphi(z)) \in Q$ und $(z, \psi(z)) \in Q$. Insbesondere ist nun für jedes $\epsilon \in (0, \delta]$ mit $\epsilon \leq \frac{1}{2L}$ die Abbildung

$$T: B := \{\psi \in C([-\epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|\psi\| \leq r\} \rightarrow C([-\epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n)$$

kontrahierend mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

Die Menge B ist abgeschlossen in $C([-\epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n)$.¹⁵⁶ Wir müssen nun also noch überprüfen, ob $T(B) \subset B$. Es sei also $\psi \in B$. Wir wollen also wissen, ob $\|T(\psi)\| \leq r$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|T(\psi)\| &= \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \|T(\psi)(t)\| \\ &= \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \left\| \int_0^t f(z, \psi(z)) dz \right\| && \text{Definition von } T(\psi) \\ &\leq \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \left| \int_0^t \underbrace{\|f(z, \psi(z))\|}_{\in Q} dz \right| && \text{nach Lemma 8.2} \\ &\leq \epsilon \cdot \underbrace{\max \{ \|f(t, y)\| \mid (t, y) \in Q \}}_{=: M} \\ &= \epsilon \cdot M. \end{aligned}$$

Damit $T(B) \subset B$ muss auch $\|T(\psi)\| \leq r$ gelten. Dies können wir dadurch erreichen, dass $\epsilon \cdot M \leq r$, d.h. in dem wir sicher stellen, dass $\epsilon \leq \frac{r}{M}$.

Zusammengefasst haben wir nun folgende Aussage bewiesen. Für

$$\epsilon = \min \left\{ \delta, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L} \right\}$$

und

$$A = \{\psi \in C([-\epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|\psi\| \leq r\}.$$

schränkt sich T ein auf eine kontrahierende Abbildung $T: A \rightarrow A$. Diese Abbildung hat also nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt $\varphi \in C([-\epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n)$. Es folgt aus Satz 13.3, dass die Abbildung φ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist. $\square$

¹⁵⁶Dies ist eine ganz allgemeine Aussage: für jeden metrischen Raum (X, d) , jedes $x \in X$ und jedes $r \geq 0$, ist $B := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \subset X$ abgeschlossen.

13.3. Das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren. In dem Beweis vom Banachschen Fixpunktsatz 9.2 hatten wir folgende, etwas stärkere Aussage bewiesen: Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes $(V, \|\cdot\|)$ und es sei $T: A \rightarrow A$ eine Kontraktion. Es sei $v_0 \in A$. Dann konvergiert die durch $v_k := T(v_{k-1})$ rekursiv definiert Folge gegen ein $v \in A$ mit $T(v) = v$.

Es sei im Folgenden $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist und es sei zudem $(s, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir suchen eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y),$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(s) = a$ erfüllt. Es sei nun $\varphi_0: [s - \epsilon, s + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ erst einmal eine beliebige differenzierbare Abbildung mit $\varphi_0(s) = a$.¹⁵⁷ Wir wenden nun die Abbildung T , welche wir auf Seite 158 eingeführt hatten mehrmals an¹⁵⁸ und wir erhalten die Folge von Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) & \\ \varphi_1(t) &:= a + \int_s^t f(z, \varphi_0(z)) dz \\ \varphi_2(t) &:= a + \int_s^t f(z, \varphi_1(z)) dz \\ \varphi_3(t) &:= a + \int_s^t f(z, \varphi_2(z)) dz \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für geeignetes $\epsilon > 0$ folgt aus der obigen Formulierung des Banachschen Fixpunktsatzes und aus der Diskussion auf Seite 160, dass diese Folge von Funktionen im Banachraum $C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ gegen eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ konvergiert.

¹⁵⁷Wir könnten beispielsweise die konstante Funktion $\varphi_0(t) = a$ wählen.

¹⁵⁸In unserer etwas verallgemeinerten Situation, bei der wir die Anfangsbedingung $\varphi(s) = a$ betrachten, ist T gegeben durch

$$\begin{aligned} T: C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n) &\rightarrow C([s - \epsilon, s + \epsilon], \mathbb{R}^n) \\ \varphi &\mapsto \left(\begin{array}{ll} T(\varphi): [s - \epsilon, s + \epsilon] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto a + \int_s^t f(z, \varphi(z)) dz \end{array} \right). \end{aligned}$$

Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung $y' = 2ty$. Wir wollen eine Lösung finden, welche die Anfangsbedingung $\varphi(0) = a$ erfüllt. Wir setzen

$$\varphi_0(t) = a.$$

Dann erhalten wir die Funktionenfolge

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= a + \int_0^t 2z\varphi_0(z) dz = a + \int_0^t 2za dz = a(1+t^2) \\ \varphi_2(t) &= a + \int_0^t 2z\varphi_1(z) dz = a + \int_0^t 2za(1+z^2) dz = a\left(1+t^2+\frac{t^4}{2}\right) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Mit einem Induktionsargument kann man nun beweisen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\varphi_k(t) = a\left(1+t^2+\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{3!}+\cdots+\frac{t^{2k}}{k!}\right)$$

Für jedes $b > 0$ konvergiert diese Folge von Funktionen im Banachraum $C([-b, b], \mathbb{R})$ gegen

$$\varphi(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} a\left(1+t^2+\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{3!}+\cdots+\frac{t^{2k}}{k!}\right) = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^k}{k!} = ae^{t^2}.$$

Die Funktion $\varphi(t) = ae^{t^2}$ ist also eine Lösung der Differentialgleichung $y' = 2ty$. Dies kann man natürlich auch durch Einsetzen leicht verifizieren.

Bemerkung. Es ist natürlich unwahrscheinlich, dass für eine beliebige vorgegebene Differentialgleichung, die Rechnung so schön aufgeht, wie in dem gerade durchgeführten Beispiel $y' = 2ty$. Das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren kann aber durchaus verwendet werden, um Näherungslösungen von Differentialgleichungen zu finden.

13.4. Der Eindeutigkeitssatz. Wir gehen nun der Frage nach, ob eine Lösung einer Differentialgleichung zu einer vorgegebenen Anfangsbedingung immer eindeutig ist.

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y^{\frac{2}{3}}.$$

Offensichtlich ist

$$\varphi(t) := 0$$

eine Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi(0) = 0$. Andererseits gilt für

$$\psi(t) := \frac{1}{27}t^3,$$

dass $\psi(0) = 0$ und

$$\psi'(t) = \frac{1}{9}t^2 = \left(\frac{1}{27}t^3\right)^{\frac{2}{3}} = \psi(t)^{\frac{2}{3}}.$$

Wir sehen also, dass $\psi(t)$ ebenfalls eine Lösung für die gleiche Anfangsbedingung ist. Die Differentialgleichung $y' = y^{\frac{2}{3}}$ besitzt also keine eindeutig bestimmte Lösung zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$.

Man kann das obige Beispiel noch wie folgt verallgemeinern: es sei $a < 0$ und $b > 0$, dann kann man leicht nachweisen, dass

$$\phi(t) := \begin{cases} \frac{1}{27}(t-a)^3, & \text{für } t < a, \\ 0, & \text{für } t \in [a, b], \\ \frac{1}{27}(t-b)^3, & \text{für } t > b. \end{cases}$$

ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist, welche die Anfangsbedingung $\phi(0) = 0$ erfüllt.

Wir sehen also, dass eine Differentialgleichung im Allgemeinen keine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Im Hinblick auf die Tatsache, dass in unserem Beispiel die Funktion $f(y) = y^{\frac{2}{3}}$ nicht Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist, und im Hinblick auf den Existenzsatz 13.4 von Picard–Lindelöf liegt es nahe sich einzuschränken, auf variable Vektorfelder $f(t, y)$, welche lokal Lipschitz-stetig in der y -Variable sind. In der Tat gilt folgender Satz.

Satz 13.5. (Eindeutigkeitssatz) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und es sei $f: I \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wenn die Differentialgleichung*

$$y' = f(t, y)$$

zwei Lösungen $\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall besitzt, welche an einem Punkt $s \in J$ übereinstimmen, dann ist

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad \text{für alle } t \in J.$$

Der Eindeutigkeitssatz 13.5 besagt also insbesondere, dass die Lösung von Satz 13.4 auf dem Intervall $(s - \epsilon, s + \epsilon)$ zudem eindeutig ist.

Bevor wir den Eindeutigkeitssatz 13.5 beweisen formulieren wir zuerst folgendes Lemma, welches ein Kriterium dafür gibt, dass zwei Funktionen auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen.

Lemma 13.6. *Es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei stetige Funktionen. Wir nehmen an, dass folgende zwei Aussagen erfüllt sind:*

- (1) *es gibt ein $s \in \mathbb{R}$ mit $f(s) = g(s)$,*
- (2) *zu jedem $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) = g(b)$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass f und g auf dem Intervall $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ übereinstimmen.*

Dann stimmen f und g auf ganz $\mathbb{R}$ überein.

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass f und g auf dem Intervall $[s, \infty)$ übereinstimmen. Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall, es gibt also ein $x > s$ mit $f(x) \neq g(x)$. Wir betrachten

$$T := \{t \geq s \mid \text{die Funktionen } f \text{ und } g \text{ stimmen auf } [s, t] \text{ überein}\}$$

Nach unserer Annahme ist $s \in T$ und T ist durch x nach oben beschränkt. Wir setzen

$$b := \sup(T).$$

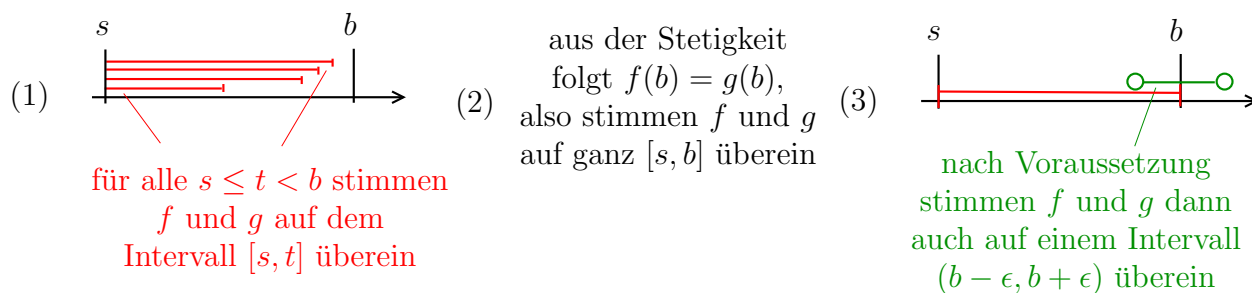


ABBILDUNG 61. Skizze für den Beweis von Lemma 13.6

Aus der Definition von b folgt, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $t \in [b - \epsilon, b]$ mit $f(t) = g(t)$ gibt. Aus der Stetigkeit von f und g erhalten wir, dass $f(b) = g(b)$. Nach Voraussetzung gibt es dann aber ein $\epsilon > 0$, so dass f und g auf dem Intervall $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ übereinstimmen. Nachdem f und g zudem auf $[s, b]$ übereinstimmen, sehen wir also, dass f und g sogar auf dem Intervall $[s, b + \epsilon)$ gleich sind. Wir sehen also, dass $b + \frac{\epsilon}{2} \in T$, im Widerspruch zur Definition von b . Wir haben also bewiesen, dass f und g auf dem Intervall $[s, \infty)$ übereinstimmen.

Die Aussage, dass f und g auf dem Intervall $(-\infty, s]$ ebenfalls übereinstimmen wird ganz analog bewiesen. $\square$

Wir wenden uns jetzt dem Beweis des Eindeutigkeitssatzes zu:

Beweis von Satz 13.5. Wir behandeln nur den Fall, dass $I \times A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $J = \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall wird ganz ähnlich bewiesen. Es sei also $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Zudem seien $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$, welche an einem Punkt $s \in I$ übereinstimmen. Wir wollen zeigen, dass $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 13.6 genügt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es sei $b \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi(b) = \psi(b)$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad \text{für alle } t \in (b - \epsilon, b + \epsilon).$$

Um die Notation etwas zu vereinfachen nehmen wir zudem an, dass $\varphi(b) = \psi(b) = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Das Ziel ist mithilfe der Eindeutigkeitsaussage vom Banachschen Fixpunktsatz 9.2 zu beweisen, dass φ und ψ auf einem kleinen Intervall übereinstimmen.

Nach Voraussetzung ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable. Es existiert also ein $\delta > 0$ und ein $r > 0$, so dass die Einschränkung von f auf

$$Q := \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in [b - \delta, b + \delta] \text{ und } \|y\| \leq r\}$$

Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable ist. Nachdem $\varphi(b) = 0$ und $\psi(b) = 0$ und nachdem φ und ψ stetig sind, existiert ein $\eta \in (0, \delta]$, so dass $\|\varphi(t)\| \leq r$ und $\|\psi(t)\| \leq r$ für alle $t \in [b - \eta, b + \eta]$.

Im Beweis vom Existenzsatz 13.4 von Picard-Lindelöf hatten wir gesehen, dass es ein $\epsilon \in (0, \eta]$ gibt, so dass die Abbildung

$$T: C([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n)$$

$$\gamma \mapsto \left(\begin{array}{ll} T(\gamma): [b - \epsilon, b + \epsilon] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \int_b^t f(z, \gamma(z)) dz \end{array} \right).$$

sich einschränkt auf eine Kontraktion $T: A \rightarrow A$ auf der abgeschlossenen Teilmenge

$$A := \{ \gamma \in C([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|\gamma\| \leq r \}$$

von $C([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n)$. Nachdem Banachscher Fixpunktsatz 9.2 besitzt also $T: A \rightarrow A$ *genau einen* Fixpunkt.

Nachdem $\epsilon \leq \eta$ liegen die Einschränkungen von φ und ψ auf $[b - \epsilon, b + \epsilon]$ in A . Zudem folgt aus Satz 13.3, dass diese Einschränkungen von φ und ψ Fixpunkte von T sind. Es folgt also, dass die Einschränkungen von φ und ψ auf $[b - \epsilon, b + \epsilon]$ übereinstimmen. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen. $\square$

14. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

Definition. Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nennen

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung n -ter Ordnung*. Eine Lösung davon ist eine n -mal differenzierbare Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I , mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

159

Beispiele.

(1) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y$$

wird gelöst von den Funktionen $\sin(t)$ und $\cos(t)$. Genauer gesagt, sogar von allen Linearkombinationen

$$\varphi(t) = a \sin(t) + b \cos(t), \text{ wobei } a, b \in \mathbb{R}.$$

¹⁵⁹Damit die rechte Seite definiert ist, muss für alle $t \in I$ gelten, dass

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in G.$$

Insbesondere ist also zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ jede Funktion von der Form $\varphi(t) = a \sin(t)$ eine Lösung. Wir sehen also, dass es keine eindeutige Lösung gibt, wenn wir nur den Anfangspunkt festlegen. Wir werden in Satz 14.3 sehen, dass man für Differentialgleichungen n -ter Ordnung die Anfangswerte für die ersten $(n - 1)$ Ableitungen vorgeben muss, um eine eindeutige Lösung zu erhalten.

- (2) Wir betrachten einen Körper der Masse m auf der reellen Achse. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt

$$y'' = \frac{1}{m}F,$$

wobei F die Kraft ist, welche auf den Körper wirkt. Die Kraft F kann dabei von der Zeit, vom Ort, aber auch von der Geschwindigkeit (z.B. Reibungskraft) abhängen. Anders ausgedrückt, die Bahn des Körpers ist bestimmt durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \frac{1}{m}F(t, y, y').$$

- (3) Wir betrachten die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -g,$$

wobei $g \in \mathbb{R}$ die Gravitationskonstante ist. Diese beschreibt die Bahn eines Körpers auf der z -Achse, welcher der Schwerkraft ausgesetzt ist. Die Bahn φ hängt dabei nicht nur vom Anfangspunkt $\varphi(0)$ sondern auch von der Anfangsgeschwindigkeit $\varphi'(0)$ ab. Genauer gesagt, die Lösung der Differentialgleichung $y'' = -g$ mit Anfangsbedingungen $\varphi(0) = z$ und $\varphi'(0) = v$ ist gegeben durch

$$\varphi(t) = z + vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

- (4) Die Funktionen $\varphi(t) = -\sin(t) + \cos(t)$ und $\psi(t) = e^t$ sind Lösungen der Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y^{(4)} = \frac{1}{2}(y + y').$$

In diesem Fall gilt $\varphi(0) = 1 = \psi(0)$, d.h. die beiden Lösungen haben den gleichen Anfangswert. Wir sehen also, dass auch 'sehr verschiedene' Funktionen eine Differentialgleichung lösen können.

Wir werden jetzt sehen, dass man das Studium von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf das Studium von Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen kann.

Für eine Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

schreiben wir im Folgenden

$$Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

und wir betrachten die Abbildung

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, Y) \mapsto F(t, Y) := F\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Etwas vereinfacht ausgedrückt schiebt also F die letzten $n-1$ Koordinaten ‘um eins nach oben’ und ersetzt die letzte Koordinate durch $f(t, Y) = f(t, y_0, \dots, y_{n-1})$.

Die folgenden beiden Lemmas besagen nun, dass die Lösungen der Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

in ein-eindeutiger Beziehung zu den Lösungen der Differentialgleichung erster Ordnung

$$Y' = F(t, Y)$$

in n Variablen stehen.

Lemma 14.1. *Es sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung n -ter Ordnung*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Dann ist

$$\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \Phi(t) := \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(t, Y)$.

Beweis. Dieses Lemma folgt sofort durch Einsetzen. In der Tat, es sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

D.h. es ist

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)).$$

Dann gilt

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix} = F(t, \Phi(t)).$$

□

Lemma 14.2. *Es sei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(t, Y)$, dann ist φ_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.*

Beweis. Es sei nun also $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(t, Y)$. Ausgeschrieben bedeutet dies, dass

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t) \end{pmatrix} = \Phi'(t) = F(t, \Phi(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \vdots \\ f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{pmatrix}$$

Die ersten $n - 1$ Koordinaten implizieren, dass $\varphi_{k+1}(t) = \varphi_1^{(k)}(t)$, $k = 1, \dots, n - 1$. Die letzte Koordinate besagt nun, dass

$$\varphi_1^{(n)}(t) = f(t, \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \dots, \varphi_1^{(n-1)}(t)),$$

d.h. φ_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

□

Nachdem Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

in ein-eindeutiger Beziehung zu den Lösungen der Differentialgleichung $Y' = F(t, Y)$ stehen, übertragen sich der Eindeutigkeitssatz und der Existenzsatz für Differentialgleichungen erster Ordnung zu Aussagen über Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Genauer gesagt erhalten wir folgenden Satz:

Satz 14.3. *Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Wir betrachten die Differentialgleichung n -ter Ordnung*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) (Existenz) Für jeden Punkt $(s, a_0, \dots, a_{n-1}) \in G$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung

$$\varphi: (s - \epsilon, s + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingungen

$$\varphi(s) = a_0, \varphi'(s) = a_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(s) = a_{n-1}$$

erfüllt.

- (2) (Eindeutigkeit) Es seien $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung n -ter Ordnung, so dass an einem Punkt $s \in I$ die Funktionswerte und die ersten $n - 1$ Ableitungen von φ und ψ übereinstimmen. Dann gilt $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$.

Beweisskizze. Es sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Dann kann man leicht sehen, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, \underbrace{y_0, \dots, y_{n-1}}_{=Y}) \mapsto F(t, Y) := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

ebenfalls lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variablen ist. Der Satz folgt nun sofort aus Lemmas 14.1 und 14.2, sowie aus dem Existenzsatz 13.4 und dem Eindeutigkeitssatz 13.5. $\square$

Nachdem wir jetzt gesehen haben, dass man die Theorie der Differentialgleichungen höherer Ordnung auf die Theorie von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen kann, werden wir uns im Folgenden hauptsächlich mit Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigen.

15. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Definition. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $A: I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Wir nennen

$$y' = A(t)y$$

eine *homogene lineare Differentialgleichung*. Es sei zudem $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere stetige Abbildung, dann heißt

$$y' = A(t)y + b(t)$$

eine *inhomogene lineare Differentialgleichung*.¹⁶⁰

Satz 15.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Es seien zudem $A: I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ sowie $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Es sei $a \in I$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt die inhomogene lineare Differentialgleichung*

$$y' = A(t)y + b(t)$$

genau eine Lösung φ , welche die Anfangsbedingung $\varphi(a) = c$ erfüllt und welche auf dem ganzen Intervall I definiert ist.

Bemerkung. Die Funktion b kann natürlich die Nullfunktion sein, d.h. der Satz gilt insbesondere für homogene lineare Differentialgleichungen.

¹⁶⁰ Für $n = 1$ hatten wir diese Differentialgleichungen schon in Kapitel 12.3 und Kapitel 12.4 behandelt. Wenn $n \geq 2$, dann wird eine solche Differentialgleichung oft auch als *(in-) homogenes lineares Differentialgleichungssystem* bezeichnet.

Der Satz besagt insbesondere, dass die *Lösung auf dem ganzen Intervall I existiert*. Dies ist eine stärkere Aussage als der Existenzsatz von Picard-Lindelöf liefert, denn dieser liefert nur die Existenz von Lösungen auf einem kleinen Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Im Beispiel auf Seite 151 hatten wir gesehen, dass im Allgemeinen Lösungen von Differentialgleichungen nicht notwendigerweise den Definitionsbereich der Differentialgleichung besitzen. Die Tatsache, dass die Lösung auf ganz I definiert ist, ist also eine Besonderheit von inhomogenen linearen Differentialgleichungen.

15.1. Beweis von Satz 15.1 (*). In diesem Kapitel werden wir Satz 15.1 beweisen. Aus Zeitgründen ist dieses Kapitel nicht Teil der offiziellen Vorlesung.

Um Satz 15.1 zu beweisen brauchen wir also ein Kriterium dafür, dass eine Lösung auf dem ganzen Intervall I definiert ist. Folgender Satz gibt uns solch ein Kriterium.

Satz 15.2. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass es zu jedem kompakten Intervall $J \subset I$ ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in J$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

Dann gibt es zu jedem $(a, c) \in I \times \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y),$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(a) = c$ erfüllt.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall $I = \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen.

Die Abbildung f ist insbesondere lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable.¹⁶¹ Die Eindeutigkeit der Lösung folgt also sofort aus Satz 13.5. Der Existenzsatz von Picard-Lindelöf garantiert nur die Existenz einer Lösung auf einem Intervall der Form $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Wir wollen aber zeigen, dass es eine Lösung gibt, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Ganz analog zum Picard-Lindelöf Iterationsverfahren betrachten wir die folgende Folge von Abbildungen $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &:= c \\ \varphi_1(t) &:= c + \int_a^t f(s, \varphi_0(s)) ds \\ \varphi_2(t) &:= c + \int_a^t f(s, \varphi_1(s)) ds \\ &\vdots \end{aligned}$$

¹⁶¹Zur Erinnerung, eine Abbildung $f(x, y)$ heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich der y -Variable, falls jeder Punkt (x, y) eine Umgebung U besitzt, so dass $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bezüglich der Variablen y ist. In unserem Fall besagt die Voraussetzung, dass für (x, y) die Einschränkung auf jede Teilmenge der Form $[x - a, x + a] \times \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bezüglich der Variablen y ist.

Alle diese Abbildungen sind auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar.¹⁶² Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.¹⁶³

Behauptung. Die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $r > 0$ auf dem Teilintervall $(a - r, a + r)$ gleichmäßig gegen eine Lösung φ der Differentialgleichung.

Es sei also $r > 0$. Wir werden zuerst zeigen, dass die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf dem kompakten Teilintervall $[a - r, a + r] \subset I$ gleichmäßig konvergiert. Es sei L die Lipschitz-Konstante für die Abbildung f auf dem kompakten Teilintervall $[a - r, a + r]$, welche nach Voraussetzung existiert. Es folgt aus Korollar 3.8, dass

$$K := \max \{ \|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \mid x \in [a - r, a + r] \}$$

existiert. Wir zeigen nun mit Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [a - r, a + r]$ gilt

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \leq K \frac{L^k |x - a|^k}{k!}.$$

Die Aussage gilt für $k = 0$ per Definition von K . Der Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$ ist dann

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+2}(x) - \varphi_{k+1}(x)\| &= \left\| \int_a^x f(t, \varphi_{k+1}(t)) - f(t, \varphi_k(t)) dt \right\| \\ &\leq \left| \int_a^x \|f(t, \varphi_{k+1}(t)) - f(t, \varphi_k(t))\| dt \right| && \text{nach Lemma 8.2} \\ &\leq L \left| \int_a^x \|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| dt \right| && \text{Eigenschaft von } L \\ &\leq KL^{k+1} \left| \int_a^x \frac{|t - a|^k}{k!} dt \right| && \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= K \frac{L^{k+1} |x - a|^{k+1}}{(k + 1)!}. \end{aligned}$$

Wir haben damit also den Induktionsbeweis abgeschlossen.

Es folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ auf $[a - r, a + r]$ durch die konvergente Reihe

$$K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k r^k}{k!} = Ke^{Lr}$$

¹⁶²Diese Aussage kann man leicht durch Induktion zeigen. Die Aussage gilt offensichtlich für φ_0 . Nehmen wir nun an, dass die Aussage schon für φ_k stimmt. Die Abbildungen f und φ_k sind stetig. Es folgt, dass die Abbildung $s \mapsto f(s, \varphi_k(s))$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Insbesondere ist sie integrierbar, und die rekursiv definierte Abbildung $\varphi_{k+1}(t) = c + \int_a^t f(s, \varphi_k(s)) ds$ existiert auf I . Zudem folgt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, dass φ_{k+1} differenzierbar ist.

¹⁶³In der Tat, wenn wir diese Behauptung bewiesen haben, dann folgt, dass die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise auf ganz $\mathbb{R}$ gegen eine Abbildung φ konvergiert. Zudem folgt aus der Behauptung, dass für jedes $r > 0$ die Einschränkung von φ auf das Teilintervall $(a - r, a + r) \subset I$ eine Lösung φ der Differentialgleichung ist. Aber dann ist φ auch auf ganz $\mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung.

majorisiert wird. Es folgt nun aus dem Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen¹⁶⁴, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ auf $[a-r, a+r]$ gleichmäßig konvergiert. Es folgt aus Satz 16.3 der Analysis I-Vorlesung, dass die Funktion

$$\varphi := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

auf $[a-r, a+r]$ stetig ist.

Wir müssen nun noch zeigen, dass φ in der Tat auf $(a-r, a+r)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Nach Satz 13.3 genügt es dabei folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $x \in (a-r, a+r)$ gilt

$$\varphi(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

Satz 16.6 aus der Analysis I-Vorlesung besagt zudem, dass man bei gleichmäßiger Konvergenz Grenzwert-Bildung und Integral vertauschen kann. In unserem Fall bedeutet dies, dass für jedes $x \in (a-r, a+r)$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(c + \int_a^x f(t, \varphi_{k-1}(t)) dt \right) && \text{Definition von } \varphi_k \\ &= c + \int_a^x \lim_{k \rightarrow \infty} f(t, \varphi_{k-1}(t)) dt && \text{Satz 16.6 aus der Analysis I-Vorlesung} \\ &= c + \int_a^x f\left(t, \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k-1}(t)\right) dt && \text{Stetigkeit von } f \\ &= c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

Wir haben damit also die Behauptung, und damit auch den Satz bewiesen. $\square$

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 15.1 zu.

Beweis von Satz 15.1. Wir schreiben $f(t, y) = A(t)y + b(t)$. Mit Verweis auf Satz 15.2 genügt es nun folgende Behauptung zu beweisen.¹⁶⁵

Behauptung. Es sei $J \subset I$ ein kompaktes Intervall. Dann gibt es ein $L \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in J$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

¹⁶⁴Dies ist Satz 16.5 im Analysis I-Skript.

¹⁶⁵Die Aussage und der Beweis der Behauptung haben eine starke Ähnlichkeit mit Satz 13.1

Es sei also $J \subset I$ ein kompaktes Intervall. Wir setzen

$$L := n^2 \cdot \max \{ |a_{ij}(t)| \mid t \in J \}.^{166}$$

Es folgt aus Lemma 6.6 (3), dass $\|A(t)\| \leq L$ für alle $t \in J$. Insbesondere gilt für alle $x \in J$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| &= \|(A(t)y + b(t)) - (A(t)\tilde{y} + b(t))\| \\ &= \|A(t)(y - \tilde{y})\| \leq \|A(t)\| \cdot \|y - \tilde{y}\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Wir haben also damit die Behauptung bewiesen. $\square$

15.2. Homogene lineare Differentialgleichungen. Für eine (in-) homogene lineare Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$ auf einem offenen Intervall I bezeichnen wir

$$\mathcal{L}(y' = A(t)y + b(t)) := \text{Menge aller Lösungen von } y' = A(t)y + b(t) \text{ auf } I$$

als die *Lösungsmenge*. Das folgende Lemma besagt, dass für *homogene* lineare Differentialgleichungen die Lösungsmenge einen Vektorraum bildet.

Lemma 15.3. *Für eine homogene lineare Differentialgleichung $y' = A(t)y$ auf einem offenen Intervall I ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(y' = A(t)y)$ ein Vektorraum.*^{167 168}

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass wenn $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $y' = A(t)y$ sind, und wenn $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $\varphi + \psi$ und $\lambda\varphi$ Lösungen der Differentialgleichungen.

Beide Aussagen kann man ganz leicht durch Einsetzen zeigen. Es seien $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $y' = A(t)y$. Dann gilt in der Tat für alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(t)' &= \varphi(t)' + \psi(t)' \\ &= A(t)\varphi(t) + A(t)\psi(t) && \text{denn } \varphi \text{ und } \psi \text{ sind Lösungen von } y' = A(t)y \\ &= A(t)(\varphi(t) + \psi(t)) && \text{Linearität von Matrizenmultiplikation} \\ &= A(t)(\varphi + \psi)(t). \end{aligned}$$

Ganz analog zeigt man, dass wenn φ eine Lösung ist, und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $t \mapsto \lambda\varphi(t)$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung. $\square$

¹⁶⁶Nach Voraussetzung ist $t \mapsto a_{ij}(t)$ stetig, also existiert L nach Korollar 3.8.

¹⁶⁷Genauer gesagt, die Lösungsmenge $\mathcal{L}(y' = A(t)y)$ bildet einen Untervektorraum des Vektorraums aller Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

¹⁶⁸Das Lemma folgt auch leicht aus linearer Algebra. Genauer gesagt, wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: V := \{\text{differenzierbare Abbildungen } I \rightarrow \mathbb{R}^n\} &\rightarrow W := \{\text{stetige Abbildungen } I \rightarrow \mathbb{R}^n\} \\ y &\mapsto A(t)y' - y. \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Abbildung und der Kern dieser Abbildung ist gerade $\mathcal{L}(y' = A(t)y)$. Nachdem der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist, ist $\mathcal{L}(y' = A(t)y)$ also in der Tat ein Untervektorraum von V .

Nachdem die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ einer homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y$ ein Vektorraum ist, genügt es eine Basis zu finden, um die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ zu beschreiben. Der folgende Satz gibt ein Kriterium dafür, dass Lösungen linear unabhängig sind. Mithilfe von diesem Satz werden wir dann eine Basis für die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ bestimmen.

Satz 15.4. *Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = A(t)y$$

auf dem offenen Intervall I . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) *die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sind linear unabhängig,*¹⁶⁹
- (2) *es existiert ein $t_0 \in I$, so dass die Vektoren*

$$\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

linear unabhängig sind,

- (3) *für jedes $t_0 \in I$, sind die Vektoren*

$$\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

linear unabhängig.

Beweis. Es ist offensichtlich, dass (3) $\Rightarrow$ (2) und (2) $\Rightarrow$ (1). Wir müssen also nur noch zeigen, dass (1) $\Rightarrow$ (3). Seien also $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ linear unabhängige Lösungen von $y' = A(t)y$ und es sei $t_0 \in I$. Wir müssen zeigen, dass

$$\lambda_1 \varphi_1(t_0) + \dots + \lambda_k \varphi_k(t_0) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Es seien also $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass $\lambda_1 \varphi_1(t_0) + \dots + \lambda_k \varphi_k(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Linearkombination $\varphi := \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_k \varphi_k$ nach Lemma 15.3 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = A(t)y$ bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = 0$. Andererseits ist $\psi(t) = 0$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung $y' = A(t)y$ bezüglich der Anfangsbedingung $\psi(t_0) = 0$. Aus Satz 15.1 folgt nun, dass $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ für alle $t \in I$. Insbesondere ist $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_k \varphi_k$ die Nullfunktion, aus der linearen Unabhängigkeit von den Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ folgt nun, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. $\square$

Satz 15.5. *Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ einer homogenen linearen Differentialgleichung Differentialgleichung*

$$y' = A(t)y$$

auf einem offenen Intervall I ist ein n -dimensionaler Vektorraum.

Beweis. Es sei $t_0 \in I$. Aus Satz 15.1 folgt, dass es für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Lösung φ_i der Differentialgleichung $y' = A(t)y$ gibt, welche die Anfangsbedingung

$$\begin{array}{c} \varphi_i(t_0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ \uparrow \\ i\text{-te Koordinate} \end{array}$$

¹⁶⁹Der Begriff der linearen Unabhängigkeit von Funktionen wird in Kapitel 1.3 diskutiert.

Wir werden nun zeigen, dass $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von $\mathcal{L}$ bilden.

Aus Satz 15.4 folgt, dass die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig sind. Sei nun ψ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $y' = A(t)y$. Wir schreiben $\psi(t_0) =: (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann gilt

$$\psi(t_0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \varphi(t_0) + \dots + \lambda_n \varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktionen ψ und $\lambda_1 \varphi + \dots + \lambda_n \varphi$ sind also Lösungen der Differentialgleichung und haben den gleichen Wert zur Zeit t_0 . Aus Satz 15.1 folgt nun, dass $\psi = \lambda_1 \varphi + \dots + \lambda_n \varphi$. $\square$

Definition. Es sei $y' = A(t)y$ eine homogene lineare Differentialgleichung, eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung wird *Lösungsfundamentalsystem* genannt.

Beispiel. Es sei $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y}$$

Dann kann man durch Einsetzen leicht zeigen, dass

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(ct) \\ \sin(ct) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(ct) \\ \cos(ct) \end{pmatrix}$$

Lösungen der Differentialgleichung sind. Nachdem die Vektoren

$$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ sind, folgt aus Satz 15.4 und Satz 15.5, dass φ_1 und φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = Ay$ bilden. Insbesondere kann jede andere Lösung ψ geschrieben werden als Linearkombination $\psi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$.

15.3. Inhomogene lineare Differentialgleichungen. Für einen Vektorraum V , einen Vektor $v \in V$ und einen Untervektorraum $U \subset V$ schreiben wir

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}.$$

Anders ausgedrückt, $v + U$ ist die Translation des Untervektorraums U um den Vektor v . Eine solche Teilmenge von V wird manchmal auch als *affiner Unterraum von V* bezeichnet. Mit dieser Notation können wir den nächsten Satz formulieren.

Satz 15.6. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es seien $A: I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Es sei*

$$\psi \in \mathcal{L}(y' = A(t)y + b(t)).$$

*Dann ist*¹⁷⁰

$$\mathcal{L}(y' = A(t)y + b(t)) = \psi + \mathcal{L}(y' = A(t)y).$$

¹⁷⁰Diese Aussage kann man auch ganz ähnlich wie in Fußnote 168 auf lineare Algebra zurückführen.

Der Satz besagt also, dass es genügt *alle* Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y$ und *eine* Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$ zu finden, um alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$ zu beschreiben.

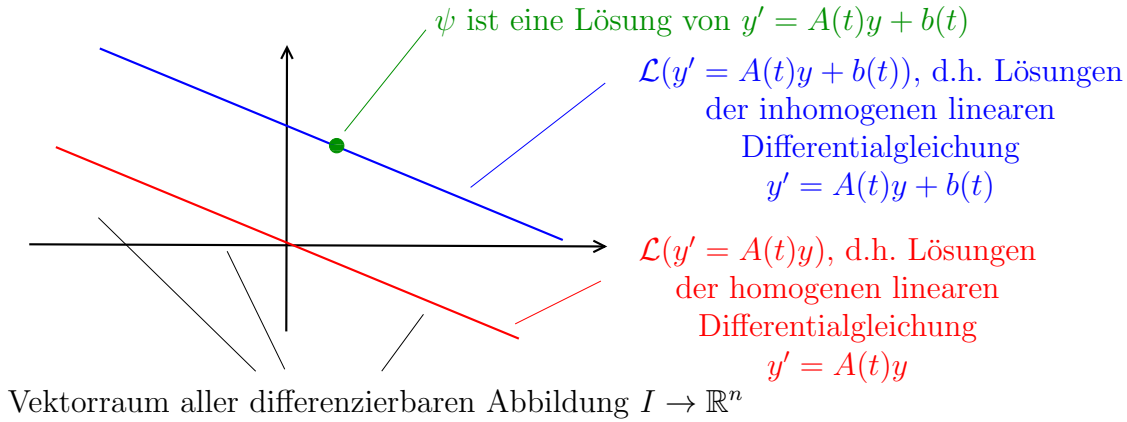


ABBILDUNG 62. Die Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist ein affiner Unterraum.

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass

$$\mathcal{L}(y' = A(t)y + b(t)) = \{\psi + \varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}(y' = A(t)y)\}.$$

Es genügt die Inklusionen “ $\subset$ ” und “ $\supset$ ” zu zeigen.

“ $\supset$ ” Es sei also $\varphi \in \mathcal{L}(y' = A(t)y)$. Dann gilt

$$(\psi + \varphi)' = \psi' + \varphi' = A(t)\psi + b(t) + A(t)\varphi = A(t)(\psi + \varphi) + b(t),$$

d.h. $\psi + \varphi$ ist in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$.

“ $\subset$ ” Sei nun ϕ eine Lösung von $y' = A(t)y + b(t)$. Wir setzen $\varphi = \phi - \psi$, d.h. $\phi = \psi + \varphi$. Wir müssen zeigen, dass $\varphi \in \mathcal{L}(y' = A(t)y)$. In der Tat gilt

$$\varphi' = \phi' - \psi' = (A(t)\phi + b(t)) - (A(t)\psi + b(t)) = A(t)(\phi - \psi) = A(t)\varphi,$$

d.h. φ ist wie gewünscht eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y$.

□

Satz 15.6 besagt, dass wir zur vollständigen Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$ ein Lösungsfundamentalsystem für die lineare homogene Differentialgleichung $y' = A(t)y$ finden müssen, und dass wir *eine* Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$ finden müssen.

Bemerkung. Für den Fall $n = 1$ hatten wir schon gesehen, wie wir aus einer Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t)y$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t)y + b(t)$ erhalten. Genauer gesagt, in Satz 12.3 hatten wir folgende Aussage bewiesen: wenn $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t)y$ ist, dann ist

$$\varphi(t) = \psi(t) \cdot \left(c + \int_{t_0}^t \psi(s)^{-1} b(s) ds \right)$$

eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t)y + b(t)$. Wir wollen nun dieses Verfahren verallgemeinern. Allerdings stellt sich nun die Frage, was die Rolle von $\psi(s)^{-1}$ spielen soll, wo doch nun die Lösungen Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind.

In Satz 15.7 werden wir eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$ finden. Um diesen Satz zu formulieren benötigen wir allerdings noch folgende Definition.

Definition. Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = A(t)y$$

auf einem offenen Intervall I . Dann heißt

$$W(t) := (\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))$$

die *Wronski-Matrix*¹⁷¹ der Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Beispiel. Es sei $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten wiederum die homogene lineare Differentialgleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y}.$$

Die Lösungen φ_1 und φ_2 von Seite 175 ergeben die Wronski-Matrix

$$W(t) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(ct) \\ \sin(ct) \end{pmatrix}}_{=\varphi_1(t)} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(ct) \\ \cos(ct) \end{pmatrix}}_{=\varphi_2(t)} \right).$$

Die Determinante der Wronski-Matrix ist hierbei immer 1.

Wir können nun Satz 15.4 mithilfe von Satz 15.5 wie folgt umformulieren: Es seien

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Lösungen der Differentialgleichung $y' = A(t)y$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bilden ein Lösungsfundamentalsystem,
- (2) es existiert ein $t_0 \in I$, so dass $\det(W(t_0)) \neq 0$,

¹⁷¹Diese ist benannt nach dem polnischen Mathematiker Józef Hoëné-Wronski.

(3) $\det(W(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Der folgende Satz ist nun eine Verallgemeinerung von Satz 12.3.

Satz 15.7. *Es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = A(t)y$$

auf einem offenen Intervall I . Für jedes $t \in I$ bezeichne

$$W(t) := (\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t)) \in M(n, \mathbb{R})$$

die Wronski-Matrix der Lösungen $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Es seien $t_0 \in I$ und $C \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$ gegeben durch¹⁷²

$$\psi(t) = W(t)u(t) \quad \text{mit} \quad u(t) = \int_{t_0}^t W(s)^{-1}b(s) dt + C. \quad ^{173}$$

Beweis. Wir zeigen durch Einsetzen, dass ψ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$ ist. In der Tat, es gilt

$$\begin{aligned} \psi' &= (Wu)' \\ &= W'u + Wu' && \text{Produktregel für Ableitungen} \\ & && \text{komponentenweise angewandt} \\ &= (\varphi'_1 \dots \varphi'_n)u + W \cdot W^{-1}b(t) && \text{Hauptsatz der Differential-} \\ & && \text{und Integralrechnung} \\ &= (A(t)\varphi_1 \dots A(t)\varphi_n)u + b(t) && \text{denn } \varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ sind Lösungen} \\ & && \text{der Differentialgleichung } y' = A(t)y \\ &= A(t)(\varphi_1 \dots \varphi_n)u + b(t) \\ &= A(t)Wu + b(t) \\ &= A(t)\psi + b(t). \end{aligned}$$

□

16. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN ABHÄNGIGKEIT VOM ANFANGSPUNKT

Der Existenzsatz 13.4 von Picard–Lindelöf besagt, dass eine Differentialgleichung, unter vernünftigen Voraussetzungen, zu jeder Anfangsbedingung eine Lösung besitzt. Der folgende Satz besagt nun, dass diese Lösung ‘stetig von der Anfangsbedingung abhängt’.

Satz 16.1. *Es sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, welche lokal Lipschitz-stetig bezüglich der Variablen y ist. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung φ_x der*

¹⁷²Es folgt aus Satz 15.4, dass für jedes $t \in I$ die Vektoren $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ linear unabhängig sind, d.h. für jedes t ist die Matrix $W(t)$ invertierbar.

¹⁷³Der Integrand $W(t)^{-1}b(t)$ ist eine Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dass Integral einer solchen Funktion wird komponentenweise bestimmt.

Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ zur Anfangsbedingung $\varphi_x(0) = x$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) := \varphi_x(t) \end{aligned}$$

stetig.

Wir werden diesen Satz nicht beweisen. Einen Beweis des Satzes kann man beispielsweise in Kapitel 2 von Bröcker: Analysis III finden.

Korollar 16.2. Unter den gleichen Voraussetzungen und der gleichen Notation von Satz 16.1 ist für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \Phi(t, x) = \varphi_x(t) \end{aligned}$$

stetig.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \varphi_x(t) \end{aligned}$$

ist die Verknüpfung der Abbildungen

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (t, x) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \varphi_x(t) = \Phi(t, x). \end{aligned}$$

Die erste Abbildung ist offensichtlich stetig, und die zweite Abbildung ist stetig nach Satz 16.1. Das Korollar folgt nun aus der Tatsache, dass die Verknüpfung von zwei stetigen Abbildungen wiederum stetig ist. $\square$

Das Korollar besagt also, anschaulich gesprochen, dass sich jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ unter der Differentialgleichung stetig entwickelt. Diese Aussage wird auch in Abbildung 63 illustriert.

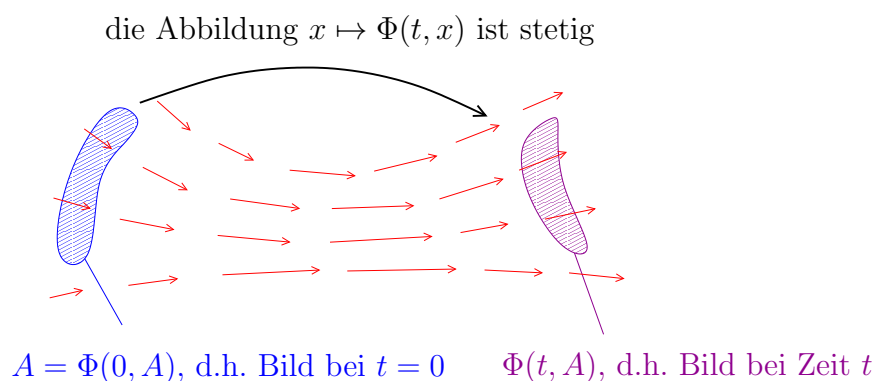


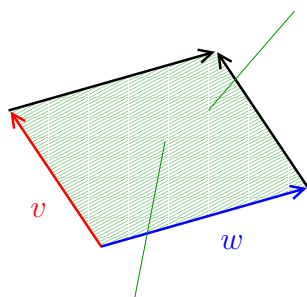
ABBILDUNG 63.

16.1. Volumen und Matrizen. Für Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$P(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1] \right\}$$

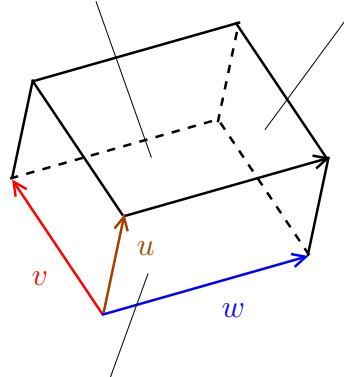
das durch $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte Parallelotop. Für $n = 2$ ist dies insbesondere das durch v_1 und v_2 aufgespannte Parallelogramm. Für $n = 3$ ist dies der durch v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Spat. Das folgende Lemma gibt eine geometrische Interpretation des Absolutbetrags der

$P(v, w) = \{ \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in [0, 1] \}$
ist das von den Vektoren v und w
aufgespannte Parallelogramm



der Flächeninhalt beträgt $|\det(v \ w)|$

das Parallelotop $P(u, v, w)$ in $\mathbb{R}^3$



das Volumen beträgt $|\det(u \ v \ w)|$

ABBILDUNG 64.

Determinante einer 2×2 -Matrix.

Lemma 16.3. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei Vektoren. Dann gilt

$$\text{Flächeninhalt von } P(v, w) = |\det(v \ w)|.$$

Beweis. Wenn v der Nullvektor ist, dann ist sowohl der Flächeninhalt als auch die Determinante null. Insbesondere gilt die Aussage des Lemmas.

Wir betrachten nun den Fall, dass v nicht der Nullvektor ist. Wir schreiben

$$v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \text{ und } v^\perp := \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Anders ausgedrückt, $v^\perp$ ist ein Vektor, welcher orthogonal zu v ist, von gleicher Länge. Nachdem $v \neq 0$ bilden v und $v^\perp$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Wir schreiben $w = \lambda v + \mu v^\perp$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Flächeninhalt von } P(v, w) &= \text{Flächeninhalt von } \underbrace{P(v, \mu v^\perp)}_{=\text{Rechteck}} && \text{Cavalierisches Prinzip} \\
 &= \|v\| \cdot \|\mu v^\perp\| && \text{Flächeninhalt von Rechteck} \\
 &= \|v\| \cdot |\mu| \cdot \|v^\perp\| \\
 &= |\mu|(v_0^2 + v_1^2) \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} v_0 & -\mu v_1 \\ v_1 & \mu v_0 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} v & \mu v^\perp \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} v & v + \mu v^\perp \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} \right|.
 \end{aligned}$$

□

In Analysis III werden wir einen allgemeinen Volumenbegriff für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einführen. Wir werden dann insbesondere folgendes Lemma beweisen.

Lemma 16.4. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\text{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1 \dots v_n)|.$$

Es sei nun $P(v_1, \dots, v_n)$ ein Parallelotop und es sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ eine Matrix. Wenn wir die Matrix A auf das Parallelotop anwenden dann erhalten wir ein neues Parallelotop

$$A \cdot P(v_1, \dots, v_n) = P(Av_1, \dots, Av_n).$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(A \cdot P(v_1, \dots, v_n)) &= \text{Vol}(P(Av_1, \dots, Av_n)) \\
 &= |\det((Av_1 \dots Av_n))| && \text{nach Lemma 16.4} \\
 &= |\det(A \cdot (v_1 \dots v_n))| \\
 &= |\det A| \cdot |\det(v_1 \dots v_n)| && \text{da } \det(IJ) = \det(I) \det(J) \\
 &= |\det A| \cdot \text{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) && \text{nach Lemma 16.4.}
 \end{aligned}$$

Wir haben also folgende Aussage bewiesen: wenn wir eine Matrix A auf ein Parallelotop anwenden, dann multipliziert sich das Volumen mit dem Faktor $|\det(A)|$.

16.2. Die Wronski-Determinante. Wir wollen in diesem Kapitel untersuchen, wie sich das Volumen unter einer homogenen linearen Differentialgleichung verändert. Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 13 bewiesen.

Lemma 16.5. *Es sei $y' = A(t)y$ eine homogene lineare Differentialgleichung auf einem offenen Intervall I . Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\varphi_x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $\varphi_x(0) = x$ erfüllt. Dann ist für jedes $t \in I$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \Phi(t, x) := \varphi_x(t) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

Die Aussage von Lemma 16.5 wird in Abbildung 65 skizziert.

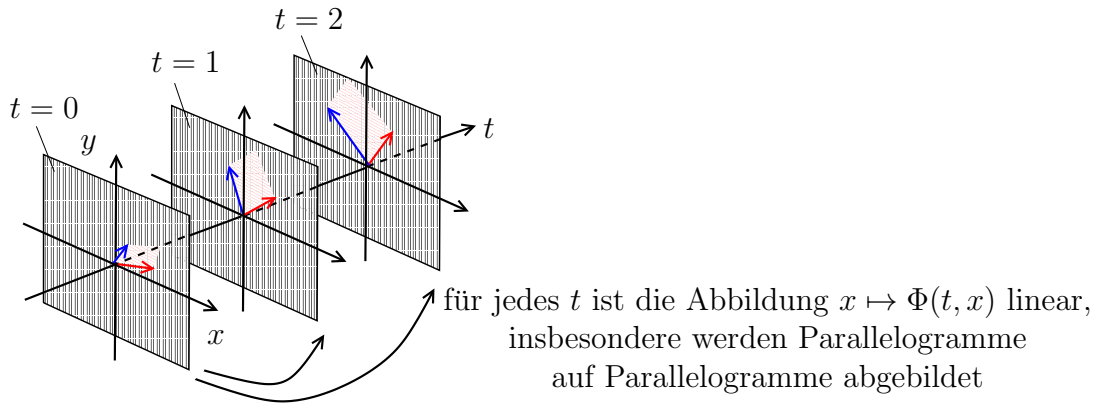


ABBILDUNG 65.

Es sei nun $y' = A(t)y$ wiederum eine homogene lineare Differentialgleichung auf einem offenen Intervall I . Zudem sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lösungsfundamentalsystem dieser Differentialgleichung. Zur Erinnerung, wir bezeichnen mit

$$W(t) := (\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))$$

die zugehörige Wronski-Matrix. Zudem bezeichnen wir nun

$$D(t) := \det(W(t))$$

als die *Wronski-Determinante der Lösungen* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Im vorherigen Kapitel hatten wir gesehen, dass

$$|D(t)| = |\det(\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))|$$

das Volumen des durch die Vektoren $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ aufgespannten Parallelotops ist.

Die Funktion $t \mapsto |D(t)|$ gibt also an, wie sich unter der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y$ das Volumen von einem Parallelotop verändert. In vielen Fällen studiert man volumenerhaltende Differentialgleichungen, d.h. Differentialgleichungen, so dass

$|D(t)|$ konstant ist für ein Lösungsfundamentalsystem.¹⁷⁴ Beispielsweise ist jede Differentialgleichung, welche den Fluss von Wasser beschreibt, notwendigerweise volumenerhaltend.

Satz 16.6. (Satz von Liouville) *Es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lösungsfundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y$. Die dazugehörige Wronski-Determinante $D(t)$ erfüllt die Differentialgleichung*

$$D'(t) = \text{Spur}(A(t)) \cdot D(t).$$

Bemerkung.

- (1) Sei $t_0 \in I$. Aus Satz 12.2 folgt, dass

$$D(t) = D(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) ds}.$$

Insbesondere folgt, dass $D(t_0) \neq 0$, genau dann, wenn $D(t) \neq 0$ für alle t . Für n Lösungen gibt der Satz von Liouville damit insbesondere einen neuen Beweis der Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) in Satz 15.4.

- (2) Die homogene lineare Differentialgleichung $y' = A(t)y$ ist also volumenerhaltend, genau dann, wenn $\text{Spur}(A(t)) = 0$ für alle t . Betrachten wir beispielsweise, wie auf Seite 177, die homogene lineare Differentialgleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y}.$$

In diesem Fall ist also $\text{Spur}(A) = 0$. Die Lösungen φ_1 und φ_2 von Seite 175 ergeben die Wronski-Matrix

$$W(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(ct) & -\sin(ct) \\ \sin(ct) & \cos(ct) \end{pmatrix}}_{\substack{=\varphi_1(t) \quad =\varphi_2(t) \\ \text{Drehung um den Winkel } ct}}.$$

Die Determinante der Wronski-Matrix ist hierbei immer 1. Das Volumen bleibt also konstant.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen nehmen wir an, dass $I = \mathbb{R}$. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

¹⁷⁴Die Wronski-Determinante ist konstant für ein Lösungsfundamentalsystem, genau dann, wenn die Wronski-Determinante konstant ist für jedes Lösungsfundamentalsystem. Dies folgt daraus, dass es für zwei Wronski-Matrizen V und W eine Matrix $P \in GL(n, \mathbb{R})$ gibt mit $V(t) = PW(t)$ für alle t . In der Tat: sei $t_0 \in I$, wir setzen $P := V(t_0) \cdot W(t_0)^{-1}$. Dann folgt aus dem Eindeutigkeitsatz 13.5, dass $V(t) = PW(t)$ für alle t .

Behauptung. Es sei $B: \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ eine differenzierbare Abbildung¹⁷⁵. Wir bezeichnen mit $b_i(t)$ den i -ten Zeilenvektor von $B(t)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \det(B(t)) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b'_i(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Wir beweisen jetzt erst einmal die Behauptung. Es sei $t \in \mathbb{R}$. Nachdem B differenzierbar ist, können wir schreiben

$$B(t+h) = B(t) + hB'(t) + R(h),$$

wobei

$$R: \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$$

eine Abbildung ist mit $R(h) = o(h)$.¹⁷⁶ Wir bezeichnen zudem mit r_i die i -te Zeile von R . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(B(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\det(B(t+h)) - \det B(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det \left(B(t) + hB'(t) + R(h) \right) - \det B(t) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det \begin{pmatrix} b_1 + hb'_1 + r_1 \\ b_2 + hb'_2 + r_2 \\ \vdots \\ b_n + hb'_n + r_n \end{pmatrix} - \det B(t) \right) = (*) \end{aligned}$$

¹⁷⁵D.h. alle n^2 -Einträge der Matrix sind differenzierbar

¹⁷⁶Hierbei bedeutet $R(h) = o(h)$, dass für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $r_{ij}(h) = o(h)$, d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_{ij}(h)}{h} = 0.$$

Indem wir die Linearität der Determinante¹⁷⁷ auf die erste Zeile anwenden erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
 (*) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 + hb'_2 + r_2 \\ \vdots \\ b_n + hb'_n + r_n \end{pmatrix} + h \det \begin{pmatrix} b'_1 \\ b_2 + hb'_2 + r_2 \\ \vdots \\ b_n + hb'_n + r_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} r_1 \\ b_2 + hb'_2 + r_2 \\ \vdots \\ b_n + hb'_n + r_n \end{pmatrix} - \det B(t) \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 + hb'_2 + r_2 \\ \vdots \\ b_n + hb'_n + r_n \end{pmatrix} - \det B(t) \right) + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \det \begin{pmatrix} b'_1 \\ b_2 + hb'_2 + r_2 \\ \vdots \\ b_n + hb'_n + r_n \end{pmatrix}}_{= \det \begin{pmatrix} b'_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ da det stetig}} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{h} r_1(h) \\ b_2 + hb'_2 + r_2 \\ \vdots \\ b_n + hb'_n + r_n \end{pmatrix}}_{= 0, \text{ denn } r_1(h) = o(h) \text{ impliziert } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{h} = 0}.
 \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\frac{d}{dt} \det B(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 + hb'_2 + r_2 \\ \vdots \\ b_n + hb'_n + r_n \end{pmatrix} - \det B(t) \right) + \det \begin{pmatrix} b'_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Wir wenden nun das obige Verfahren auf die Zeilen 2, 3, ..., n an. Wir erhalten, dass

$$\frac{d}{dt} \det(B(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{=B(t)} - \det(B(t)) \right) + \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b'_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b'_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Wir wenden uns nun dem eigentlich Beweis vom Satz von Liouville zu. Es sei also $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y$. Wir bezeichnen mit W die Wronski-Matrix der Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Wir bezeichnen mit $w_1, \dots, w_n$ die Zeilen von W . Nachdem $\varphi'_i = A(t)\varphi_i$ folgt sofort, dass $W' = A(t)W$. In die Sprache der Zeilen übersetzt bedeutet dies gerade, dass

$$w'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

¹⁷⁷Die Determinante ist linear in dem Sinne, dass sie auf jeder Zeile linear ist. Dies bedeutet, dass für Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, einen Vektor $u_i \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_i + \mu u_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

wobei wie üblich a_{ij} die Einträge der Matrix A sind. Setzen wir dies in die obige Gleichung für $\frac{d}{dt} \det(W(t))$ aus der Behauptung ein, dann erhalten mithilfe der Linearität der Determinante, dass

$$\frac{d}{dt} \det(W(t)) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w'_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}.$$

Die Matrizen ganz rechts haben jeweils zwei gleiche Zeilen, außer wenn $i = j$. Insbesondere ist also für $i \neq j$ die Determinante null. Wir müssen also nur die Summanden mit $i = j$ berücksichtigen. Wir erhalten also die gewünschte Aussage, dass

$$\frac{d}{dt} \det(W(t)) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \det \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{=W} \leftarrow i\text{-te Zeile} = \text{Spur}(A) \cdot \det(W).$$

□

16.3. Der Fluss eines autonomen Differentialgleichungssystems. ¹⁷⁸

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y' = f(y)$$

heißt *autonome Differentialgleichung*.¹⁷⁹

Im Folgenden sei $y' = f(y)$ eine autonome Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^n$, wobei f Lipschitz-stetig ist. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung φ_x der Differentialgleichung mit $\varphi_x(0) = x$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Wir bezeichnen dann

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) := \varphi_x(t) \end{aligned}$$

als den *Fluss der autonomen Differentialgleichungen* $y' = A(y)$. Wir führen dazu nun noch verschiedene Begriffe ein.

- (1) Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt die Kurve

$$\begin{aligned} \varphi_x: \mathbb{R} &\rightarrow M \\ t &\mapsto \Phi(t, x) = \varphi_x(t) \end{aligned}$$

¹⁷⁸Der Stoff dieses Kapitels basiert nicht auf Forster: Analysis II, sondern basiert lose auf Bröcker: Analysis III, Kapitel I.

¹⁷⁹Autonom heißt also, dass das Vektorfeld nicht von 'der Zeit t ' abhängt.

die *Flusslinie* zum Anfangspunkt x . Manchmal bezeichnen wir auch die Teilmenge

$$\varphi_x(\mathbb{R}) = \{\varphi_x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

als Flusslinie.

- (2) Ein Punkt x heißt *Fixpunkt* oder auch *singulärer Punkt*, wenn $\varphi_x(t) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (3) Eine Flusslinie φ_x heißt *periodisch*, wenn diese nicht konstant ist, und wenn es ein $p > 0$ gibt, so dass

$$\varphi_x(p) = \varphi_x(0) = x.$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ dabei ist } \varphi_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ und } \varphi_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Jede andere Lösung ist eine Linearkombination von diesen beiden Lösungen. Also ist der Fluss gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &\mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Rotation um} \\ \text{Winkel } t}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im obigen Beispiel ist $(0, 0)$ der einzige Fixpunkt des Flusses. Für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$\text{Vektorfeld } f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

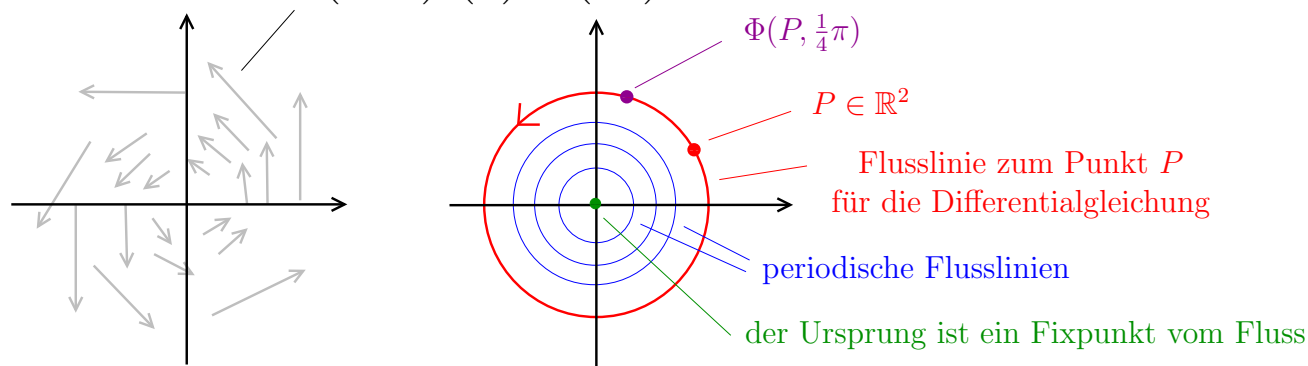


ABBILDUNG 66.

die dazugehörige Flusslinie periodisch.

Beispiel. Es sei $M = \mathbb{R}^2$ eine 2-dimensionale Welt mit der Eigenschaft, dass die Windrichtung und die Windstärke zeitunabhängig ist. Dies bedeutet also, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\mapsto \text{Windstärke} \cdot \text{Windrichtung am Punkt } P \end{aligned}$$

ein Vektorfeld ist. Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ der Ort eines Moleküls zum Zeitpunkt $t = 0$, dann ist

$$\Phi(t, P) = \text{der Ort des Luftmoleküls zum Zeitpunkt } t.$$

Allgemeiner, wenn $W \subset \mathbb{R}^2$ eine Wolke zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt, dann ist

$$\Phi(t, W) = \text{Ausdehnung der Wolke zum Zeitpunkt } t.$$

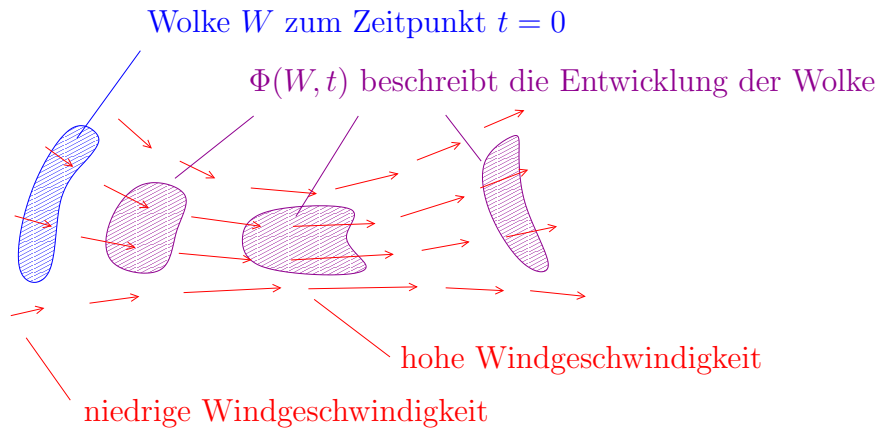


ABBILDUNG 67.

In dem ersten Beispiel hatten wir gesehen, dass die Flusslinien entweder gleich oder disjunkt sind. Dies ist in der Tat immer der Fall.

Lemma 16.7. *Wir verwenden die Notation von dem Kapitel. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

- (1) *entweder ist $\varphi_x(\mathbb{R}) = \varphi_y(\mathbb{R})$, oder*
- (2) *$\varphi_x(\mathbb{R})$ und $\varphi_y(\mathbb{R})$ sind disjunkt.*

Anders ausgedrückt, wenn sich zwei Flusslinien schneiden, dann sind sie auch schon identisch.

Beweis. Es seien also $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass $\varphi_x(\mathbb{R}) \cap \varphi_y(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Wir müssen nun zeigen, dass $\varphi_x(\mathbb{R}) = \varphi_y(\mathbb{R})$.

Nachdem $\varphi_x(\mathbb{R}) \cap \varphi_y(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ und ein $b \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi_x(a) = \varphi_y(b)$. Wir betrachten die Kurven

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n & \beta: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi_x(a+t) & t &\mapsto \varphi_y(b+t). \end{aligned}$$

Dann gilt $\alpha(0) = \varphi_x(a) = \varphi_y(b) = \beta(0)$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\alpha(t) &= \frac{d}{dt}\varphi_x(a+t) = \varphi'_x(a+t) && \text{Kettenregel} \\ &= f(\varphi_x(a+t)) && \text{da } \varphi_x \text{ Lösung von } y' = f(y) \\ &= f(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass α eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ ist. Das gleiche Argument zeigt, dass dies auch für β der Fall ist. Aber nachdem $\alpha(0) = \beta(0)$ folgt nun aus dem Eindeutigkeitssatz 13.5, dass $\alpha = \beta$. Dann gilt aber insbesondere auch, dass $\varphi_x(\mathbb{R}) = \varphi_y(\mathbb{R})$. $\square$

16.4. Der Fluss eines autonomen Differentialgleichungssystems II (*). In diesem Kapitel wollen wir eine etwas allgemeinere Definition von einem Fluss geben. Dieses Kapitel ist nicht Teil der offiziellen Vorlesung.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Ein *Fluss* ist eine stetige Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M,$$

welche die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

- (1) $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in M$,
- (2) für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in M$ gilt

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s+t, x).$$

Definition.

- (1) Es sei $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein Fluss und $x \in M$. Dann heißt die Kurve

$$\begin{aligned} \varphi_x: \mathbb{R} &\rightarrow M \\ t &\mapsto \Phi(t, x) \end{aligned}$$

die *Flusslinie* zum *Anfangspunkt* x . Manchmal bezeichnen wir auch die Teilmenge

$$\varphi_x(\mathbb{R}) = \{\varphi_x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

als Flusslinie.

- (2) Ein Punkt x heißt *Fixpunkt* oder auch *singulärer Punkt*, wenn $\Phi(x, t) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (3) Eine Flusslinie φ_x heißt *periodisch*, wenn diese nicht konstant ist, und wenn es ein $p > 0$ gibt, so dass

$$\varphi_x(t+p) = \varphi_x(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.¹⁸⁰ Das kleinste $p > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi_x(t+p) = \varphi_x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, nennt man die *Periode* der Flusslinie.¹⁸¹

¹⁸⁰Wenn $\varphi_x(t+p) = \varphi_x(t)$ für ein $t \in \mathbb{R}$, dann folgt aus der zweiten Eigenschaft eines Flusses, dass $\varphi_x(t+p) = \varphi_x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

¹⁸¹Es sei φ_x eine periodische Flusslinie. Wir betrachten dann

$$Q := \{q > 0 \mid \varphi_x(t+q) = \varphi_x(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Der Beweis vom folgenden Lemma ist eine freiwillige Übungsaufgabe.

Lemma 16.8. *Es sei $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein Fluss und es seien $x, y \in M$. Dann gilt*

- (1) *entweder ist $\varphi_x(\mathbb{R}) = \varphi_y(\mathbb{R})$, oder*
- (2) *$\varphi_x(\mathbb{R})$ und $\varphi_y(\mathbb{R})$ sind disjunkt.*

Anders ausgedrückt, wenn sich zwei Flusslinien schneiden, dann sind sie auch schon identisch.

Satz 16.9. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in M$ die Lösung φ_x der Differentialgleichung $y' = f(y)$, welche die Anfangsbedingung $\varphi_x(0) = x$ erfüllt, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Dann ist*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \varphi_x(t) \end{aligned}$$

ein Fluss auf M .

Beweis. Nach Satz 16.1 ist für jedes $x \in M$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \varphi_x(t) \end{aligned}$$

stetig. Wir müssen nun noch zeigen, dass

- (1) $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in M$,
- (2) für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in M$ gilt

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x).$$

Die erste Aussage folgt sofort daraus, dass φ_x die Anfangsbedingung $\varphi_x(0) = x$ erfüllt. Sei nun $x \in M$ und $t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & M \\ s & \mapsto & \Phi(s, \Phi(t, x)) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & M \\ s & \mapsto & \Phi(s + t, x). \end{array}$$

Beide Kurven nehmen den Wert $\Phi(t, x)$ zum Zeitpunkt $s = 0$ an. Nachdem φ_x eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ ist, folgt

$$\frac{d}{ds} \Phi(s + t, x) = \frac{d}{ds} \varphi_x(s + t) \stackrel{182}{=} f(\varphi_x(s + t)) = f(\Phi(s + t, x))$$

und nachdem $\varphi_{\Phi(t, x)}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ ist, folgt

$$\frac{d}{ds} \Phi(s, \Phi(t, x)) = \frac{d}{ds} \varphi_{\Phi(t, x)}(s) = f(\varphi_{\Phi(t, x)}(s)) = f(\Phi(s, \Phi(t, x))).$$

Dies ist eine nichtleere Menge. Zudem kann man zeigen, dass $\inf(Q) > 0$, und dass $p := \inf(Q)$ ebenfalls die Eigenschaft hat, dass $\varphi_x(t + p) = \varphi_x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass es wirklich Sinn macht, von dem 'kleinsten $p > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi_x(t + p) = \varphi_x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ' zu sprechen.

D.h. beide Kurven erfüllen die Differentialgleichung $y' = f(y)$ bezüglich der gleichen Anfangsbedingung. Es folgt nun aus dem Eindeutigkeitssatz 13.5, dass

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

□

17. HOMOGENE LINEARE AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Zur Erinnerung: eine lineare Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung vom Typ

$$y' = A(t)y + b(t),$$

und sie heißt linear, wenn $b(t) = 0$. Zudem heißt eine Differentialgleichung *autonom*, wenn das Vektorfeld nicht von der Zeit t abhängt. Eine homogene lineare autonome Differentialgleichungen ist also von der Form

$$y' = Ay$$

für eine festgewählte $n \times n$ -Matrix A .

Wir erinnern uns zuerst an die Lösung im Fall $n = 1$: Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Lösung φ der Differentialgleichung $y' = ay$ bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ ist gegeben durch $\varphi(t) = e^{at}c$, wobei

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Wir kehren zurück zum allgemeinen Fall, es sei also A eine beliebige $n \times n$ -Matrix. Wir betrachten die homogene lineare autonome Differentialgleichung

$$y' = Ay.$$

Unser Ziel ist alle Lösungen zu beschreiben, oder anders ausgedrückt, den dazugehörigen Fluss zu beschreiben.

Bevor wir den nächsten Satz formulieren, führen wir noch folgende Konvention ein. Für den Rest der Vorlesung schreiben wir für eine reelle $n \times n$ -Matrix A

$$\|A\| := \max \{ |a_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, n \}.$$

Dies ist eine Norm auf dem Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen. Diese unterscheidet sich jedoch von der Norm, welche wir auf Seite 62 eingeführt hatten. Andererseits hatten wir im Anschluß an Lemma 1.10 schon erwähnt, dass alle Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum die gleiche Topologie definieren. Beispielsweise folgt nun aus Lemma 2.1, eine Folge von Matrizen bezüglich einer Norm konvergiert, genau dann, wenn sie bezüglich einer anderen Norm konvergiert.

¹⁸²Wenn man genau hinschaut, sieht man, dass man für die zweite Gleichheit die Kettenregel auf die Abbildungen $s \mapsto \varphi_x(s)$ und $s \mapsto s + t$ anwenden muss.

Satz 17.1. *Es sei A eine beliebige reelle $n \times n$ -Matrix. Dann konvergiert*¹⁸³

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

im Vektorraum der reellen $n \times n$ -Matrizen bezüglich der Norm

$$\|A\| := \max \{|a_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, n\}.$$

Hierbei verwenden wir die Konvention, dass

$$\text{Nullmatrix}^0 = \text{id}_n.$$

Insbesondere gilt

$$e^{\text{Nullmatrix}} = \text{id}_n.$$

Manchmal schreiben wir zudem

$$\exp(A) = e^A.$$

Beispiel. Es sei D eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 17.1 verwenden wir folgendes Konvergenzkriterium für Reihen von Matrizen.

Lemma 17.2. (Majoranten-Kriterium) *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$ eine Reihe in $M(n, \mathbb{R})$. Wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ von reellen Zahlen und ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\|B_k\| \leq c_k$ für alle $k \geq m$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$.*

¹⁸³Eine Reihe von Matrizen ist natürlich, ganz analog zu den Reihen von reellen Zahlen, definiert als der Grenzwert der Partialsummen von Matrizen. Beispielsweise ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}.$$

Beweis. Wort-wörtlich der gleiche Beweis wie vom Majoranten-Kriterium für Reihen von reellen Zahlen, siehe Satz 5.7 im Analysis I Skript, zeigt, dass die Folge von Partialsummen $\sum_{k=0}^n B_k$ eine Cauchy-Folge im normierten Vektorraum $(M(n, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ bildet. Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Der normierte Vektorraum $(M(n, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Der normierte Vektorraum $(M(n, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ ist offensichtlich isomorph zum normierten Vektorraum $(\mathbb{R}^{n^2}, \|\cdot\|_{\max})$. Es folgt aus Lemma 1.1, dass eine Folge von Punkte in $\mathbb{R}^{n^2}$, welche eine Cauchy-Folge bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\max}$ bildet, auch eine Cauchy-Folge bezüglich der euklidischen Norm bildet. Aber auf Seite 20 hatten wir gesehen, dass jede solche Cauchy-Folge konvergiert. $\square$

Beweis von Satz 17.1. Wir wollen den Satz mithilfe von Lemma 17.2 beweisen. Um Lemma 17.2 anwenden zu können müssen wir natürlich zuerst die Normen der Summanden, also insbesondere die Normen der Potenzen A^n abschätzen. Wir beweisen dazu zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Es seien $P, Q \in M(n, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\|P \cdot Q\| \leq n \|P\| \cdot \|Q\|.$$

Es seien also $P, Q \in M(n, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$\begin{aligned} |ij\text{-Eintrag der Matrix } PQ| &= \left| \sum_{k=1}^n p_{ik} q_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |p_{ik} q_{kj}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \max \{ |p_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, n \} \cdot \max \{ |q_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, n \} \\ &= n \|P\| \cdot \|Q\|. \end{aligned}$$

Es folgt also per Definition von $\|PQ\|$, dass

$$\|PQ\| \leq n \|P\| \cdot \|Q\|.$$

Wir haben also die Behauptung bewiesen.

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Satzes zu. Es sei also $A \in M(n; \mathbb{R})$. Dann gilt für alle k , dass

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| &\leq \frac{1}{k!} n^{k-1} \|A\|^k && (n-1)\text{-faches Anwenden der Behauptung} \\ &= \frac{1}{k!} \frac{1}{n} (n \|A\|)^k = (*). \end{aligned}$$

Wir wählen ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2n\|A\|$. Dann gilt für $k \geq m$, dass

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{n} \frac{1}{m!} (n \|A\|)^m \prod_{i=1}^{k-m} \underbrace{\frac{n \|A\|}{m+i}}_{< \frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{m!} (n \|A\|^m) \frac{1}{2^{k-m}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} \frac{1}{m!} (n \|A\|^m)}_{=:C} 2^m \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir also gezeigt, dass für alle $k \geq m$ gilt, dass

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq C \cdot \frac{1}{2^k}$$

Nachdem die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} C \frac{1}{2^k}$ konvergiert, konvergiert nach Lemma 17.2 auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. □

Das folgende Lemma wird ähnlich wie Theorem 5.18 in Analysis I bewiesen.

Lemma 17.3. *Es seien $A, B \in M(n, \mathbb{R})$. Wenn A und B kommutieren, das heißt wenn $AB = BA$, dann gilt*

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

Insbesondere gilt für alle $A \in M(n, \mathbb{R})$, dass

$$(e^A)^{-1} = e^{-A},$$

insbesondere ist die Matrix e^A invertierbar.

Mithilfe der Abbildung $A \mapsto e^A$ können wir jetzt die vollständige Lösung einer homogenen linearen autonomen Differentialgleichung hinschreiben.

Satz 17.4. *Es sei A eine beliebige $n \times n$ -Matrix und $v \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung φ der homogenen linearen autonomen Differentialgleichung*

$$y' = Ay$$

bezüglich der Anfangsbedingung $\varphi(0) = v$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto e^{At}v. \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, der Fluss, welcher durch die Differentialgleichung $y' = Ay$ definiert ist, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, v) &\mapsto e^{At}v.\end{aligned}$$

Beweis. Es sei also $\varphi(t) = e^{At}v$.¹⁸⁴ Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{A(t+h)}v - e^{At}v) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{Ah}e^{At} - e^{At})v && \text{nach Lemma 17.3, da } Ah \text{ und } At \text{ kommutieren} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{Ah} - \text{id})e^{At}v \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\text{id} + Ah + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} h^k - \text{id} \right) e^{At}v \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} h^{k-1} \right) e^{At}v \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \underbrace{\frac{A^2}{2} h}_{\lim_{h \rightarrow 0} = 0} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+2)!} h^k}_{\substack{\text{Beweis von Satz 17.1} \\ \text{zeigt, dass die Norm} \\ \text{auf } [-1, 1] \text{ beschränkt ist}}} \right) e^{At}v \\ &= Ae^{At}v.\end{aligned}$$

□

Wir haben damit, zumindest theoretisch, eine Lösung der homogenen linearen autonomen Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

gefunden. Es stellt sich aber die Frage, ob man $t \mapsto e^{At}v$ auch berechnen kann. Wir werden dieser Frage in den nächsten Kapiteln nachgehen.

18. HOMOGENE LINEARE AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN DIMENSION 2

Wir wollen zum Abschluß der Vorlesung den Fluss einer homogenen linearen autonomen Differentialgleichung $y' = Ay$ für eine reelle 2×2 -Matrix A explizit beschreiben. Im folgenden Teilkapitel wollen wir hierzu kurz reelle 2×2 -Matrizen etwas genauer studieren.

18.1. Reelle 2×2 -Matrizen.

Definition. Wir sagen zwei Matrizen $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ sind *komplex ähnlich*, wenn es eine Matrix $P \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $P^{-1}AP = B$ gibt. Wir sagen A und B sind *reell ähnlich*, wenn es eine reelle Matrix $P \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $P^{-1}AP = B$ gibt.

¹⁸⁴Der Beweis ist ganz ähnlich zum Beweis von Satz 11.9 aus der Analysis I Vorlesung in dem wir die Ableitung der Exponentialfunktion bestimmt hatten.

Der Name ‘ähnlich’ rührt unter Anderem daher, dass viele Invarianten von ähnlichen Matrizen übereinstimmen. Beispielsweise wird in der Linearen Algebra folgendes Lemma bewiesen.

Lemma 18.1. *Es seien A und B komplex ähnliche Matrizen. Dann gilt*

$$\begin{array}{ll} (1) & \det(A) = \det(B) \\ (2) & \text{Spur}(A) = \text{Spur}(B) \\ (3) & \text{Eigenwerte von } A = \text{Eigenwerte von } B \end{array}$$

Wir werden später folgendes Lemma benötigen.

Lemma 18.2. *Es seien A, B zwei reelle $n \times n$ -Matrizen. Wenn A und B komplex ähnlich sind, dann sind sie auch reell ähnlich.*

Beweis. Es seien A, B zwei reelle $n \times n$ -Matrizen. Wir beginnen mit der Vorbemerkung, dass A und B komplex (bzw. reell) ähnlich sind, genau dann, wenn es eine invertierbare komplexe (bzw. reelle) Matrix P mit $AP = PB$ gibt.

Wir nehmen nun an, dass A und B komplex ähnlich sind. Es gibt also eine Matrix $Z \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $AZ = ZB$. Wir schreiben $Z = X + iY$, wobei X und Y reelle Matrizen sind. Durch Ausmultiplizieren und Trennen nach Real- und Imaginärteil erhalten wir, dass

$$AX = XB \quad \text{und} \quad AY = YB.$$

Es sei nun $s \in \mathbb{R}$. Indem wir die rechte Gleichung mit $s \in \mathbb{R}$ multiplizieren und beide Gleichungen addieren, erhalten wir, dass $A(X + sY) = (X + sY)B$. Nachdem $X + sY$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine reelle Matrix ist, müssen wir nur noch zeigen, dass es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\det(X + sY) \neq 0$.

Das Polynom $p(t) := \det(X + tY)$ ist nicht das Nullpolynom, denn nach Voraussetzung gilt $p(i) = \det(X + iY) = \det(Z) \neq 0$. Also besitzt p nur endlich viele Nullstellen. Für jedes $s \in \mathbb{R}$, welches keine Nullstelle ist, gilt dann also, dass $\det(X + sY) = p(s) \neq 0$. $\square$

Eine reelle Matrix A heißt *komplex-diagonalisierbar*, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ gibt, so dass $P^{-1}AP$ eine diagonale Matrix ist. Ganz analog definieren wir auch *reell-diagonalisierbar*. Wir erinnern noch an folgenden Satz aus der Linearen Algebra.

Satz 18.3. *Es sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix.*

- (1) *Wenn $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist auch die komplex-konjugierte Zahl $\bar{\lambda} = x - iy$ ein Eigenwert von A .*
- (2) *Wenn es n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zu A gibt, dann ist A diagonalisierbar. Genauer gesagt, es seien $v_1, \dots, v_n$ Eigenvektoren zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir bezeichnen mit $P = (v_1 \dots v_n)$ die Matrix deren Spalten gerade $v_1, \dots, v_n$ sind. Dann ist P invertierbar und es gilt*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wenn alle Eigenwerte reell sind, dann kann P auch reell gewählt werden.

Beweisskizze.

- (1) Es sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Dann gilt

$$\begin{aligned} A\bar{v} &= \overline{Av} && \text{denn } A \text{ ist eine reelle Matrix} \\ &= \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert ist.

- (2) Die Tatsache, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind wird in der Linearen Algebra bewiesen. Wir wollen noch zeigen, dass $P^{-1}AP$ eine diagonale Matrix ist. Um die Notation zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall einer 2×2 -Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{erste Spalte von } P^{-1}AP &= P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}Av = P^{-1}\lambda_1 v_1 = \lambda P^{-1}v_1 \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{aus } P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \text{ folgt } P^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Wir wenden jetzt die obigen Resultate auf den Spezialfall von 2×2 -Matrizen an und erhalten folgenden Satz.

Satz 18.4. *Es sei A eine reelle 2×2 -Matrix. Dann tritt genau eine der folgenden Möglichkeiten ein.*

- (1) A ist reell-diagonalisierbar,
- (2) A ist komplex-diagonalisierbar aber nicht reell-diagonalisierbar,
- (3) A ist nicht diagonalisierbar.

Daüber hinaus gelten folgende Aussagen:

- (1) Wenn A reell-diagonalisierbar ist, dann gibt es eine invertierbare reelle Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A sind.

- (2) Wenn A komplex-diagonalisierbar ist, dann gibt es eine invertierbare reelle Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha \neq 0$ und wobei $\lambda \pm i\alpha$ die Eigenwerte von A sind.

- (3) Wenn A nicht diagonalisierbar ist, gibt es eine invertierbare reelle Matrix P , so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ der einzige Eigenwert von A ist.

Beweis. Es sei A eine reelle 2×2 -Matrix. Die Aussage, dass A in genau eine der drei Klassen fällt ist eine Tautologie.¹⁸⁵

Wir wenden uns nun dem zweiten Teil des Satzes zu.

- (1) Diese Aussage ist gerade die Definition von reell-diagonalisierbar.
- (2) Es sei also A komplex-diagonalisierbar mit Eigenwerten $\mu = \lambda + i\alpha$ und $\bar{\mu} = \lambda - i\alpha$, wobei $\alpha \neq 0$. Wir schreiben

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}.$$

Eine elementare Rechnung, beispielsweise mithilfe von Satz 7.13 zeigt, dass die Matrix B ebenfalls die komplexen Eigenwerte μ und $\bar{\mu}$ besitzt. Die beiden Matrizen A und B sind also nach Satz 18.3 komplex ähnlich zu der diagonalen Matrix mit Diagonaleinträgen μ und $\bar{\mu}$. Insbesondere sind auch A und B komplex ähnlich. Es folgt nun aus Lemma 18.2, dass A und B sogar reell ähnlich sind.

- (3) Es sei nun A nicht diagonalisierbar. Der Satz über die Jordan-Transformation besagt, dass es eine invertierbare komplexe Matrix P gibt, so dass

$$P^{-1}AP = J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist λ der einzige Eigenwert von A . Nachdem A reell ist, ist nach Satz 18.3 auch das komplex-konjugierte $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A . Aber λ ist der einzige Eigenwert, also muss $\lambda = \bar{\lambda}$ gelten, d.h. λ ist reell. Wir sehen also, dass A komplex ähnlich zu der reellen Matrix J ist, also sind nach Lemma 18.2 die Matrizen A und J auch reell ähnlich.

□

18.2. Koordinatentransformationen. Es sei also A eine reelle 2×2 -Matrix. Wir wollen nun die homogene lineare autonome Differentialgleichung $y' = Ay$ studieren. Wir werden dabei wie folgt vorgehen:

- (1) Wir bestimmen zuerst, wie sich die Lösungen unter einer linearen Transformation $A \mapsto PAP^{-1}$ verhalten.
- (2) Wir unterscheiden dann die drei verschiedenen Klassen von Matrizen aus Satz 18.4. Diese drei Fälle werden in den folgenden drei Kapiteln getrennt behandelt.

185

Das folgende Lemma besagt, dass wir die Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$ leicht aus den Lösungen der Differentialgleichung $y' = PAP^{-1}y$ herleiten können.

Lemma 18.5. *Es sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix und es sei P eine invertierbare reelle $n \times n$ -Matrix. Für eine differenzierbare Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\varphi \text{ ist Lösung von } y' = Ay \iff P\varphi \text{ ist Lösung von } y' = PAP^{-1}y.$$

Beweis. Für eine differenzierbare Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt, $(P\varphi)' = P\varphi'$.¹⁸⁶ Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist Lösung von } y' = Ay &\iff \varphi' = A\varphi \\ &\iff P\varphi' = PA\varphi \\ &\iff (P\varphi)' = PAP^{-1}P\varphi \\ &\iff P\varphi \text{ ist Lösung von } y' = PAP^{-1}y. \end{aligned}$$

□

Im folgenden Kapitel werden wir auch noch studieren, unter welchen Voraussetzungen Differentialgleichungen flächenerhaltend usw. sind. Wir verwenden dabei folgenden Spezialfall vom Satz von Liouville.

Satz 18.6. *Es sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und es seien $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lösungen der homogenen linearen autonomen Differentialgleichung $y' = Ay$. Die dazugehörige Wronski-Determinante*

$$D(t) = \det(\varphi_1(t) \varphi_2(t))$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}D(t) = \text{Spur}(A) \cdot D(t).$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \text{die Differentialgleichung ist flächenreduzierend} &\iff \text{Spur}(A) < 0 \\ \text{die Differentialgleichung ist flächenerhaltend} &\iff \text{Spur}(A) = 0 \\ \text{die Differentialgleichung ist flächenvergrößernd} &\iff \text{Spur}(A) > 0. \end{aligned}$$

18.3. Der reell-diagonalisierbare Fall. Wir betrachten zuerst die Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} y,$$

¹⁸⁶Wenn man die linke und die rechte Seite ausschreibt, dann sieht man, dass dies nichts anderes ist, als die Aussage, dass für differenzierbare Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt $(pf)' = pf'$ und $(f + g)' = f' + g'$.

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist nach Satz 17.4 die Lösung φ mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = (a, b)$ gegeben durch

$$\varphi_{(a,b)}(t) = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

Für den Vektor $(1, 0)$ erhalten wir insbesondere

$$\varphi_{(1,0)}(t) = (e^{\lambda t}, 0)$$

Diese Kurve verläuft also auf der positiven x -Achse. Das Verhalten der Kurve hängt dabei von λ ab. Genauer gesagt,

- wenn $\lambda > 0$, dann läuft die Flusslinie für $t \rightarrow \infty$ ins Unendliche,
- wenn $\lambda = 0$, dann ist die Flusslinie singulär, d.h. konstant,
- wenn $\lambda < 0$, dann läuft die Flusslinie für $t \rightarrow \infty$ gegen den Ursprung.

Eine ganz analoges Verhalten zeigt auch die Flusslinie $\varphi_{(0,1)}$, welche sich auf der positiven y -Achse bewegt. Etwas schwieriger sind die anderen Flusslinien. Beispielsweise ist

$$\varphi_{(1,1)}(\mathbb{R}) = \{(e^{\lambda t}, \underbrace{e^{\mu t}}_{=(e^{\lambda t})^{\frac{\mu}{\lambda}}}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x, x^{\frac{\mu}{\lambda}}) \mid x \in (0, \infty)\}.$$

Anders ausgedrückt, die Flusslinie $\varphi_{(1,1)}(\mathbb{R})$ ist der Graph der Funktion $x^{\frac{\mu}{\lambda}}$.

In Abbildung 68 skizzieren wir qualitativ die Flusslinien für die folgenden Spezialfälle ¹⁸⁷

$$\lambda = \mu > 0 \quad \lambda > \mu > 0 \quad \lambda > 0 \text{ und } \mu < 0 \quad \lambda > 0 \text{ und } \mu = 0$$

In allen vier Fällen skizzieren wir in

blau	die Flusslinie von $\varphi_{(1,0)}$
rot	die Flusslinie von $\varphi_{(0,1)}$
grün	die Fixpunkte vom Fluss
schwarz	weitere Flusslinien.

Es folgt aus Satz 18.6, dass insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \text{die Differentialgleichung ist flächenreduzierend} &\iff \lambda + \mu < 0 \\ \text{die Differentialgleichung ist flächenerhaltend} &\iff \lambda + \mu = 0 \\ \text{die Differentialgleichung ist flächenvergrößernd} &\iff \lambda + \mu > 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt allgemeiner eine Differentialgleichung $y' = Ay$, wobei A eine diagonalisierbare 2×2 -Matrix ist, welche zwei reelle Eigenwerte λ und μ besitzt. Wir bezeichnen mit v einen Eigenvektor zu λ und wir bezeichnen mit w einen Eigenvektor zu μ . Zudem

¹⁸⁷Alle weiteren Fälle kann man sich aus diesen Fällen herleiten. Zum Beispiel, wenn $\lambda < \mu < 0$, dann erhalten wir die gleichen Linien wie in Abbildung 68, der einzige Unterschied ist, dass wir die Orientierungen der Flusslinien umdrehen müssen.

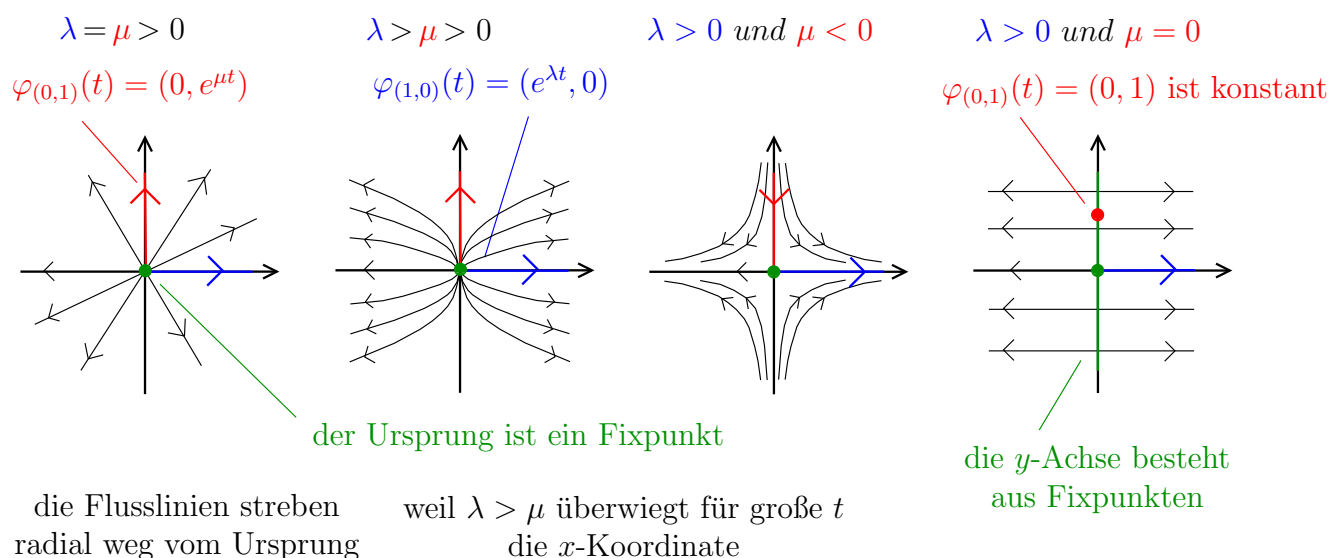


ABBILDUNG 68.

sei $P = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}$ die 2×2 -Matrix, deren Spalten aus den Vektoren v und w besteht. Aus Satz 18.3 folgt, dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ oder anders ausgedrückt } A = P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Wir wenden nun Lemma 18.5 an. Für eine beliebige differenzierbare Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt also

$$\varphi(t) \text{ ist Lösung von } y' = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y \iff P\varphi(t) \text{ ist Lösung von } y' = \underbrace{P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}}_{=A} y.$$

Anders ausgedrückt, in dem wir die Matrix P auf die uns bekannten Lösungen der Differentialgleichung $y' = P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} y$ anwenden, erhalten wir die gewünschten Lösungen von $y' = Ay$.

Insbesondere erhalten wir die Flusslinien von $y' = Ay$, in dem wir die Matrix P , oder genauer gesagt die lineare Abbildung $u \mapsto Pu$, auf die Flusslinien in Abbildung 68 anwenden. Das Ergebnis wird in Abbildung 69 illustriert. Die x -Achse wird dabei auf die Gerade $\mathbb{R}v$ geschickt und die y -Achse wird in die Gerade $\mathbb{R}w$ übergeführt. Mithilfe von Satz 18.6 und Lemma 18.1 kann man nun wieder anhand der Eigenwerte ablesen, ob die Differentialgleichung flächenerhaltend etc. ist.

18.4. Der komplex-diagonalisierbare Fall. Wir betrachten zuerst wieder einen Spezialfall. Genauer gesagt, für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir im Folgenden die

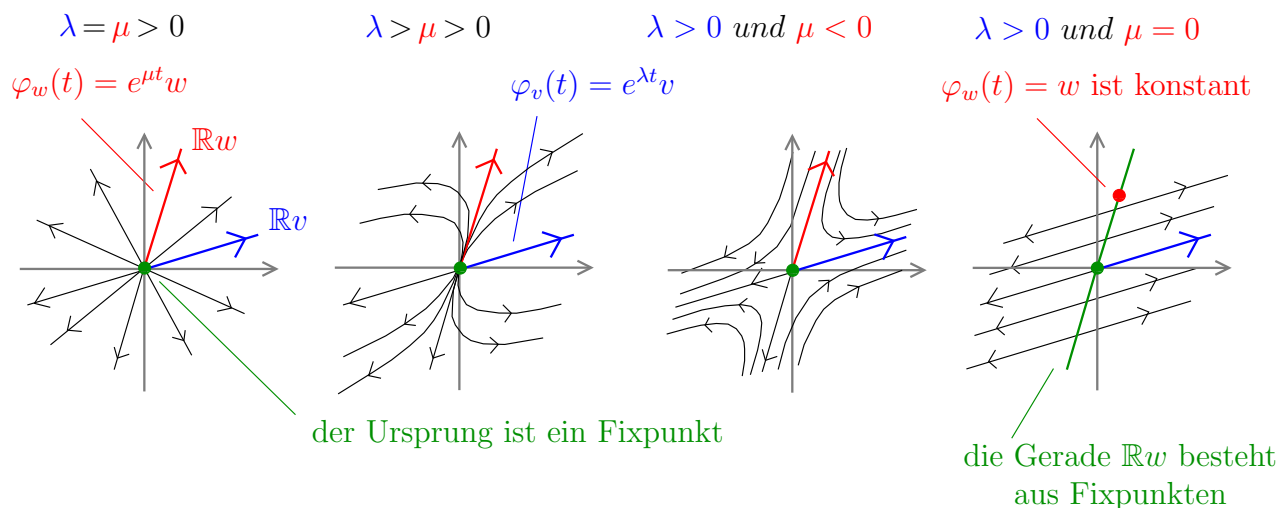


ABBILDUNG 69. Flusslinien für die Differentialgleichung $y' = Ay$.

Differentialgleichung¹⁸⁸

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix} y.$$

Es bietet sich an die rechte Seite in zwei Summanden aufzuteilen:

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} y}_{\text{orthogonal zu } y} + \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y}_{\text{parallel zu } y}.$$

Hätten wir nur den ersten Summanden, dann wäre die Differentialgleichung wie in Beispiel 15.2 und die Lösung würde aus Kreisen um den Ursprung bestehen. Wenn wir nur den zweiten Summanden hätten, dann wären wir im Fall von Kapitel 18.3, und die Lösungen streben entweder hin zum oder weg vom Ursprung.

¹⁸⁸Im Beweis von Satz 18.4 hatten wir schon gesehen, dass die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$ gegeben sind durch $\lambda + i\alpha$ und $\lambda - i\alpha$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ‘setzt sich zusammen’ aus den Lösungen von Beispiel 15.2 und der Lösung von Kapitel 18.3. Genauer gesagt, die Lösung φ mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = (1, 0)$ ist gegeben durch ¹⁸⁹

$$\varphi_{(1,0)}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) \end{pmatrix}.$$

Das Verhalten der Kurve hängt dabei von λ und α ab. Genauer gesagt

- wenn $\lambda > 0$, dann beschreibt die Flusslinie eine Spirale, welche für $t \rightarrow \infty$ ins Unendliche läuft,
- wenn $\lambda = 0$, dann ist die Flusslinie ein Kreis,
- wenn $\lambda < 0$, dann beschreibt die Flusslinie eine Spirale, welche für $t \rightarrow \infty$ gegen den Ursprung läuft.

Zudem

- wenn $\alpha > 0$, dann wird die Flusslinie gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, und
- wenn $\alpha < 0$, dann wird die Flusslinie im Uhrzeigersinn durchlaufen.

In Abbildung 70 skizzieren wir qualitativ die Flusslinien. Die Spur der Matrix ist gegeben

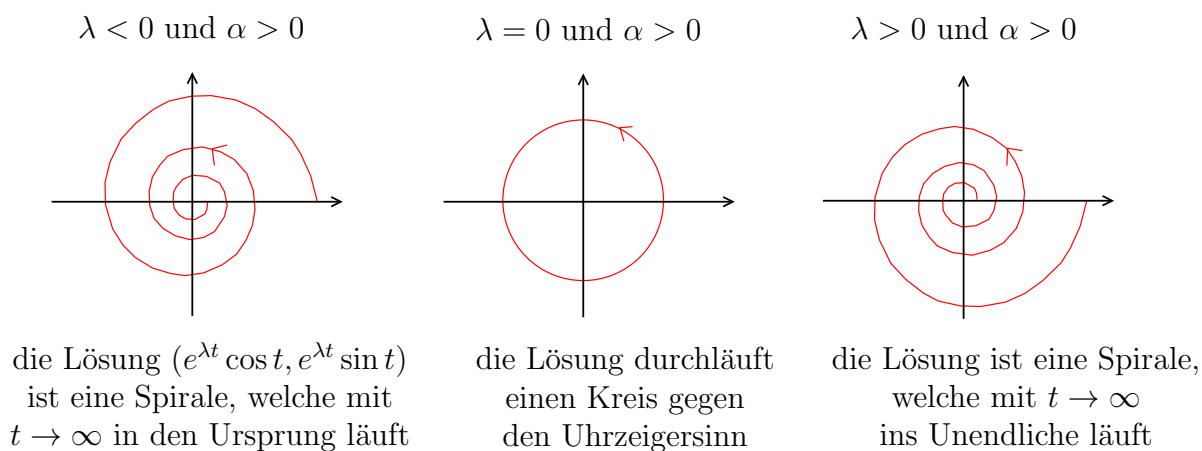


ABBILDUNG 70.

¹⁸⁹Das dies die Lösung ist kann man natürlich durch Einsetzen leicht verifizieren. Wir wollen jetzt nicht genauer darauf eingehen, wie diese Lösung zustande kommt. Man kann diese entweder anhand der obigen Diskussion ‘erraten’, oder man kann auch explizit zeigen, dass

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ -\alpha & \lambda \end{pmatrix} t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}.$$

In Kapitel 19 werden wir die dazu nötigen Hilfsmittel herleiten.

durch 2λ . Es folgt also aus Satz 18.6

$$\begin{aligned} \text{die Differentialgleichung ist flächenreduzierend} &\iff \lambda < 0 \\ \text{die Differentialgleichung ist flächenerhaltend} &\iff \lambda = 0 \\ \text{die Differentialgleichung ist flächenvergrößernd} &\iff \lambda > 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt allgemeiner eine Differentialgleichung $y' = Ay$, wobei A eine diagonalisierbare 2×2 -Matrix ist, welche zwei komplexe, nicht-reelle Eigenwerte $\mu = \lambda + i\alpha$ und $\bar{\mu} = \lambda - i\alpha$ besitzt.

Es folgt aus Satz 18.4, dass es eine invertierbare reelle Matrix $P = (v \ w)$ mit

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

gibt. Wie im vorherigen Kapitel erhalten wir also die Lösungen für die Differentialgleichung $y' = Ay$ indem wir die Matrix $P = (v \ w)$ auf die uns schon bekannten Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ -\alpha & \lambda \end{pmatrix} y$$

anwenden. Das Ergebnis wird in Abbildung 71 illustriert.¹⁹⁰ Mithilfe von Satz 18.6 und

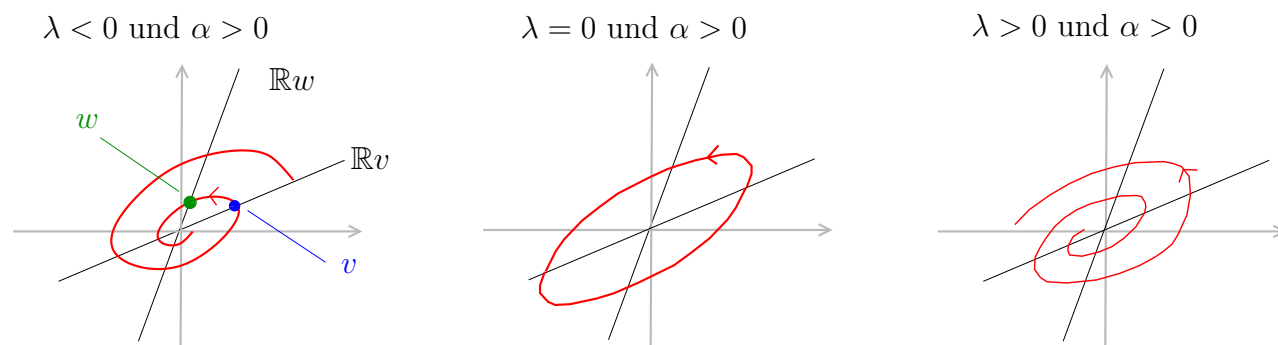


ABBILDUNG 71.

Lemma 18.1 kann man in diesem Fall auch wieder anhand der Eigenwerte ablesen, ob die Differentialgleichung flächenerhaltend etc. ist.

18.5. Der nicht diagonalisierbare Fall. Auch in diesem Kapitel betrachten wir zuerst einen Spezialfall. Genauer gesagt, für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y.$$

¹⁹⁰Die Frage, ob die Flusslinie sich nun im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn dreht ist allerdings etwas subtil. Genauer überlegen zeigt, dass sich die Flusslinie gegen den Uhrzeigersinn dreht, genau dann, wenn $\alpha \cdot \det(v \ w) > 0$.

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}
 \exp \begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} &= \exp \left(\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \exp \begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:U} \quad \text{nach Lemma 17.3, da die} \\
 & \quad \text{Matrizen kommutieren} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}}_{=e^{\lambda t} \text{id}_2} \cdot \left(\text{id} + U + \underbrace{\frac{1}{2}U^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{3!}U^3}_{=0} + \dots \right) \\
 &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir also aus Satz 17.4, dass

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(1,0)}(t) &= (e^{\lambda t}, 0), \\
 \varphi_{(0,1)}(t) &= (te^{\lambda t}, e^{\lambda t}).
 \end{aligned}$$

Diese beiden Lösungskurven, werden mit weiteren Flusslinien in Abbildung 72 qualitativ skizziert.¹⁹¹ Die Spur der Matrix ist gegeben durch 2λ . Es folgt also aus Satz 18.6, dass

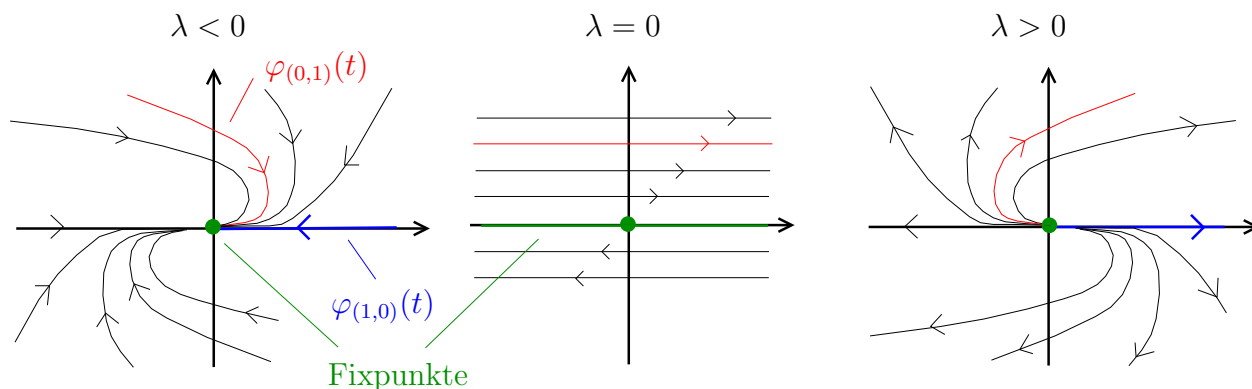


ABBILDUNG 72.

die Differentialgleichung ist flächenreduzierend $\iff \lambda < 0$
 die Differentialgleichung ist flächenerhaltend $\iff \lambda = 0$
 die Differentialgleichung ist flächenvergrößernd $\iff \lambda > 0$

¹⁹¹Die Flusslinie $\varphi_{(0,1)}$ kann man wie folgt bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(0,1)}(\mathbb{R}) &= \{(te^{\lambda t}, e^{\lambda t}) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{(\tfrac{1}{\lambda} \ln(y)y, y) \mid y \in (0, \infty)\} \quad \text{durch Substitution } y = e^{\lambda t} \\
 &= \text{Graph von } y \mapsto \tfrac{1}{\lambda} \ln(y)y.
 \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall einer Differentialgleichung $y' = Ay$, wobei A eine Matrix ist, welche nicht diagonalisierbar ist. Nach Satz 18.4 besitzt A einen reellen Eigenwert λ mit Eigenvektor v . Zudem gibt es eine Matrix P mit Spalten v und w , so dass

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Wie in den beiden vorherigen Kapiteln erhalten wir also die Lösungen für die Differentialgleichung $y' = Ay$ indem wir die Matrix $P = (v \ w)$ auf die uns schon bekannten Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y$$

anwenden. Das Ergebnis wird in Abbildung 73 illustriert. Mithilfe von Satz 18.6 und Lem-

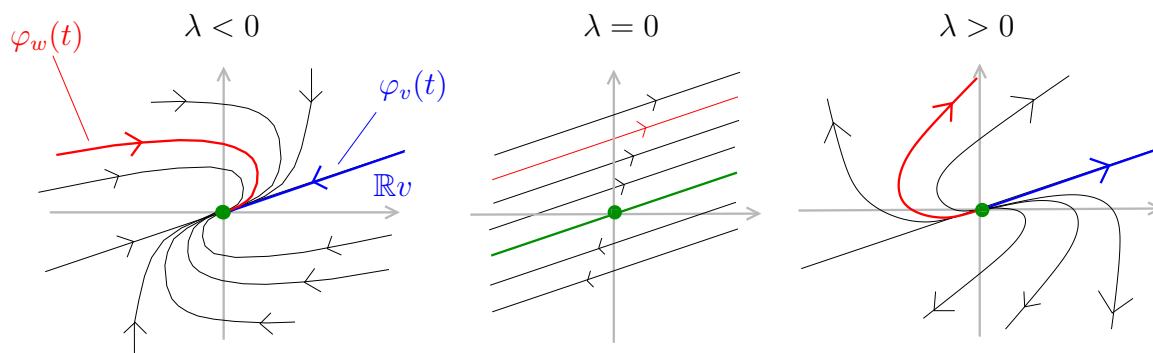


ABBILDUNG 73.

ma 18.1 kann man in diesem Fall auch wieder anhand des Eigenwertes erkennen, ob die Differentialgleichung flächenerhaltend etc. ist.

19. HOMOGENE LINEARE AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN HÖHEREN DIMENSIONEN (*)

Dieses Kapitel ist nicht mehr offizieller Teil der Analysis II Vorlesung. In diesem Kapitel wollen wir noch kurz beschreiben, wie wir die Matrizen e^A im Allgemeinen explizit bestimmen können. Wir erinnern dazu zuerst an den Satz über die Jordan-Normalform aus der Linearen Algebra.

Satz 19.1. (Jordan-Normalform) *Zu jeder quadratischen Matrix A gibt es eine invertierbare komplexe Matrix P , so dass $P^{-1}AP$ in Jordan-Form ist, d.h. $P^{-1}AP$ besteht aus*

Jordan-Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$.

Die Jordan-Matrix J ist nicht notwendigerweise eine reelle Matrix, sondern sie ist im Allgemeinen eine komplexe Matrix. Für eine komplexe $n \times n$ -Matrix A definieren wir, ganz analog zu Satz 17.1, die Matrix

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \text{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Es gelten zudem die gleiche Aussagen wie in Lemma 17.3 für komplexe Matrizen A und B .

Das folgende Lemma ermöglicht es uns insbesondere die Berechnung von e^A auf die Matrizen in Jordan-Normalform zurückzuführen.

Lemma 19.2. *Es sei A eine quadratische Matrix und P eine invertierbare Matrix. Dann gilt*

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}.$$

Beweis. Es sei A also eine quadratische Matrix und P eine invertierbare Matrix. Dann gilt

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k = (*)$$

Wir führen nun folgende Nebenrechnung durch

$$\begin{aligned} (PAP^{-1})^k &= (PAP^{-1})^k \\ &= \underbrace{PAP^{-1}}_{=\text{id}} \underbrace{PAP^{-1}}_{=\text{id}} \dots \underbrace{PAP^{-1}}_{=\text{id}} \\ &= PAA \dots AP^{-1} \\ &= PA^k P^{-1}. \end{aligned}$$

Wir können also jetzt oben weitermachen und erhalten, dass

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} PA^k P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) P^{-1} = Pe^AP^{-1}. \end{aligned}$$

□

Wir müssen nun also noch die Exponentialabbildung für Matrizen in Jordan-Normalform bestimmen. Das folgende Lemma erlaubt es uns die Berechnung auf die Berechnung für die Jordan-Blöcke zurückzuführen.

Lemma 19.3. *Für zwei beliebige quadratische Matrizen A, B gilt*

$$e^{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix}.$$

Beweis. Das Lemma folgt leicht aus den Definitionen und der Beobachtung, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel. Es sei A eine reelle symmetrische $n \times n$ -Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezüglich den Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$. Es sei P die Matrix deren Spalten gerade $v_1, \dots, v_n$ sind. Dann ist $P^{-1}AP = D$, wobei D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{PDtP^{-1}} \\ &= Pe^{Dt}P^{-1} && \text{nach Lemma 19.2} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} && \text{nach Lemma 19.3.} \end{aligned}$$

Das folgende Lemma zusammen mit Lemmas 19.2 und 19.3 und der obigen Diskussion erlaubt es uns nun e^{At} für eine beliebige Matrix A schnell zu berechnen, vorausgesetzt man kann die Jordan-Normalform bestimmen.

Satz 19.4. *Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Für*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ist } e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir setzen

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= e^{(\lambda \text{id} + U)t} \\ &= e^{\lambda \text{id} t} e^{Ut} && \text{nach Lemma 17.3} \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ut)^k. \end{aligned}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass U^n die Nullmatrix ist. Es folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ut)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (Ut)^k,$$

und diese Summe kann man leicht explizit berechnen. Man sieht, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (Ut)^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat Eigenwerte $\pm i$ mit Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Wir setzen

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \text{dann gilt } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Es folgt also aus den obigen Ergebnissen, dass

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1} t} \\ &= P e^{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} t} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) & \frac{1}{2}(ie^{it} - ie^{-it}) \\ \frac{1}{2}(-ie^{it} + ie^{-it}) & \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ folgt nun, dass

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Diese Lösung hatten weiter oben schon ‘erraten’ (siehe das Beispiel nach Satz 16.9), aber in diesem Beispiel sehen wir nun, dass wir die Lösung auf Lineare Algebra zurückführen können.